UNIVERSIDAD DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL PIRHUA

ERRORES ARITMÉTICOS AL EFECTUAR OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES. UN ESTUDIO EN QUINTO CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR

Jill Gonzaga-Castillo

Piura, marzo de 2019

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Gonzaga, J. (2019). *Errores aritméticos al efectuar operaciones con números decimales. Un estudio en quinto ciclo de Educación Básica Regular* (Tesis para optar el título de Licenciado en Educación, Nivel Secundaria, especialidad Matemática y Física). Universidad de Piura. Facultad de Ciencias de la Educación. Piura, Perú.

Esta obra está bajo una licencia
Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional

Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura

UNIVERSIDAD DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Errores aritméticos al efectuar operaciones con números decimales. Un estudio en quinto ciclo de Educación Básica Regular

Tesis para optar el Título de Licenciado en Educación

Nivel Secundaria - Especialidad Matemática y Física

Jill Cecy Elaine Gonzaga Castillo

Asesor: Mg. Emma Lizelly Carreño Peña

Piura, marzo 2019

Aprobación

La tesis titulada *"Errores aritméticos al efectuar operaciones con números decimales. Un estudio en quinto ciclo de Educación Básica Regular"*, presentada por la Bach. Jill Cecy Elaine Gonzaga Castillo, en cumplimiento con los requisitos para optar el Título de Licenciado en Educación - Nivel Secundaria – Especialidad Matemática y Física, fue aprobada por la asesora, Mg. Emma Lizelly Carreño Peña y defendida el….. de..... de 2019 ante el tribunal integrado por:

…….… ……..
Presidente Informante

……
Secretario

Agradecimientos

A Dios, que en su eterna bondad me brinda la fuerza para cumplir cada uno de mis proyectos y pone en mi camino personas que contribuyen a diario en mi realización tanto personal como profesional.

A mi familia, que con su cariño, apoyo y consejo me ayudan a superar cualquier obstáculo, convirtiéndose en el motivo e inspiración de todas mis metas.

A los docentes de la Facultad de Educación de la Universidad de Piura, por los valores y conocimientos impartidos a lo largo de mi carrera, en especial a la profesora Emma Carreño Peña, que con su amistad, paciencia y comprensión brindada hizo posible la culminación de este proyecto.

RESUMEN ANALÍTICO – INFORMATIVO

Título de la tesis: Errores aritméticos al efectuar operaciones con números decimales. Un estudio en quinto ciclo de Educación Básica Regular.

Autor de la tesis: Jill Cecy Elaine Gonzaga Castillo.

Asesor de la tesis: Mg. Emma Lizelly Carreño Peña.

Tipo de tesis: Tesis de título.

Título que opta: Licenciado en Educación. Especialidad en Matemática y Física.

Institución. Facultad: Universidad de Piura. Facultad de Ciencias de la Educación.

Fecha de sustentación: Piura, …….. de …… de 2019.

Palabras claves: Errores aritméticos / números decimales / operaciones / educación primaria.

Descripción: Tesis en Educación perteneciente a la línea de investigación de Enseñanza – aprendizaje.

La autora presenta diversas clasificaciones sobre los tipos de errores aritméticos, a partir de las cuales establece una tipología para analizar y describir los errores cometidos por estudiantes de quinto ciclo de Educación Básica Regular, al efectuar operaciones con números decimales en dos pruebas escritas, mediadas por un periodo de enseñanza.

Contenido: El texto de la tesis está dividido en tres partes: la primera se refiere a los lineamientos generales sobre el aprendizaje de las matemáticas haciendo énfasis en el contenido matemático de números decimales, así como en las distintas posturas frente al error matemático y sus tipologías. La segunda parte está dedicada a recoger información sobre los errores frecuentes que cometen los estudiantes al efectuar operaciones con números decimales, para ello se toma una muestra de estudiantes de quinto ciclo de educación primaria (5to y 6to grado). Finalmente, en la tercera parte, se comunican y discuten los resultados obtenidos en torno a los errores operatorios con números decimales, a partir de una clasificación basada en el aporte de los autores considerados en el marco teórico.

Metodología: Paradigma interpretativo, metodología mixta.

Conclusiones: Se puede establecer la frecuencia y patrones de los errores cometidos al efectuar operaciones con números decimales en estudiantes de quinto ciclo de educación básica regular.

Fuentes: Análisis de los cuestionarios aplicados a los estudiantes, artículos de revistas, tesis y libros reseñados en las referencias de la tesis.

Fecha de elaboración resumen: 22 de marzo de 2019.

Tabla de Contenidos

Introducción 1

Capítulo 1. Planteamiento de la investigación 3
1.1. Caracterización de la problemática y formulación del problema 3
1.2. Justificación de la investigación 5
1.3. Objetivos de investigación 6
1.4. Antecedentes de estudio 7

Capítulo 2. Marco teórico de la investigación 9
2.1. Aprendizaje de las matemáticas 9
2.1.1. Teorías psicológicas del aprendizaje. 9
2.1.2. Las matemáticas escolares 19
2.2. Los números decimales 21
2.2.1. Aspectos conceptuales de los números decimales 21
2.2.2. Los números decimales en el currículo peruano 26
2.3. Errores en el aprendizaje de las matemáticas 31
2.3.1. Diferencias entre dificultad, error y obstáculo 31
2.3.2. Posturas frente al error matemático 33
2.3.3. Categorización y clasificación de los errores matemáticos 34
2.4. Errores en las operaciones aritméticas o de cálculo 40

Capítulo 3. Metodología de la investigación 45
3.1. Tipo de investigación 45
3.2. Informantes 45
3.3. Técnicas e instrumentos de recogida de información 47
3.3.1. Test elaborado por el docente 47
3.3.2. Entrevista 52
3.4. Triangulación 53
3.5. Codificación de datos 53
3.6. Análisis de datos 65

Capítulo. 4 Resultados y discusión..... 67
4.1. Errores de tipo E1. *Errores derivados de la incorrecta ejecución de algoritmos básicos.* 67
4.1.1. Errores de tipo E1 – Quinto Grado “A” 68
4.1.2. Errores de tipo E1 – Sexto Grado “A” 75
4.2. Errores de tipo E2. *Errores debidos a un empleo incorrecto de los datos o la información.* 83
4.2.1. Errores de tipo E2 – Quinto Grado “A” 83
4.2.2. Errores de tipo E2- Sexto Grado “A” 87
4.3. Errores de tipo E3. *Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas gráficos.* 91
4.3.1. Errores de tipo E3 – Quinto Grado “A” 92
4.3.2. Errores de tipo E3 – Sexto Grado “A” 94
4.4. Errores de tipo E4. *Errores debidos a la falta de verificación de los resultados.* 96
4.4.1. Errores de tipo E4 – Quinto Grado “A” 97
4.4.2. Errores de tipo E4 – Sexto Grado “A” 99
4.5. Errores de tipo E5. *Errores debidos a definiciones deformadas o una falta de conceptos previos.* 101
4.5.1. Errores de tipo E5 – Quinto Grado “A” 103
4.5.2. Errores de tipo E5 – Sexto Grado “A” 105
4.6. Errores de tipo E6. *Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas verbales.* 108
4.6.1. Errores de Tipo E6 - Quinto Grado "A" 108
4.6.2. Errores de Tipo E6 – Sexto Grado "A" 112

Conclusiones y prospectiva 120
Referencias 125
Anexos 131
Anexo 1. Examen diagnóstico 131
Anexo 2. Examen final 133
Anexo 3. Entrevista al informante I6A – 4. 137
Anexo 4. Entrevista al informante I5A – 6. 139
Anexo 5. Entrevista al informante I5A – 32. 141

Índice de tablas

Tabla 1. Capacidades, en torno a los números decimales, propuestos en el DCN 28

Tabla 2. Conocimientos, en torno a los números decimales, propuestos en el DCN 29

Tabla 3. Desempeños propuestos, en torno a los números decimales, en el Currículo Nacional 29

Tabla 4. Estudiantes que conforman la población investigada 45

Tabla 5. Estudiantes que conforman la muestra de la investigación 46

Tabla 6. Instrumentos, técnicas y formato de registro empleado en la investigación 52

Tabla 7. Codificación de los ítems planteados en el examen diagnóstico y final 54

Tabla 8. Relación de las tipologías de errores con los aspectos de los exámenes 57

Tabla 9. Tipología de errores propuesta para el análisis de los resultados 58

Tabla 10. Ítems asociados a E1- Errores debidos a una incorrecta ejecución de algoritmos básicos 67

Tabla 11. Patrones de error del tipo E1 82

Tabla 12. Ítems asociados a E2- Errores debidos a un empleo incorrecto de los datos o la información. 83

Tabla 13. Patrones de error del tipo E2 90

Tabla 14. Ítems asociados a E1-Errores debidos a la incorrecta interpretación de problemas verbales 91

Tabla 15. Patrones de error del tipo E3 96

Tabla 16. Ítems asociados a E4- Errores debidos a la falta de verificación de los resultados . 96

Tabla 17. Patrones de error del tipo E4 101

Tabla 18. Ítems asociados a E5- Errores debidos a definiciones deformadas o una falta de conceptos previos 102

Tabla 20. Ítems asociados a E1-Errores debidos a la incorrecta interpretación de problemas verbales 108

Tabla 21. Patrones de error del tipo E6. 114

Índice de figuras

Figura 1. Teoría de enfoque conductual de Thorndike. 10

Figura 2. Teoría psicológica de enfoque cognitivo de Piaget. 13

Figura 3. Teoría psicológica de enfoque cognitivo de Bruner. 15

Figura 4. Caracterización de los sistemas números por Socas (2007). 23

Figura 5. Organización de los números, en función de los números decimales. 24

Figura 6. Propuesta de organización curricular de los sistemas numéricos. 25

Figura 7. Competencias del nivel Primaria para el organizador "Número, relaciones y operaciones" 27

Figura 8. Errores por recuperación de un esquema previo. 36

Figura 9. Errores producidos por una representación inadecuada. 37

Figura 10.Errores producto de reglas que producen reglas. 38

Figura 11. Error mecánico perseverativo. 41

Figura 12. Error mecánico por inercia de acción. 41

Figura 13. Errores relacionados con el cero. 43

Figura 14. Examen diagnóstico para estudiantes del quinto y sexto grado de educación primaria. 48

Figura 15. Examen final para los estudiantes del quinto y sexto grado de educación primaria. 51

Figura 16. Codificación de los informantes. 54

Figura 17. Ítems asociados a la Adición de números decimales (A1) y Sustracción de números decimales (A2) de los exámenes diagnóstico y final. 59

Figura 18. Ítem asociado al Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos naturales (A10) del examen final. 60

Figura 19. Ítem asociado al Problema (con enunciado) sobre el área del cuadrado (A12) del examen final. 60

Figura 20. (a) Ítem asociado al Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos decimales (A7) y (b) Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos naturales (A8). 61

Figura 21. (a) Ítem asociado al Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos naturales (A6) y (b) Problema (con enunciado) sobre el área del triángulo (A13). 62

Figura 22. (a) Ítem asociado al Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos decimales (A9) y (b) Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos decimales (A11). 63

Figura 23. Ítem asociado al Problema (con enunciado) de adición y sustracción de números decimales (A5). 64

Figura 24. Ítem asociado al Problema (con enunciado) sobre el área del triángulo (A13). 64

Figura 25. Errores de tipo E1 – Quinto Grado “A” del Examen diagnóstico. 68

Figura 26. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen diagnóstico..... 69

Figura 27. Respuesta obtenida por el informante I5A-8 en el examen diagnóstico..... 69

Figura 28. Respuesta obtenida por el informante I5A-40 en el examen diagnóstico..... 70

Figura 29. Respuesta obtenida por el informante I5A-4 en el examen diagnóstico..... 70

Figura 30. Respuesta obtenida por el informante I5A-11 en el examen diagnóstico..... 71

Figura 31. Errores de tipo E1 – Quinto Grado “A” del Examen Final. 71

Figura 32. Respuesta obtenida por el informante I5A-4 en el examen final..... 72

Figura 33. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen final. 72

Figura 34. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen final. 73

Figura 35. Errores frecuentes en el examen final de Quinto Grado “A”. 73

Figura 36. Errores de tipo E1 – Quinto Grado “A”. 74

Figura 37. Errores de tipo E1 – Sexto Grado “A” del Examen diagnóstico. 75

Figura 38. Respuesta obtenida por el informante I6A-1 y I6A-2 en el examen diagnóstico ... 76

Figura 39. Respuesta obtenida por el informante I6A-1 y I6A-31 en el examen diagnóstico.77

Figura 40. Respuesta obtenida por el informante I6A-26 y I6A-30 en el examen diagnóstico 77

Figura 41. Respuesta obtenida por el informante I6A-26 y I6A-8 en el examen diagnóstico.78

Figura 42. Errores de tipo E1 – Sexto Grado “A” en el examen final. 79

Figura 43. Errores de tipo E1 – Sexto Grado “A” del examen final. 79

Figura 44. Respuesta obtenida por el informante I6A-9 en el examen final. 80

Figura 45. Respuesta obtenida por el informante I6A-1 en el examen final. 80

Figura 46. Respuesta obtenida por el informante I6A-12 en el examen final. 81

Figura 47. Errores de tipo E1 – Sexto Grado “A” del examen final. 82

Figura 48. Errores de tipo E2 - Quinto Grado “A”. 84

Figura 49. Respuesta obtenida por el informante I5A-25 en el examen final. 85

Figura 50. Respuesta obtenida por el informante I5A-21 en el examen final. 85

Figura 51. Respuesta obtenida por el informante I5A-54 en el examen final. 86

Figura 52. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen final. 86

Figura 53. Respuesta obtenida por el informante I5A-47 en el examen final. 87

Figura 54. Respuesta obtenida por el informante I5A-10 en el examen final 87

Figura 55. Errores de tipo E2- Sexto Grado “A”. 88

Figura 56. Respuesta obtenida por el informante I6A-21 en el examen final 88

Figura 57. Respuesta obtenida por el informante I6A-26 en el examen final 89

Figura 58. Respuesta obtenida por el informante I6A-10 en el examen final. 90

Figura 59. Respuesta obtenida por el informante I6A-26 en el examen final. 90

Figura 60. Errores de tipo E3 – Quinto Grado “A” 92

Figura 61. Respuesta obtenida por el informante I5A-19 en el examen final. 93

Figura 62. Respuesta obtenida por el informante I5A-13 en el examen final. 93

Figura 63. Errores de tipo E3 – Sexto Grado “A”. 94

Figura 64. Respuesta obtenida por el informante I6A- 3 en el examen final. 95

Figura 65. Respuesta obtenido por el informante I6A- 7 en el examen final. 95

Figura 66. Errores de tipo E4 – Quinto Grado “A”. 97

Figura 67. Respuesta obtenido por el informante I5A- 39 en el examen final. 97

Figura 68. Respuesta obtenido por el informante I5A- 53 en el examen final. 98

Figura 69. Respuesta obtenido por el informante I5A- 39 en el examen final. 98

Figura 70. Respuesta obtenido por el informante I5A- 39 en el examen final 99

Figura 71. Errores de tipo E4 – Sexto Grado “A”. 100

Figura 72. Respuesta obtenida por el informante I6A- 2 en el examen final. 100

Figura 73. Errores de tipo E5 – Quinto Grado “A”. 103

Figura 74. Respuesta obtenido por el informante I5A- 13 en el examen final. 104

Figura 75. Respuesta obtenido por el informante I5A- 28 en el examen final. 104

Figura 76. Respuesta obtenido por el informante I5A- 19 en el examen final. 105

Figura 77. Respuesta obtenido por el informante I5A- 1 en el examen final. 105

Figura 78. Errores de tipo E5 – Sexto Grado “A”. 106

Figura 79. Respuesta obtenida por el informante I6A- 7 en el examen final. 106

Figura 80. Respuesta obtenida por el informante I6A- 3 en el examen final. 107

Figura 81. Respuesta obtenida por el informante I6A- 3 en el examen final. 107

Figura 82. Errores de tipo E6 – Quinto Grado “A”. 109

Figura 83. Respuesta obtenida por el informante I5A-2 en el examen final. 109

Figura 84. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen final. 110

Figura 85. Respuesta obtenida por el informante I5A-3 en el examen final. 111

Figura 86. Respuesta obtenida por el informante I5A-23 en el examen final. 111

Figura 87. Errores de Tipo E6 – Sexto Grado “A”. 112

Figura 88. Respuesta obtenida por el informante I6A-23 en el examen final. 112

Figura 89. Respuesta obtenida por el informante I6A-5 en el examen final. 113

Figura 90. Respuesta obtenida por el informante I6A-12 en el examen final. 113

Figura 91. Respuesta obtenida por el informante I6A-40 en el examen final. 114

Figura 92. Entrevista al informante I6A – 4..... 115

Figura 93. Entrevista al informante I5A – 6..... 116

Figura 94. Entrevista al informante I5A – 32..... 118

Introducción

El aprendizaje de los números decimales representa un contenido importante en el currículo nacional, no solo porque se trabaja paulatinamente a lo largo de la Educación Básica Regular (EBR en adelante), sino que también, es de relevancia en el contexto social por las distintas formas en que se manifiesta, por ejemplo, en situaciones de medición o al usar instrumentos de cálculo. Así pues, los números decimales constituyen una gran parte de las actividades humanas y su aprendizaje favorece el desarrollo de competencias. Sin embargo, este concepto matemático muchas veces no es del todo claro para los estudiantes, dando lugar a errores sobre todo cuando se efectúan operaciones aritméticas. Por esta razón, el presente trabajo de investigación tiene como objetivo fundamental evaluar los errores que cometen los estudiantes de quinto ciclo de EBR al realizar operaciones aritméticas con números decimales, para clasificarlos según una tipología establecida a partir de la revisión teórica de trabajos relacionados.

La investigación que presentamos se organiza en cuatro capítulos:

El primer capítulo, *planteamiento de la investigación*, trata la caracterización de la problemática, el campo de estudio y su justificación, así como la definición del objetivo general, los objetivos específicos y el desarrollo de los antecedentes del estudio.

El segundo capítulo, *marco teórico de la investigación*, indica los fundamentos teóricos sobre el aprendizaje de las matemáticas, los números decimales y su relación con el currículo, así como las distintas concepciones sobre los errores matemáticos en las operaciones aritméticas y las tipologías existentes.

El tercer capítulo, *metodología*, señala el tipo de investigación que se va a realizar, las características de los informantes, las técnicas e instrumentos utilizados para el recojo de la información y la codificación de los datos, así como el análisis realizado.

El cuarto capítulo, *resultados y discusión*, presenta los hallazgos en torno a los errores cometidos por los estudiantes, clasificados e interpretados según la tipología establecida a partir de los trabajos tomados como referentes.

Finalmente, se propone las conclusiones y sugerencias del desarrollo de la investigación.

Capítulo 1
Planteamiento de la investigación

1.1.Caracterización de la problemática y formulación del problema

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una preocupación constante en los diferentes niveles educativos y en todo el mundo (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura-UNESCO, 2015). Esto ha llevado a realizar investigaciones sobre cómo y qué aprenden los estudiantes (Unidad de Medición de la Calidad Educativa-UMC, 2016), qué dificultades limitan la comprensión de esta materia (Riviére, 1990; Orrantia, 2006; Socas, 2007) y cuáles son los errores que aparecen en todo este proceso (UMC, 2005). Al respecto, Rico (1999) sostiene que el error matemático es una oportunidad para la investigación matemática puesto que lo encontramos de forma permanente a lo largo de todo el proceso educativo.

En el Perú, desde el año 2007, se viene implementando una política curricular que busca fortalecer el pensamiento lógico y crítico (Marco Curricular Nacional. Propuesta para el diálogo, 2014). Sin embargo, aún existe un porcentaje representativo de alumnos con dificultades en el área de matemática, en todos los niveles de la Educación Básica. Esto se evidencia en los resultados obtenidos en la última evaluación censal realizada en diciembre del 2016 a estudiantes de cuarto grado de primaria, de los cuales solo el 25,2 % se ubica en el nivel satisfactorio (Ministerio de Educación - MINEDU, 2017). Por otra parte, el desempeño de los estudiantes de 15 años en la evaluación PISA 2015 muestra que, si bien Perú es el país de América Latina que más ha crecido en Comprensión lectora, Ciencia y Matemática, en esta última área el 66,1 % de los estudiantes no alcanza el nivel 2 (de los 6 niveles definidos). Esto significa que pueden realizar tareas matemáticas muy directas y sencillas, efectuar operaciones aritméticas básicas, responder a preguntas de contextos conocidos en los que se cuenta con toda la información necesaria. De hecho, pueden identificar dicha información y ejecutar procedimientos rutinarios, pero desprovistos de interpretación e inferencia (UMC, 2017).

Los resultados comentados en el párrafo anterior, evidencian las dificultades que suele haber en torno al conocimiento matemático. Esto justifica que a lo largo de los años se vengan realizando investigaciones sobre los números y sus operaciones (Konic, 2011), así como en otros campos o tópicos de la Matemática. Respecto de números y operaciones la Univesity of Minnesota junto con la National Science Foundation crearon el proyecto National Number Project (RNP) en el año 1979. Este, pese al tiempo transcurrido, resulta relevante porque alberga una colección de más de 90 artículos referidos a la enseñanza y al aprendizaje del número racional, involucrando conceptos como fracción, decimal, razón, división, medición y operadores. Dichos artículos permiten comprender por qué los estudiantes de educación básica presentan graves dificultades para aplicar las fracciones, decimales y porcentajes. Socas (2007) sostiene que el número decimal, debido a su epistemología, es uno de los conceptos más confusos para los estudiantes. Ruiz (2004) porque señala la importancia de la construcción del número en la escuela primaria, mientras que Sirvent (2004) evidencia el escaso dominio de los números decimales al culminar la Educación Secundaria.

Por su parte, Centeno (1997) manifiesta que los números decimales representan gran utilidad en el intercambio comercial y se han convertido en los protagonistas de todos los cálculos. Según esta autora, su importancia radica en que permiten expresar una información numérica que no es posible comunicar empleando solo los números naturales. Al respecto, Konic (2011) comparte la misma idea cuando sostiene que la utilidad de los números decimales parte del desenvolvimiento social de las personas, es decir, su aprendizaje busca vincular su estudio con situaciones cotidianas. Debido a la importancia de este tópico, Ávila (2008) establece que el aprendizaje de los números decimales se asocia con el carácter relacional de los mismos, su doble representación (fraccionaria y como extensión del sistema decimal) y el hecho de que es necesario hacer una ruptura con la lógica de los números naturales para comprender los decimales.

Descritos los resultados matemáticos en las evaluaciones nacionales e internacionales, el interés investigativo en los números y operaciones, y la trascendencia de los números decimales en la educación primaria, resulta importante *diagnosticar cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números decimales y cuáles son los errores frecuentes que cometen* en torno a este concepto. Este trabajo, a partir

de la identificación de qué aprenden o no los estudiantes, puede dar luces para la elaboración de alternativas de intervención en la casuística que atañe a los errores identificados.

1.2.Justificación de la investigación

El presente trabajo de investigación se justifica desde una perspectiva teórica en torno a los conceptos de error, dificultad y obstáculo, así como en las concepciones sobre el error y la presencia de este concepto en el estudio de los números decimales.

El error es concebido como una posibilidad de adquirir y consolidar un conocimiento que puede llegar a formar parte del conocimiento científico (Rico, 1995). Está presente en todo el proceso de aprendizaje, considerándose como una fuente inagotable de riqueza para el docente (Engler, 2004). Asociados al error aparecen los conceptos de dificultad y de obstáculo. El primero, la dificultad de aprendizaje, según la National Joint Committeeon Learning Disabilities (NJCLD, 1994), hace referencia a procesos como el habla, la escritura y las habilidades matemáticas que pueden estar acompañadas por problemas o déficit de comportamiento. Por su parte, el obstáculo es un conocimiento que tiene validez y eficacia en un contexto específico, que al ser extendido a otros contextos se revela como fuente de errores (Brousseau, 1983). Así pues, el obstáculo es un conocimiento resistente y recurrente que impide la adquisición de nuevos conocimientos y solo se puede abordar integrándolo en el aprendizaje mediante los contraejemplos (Pardos, A. B. C., Rodríguez, I. M., Moreno, M. M. G., & Herrero, M. H., 2014). En este sentido, es fundamental el papel que desempeñe el docente, pues debe empezar por elaborar un diagnóstico de los obstáculos y errores, lo cual implica idear y seleccionar distintas estrategias didácticas para abordar los mismos.

Debido al rol del error en el proceso de enseñanza y aprendizaje, Rico (1995) establece que 1) el error es parte de la adquisición del conocimiento, lo que obliga a la identificación de los mismos para modificar aquellos conocimientos deficientes y aproximarnos más a la verdad; 2) el error es un elemento inherente a la construcción del conocimiento, por ello deben ser diagnosticados, detectados, corregidos y superados mediante el análisis de las propias producciones; y 3) el error es un medio para adquirir un nuevo conocimiento matemático. En este trabajo, debido a su carácter diagnóstico, tomamos como referencia las

dos primeras posturas y no al error como medio de aprendizaje, puesto que no se hará actividades de intervención.

El estudio de los errores en el aprendizaje es un foco de interés de la investigación en Educación Matemática (Riviére, 1990; Orrantia, 2006; Socas, 2007), de allí que se estudien en diversos tópicos matemáticos. En este trabajo nos ocupamos de los errores en torno a los números decimales puesto que son un contenido propuesto en los currículos de diversos países, desde el nivel primario. Además, como ya se dijo en la formulación del problema, los números decimales están vinculados a contextos de medida y situaciones cotidianas donde prima el cálculo numérico. También, debido a su representación y vinculación con el sistema decimal, se originan diversos errores vinculados a la lectura y escritura según su valor posicional, al uso del cero, al orden y a las operaciones con decimales (Centeno, 1997).

Lo dicho en este apartado pone en evidencia la relevancia curricular, social y epistemológica de los números decimales, por ello, interesa identificar los errores que emergen en su aprendizaje para comprender el conocimiento que los sustenta y, a posteriori, proponer acciones de enseñanza que abordan dichos errores.

1.3.Objetivos de investigación

Como objetivo general de la investigación se propone:

Evaluar los errores que cometen los estudiantes de quinto ciclo de Educación Básica Regular al realizar operaciones aritméticas con números decimales.

Este objetivo lleva a plantearnos los siguientes objetivos específicos:

a) Establecer una tipología de errores, mediante la revisión bibliográfica, para analizar las producciones de los estudiantes.

b) Clasificar los errores matemáticos, según la tipología establecida, para caracterizar estos.

c) Determinar el posible origen de los errores que cometen los estudiantes, según lo propuesto por la comunidad científica, para elaborar un diagnóstico.

1.4.Antecedentes de estudio

Los estudios sobre errores matemáticos son muy variados, el primero tomado en cuenta para la investigación es el realizado por Julia Centeno Pérez (1997) quien en su libro *Números Decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*, elabora un análisis de los errores frecuentes de estudiantes de 5° y 6° grado de primaria frente a las tareas encomendadas y la resolución de problemas y situaciones con números decimales. Esto con el objetivo de determinar las causas y elaborar estrategias didácticas. Este trabajo se fundamenta en la necesidad del docente de conocer qué saben los estudiantes, así como los errores, las dificultades y obstáculos que surgen en el aprendizaje. Este análisis le permitió elaborar una clasificación de los errores dividida en cuatro apartados: a) Errores relacionados con la lectura y escritura de los números, valor de posición; b) errores relacionados con el cero; c) errores relacionados con el orden de los decimales y d) errores relacionados con las operaciones. El aporte de Centeno para la presente investigación radica en que la tipología establecida es tomada en cuenta en el marco teórico, así como para establecer la tipología de errores que se aplicará para el análisis de los resultados obtenidos.

Un segundo antecedente es el realizado por Zapata, A., Ortiz, F., Rojas, B., Torres Albarrán, R., & Vásquez, S. (2014), quienes presentan la tesis titulada *Errores y obstáculos más frecuentes que presentan los estudiantes de séptimo año básico en la resolución de problemas que involucran números decimales*. El tipo de investigación realizada es cuantitativa y de modalidad descriptiva. Este trabajo tiene como objetivo general el análisis de los errores y obstáculos de los estudiantes de 11 y 12 años (edad que corresponde con sexto grado de primaria en el sistema educativo peruano), al resolver problemas y ejercicios con números decimales. El instrumento empleado es un test que abarca 7 ítems, cada uno de estos, relacionados con la clasificación de errores frecuentes con números decimales que propone Centeno (1997): 1) Lectura y escritura; 2) comparación; 3) ordenación; 4) adición; 5) sustracción, 6) multiplicación – división y 7) resolución de problemas. Este antecedente es de importancia para la investigación por la similitud que guarda con el objetivo general, la metodología y el instrumento aplicado para el recojo de la información.

Como tercer antecedente podemos mencionar la tesis doctoral realizada por Patricia M. Konic (2011), titulada *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales,* en la que se lleva a cabo una evaluación de los conocimientos didácticos y matemáticos sobre los números decimales, de estudiantes para profesor del nivel primario, utilizando como instrumento un cuestionario. A partir de una muestra de 118 estudiantes muestra las dificultades de comprensión de este tópico. De este modo, centra su interés en dos focos de atención: 1) el problema constante por comprender este contenido matemático, tanto en los niños como en los estudiantes para profesor y 2) la necesidad de realizar una buena formación de docentes capacitados para enfrentar dichas dificultades. El aporte más importante que menciona la autora, es la construcción de un cuestionario para la evaluación de conocimientos sobre decimales, describiéndolo como punto de partida para futuros trabajos sobre la formación de profesores en la educación primaria. Por estas razones, es relevante para esta investigación porque proporciona información que será usada para la construcción del marco teórico, así como en la metodología que se aplicará para el análisis de resultados.

Finalmente, consideramos el trabajo realizado por Gómez (1994), titulado *Tipología de los errores en el cálculo mental*. Este estudio en el contexto educativo plantea como objetivo el análisis de los errores cometidos por estudiantes para profesor de primaria, con el fin de conocer su incidencia en el cálculo mental, su tipología y establecer una clasificación. Se emplea un pretest, un postest y una entrevista para recoger información sobre los errores. Si bien el trabajo de Gómez (1994) aborda un nivel educativo distinto al nuestro, su investigación resulta relevante porque aporta en el marco teórico, así como, la clasificación de errores que presenta es tomada en cuenta para el respectivo análisis de los resultados.

Capítulo 2
Marco teórico de la investigación

2.1.Aprendizaje de las matemáticas

Para comprender el aprendizaje de las matemáticas es necesario partir de las distintas teorías psicológicas, cada una de estas representa un aporte para conocer qué y cómo se realiza el proceso de adquisición de nuevos conocimientos, para posteriormente centrarnos en la forma en la que los estudiantes asimilan los contenidos matemáticos en la etapa escolar.

2.1.1. Teorías psicológicas del aprendizaje.

Las teorías psicológicas sobre el aprendizaje de las matemáticas presentan dos enfoques: uno de raíz conductual y otro de raíz cognitiva (Flores, 2003). Desde el *enfoque conductual*, el aprendizaje es un cambio de conducta y por lo tanto presenta una manifestación externa. En este sentido, si un niño "sabe" operaciones con decimales; será capaz de colocar la coma decimal al resolver, por ejemplo, ejercicios de multiplicación o división, de manera aislada y fuera de un contexto. De esta manera el aprendizaje es producto de la práctica y el ejercicio, es decir se llega al conocimiento del algoritmo sin "pensar" porqué se realiza una u otra actividad. Por el contrario, en el *enfoque cognitivo*, el aprendizaje se basa en el cambio de estructura mental del sujeto. De esta manera, tomando el ejemplo anterior, un estudiante será capaz de resolver un problema de operaciones con decimales a partir de experiencias significativas que le faciliten apropiarse del nuevo conocimiento. Aquí el estudiante se convierte en protagonista de su aprendizaje y el concepto se vuelve un medio. Como en el caso de repartir 20 soles (una cantidad de dinero) entre 8 compañeros de su clase o hallar el costo total de las compras en el mercado que se realizan un fin de semana.

Por lo tanto, estamos frente a dos teorías claramente definidas:

- *Teorías psicológicas de enfoque conductual.*
- *Teorías psicológicas de enfoque cognitivo.*

A continuación, abordamos las teorías psicológicas que contribuyen a la comprensión del aprendizaje de las matemáticas.

2.1.1.1.Teorías psicológicas de enfoque conductual

a. Teoría del aprendizaje de Thorndike

Edward Lee Thornidke (1874-1949) fue un psicólogo estadounidense que realizó importantes aportes en la comprensión del aprendizaje basado en una teoría conductual centrada en el esquema estímulo-respuesta. En su libro titulado *"Inteligencia animal"* publicado en el año 1911 establece una serie de leyes adaptadas a la educación. Entre estas, las más significativas son la *"*Ley del ejercicio*"* y la *"*Ley del efecto*"* que están mutuamente implicadas.

La *ley del ejercicio*, consiste en que el aprendizaje es producto de la repetición de asociaciones estímulo–respuesta (E-R). Cuando la respuesta se acompaña de una situación satisfactoria, se refuerza esta relación; caso contrario, esta se debilita u olvida, llevándose a cabo la *ley del efecto* (Pérez, 1995). Estas leyes ponen sin duda una explicación para el aprendizaje de las matemáticas basado en la práctica de talleres de cálculo y el refuerzo de tareas memorísticas basado en el esquema E-R que gráficamente se evidencia en la figura 1. Aquí se observa que el *estímulo* viene dado por la tarea encomendada al estudiante sobre multiplicación de decimales. Frente a esto, se espera como *respuesta*, la aplicación del algoritmo para efectuar dicha operación. Según la respuesta sea correcta o no, se procede al premio o castigo como *refuerzo*.

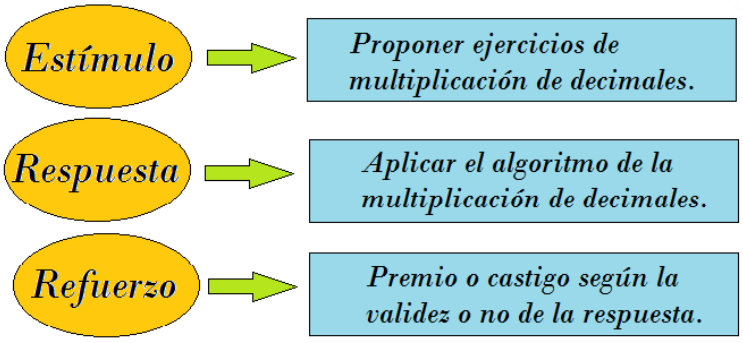


Figura 1. Teoría de enfoque conductual de Thorndike.

Como se aprecia, esta teoría pretende que el aprendizaje implique un cambio en la conducta, por eso cada vez que se aplica la *ley del ejercicio* en las matemáticas, lo que se busca es que el estudiante repita varias tareas relacionadas a un concepto matemático, desde lo más elemental a lo más complejo y de la misma forma, la *ley del efecto* se da en la medida que el profesor señale al alumno qué respuestas están bien o no (Flores, 2003).

En conclusión, las leyes de Thorndike, sustentan el uso de estímulos y refuerzos, así como también actividades en las que se repiten procedimientos para ejercitar a los estudiantes para conseguir el máximo rendimiento, reflejado en el mayor número de respuestas correctas.

b. Teoría del aprendizaje de Gagné

Robert Gagné (1916-2002) fue un investigador estadounidense destacado por sus teorías del aprendizaje donde establece que, las capacidades se descomponen en destrezas que representan los *prerrequisitos*, donde las tareas más sencillas funcionan como elementos de las más complejas. A esto lo denomina como *aprendizaje acumulativo*, es decir, se tienen que sentar las bases para un conocimiento cada vez mayor. Esta forma de concebir el aprendizaje lleva a clasificarlo en ocho tipos (Pérez, 1995):

Tipo I: Aprendizaje por señales.
Tipo II: Aprendizaje por la respuesta al estímulo.
Tipo III y IV: Cadenas motrices y cadenas verbales.
Tipo V: Aprendizaje discriminativo.
Tipo VI: Aprendizaje conceptual.
Tipo VII: Aprendizaje por reglas.
Tipo VIII: Solución de problemas.

A partir de esta clasificación, Moreyra (1998), propone que el aprendizaje de las matemáticas se desarrolla de lo más simple a lo más complejo a partir de: a) conexiones E – R; b) discriminaciones; c) conceptos concretos; d) reglas, principios y conceptos definidos; y e) la resolución de problemas.

Por consiguiente, el aporte de esta teoría se basa en que la educación matemática, surge al considerar que el aprendizaje es posible si el alumno conoce y domina los conocimientos previos. Asimismo, el aprendizaje debe ser secuenciado para lo cual se necesita un ordenamiento de la enseñanza.

2.1.1.2.Teorías psicológicas de enfoque cognitivo

a. Teoría del aprendizaje de Piaget

Jean William Fritz Piaget (1986-1980) orientó una línea de investigación sobre el aprendizaje basado en las características del pensamiento en las distintas etapas de la vida (Pérez, 2006). Dentro de las principales ideas que se resumen sobre el aprendizaje se tiene que a) cada etapa donde se desarrolla el pensamiento es indispensable para la siguiente; b) el pensamiento es dinámico y progresivo; c) el control de la realidad y su adaptación parte de dos procesos en el pensamiento: la asimilación y la acomodación; d) en una etapa esencial antes de los 7 años, el pensamiento es irreversible; y e) la comprensión de la realidad se establece a partir de esquemas.

Otro de los aportes de Piaget en esa teoría es el estudio de los *esquemas* como parte del desarrollo del ser humano. Los esquemas son conocimientos previos alcanzados, adquiridos de las experiencias vividas y están en constante relación con situaciones nuevas del medio que le rodea. A partir de esto, este autor plantea tres leyes o principios aplicados en el aprendizaje: la asimilación, acomodación y equilibrio (Bravo, González y Paz, 2014).

i. **Asimilación.** El sujeto posee una estructura mental que le permite organizar las experiencias vividas. Así que cuando se enfrenta a nuevas situaciones o problemas de su entorno, los relaciona con los conocimientos previos en torno a estas. Por ejemplo, al plantear a los estudiantes unos ejercicios sobre comparación de números naturales, estos pueden adaptar dicho concepto y aplicarlo a las fracciones, en algunos casos de forma incorrecta como se muestra en la figura 2.

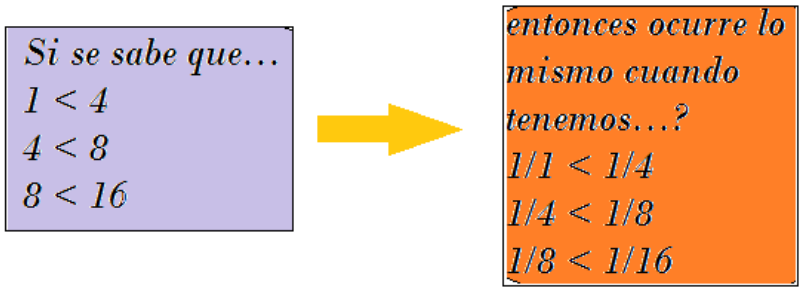


Figura 2. Teoría psicológica de enfoque cognitivo de Piaget.

Al observar la figura 2, se puede apreciar que la relación de orden no presenta confusión en el conjunto de números naturales; sin embargo, cuando se está frente a un caso de comparación de fracciones, las estructuras previas ya no se pueden aplicar a la situación nueva. Por lo tanto, no será correcto afirmar que si $4 < 8$, por consiguiente $^1/_4 < {}^1/_8$.

ii. **Acomodación.** Siguiendo el ejemplo anterior podemos notar que, cuando las estructuras previas no ayudan a explicar las nuevas ideas, el sujeto cambia su estructura mental por otra que le sirva para encajar la nueva idea, a esto se le conoce como acomodación (Flores, 2003).

Al llevarse a cabo este esquema se concluye que si 1 < 4, no se cumple que 1/1<1/4 porque no se está frente al conjunto de los números naturales sino frente a los números racionales.

iii. **Equilibrio.** La suma de la asimilación y la acomodación dan lugar al equilibro, esto quiere decir que, cuando ocurre un cambio en la estructura cognitiva de la persona a partir de la interacción de los conocimientos que ya posee y el nuevo conocimiento, se produce el equilibrio.

Según lo anterior, aprender será para Piaget, incorporar las características de los nuevos conocimientos aprendidos en sus estructuras mentales previas o esquemas, para generar una estructura más compleja. Así cuando un alumno se enfrenta a un problema matemático donde tenga que aplicar algoritmos con números racionales como las fracciones, intentará resolver el problema mediante los esquemas previos de comparación de naturales

(asimilación) como lo observado en la figura 2. Sin embargo, al verse frente a otro conjunto de números, estos conocimientos los modifica e incorpora (acomodación) a su nueva estructura mental para generar nuevos esquemas más amplios y complejos (equilibrio).

De esta forma, siguiendo el estudio de Piaget el aprendizaje se dará en las diferentes etapas de la vida donde cada estructura será requisito para la formación de nuevos esquemas. Por lo tanto, se debe respetar y favorecer el periodo de desarrollo de los estudiantes para lograr óptimos resultados en la enseñanza de la matemática. En caso contrario, si un estudiante no logra uno de los estadios presentará dificultades para aprender que se podrán convertir en obstáculos.

b. Teoría del aprendizaje de Bruner

El aprendizaje para Jerome Seymour Bruner (1915 - 2016) debe realizarse a través de actividades simples y concretas que guarden relación con los esquemas previos del alumno. De este modo, comparte la idea de Piaget de ir de lo más simple a lo más complejo y a su vez, incorpora el uso de objetos concretos antes de llegar a las abstracciones propias de los números (Flores, 2003).

A esta teoría se le conoce como *aprendizaje por descubrimiento* y consiste en que el alumno debe ser capaz de establecer por sí solo, conjeturas o hipótesis frente a un problema planteado antes que recibir las reglas y conceptos generales. Para esto, el papel del docente debe ser de mediador del aprendizaje, haciendo que estos “busquen, manipulen, exploren e investiguen” (Schunk, 1997, p. 194).

Como menciona Pérez (2009), el aprendizaje por descubrimiento, representa uno de los aspectos más destacados del pensamiento de Bruner puesto que involucra a la actividad del docente dentro del aula. Así pues, para propiciar la exploración debe despertarse la curiosidad y propiciar la formulación de hipótesis.

Como es de esperarse este aprendizaje por descubrimiento llevará a incurrir en múltiples errores a los estudiantes, como producto de esta actividad intelectual. Sin embargo, esto no debe ser motivo de frustración, sino que debe considerarse como una nueva

oportunidad para plantear otras hipótesis y para que el aprendizaje sea cada vez más dinámico.

Por otra parte, Bruner sostiene que "el aprendizaje es un procesamiento activo de la información y que cada persona lo organiza y lo construye a su manera" (Pérez, 2009). De esta forma, al igual que Piaget, menciona el desarrollo de estructuras cognitivas a lo largo de cada etapa, las cuales las reduce a tres:

i. **Modo representativo (enactivo):** Es el aprendizaje producido en la infancia, en el que el niño debe estar sujeto a la manipulación y experimentación con su ambiente para tener un mayor dominio de las cosas. Cabe mencionar que no solo debe mantenerse en la infancia, sino que debe continuarse a lo largo de la vida, pero de una forma más compleja.

ii. **Modo icónico:** Es el aprendizaje basado en el uso de la imaginación donde se piensa sobre las cosas sin necesidad de manipularlas.

iii. **Modo simbólico:** Es el aprendizaje que aparece en la adolescencia en el que el ícono que fue adquirido en la etapa anterior se vuelve un concepto abstracto.

Resumiendo lo anterior se tiene el siguiente esquema sobre las etapas del aprendizaje que propone Bruner como se observa en la figura 3. En la primera etapa, el niño manipula objetos como chapitas, botones o cualquier material concreto para adquirir la noción de número. En la segunda etapa, la noción de número se interioriza y ahora cada dígito (0; 1; 2; 3; 4; …; 9) tiene su propio significado sin necesidad de manipulación. Finalmente, en la tercera etapa, cada número presenta sus características propias adquiriendo una noción abstracta.

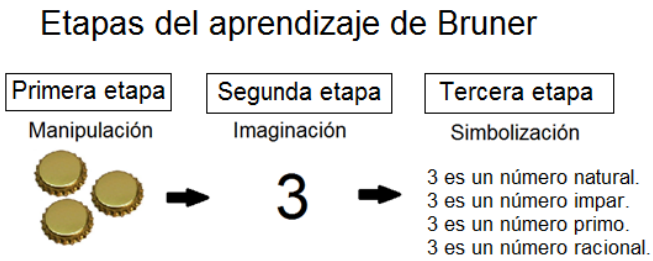


Figura 3. Teoría psicológica de enfoque cognitivo de Bruner.

c. Teoría del aprendizaje de Ausubel

David Paul Ausubel (1918 - 2008), de la misma forma que Bruner, es uno de los representantes más importantes de la teoría cognitiva y sus contribuciones son aplicadas sobre todo en el aprendizaje escolar. Este autor establece unos tipos de aprendizaje según dos dimensiones (Pérez 2009):

i. Según el modo en que el material a aprender llega al estudiante:

a) Aprendizaje receptivo: Es aquel aprendizaje en el que el material se le presenta al estudiante en su forma final, es decir, solo se le exige que internalice el nuevo material para que posteriormente pueda reproducirlo. Por ejemplo, cuando el docente explica las propiedades de la multiplicación sin que previamente el estudiante pueda haber comprobado en qué consiste cada una.

b) Aprendizaje por descubrimiento: A diferencia del aprendizaje receptivo, se busca que el nuevo material no sea dado en su forma final, sino que el estudiante lo descubra para después incorporarlo en su estructura cognoscitiva. Este tipo implica más tiempo que el anterior y actividades más complejas. Esta propuesta es recogida tomando en cuenta el aporte de Bruner, pero a diferencia de este autor, recalca la interacción del estudiante con los demás, logrando un aprendizaje social y cooperativo.

ii. Según el modo en el que el estudiante incorpora la nueva información en las estructuras cognoscitivas:

a) Aprendizaje significativo: En este aprendizaje los nuevos conocimientos son incorporados a la estructura mental no de forma arbitraria sino de manera sustancial. De este modo se puede mencionar que los nuevos conocimientos deben guardar relación con los adquiridos previamente.

b) Aprendizaje por repetición: A diferencia del anterior, los nuevos conocimientos se intentan fijar con los anteriores, pero de forma arbitraria sin que exista una conexión, haciendo que estos se pierdan con facilidad al ser olvidados. Por ejemplo, cuando se trabaja en matemática los números enteros y las leyes de signos en las operaciones a partir de la memorización sin que previamente se haya realizado una explicación del porqué, asociando el nuevo conocimiento sobre el que ya poseen sobre números naturales.

Esta teoría denominada *aprendizaje significativo* abarca la adquisición de nuevas ideas de forma sustancial, es decir, que son integradas en la estructura del sujeto porque guardan conexión con las ya existentes. En este sentido, el alumno mantendrá una disposición frente a la nueva idea porque esta es potencialmente significativa para él (Ausubel y Novak, 1976).

Existen tres tipos de aprendizaje significativo (Pérez, 2009):

a) Aprendizaje de representaciones: Consiste en hacerse del significado de símbolos o de lo que representan. Este es muy común en el aprendizaje del lenguaje debido a los signos convencionales por los que está formado cada idioma.

b) Aprendizaje de conceptos: Consiste en la formación de conceptos a partir de símbolos y representaciones previas. Es decir, mientras el niño esté más sujeto a la adquisición de un vocabulario significativo, más será capaz de comprender nuevos significados.

c) Aprendizaje de proposiciones: Consiste en la comprensión de una idea a partir de una oración.

Los aportes de Ausubel en el aprendizaje significativo llevan a la reflexión sobre los siguientes puntos en la enseñanza (Pérez 2009): a) La tarea asignada debe ser significativa para que exista una coherencia con los conocimientos adquiridos previamente; b) los organizadores previos ayudan a mostrar las ideas que posteriormente serán desarrolladas. Es como preparar el camino para los nuevos conocimientos; c) las preguntas de repaso se aplican

para reforzar las nuevas relaciones dentro de la estructura mental y afinar aquellas donde los conceptos han quedado en el aire; y d) los resúmenes proporcionan una visión general del tema distinguiendo aquellas que han sido relevantes de las que no.

d. Teoría del aprendizaje de Dienes

A parte de los enfoques anteriores, uno de los que predomina en la actualidad es el de Dienes (1981) que en su trabajo sobre *Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas* postula las siguientes:

i. El aprendizaje de las matemáticas se realiza a través de experiencias concretas.
ii. El aprendizaje tiene que partir de situaciones significativas para los alumnos.
iii. El aprendizaje se produce al incorporar el concepto a su estructura mental mediante un proceso de abstracción que requiere de modelos. Estos pueden ser:
    a) Físicos: Aquellos que se pueden manipular para ilustrar algunos aspectos de ideas matemáticas.
    b) Pictóricos: Son representaciones bidimensionales de ideas matemáticas.
iv. El aprendizaje puede llegar a ser significativo si se parte de un aprendizaje por descubrimiento.
v. No existe un único estilo de aprendizaje matemático para todos los alumnos.
vi. El aprendizaje por invención es aquel donde el alumno puede aprender por medio del entorno.

Las seis etapas anteriores evidencian la importancia de abordar problemas en la adquisición de conceptos matemáticos, considerando una fase manipulativa, seguida de una fase gráfica, posteriormente una simbólica y finalmente una de automatización. Estas fases son aplicadas dentro de la didáctica de la matemática y facilita la calidad de enseñanza sobre todo en los grados inferiores.

2.1.2. Las matemáticas escolares

Las matemáticas escolares son el contexto en el que se desarrolla la presente investigación, y es fundamental hablar de este tema, ya que es en la etapa escolar, donde se da pie al desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, cuyas características las describen las teorías psicológicas mencionadas en el apartado anterior.

Cordero (2001) sostiene que las matemáticas escolares tienen como punto de partida la actividad humana, como un proceso de interacción que se vive en el aula entre el alumno y el profesor: "consiste en considerar primeramente al humano haciendo matemáticas, en lugar de considerar la producción matemática hecha por el humano" (p. 4). De esta manera, la matemática por sí sola no cobra sentido, sino que sus significados se reconstruyen como recursos para generar conocimientos matemáticos de acuerdo a cada uno de los diferentes niveles escolares.

Rico (1995b) en su *obra Consideraciones sobre el currículo escolar* hace referencia a que las matemáticas escolares representan "las experiencias materiales de personas que interactúan en entornos particulares, culturas y períodos históricos" (p. 4). Partiendo de esto, define a las matemáticas escolares como una institución donde se debe promover las condiciones para que los estudiantes logren la construcción del conocimiento matemático, partiendo de los intereses del estudiante y trabajando activamente desde los distintos niveles, especialmente, de manera colectica con sus pares. Este autor también establece que el docente es el encargado de transmitir a los alumnos los valores sociales y la cultura de la comunidad, donde el conocimiento matemático forma parte.

Rico (1995b) resume los aportes de la comunidad docente a través de una visión de las matemáticas escolares que responde a características como a) la aceptación de la evolución del conocimiento matemático; b) la importancia de los conceptos matemáticos básicos que todo ciudadano debe dominar; c) su interacción social; d) la implementación de nuevas tecnologías y finalmente, e) la enseñanza activa.

Por otra parte, se afirma que en las matemáticas escolares se debe cumplir dos principios: el de homogeneidad y de diferenciación. El *primero* alude al hecho de que se

espera que todos accedan a una enseñanza matemática escolar bajo una "pauta unificada, universal, de comportamiento y sentido bajo la experiencia" (Domingo, 1987, p. 67), con un trato equitativo donde exista un consenso en los objetivos que se espera lograr. Sin embargo, cuando se habla del *segundo principio*, el de diferenciación, se pone de manifiesto que cada escuela responde a una realidad distinta de las demás encontrándose diferencias en lo que se enseña y lo que se aprende.

Según Córdova (2011) las matemáticas escolares se dinamizan a partir del enfoque de *situaciones problemas* donde se desarrolla un contexto en el que el estudiante es capaz de construir sus propios significados de los conceptos, desarrollando su pensamiento matemático ya sea con actividades individuales y grupales. Así pues, la situación problema se vuelve un medio para adquirir nuevos conocimientos donde cada agente que interviene en el aprendizaje cumple un rol específico. Así tenemos:

- El *estudiante* es el que orienta sus saberes previos para resolver situaciones planteadas. De esta manera, construye estrategias y confronta sus conocimientos, con ayuda del docente, para adquirir nuevos.

- El *docente* orienta la forma de pensar del estudiante presentándole situaciones problemáticas donde estos puedan establecer relaciones matemáticas.

- El *conocimiento matemático* ingresa de forma contextualizada, a través de diferentes formas de representación. Al respecto, Rico (1995a) expresa que las representaciones matemáticas son construcciones sociales, es decir, experiencias materiales de personas que interactúan en entornos particulares.

Dentro de los defectos más comunes que se presentan en el nivel escolar, Fernández (2015), en su artículo sobre el Aprendizaje de las matemáticas, menciona los siguientes:

- *Automatización prematura de soluciones*: Es la necesidad del estudiante por llegar a la fórmula antes que, al contenido mismo, de esta manera se centra en la aplicación de reglas para casos concretos.

- *Falta de rigor en su léxico*: Es la dificultad que presenta el estudiante en comunicar sus resultados por falta de un dominio en el lenguaje. Esto se va adquiriendo a medida que el alumno se acostumbre a buscar palabras adecuadas que expresen su propio pensamiento.

- *Tendencia a memorizar definiciones*: Debido a la escasez de vocabulario manifestada anteriormente, el estudiante tiende a memorizar las definiciones de los conceptos que maneja sin entender lo que dice. Por esto, es necesario que sea él mismo el que construya sus definiciones a fin de incrementar su vocabulario.

- *Errores de tipo aritmético:* En cuanto a las operaciones fundamentales de la aritmética, los alumnos tienden a mecanizar la técnica sin haber intuido la justificación del ejercicio.

- *Errores de tipo geométrico:* Los estudiantes tienden a regularizar las figuras, es decir, mantienen un mismo modelo de figura sin tomar en cuenta las clases que existen en cada grupo. Tal es el caso que, si se les pide que dibujen un cuadrilátero, ellos grafican un cuadrado; si se les pide un triángulo, ellos dibujan uno equilátero.

Por tanto, las matemáticas escolares han sido objeto de estudio para la gran mayoría de autores enfocados en conocer las dificultades de aprendizaje de los estudiantes. Basados en una metodología de resolución de problemas como la que menciona Córdova (2011) se pueden detectar los errores frecuentes (Fernández, 2015) para poder mejorar el conocimiento de esta área y sobretodo evitar que estos se conviertan en obstáculos de aprendizaje.

2.2.Los números decimales

2.2.1. Aspectos conceptuales de los números decimales

Los sistemas numéricos son un tópico relevante dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, sobre todo dentro de las matemáticas escolares; empezando por los números naturales, en la educación primaria, hasta los reales y complejos, en la secundaria (Piñero,

2011). Socas (2007) elabora un resumen sobre la organización de los sistemas numéricos partiendo del análisis de sus principales características como se aprecia en la figura 4. Aquí se observa a los números decimales como una continuación de los números naturales (N) y de los números enteros (Z), definiéndolos como el resultado de la división de un número (Z x N) entre otro, potencia de 10. Esto último introduce una distinción entre las expresiones decimales vinculados a divisores (denominadores) potencias de 10 de las que proceden de otros divisores.

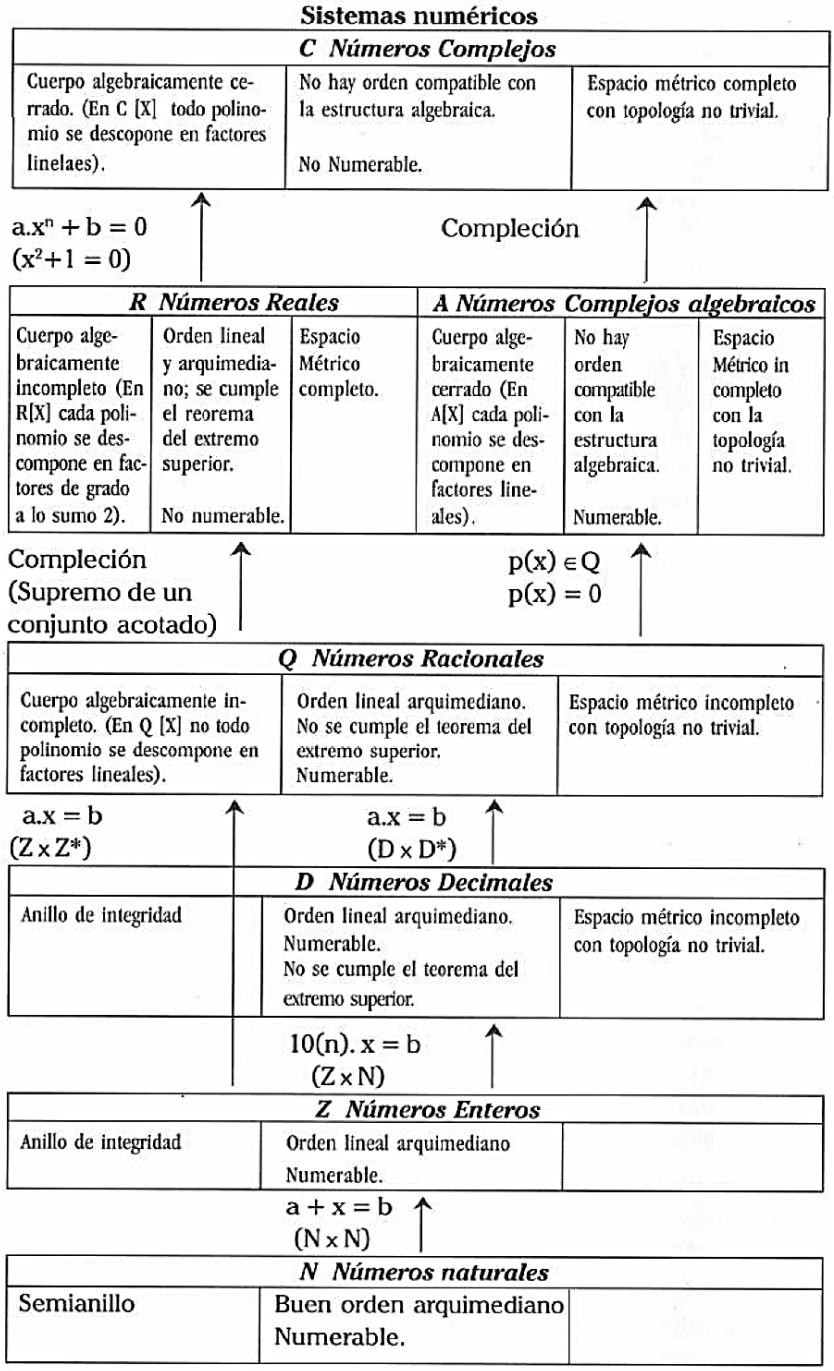


Figura 4. Caracterización de los sistemas números por Socas (2007).
Fuente: Socas (2007, p.30).

De la misma forma, el autor incluye en su trabajo la propuesta curricular que plantea la Comunidad Autónoma de Canarias (1995) sobre la organización escolar de los sistemas numéricos en el ámbito educativo, como se aprecia en la figura 5, que considera al número decimal como un número real.

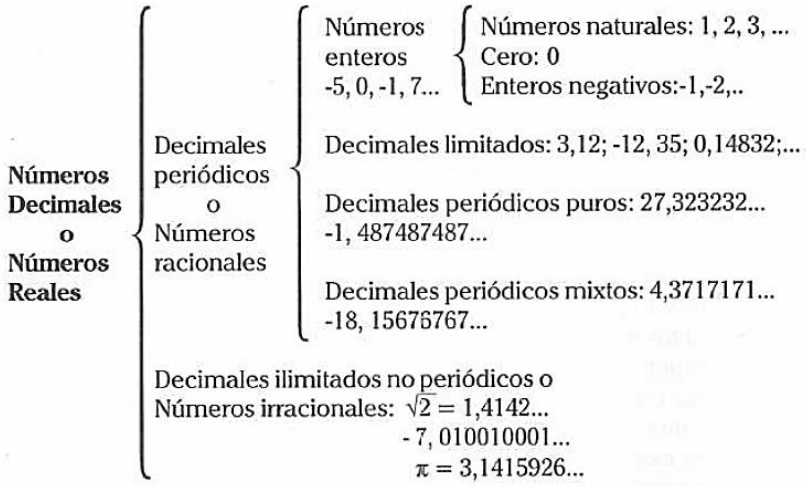


Figura 5. Organización de los números, en función de los números decimales.
Fuente: Comunidad Autónoma de Canarias (1995, p.32) consultada en Socas (2007).

Finalmente, Socas (2007) realiza una propuesta de organización curricular de los sistemas numéricos en el ámbito educativo como se ve en la figura 6, donde se busca enlazar los diferentes números y sus representaciones. Aquí los números decimales son considerados como un subconjunto de los números racionales que admiten una escritura decimal finita, es decir aquellas divisiones en las que el divisor es una potencia de 10.

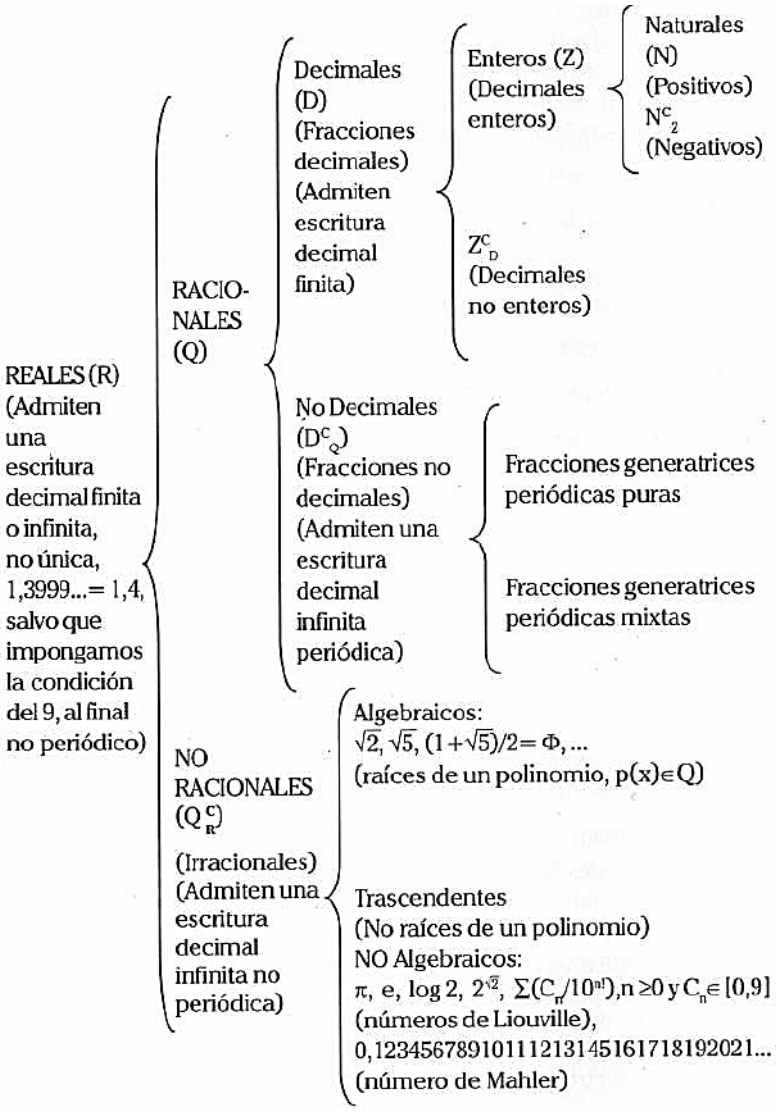


Figura 6. Propuesta de organización curricular de los sistemas numéricos.
Fuente: Socas, 2007, p. 33.

Pese a la importancia de los sistemas numéricos, estos resultan difíciles de comprender. Uno de los conjuntos donde se empieza a identificar una mayor lentitud en su proceso de adquisición es en el de los números decimales (Socas, 2007).

Existen varias definiciones acerca de los números decimales, pero para esta investigación tomaremos en cuenta la dada por Centeno (1997) y Socas (2007), los cuales definen al número decimal (D) como un subconjunto de los números racionales[1] (Q), con la

[1] Se entiende por número racional a todo número que se puede expresar como fracción (Centeno, 1988).

propiedad de expresarse únicamente como fracción decimal[2]. Por ejemplo, el racional ¾ equivale a 75/100, el cual se puede representar como 0,75; por lo tanto, es un número decimal. En cambio, el racional 3/7 no tiene un equivalente con denominador que sea potencia de 10, por lo tanto, no representa un número decimal.

La representación de un número decimal como se conoce actualmente fue dada por el matemático belga Simón Stevin en 1585 (citado por Godino, 2003). Este sugirió colocar una coma o punto a la derecha de las unidades siguiendo el orden de las décimas, centésimas, milésimas, etc. Esto permite trasladar los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división aplicados en el cálculo con los números naturales al caso de los números decimales, con la única salvedad de tomar en cuenta la ubicación de la coma decimal.

2.2.2. Los números decimales en el currículo peruano

El currículo vigente al desarrollar la investigación es el Diseño Curricular Nacional implementado en el 2009 (en adelante DCN). En este se propone el desarrollo gradual del pensamiento matemático y el razonamiento lógico para que los estudiantes, desde pequeños, planteen y resuelvan problemas con actitud analítica. Desde esta perspectiva, se propone tres capacidades en el área de matemática: Razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas. Esta última es el centro en la formulación de las competencias en cada nivel de la EBR (Inicial, Primaria y Secundaria). La promoción y desarrollo de estas capacidades se toma en cuenta en los tres organizadores del área de Matemática: Números, relaciones y operaciones; Geometría y medición; y estadística. De estos, nos centraremos en el primero por estar "referido al conocimiento de los números, el sistema de numeración y el sentido numérico. (…) También implica establecer relaciones entre los números y las operaciones para resolver problemas, identificar y encontrar regularidades" (MINEDU, 2009, p. 188).

Dado que nuestro objeto de estudio es *los números decimales*, analizamos el lugar de este en el Diseño Curricular Nacional. Así pues, lo primero a resaltar es que aparece explícitamente en la competencia que ha de lograrse al término del ciclo V de la Educación Básica Regular (Figura 7). Sin embargo, en la competencia del ciclo IV se mencionan las

[2] Una fracción decimal es aquella cuyo denominador es un múltiplo de 10 (Centeno, 1988).

"relaciones y operaciones con números naturales y fracciones" (MINEDU, 2009, p. 189), conceptos estrechamente vinculados a los números decimales. De hecho, es en cuarto grado de primaria (ciclo IV) donde se inicia el estudio del tópico que nos ocupa, según se explicita en las capacidades y conocimientos propuestos en el documento referido (Tabla 1 y Tabla 2).

	CICLO III	CICLO IV	CICLO V
NÚMERO, RELACIONES Y OPERACIONES	• Resuelve problemas de situaciones cotidianas en las que identifica relaciones numéricas realizando con autonomía y confianza, operaciones de adición y sustracción con números de hasta tres cifras.	• Resuelve problemas de contexto real y contexto matemático, que requieren del establecimiento de relaciones y operaciones con números naturales y fracciones, e interpreta los resultados obtenidos, mostrando perseverancia en la búsqueda de soluciones.	• Resuelve y formula, con autonomía y seguridad, problemas que requieren del establecimiento de relaciones entre números naturales, decimales y fracciones, y sus operaciones, argumentando los procesos empleados en su solución e interpretando los resultados obtenidos.

Figura 7. Competencias del nivel Primaria para el organizador "Número, relaciones y operaciones"
Fuente: Diseño Curricular Nacional, p. 189.

Las capacidades propuestas en el DCN (Tabla 1) se van desarrollando de manera gradual. En cuarto grado se observa que solo se trabaja con cuatro capacidades aplicadas al contenido de números decimales: interpreta, compara, calcula y resuelve problemas. En quinto grado son siete las capacidades que se desarrollan, donde además de las anteriores, se propone: ordena, representa y formula. Finalmente, en sexto grado, a pesar de que se llevan a cabo las mismas capacidades que en quinto, estas se van aplicar a conceptos, relacionados al número decimal, con un carácter más complejo. Se puede apreciar, por ejemplo, que en cuarto grado se pretende que los estudiantes *comparen números hasta el orden de la décima*; en quinto grado, dicha comparación involucra *números decimales exactos y fracciones*; y finalmente, en sexto grado *compara números decimales exactos hasta los centésimos*.

Tabla 1. Capacidades, en torno a los números decimales, propuestos en el DCN

Ciclo IV	***Ciclo V***	
Cuarto grado	***Quinto grado***	***Sexto grado***
Interpreta y compara números decimales hasta el orden de la décima. Resuelve problemas de adicción y sustracción con números decimales y fracciones. Calcula la suma y la diferencia de fracciones y números decimales.	Interpreta la expresión decimal de una fracción. Compara y ordena números decimales exactos y fracciones. Interpreta y representa la división con números decimales hasta las centésimas. Resuelve y formula problemas de estimación y calculo con operaciones combinadas de números naturales y decimales.	Formula secuencias con números naturales y decimales exactos. Interpreta y representa el valor posicional de los números naturales y decimales. Compara y ordena números naturales, fracciones y números decimales exactos hasta los centésimos. Resuelve y formula problemas que implican operaciones combinadas con números naturales, fracciones y decimales. Interpreta y representa números decimales en la recta numérica, usando aproximaciones sucesivas a las décimas y centésimas.

Fuente: Diseño Curricular Nacional, pp. 197, 200, 203.

Los conocimientos que propone el DCN coinciden con la definición dada por Centeno (1988) al considerar el número decimal como un conjunto que no incluye expresiones decimales periódicas, por esta razón se trabaja el número decimal exacto hasta la centésima. Al igual que las capacidades, los contenidos matemáticos también se trabajan de forma gradual (Tabla 2), empezando en cuarto grado con nociones básicas como *la adición y sustracción de números decimales con una cifra decimal*. En quinto grado, se desarrollan las *operaciones combinadas con resultado decimal.* Finalmente, en sexto grado se incluye la *adición, sustracción, multiplicación y división de números decimales*.

Tabla 2. Conocimientos, en torno a los números decimales, propuestos en el DCN

Ciclo IV	***CICLO V***	
Cuarto grado	***Quinto grado***	***Sexto grado***
Números decimales con aproximación a la décima. Adición y sustracción de números decimales con una cifra decimal.	Número decimal hasta el orden de la centésima. Expresión decimal de una fracción. Ordenamiento de números decimales exactos hasta los centésimos y fracciones con denominadores 10, 100. Operaciones combinadas con resultado decimal. División de números decimales hasta la centésima. Operaciones combinadas de números naturales y decimales.	Secuencias con números naturales y decimales. Valor posicional de números decimales. Relación de orden entre números naturales, fracciones y decimales exactos. Números decimales en la recta numérica. Adición, sustracción, multiplicación y división de números decimales. Operaciones combinadas con números naturales, fracciones y decimales.

Fuente: Diseño Curricular Nacional, pp. 197, 200, 203.

Dado que actualmente se tiene un nuevo Currículo Nacional (MINEDU, 2016) hemos de comentar que en este se habla de expresiones decimales distinguiéndolas de los números decimales que solo se trabajan hasta los centésimos, como se muestra en la tabla 3. Asimismo, se establece una relación entre los números decimales y las unidades de medida; como las de masa y tiempo; así como entre número natural y número decimal y entre dos decimales; para finalmente realizar afirmaciones sobre el orden que ocupa cada número según su valor posicional.

Tabla 3. Desempeños propuestos, en torno a los números decimales, en el Currículo Nacional

Quinto grado	***Sexto grado***
Establece relaciones entre datos y una o más acciones de agregar, quitar, comparar, igualar, reiterar, agrupar y repartir cantidades, para transformarlas en expresiones numéricas (modelo) de adición, sustracción, multiplicación y división con números naturales, y de adición y sustracción con decimales.	Establece relaciones entre datos y una o más acciones de comparar, igualar, reiterar y dividir cantidades, y las transforma en expresiones numéricas (modelo) de adición, sustracción, multiplicación y división de dos números naturales (obtiene como cociente un número decimal exacto), y en potencias cuadradas y cúbicas.

Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de:

- El valor posicional de un dígito en números de hasta seis cifras, al hacer equivalencias entre decenas de millar, unidades de millar, centenas, decenas y unidades; así como del valor posicional de decimales hasta el décimo, su comparación y orden.
- Las operaciones de adición y sustracción con números decimales y fracciones.

Emplea estrategias y procedimientos como los siguientes:

- Estrategias de cálculo: uso de la reversibilidad de las operaciones con números naturales, estimación de productos y cocientes, descomposición del dividendo, amplificación y simplificación de fracciones, redondeo de expresiones decimales y uso de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición y división.

Mide, estima y compara la masa de los objetos (kilogramo) y el tiempo (décadas y siglos) usando unidades convencionales (expresadas con naturales, fracciones y decimales); y usa multiplicaciones o divisiones por múltiplos de 10, así como equivalencias, para hacer conversiones de unidades de masa y tiempo.

Realiza afirmaciones sobre las relaciones (orden y otras) entre números naturales, decimales y fracciones; así como sobre relaciones inversas entre operaciones, las cuales justifica con varios ejemplos y sus conocimientos matemáticos.

Establece relaciones entre datos y acciones de dividir una o más unidades en partes iguales y las transforma en expresiones numéricas (modelo) de fracciones y adición, sustracción y multiplicación con expresiones fraccionarias y decimales (hasta el centésimo).

Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico (números, signos y expresiones verbales) su comprensión de:

- El valor posicional de un dígito en números de hasta seis cifras y decimales hasta el centésimo, así como las unidades del sistema de numeración decimal
- La fracción como operador y como cociente; las equivalencias entre decimales, fracciones o porcentajes usuales; las operaciones de adición, sustracción y multiplicación con fracciones y decimales.

Emplea estrategias y procedimientos como los siguientes:

- Estrategias de cálculo, como el uso de la reversibilidad de las operaciones con números naturales, la amplificación y simplificación de fracciones, el redondeo de decimales y el uso de la propiedad distributiva.
- Procedimientos y recursos para realizar operaciones con números naturales, expresiones fraccionarias y decimales exactos, y calcular porcentajes usuales.

Mide, estima y compara la masa de los objetos, el tiempo (minutos) y la temperatura usando la unidad de medida que conviene según el problema; emplea recursos y estrategias de cálculo para hacer conversiones de unidades de masa, tiempo y temperatura, expresadas con números naturales y expresiones decimales.

Realiza afirmaciones sobre las relaciones (orden y otras) entre decimales, fracciones o porcentajes usuales, y las justifica con varios ejemplos y sus conocimientos matemáticos.

A diferencia del Diseño Curricular Nacional, se puede evidenciar que, en el Currículo Nacional, la resolución de problemas es el enfoque del área de Matemática y no solo una capacidad como lo propone el primer documento. De hecho, todas las competencias definidas en esta área involucran la resolución de problemas (p.ej. Resuelve problemas de cantidad).

2.3.Errores en el aprendizaje de las matemáticas

2.3.1. Diferencias entre dificultad, error y obstáculo

Los conceptos de dificultad, error y obstáculo están estrechamente relacionados (Socas, 2007). Sin embargo, es necesario diferenciarlos para luego, establecer las relaciones que correspondan. La dificultad se asocia a procesos del habla, escritura y las habilidades matemáticas, según lo señala la National Joint Committeeon Learning Disabilities (NJCLD, 1994). Por su parte, el error es la evidencia de un obstáculo, ocasionado por la aplicación de un conocimiento eficaz y válido en un contexto específico que, al extenderse a otro se torna en fuente de error (Brousseau, 1983). Así pues, los obstáculos son recurrentes y resistentes, por ello es fundamental el papel que desempeñe el docente, al elaborar sus actividades de intervención.

Como ya se señaló en el párrafo anterior, las dificultades de aprendizaje (en adelante, DA), involucran procesos del habla, la escritura y las habilidades matemáticas que pueden estar acompañadas por problemas o déficit de comportamiento producto de una disfunción del Sistema Nervioso Central (NJCLD, 1994, p. 65).

Las DA se clasifican en dos grupos: primarias y secundarias. Las *DA primarias* se producen en el plano del desarrollo de las funciones psicológicas superiores, localizadas en la corteza cerebral y se clasifican de la siguiente manera (Rebollo y Rodríguez, 2006):

- De las praxias: dispraxias.
- De las gnosias: disgnosias.
- Del lenguaje:
    - Oral: disfasias o retrasos específicos en el desarrollo del lenguaje.
    - Escrito: dislexia.
- De las habilidades matemáticas: la discalculia. (p. 140)

En las *DA secundarias*, los factores por los que el niño no aprende, son ajenas a él. Como, por ejemplo, un estado depresivo por alguna situación en particular; una enseñanza inadecuada o por una alteración sensorial (Rebollo y Rodríguez, 2006). De esta manera, si este factor desaparece, el niño ya no presentaría una dificultad de aprendizaje.

Por otro lado, cuando se habla de error, Rico (1995) considera que este es una posibilidad de adquirir y consolidar un conocimiento que puede llegar a formar parte del conocimiento científico. En este sentido, Charnay, (como se cita en Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein, 2004) señala que el error está presente en todo proceso de aprendizaje considerándose, así como representa, una fuente inagotable de riqueza para el docente, quien ayuda al estudiante a aprender de sus errores y a su vez nos permite, aprender de nuestros propios estudiantes.

Astolfi (1999) manifiesta una serie de concepciones sobre el error en el aprendizaje:

- **El error como un fallo del aprendizaje**. Describe la acción del docente en la que se encarga de corregir de manera inmediata el error presente tachándolo, por ejemplo, de un cuaderno de apuntes, sin pensar de antemano en alguna utilidad didáctica significativa para el alumno. Otra percepción, desde este punto de vista, es pensar que el error puede hacer que el profesor se sienta ineficaz sobre la enseñanza impartida y producto de esta percepción, se origine un síntoma de malestar.

- **El error como indicador de procesos**. Aquí sale a resaltar la corriente constructivista del aprendizaje, donde el error es considerado como un comunicador de los procesos intelectuales del alumno. Para ello, es necesario, sacarle provecho y profundizar sobre el mismo para mejorar los aprendizajes. En este sentido, “el error adquiere el estatus de indicador de tareas intelectuales que los alumnos van resolviendo y de los obstáculos con que se enfrenta su pensamiento a la hora de resolverlas” (Astolfi, 1999, p. 6).

Finalmente, un obstáculo se define como una dificultad que no se puede superar, es decir, que impide la nueva consecución de un conocimiento (Brousseau, 1989). Estos pueden ser de tres tipos: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos. Los primeros son producidos por un factor genético en el estudiante, los segundos son resultado del proceso de aprendizaje y el último, compromete al docente como agente del proceso de enseñanza. En esta investigación nos interesamos por los dos últimos debido a que se asocian al conocimiento matemático y a las decisiones del profesor, respectivamente.

Otra de las definiciones de obstáculo es la que elabora Nuñez (2007), quien lo considera como un conjunto de nociones o ideas, deficiencias de conocimiento, actitudes o creencias que en los hechos no permiten a los estudiantes la asimilación plena de nuevos conocimientos. De la misma manera, Robayna y Medina (1994), sostienen que los obstáculos no deben ser vistos como un producto del azar, sino que son persistentes en los estudiantes que se enfrentan a situaciones nuevas pero similares a las que observaron por primera vez.

En resumen, una *dificultad* es concebida como una manifestación intrínseca del aprendizaje donde el sujeto, en este caso el alumno, tiene que desarrollar su pensamiento bajo condiciones psicológicas que lo impiden. En cambio, un *error* es una concepción desacertada o equivocada de un concepto. Cuando este error persiste, se transforma en *obstáculo* impidiendo un nuevo aprendizaje.

2.3.2. Posturas frente al error matemático

Rico (1998) resume una serie de posturas frente al error matemático, en las cuales se recoge los aportes de Lakatos, Popper y Mulhern por su relación con esta investigación, así como, reflejan la preocupación por el estudio del error como una posibilidad para la adquisición de un saber.

Lakatos (1978, citado por Rico, 1998) considera al error como un medio para adquirir un nuevo conocimiento matemático producto de actividades como los ejemplos y contraejemplos, las hipótesis tentativas sobre la resolución de un problema, los conceptos incompletos y la necesidad de someter a prueba nuestros conocimientos, forman parte del proceso enriquecedor del aprendizaje diario.

Popper (1979, citado por Rico, 1998), plantea cuál es el papel del error en la adquisición del saber científico. Si bien es cierto que estas ideas hablan del saber experimental, nos ofrecen luces de cómo concebir el error en un plano matemático:

- *No hay fuentes últimas del conocimiento*. Afirma que todo tipo de conocimiento es bienvenido, por tanto, no se debe aniquilar la aparición de errores en el aprendizaje de las matemáticas sino aceptarlo como producto del conocimiento humano.

- Se debe *admitir el error como parte de nuestra adquisición del conocimiento.* Con esto, se toma como válido cualquier medio como hipótesis o conceptos que faciliten un nuevo conocimiento.

- La *necesidad de un ejercicio constante de la crítica*. Esto supone una búsqueda incesante de nuestros errores para modificar aquellos conocimientos deficientes y aproximarnos más a la verdad.

Finalmente, Mulhern (1989) menciona que el error es una producción inesperada de los estudiantes además es persistente, ya que en algunos casos requiere de una nueva reorganización de los conocimientos de los estudiantes. Finalmente, un error puede ser sistemático o al azar. Los primeros son de gran importancia sobre todo cuando se busca revelar los procesos mentales subyacentes que surgen en los estudiantes. En cambio, los que surgen al azar, generalmente, son producto de un descuido ocasional.

2.3.3. Categorización y clasificación de los errores matemáticos

En este apartado, centramos la atención en los errores vinculados a las matemáticas, para ello analizamos una serie de tipologías que serán la base para el posterior análisis de las producciones de los estudiantes.

2.3.3.1.Según el procesamiento de la información

Radatz (1980) realiza una clasificación basada en los errores que surgen debido a un mal procesamiento de la información proporcionada, ya sea en un ejercicio o problema matemático.

a) Errores debido a las dificultades de lenguaje: Se producen cuando hay una falta de comprensión semántica o del significado, reflejada en la resolución de problemas verbales cuando se traduce desde un lenguaje natural a un lenguaje matemático.

b) Errores debido a dificultades para obtener información espacial: Aparecen en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico.

c) Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: Producto de la deficiencia de contenidos y procedimientos matemáticos que son prerrequisitos para obtener un nuevo aprendizaje.

d) Errores debido a asociaciones incorrectas o a la rigidez del pensamiento: Producto de una falta de flexibilidad para codificar y decodificar la nueva información. Esto ocurre, por ejemplo, cuando un estudiante memoriza el procedimiento para resolver un problema, pero al verse con otro de diferente planteamiento, no puede darle solución.

e) Errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: Son producidos por la aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

Esta clasificación de errores propuesta por Radatz es importante porque abarca la diversidad de problemas matemáticos como los algebraicos, geométricos y aritméticos desarrollados durante el proceso de aprendizaje. Al identificarlos a tiempo, se evitará que este pueda convertirse en un obstáculo para el estudiante.

2.3.3.2.Según los constructos personales

Davis (1984) establece la siguiente clasificación de los errores matemáticos fundamentado en la teoría de esquemas o constructos personales que comparten distintos individuos en experiencias similares. De esta manera, el autor establece mecanismos para entender el pensamiento matemático humano y propone la siguiente clasificación:

a) Reversiones binarias: Se refiere a que al tener la operación de sumar 4 + 4=8, se genera $4x4 = 8$; de la misma forma cuando se tiene la multiplicación 5 x 2 =10, se genera $5^2 = 10$

b) Errores inducidos por el lenguaje y la notación: Se refiere cuando al operar con variables, no se reconoce el papel que juega cada elemento. Así se tiene que $3x - x = 3$. En este caso x al no estar acompañado de forma explícita por un número se comete el error de considerarse como cero, sin reconocer el coeficiente uno que lo precede; de esta forma se resta como si fueran dos naturales: 3 – 0 = 3

c) Errores por recuperación de un esquema previo: Como se observa en la figura 8, se refiere a errores en los cuales, por ejemplo, se traslada el algoritmo de los números naturales a los decimales, sin tener en cuenta la coma decimal:

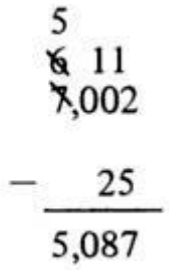


Figura 8. Errores por recuperación de un esquema previo.
Fuente: Davis, 1984, p.6.

d) Errores producidos por una representación inadecuada: En la figura 9 se observa una adición de dos cantidades representadas en unidades, decenas, centenas y millares. La primera cantidad constituye el número 1 238 que sumado con la segunda cantidad que representa 123 da como resultado 1 361 pero en la figura 9 no está correctamente representado. Se observa que el valor de las unidades el cual debería ser uno, aparece como 11 y no se distribuye la decena más uno.

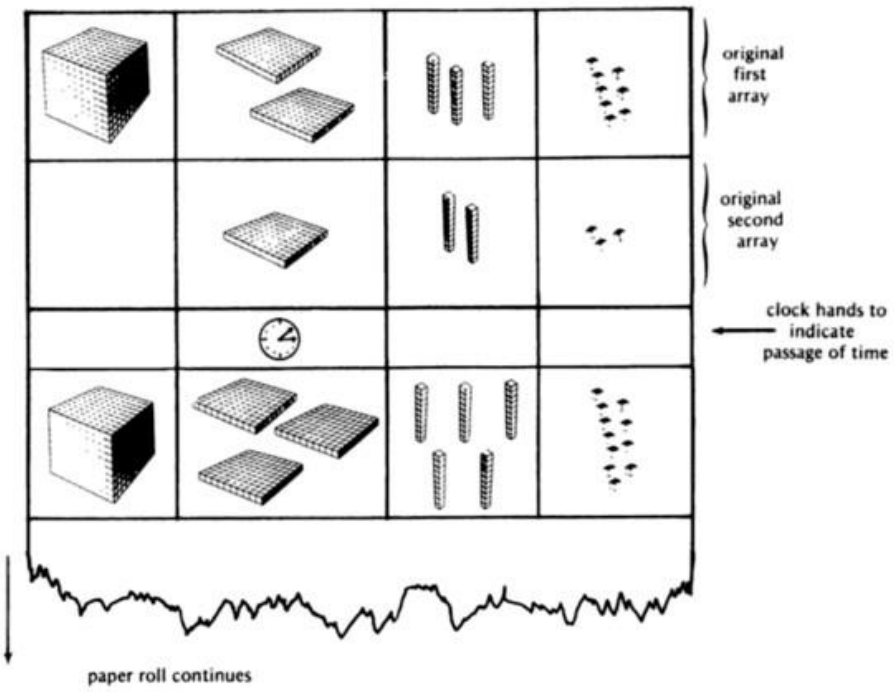


Figura 9. Errores producidos por una representación inadecuada.
Fuente: Davis, 1984, p.14

e) Reglas que producen reglas: Esto se cumple, por ejemplo, cuando se aplica las propiedades de una ecuación cuadrática a situaciones que no comparten la misma forma general, esto es, si se tiene que (x-a) (x-b) =0, entonces x=a y x=b. Sin embargo, para situaciones como (x-a) (x-b) =c; no se cumple que x=a+c y x=b+c, tal como se muestra en la figura 10:

Si $(x-3)(x-4)=0\ entonces\ x=3\ o\ x=4$

Se comete el error cuando:

Si $(x-3)(x-6)=2\ entonces\ x=5\ o\ x=8$

Figura 10.Errores producto de reglas que producen reglas.

Esta clasificación propuesta por Davis, tiene importancia para la investigación porque parte de los errores más comunes en las matemáticas escolares y algunos de estos errores se asocian con los resultados obtenidos en nuestros estudiantes.

2.3.3.3.Según una referencia empírica de los errores.

Movshovitz-Hadar, Zaslavky e Inbar (1987) elaboran una clasificación empírica de errores matemáticos tomando como referencias los errores cometidos por un grupo de estudiantes de secundaria:

a) Datos mal utilizados: Cuando la información proporcionada no es tratada correctamente por el estudiante, sino que se le asigna otro significado o simplemente se deja de usar. Esto sucede, por ejemplo, cuando en el problema "Halla el área de un cuadrado si su perímetro es 24 cm", el estudiante utiliza el dato de 24cm como lado del cuadrado, sin considerar que este es el perímetro.

b) Interpretación incorrecta del lenguaje: Producto de una traducción incorrecta de un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto; o de un concepto matemático a un símbolo diferente al usual; o finalmente, cuando se interpretan símbolos gráficos a términos matemáticos incorrectos. Por ejemplo, cuando se tiene el problema: "María va a un centro comercial y quiere comprar un MP3 que cuesta S/. 250,4. Si le falta S/. 32,2 para poder adquirirlo, ¿cuánto dinero tiene María? Se observa que este problema se puede resolver al calcular la diferencia de los dos datos, sin embargo, se lleva a cabo una mala interpretación

del lenguaje cuando este concepto se expresa con una operación diferente a la sustracción.

c) Inferencias no válidas lógicamente: Este tipo de error se aprecia sobretodo en problemas de lógica y se produce por un incorrecto razonamiento y no al contenido específico.

d) Teoremas o definiciones deformados: Producto de la deformación de un principio, concepto o regla matemática aplicado a un problema específico. Por ejemplo, cuando al hallar el área del triángulo, se aplica erróneamente el área del rectángulo.

e) Falta de verificación en la solución: Cuando el desarrollo de la operación es correcto, pero el resultado final no es la solución.

f) Errores técnicos: En este grupo están los errores de cálculo, donde ha implicado la incorrecta manipulación de algoritmos básicos.

Esta clasificación guarda relevancia para la investigación porque al igual que la anterior, se basa en resultados obtenidos por estudiantes que cursan la etapa escolar y que incluso pueden hacerse presentes en la realización de estudios superiores. Así como también forma parte de las tipologías que se tomarán de referencia para el análisis de resultados de la investigación.

2.3.3.4.Según una categorización de errores

Esteley–Villarreal (1990, 1992, 1996, p. 29) realizaron la siguiente categorización de errores matemáticos:

a) Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones.

b) No empleo o uso parcial de la información.

c) No verificación de resultados parciales o totales que se manifiesta en desconexión entre lo analítico y lo gráfico, respuestas consecutivas incoherentes entre sí y no comprobación de que los resultados obtenidos satisfacen la o las ecuaciones originales.

d) Empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones)

e) No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc. en un caso particular.

f) Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la nada.

g) Errores de lógica: justificaciones inadecuadas de proposiciones y uso inadecuado del lenguaje.

h) Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.

2.4.Errores en las operaciones aritméticas o de cálculo

Existen diferentes concepciones respecto a los errores en las operaciones de cálculo, pero, para la presente investigación, se toma en cuenta a Gómez (1994) y Centeno (1997), mencionados en los antecedentes, por la similitud con los resultados obtenidos en nuestros estudiantes.

El trabajo realizado por Gómez (1994) titulado *Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo,* resume una tipología de errores aritméticos basados en el aporte de Menchinskaya y Moro (1975, citado por Gómez, 1994) que los dividen en dos grupos o categorías:

a) Errores mecánicos: Surgen cuando el alumno pierde el control consciente en la resolución del problema de forma esporádica y no por una falta de razonamiento. Este error es producto del cansancio, falta de interés, distracción, nerviosismo, etc. Esto se refleja cuando un ejercicio que en primera instancia es resuelto incorrectamente, puede ser resuelto de forma correcta una segunda vez. Estos a su vez, se clasifican en *perseverativos* y según la *inercia de la acción*.

i. Como se observa en la figura 11, un error es *perseverativo* cuando un número queda fijado en la mente del alumno, como consecuencia de una operación anterior:

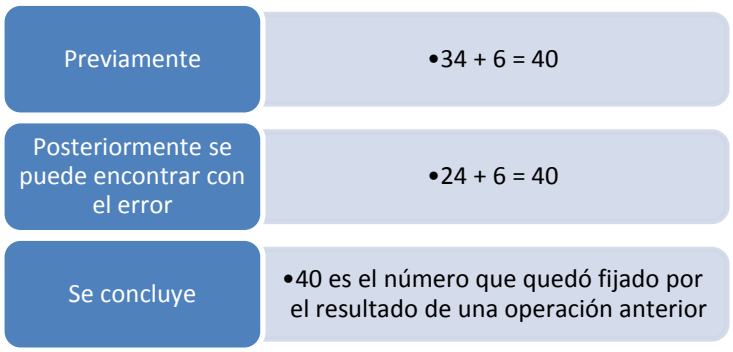


Figura 11. Error mecánico perseverativo.

ii. Como se observa en la figura 12, el error por *inercia de acción*, se manifiesta cuando al resolver consecutivamente operaciones de adición, aparece una sustracción, entonces el estudiante aplica el algoritmo de la primera operación (adición) porque ha quedado fijado en él. Por lo tanto, resuelve la sustracción como si fuera una adición.

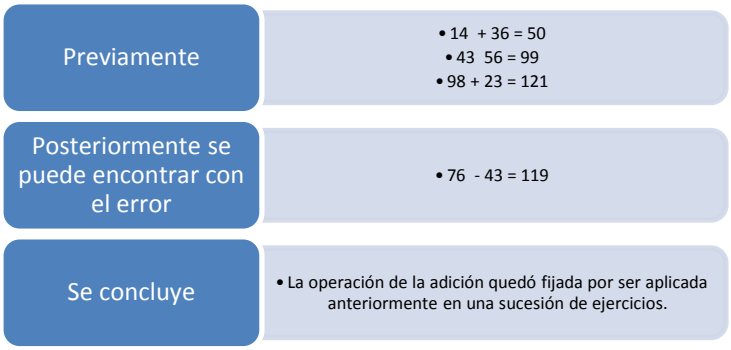


Figura 12. Error mecánico por inercia de acción.

b) Errores de calidad: Este se debe al domino de conocimientos aritméticos que el alumno maneja. Así tenemos:

i. Errores por memorización pobre establecida: Estos se manifiestan, por ejemplo, cuando se tiene que 8 x 9=75 o 73, por una falta de dominio de la tabla de multiplicar.

ii. Errores por la forma en que se aprendieron las reglas: Cuando se intenta aplicar una regla como la de sumar o restar números acabos en ceros, donde se opera separando y bajando los ceros finales, los estudiantes suelen aplicarla para la división en 1000÷ 200 = 50 o que 96÷16 = 10.

La clasificación que propone Centeno (1997) se basa en los errores comunes de estudiantes, entre 11 a 15 años, que cometen al realizar operaciones de cálculo con números decimales. Esta clasificación es tomada en cuenta por Konic (2011) y Zapata, A., Ortiz, F., Rojas, B., Torres Albarrán, R., & Vásquez, S. (2014), mencionados en los antecedentes de nuestra investigación.

a) Errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición.

Son los errores que indican que el sistema de numeración decimal no se ha comprendido completamente. Al no comprender el primero, que es la base de los números decimales, como consecuencia tampoco se podrá comprender la escritura de números menores que la unidad. Por ejemplo, cuando se pide a los estudiantes que escriban en dígitos el número “cincuenta milésimas”, se obtienen los resultados como 50 000 ó 0,50 000, asociando inmediatamente la palabra “milésimas” con “millares” y, por ende, agregando tres ceros. Por lo tanto, si no se tiene claro el valor de posición de los millares, tampoco se comprenderá las milésimas como un valor de posición menor que la unidad.

b) Errores relacionados con el cero

Estos errores se relacionan con la forma en la que los estudiantes consideran o ignoran esta cifra al interpretar números.

Por ejemplo, en la figura 13, cuando se tienen los números 3,45 y 3,450; al tener el segundo número un 0, se toman como números diferentes, sin tener en cuenta que el cero a la derecha del número decimal no tiene valor.

$$3{,}45 \neq 3{,}450$$

$$45 \neq 450$$

Figura 13. Errores relacionados con el cero.
Fuente: Centeno, 1997.

Y en otros casos, el cero se ignora al considerar el número decimal 0,067 como el número natural 67, perdiendo completamente la estructura del número al inicio.

c) Errores relacionados con el orden entre decimales.

Estos errores se dan cuando al tener un conjunto de números como 5,45; 5,5 y 5,05 los estudiantes los ordenan teniendo en cuenta las cifras después de la coma decimal y considerándose como números naturales. Así se tiene que ordenado de forma ascendente colocarán: 5,05; 5,5 y 5,45.

d) Errores relacionados con las operaciones

Los errores cometidos al realizar operaciones se resumen en que los algoritmos que se empleaban para efectuar números naturales se emplean de la misma forma para los números decimales, sin tomar en cuenta que se trata de un conjunto con características propias.

- 0,10 + 0,20 + 0,80 = 0,110
- 2,15 x 10 = 2,150
- 4,14 ÷ 2 = 2,7

Estas dos posturas de errores de cálculo o aritméticos, nos permiten proponer una tipología con la que se realiza el análisis de los errores hallados en la investigación.

Capítulo 3
Metodología de la investigación

3.1.Tipo de investigación

La presente investigación se sitúa en el *paradigma interpretativo - cualitativo*, porque permite comprender el conocimiento, en torno a las operaciones con números decimales, de un grupo de estudiantes de EBR sin pretender establecer leyes generales para todos los individuos (Pérez, 2008). Así, tiene una *perspectiva holística* porque se estudia a las personas en el contexto en que se hallan y no son reducidos a variables, sino se consideran como un todo. De esta manera, la información es proporcionada desde las aulas y recoge evidencias de los estudiantes sobre las operaciones con números decimales.

El diseño empleado es *flexible y mixto,* en cuanto contempla aspectos cualitativos y cuantitativos que enriquecen el trabajo y le proporciona cierta diversidad metodológica que permite extraer datos de la realidad con el fin de contrastarlos (Pérez, 2008). Además, el hecho de aplicar un paradigma cualitativo, no restringe la aplicación del método cuantitativo (Cook y Reichardt, 1986).

Por este motivo, la metodología aplicada es *mixta* porque permite recoger datos a partir de varios métodos para proporcionar una mejor comprensión del problema (Castro y Godino, 2011) y a la vez, permite una validación de resultados ya que "incrementa el alcance, la profundidad y la consistencia en las actuaciones metodológicas" (Flick, 2007, p. 244).

3.2.Informantes

La población está determinada por un total de 205 niños entre 10 y 11 años de edad que cursan el quinto ciclo de EBR (5^{to} y 6^{to} grado de primaria) en una institución particular de la provincia de Sullana del departamento de Piura, distribuidos en dos aulas de secciones A y B, así como se muestra en la tabla 4.

Tabla 4. Estudiantes que conforman la población investigada.

Quinto ciclo			
Quinto Grado de Primaria		***Sexto Grado de Primaria***	
Secciones	N° Alumnos	Secciones	N° Alumnos
A	54	A	49
B	53	B	49

Estos estudiantes pertenecen a un nivel socioeconómico A/B[3], es decir, en su mayoría cuentan con padres profesionales, en trabajos estables y con servicios básicos además de cable e internet. Asimismo, gozan de buena salud y no presentan casos de discapacidad o problemas de aprendizaje. Sin embargo, hay estudiantes que no pasan mucho tiempo con sus padres, ya sea por razones laborales o por conflictos familiares, dejándolos bajo el cuidado de un familiar como apoderado.

La *muestra* está conformada por las aulas de Quinto Grado "A" y Sexto Grado "A", que son elegidos mediante un *muestreo por juicio*[4] (Pineda, 1994*)*. Se toma una sección de cada grado, debido a que las características que presentan son similares. Cabe mencionar que cuando se aplicaron los instrumentos algunos de los estudiantes faltaron, motivo por el cual no se les ha considerado dentro del análisis de resultados porque no facilitaba el contraste entre el examen diagnóstico y el examen final. Por este motivo, la muestra queda definida por 93 informantes de ambos grados como se aprecia en la tabla 5:

Tabla 5. Estudiantes que conforman la muestra de la investigación.

Grado y Sección	***N° Alumnos***
Quinto Grado A	47
Sexto Grado A	46

[3] Según la Regla de los Niveles Socioeconómicos (NSE) 2018 que establece 7 niveles según las características del hogar.

[4] También llamado muestreo por criterio o discrecional. Consiste en que el investigador selecciona a los individuos a través de su criterio profesional, basado en la experiencia de otros estudios anteriores o en su conocimiento sobre la población.

De la muestra anterior, se eligen tres estudiantes: (dos de quinto y uno de sexto grado), a partir de un *muestreo de casos extremos o inusuales*[5] (Pineda, 1994), para indagar con mayor profundidad sobre los errores evidenciados. Además, estos estudiantes presentan un bajo rendimiento en los dos bimestres anteriores en el área de matemáticas.

3.3. Técnicas e instrumentos de recogida de información

3.3.1. Test elaborado por el docente

Es una técnica de recogida de información impersonal que supone una lista de preguntas (en este caso abiertas[6]), preparadas de antemano y validadas por un grupo de expertos (Rodríguez, Gil y García, 1996). Para la presente investigación, se aplicaron dos test; *examen diagnóstico* y *examen final*. Entre estos dos se llevó a cabo un periodo de enseñanza.

Los estudiantes de la muestra resolvieron los dos exámenes con ejercicios y problemas de cálculo con números naturales y decimales. Estos ítems fueron establecidos a partir de las tipologías existentes evidenciadas en el marco teórico.

3.3.1.1. Examen diagnóstico

Tiene como objetivo que los informantes de la muestra, efectúen operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) con números decimales, tema correspondiente al dominio Número y Operaciones (DCN, 2009).

El examen diagnóstico está estructurado en 12 ejercicios[7], 3 son de adición, 3 de sustracción, 3 de multiplicación y 3 de división así como se observa en la figura 14. Así pues, este instrumento permitió recoger datos sobre los errores frecuentes, al efectuar operaciones con números decimales, tomando en cuenta las tipologías desarrolladas en el marco teórico.

---

[5] Consiste en escoger casos con cualidades especiales o diferentes a las del grupo en general, con el fin de conocer a fondo ciertos temas.

[6] Recogen respuestas propias del lenguaje de los informantes (Rodríguez, Gil y García, 1996).

[7] Empleo repetitivo de una técnica matemática adquirida por la práctica que permite consolidar las habilidades numéricas básicas (Pozo, 1998).

EXAMEN N°01 – CUARTO PERÍODO – MATEMÁTICA

NOMBRE Y APELLIDOS:	N° DE OR.

DOMINIO	Número y operaciones
INDICADOR DE LOGRO	Resuelve operaciones con números decimales

Efectúa las operaciones realizando el procedimiento.

a) 12,45 + 23,51	b) 457,6 – 145,487	c) 1,45 x 3,6
d) 123,63 + 89,142	e) 478 – 364,145	f) 478 : 0,4
g) 875 + 35,47	h) 45 x 1,2	i) 15,6 : 3
j) 96,44 – 36,47	k) 45,6 x 23	l) 6,9 : 0,3

Figura 14. Examen diagnóstico para estudiantes del quinto y sexto grado de educación primaria.

3.3.1.2. Examen final

Este instrumento tiene como objetivo contrastar los resultados obtenidos en el examen diagnóstico, luego de una etapa de enseñanza-aprendizaje, para determinar qué operaciones saben realizar los estudiantes y ampliar la información sobre la diversidad de errores de acuerdo a cada tipología. Asimismo, nos permite conocer si los informantes que resuelven correctamente las operaciones de cálculo, también son capaces de resolver un problema con enunciados, así como de desarrollar problemas con enunciados o con imágenes que involucran a los números decimales y naturales con las áreas de figuras geométricas.

El examen final está estructurado en dos Bloques (Figura 15). El *primero* está centrado en el dominio de Número y Operaciones y contiene dos partes. La primera contiene las 12 operaciones propuestas en el examen diagnóstico, con el fin de contrastar los resultados del antes y después del periodo de enseñanza-aprendizaje correspondiente a números decimales. En la segunda parte, se plantea un problema[8] de enunciado verbal donde se espera que los informantes apliquen los algoritmos de la adición y sustracción de decimales.

El segundo bloque del examen final corresponde al dominio de Geometría y medida, aquí se proponen 9 preguntas. Las 6 primeras son problemas con imágenes de figuras como el cuadrado, el rectángulo y el triángulo, en los que hay que hallar el área respectiva, a partir de datos con números naturales y decimales. Las 3 últimas preguntas, a diferencia de las anteriores, son problemas de enunciado verbal en los que hay que encontrar el área del cuadrado, triángulo y rectángulo, respectivamente.

[8] Se define como una situación planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno sino que deberá buscar, investigar, establecer relaciones, etc.; para afrontar una situación nueva (Ariza, García, y Rivero, 2016). Este podrá manifestarse a partir de un enunciado o una imagen.

CUESTIONARIO PARA ESTUDIANTES DEL QUINTO Y SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El presente cuestionario forma parte de la Tesis de Licenciatura *"Errores aritméticos al efectuar operaciones con números decimales. Un estudio en quinto ciclo de Educación Básica Regular"*. Así pues, se busca *identificar y clasificar dichos errores.* En este sentido, se pide su colaboración y total disponibilidad para completar, de forma detalla, las preguntas que se plantean, dado que las respuestas serán de crucial importancia para concretar esta investigación. Se garantiza la confidencialidad de la información recogida así como el anonimato de los encuestados.

¡Muchas gracias!

DATOS DEL INFORMANTE			
N° orden:		Fecha de aplicación:	
Grado y sección:		Duración:	

I. OPERACIONES CON DECIMALES

Dominio: Número y operaciones.
Indicador: Efectúa operaciones de suma, resta, multiplicación y división de decimales.

1. Efectúa realizando el procedimiento.

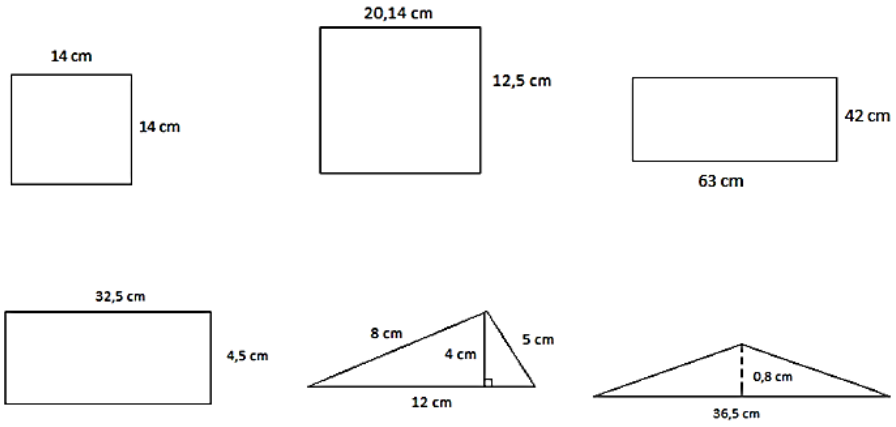
a) 12,45 + 23,51	b) 457,6 – 145,487	c) 1,45 x 3,6
d) 123,63 + 89,142	e) 478 – 364,145	f) 478 : 0,4
g) 875 + 35,47	h) 45 x 1,2	i) 15,6 : 3
j) 96,44 – 36,47	k) 45,6 x 23	l) 6,9 : 0,3

2. Resuelve el siguiente problema mostrando el procedimiento realizado:
María va a un centro comercial y quiere comprar un MP3 que cuesta S/. 250,4. Si le falta S/. 32,2 para poder adquirirlo, ¿cuánto dinero tiene María?

II. ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Dominio: Geometría.
Indicador: Calcula el área y perímetro de las figuras geométricas.

1. Calcula el área de las siguientes figuras, mostrando el procedimiento seguido:



2. Resuelve realizando el procedimiento:
   a) Halla el área de un cuadrado si su perímetro es 24 cm.

   b) Halla el área de un triángulo si su base es 12,5 y su altura es 6.

   c) Un patio de forma rectangular tiene 12,5 m de ancho y 24,3 m de largo. Calcula el área de dicho patio.

Figura 15. Examen final para los estudiantes del quinto y sexto grado de educación primaria.

3.3.2. Entrevista

Se define como "la interacción entre dos personas, planificada y que obedece a un objetivo en el que el entrevistado da su opinión sobre un asunto y, el entrevistador, recoge e interpreta esa visión" (Campoy y Gomes, 2009, p. 288).

El tipo de entrevista realizada es la *No Estructurada* porque se caracteriza por comprender, más que explicar y adopta la relación de estímulo - respuesta sin esperar la respuesta objetivamente verdadera, sino subjetivamente sincera (Ruiz, 2007). En esta entrevista el papel del investigador es formular preguntas sin una estructura fija, es decir, él decide cuándo y en qué formato hacerlas. Y en cuanto al informante, este aporta respuestas abiertas proporcionadas libremente. También se le denomina *entrevista abierta* porque toma como referencia una guía general del contenido, como es *comprender el procedimiento seguido por los estudiantes al resolver operaciones con números decimales*; pero el entrevistador tuvo la flexibilidad para manejarla.

Esta entrevista es aplicada a una muestra secundaria conformada por tres estudiantes (dos de quinto A y uno de Sexto A) con el fin de comprender las posibles causas de los errores cometidos. A cada uno de los informantes se le aplicó una entrevista en las instalaciones de la institución educativa y dentro del horario escolar. Para el registro de la entrevista, se hizo uso de una grabadora de voz y los diálogos realizados se transcribieron poniendo en reserva la identidad de los estudiantes (Anexo n°01).

Finalmente, las técnicas e instrumentos de la presente investigación se resumen en la tabla 6 de la siguiente manera:

Tabla 6. Instrumentos, técnicas y formato de registro empleado en la investigación.

Instrumentos	***Técnicas***	***Formato de registro***
Entrevista	Interrogación	Audio
Test elaborado por el docente (examen diagnóstico y examen final)	Test	Fotografía

3.4.Triangulación

En esta etapa se combinan los métodos, las teorías, los datos y las diferentes perspectivas de los investigadores con el fin de aportar una mejor comprensión de un fenómeno (Flick, 2007).

La investigación desarrolla un tipo de *triangulación de datos*[9] que consiste en emplear diferentes fuentes para ser analizadas en distintas fechas e informantes (Denzin, 1989). Este proceso se lleva a cabo al momento de contrastar los datos obtenidos en los test elaborados por la docente para contrastar los resultados obtenidos entre los informantes de Quinto Grado "A" y Sexto Grado "A".

3.5.Codificación de datos

La codificación de los datos permite organizar la información que se obtiene al aplicar los test elaborados por el docente empleando un tipo de *codificación abierta* en la que se expresa los datos en forma de conceptos para asignarles anotaciones o códigos con un significado distinto (Flick, 2007). En esta investigación se realizan tres codificaciones: de los informantes, de los ítems de los test y de las tipologías de errores.

La *primera codificación* es en base a los informantes. Cada estudiante recibe un código estructurado de la siguiente manera: Informante/Grado/Sección/Número de orden, tal como se muestra en la figura 16. De este modo, para indicar la muestra constituida por los estudiantes de Quinto Grado "A" se aplicarán los códigos I5A-1; I5A-2; I5A-3;…; I5A-54[10]; y para los de Sexto Grado "A", se usaran los códigos I6A-1; I6A-2; I6A-3; I6A-4; … I6A-49. Asimismo, en la realización de la entrevista se designó el código P para nombrar al docente que dirige las preguntas a los informantes.

[9] Según Denzin (1989) existen cuatro tipos de triangulación: De datos, del investigador, de la teoría y de la metodología.

[10] No consideramos a los informantes I5A-9, I5A32, I5A35, I5A36, I5A38, I5A-47, I5A48, I6A-16, I6A-33 y I6A-35 en el análisis de datos por que faltaron en la aplicación de los test.

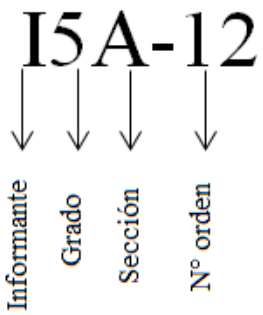
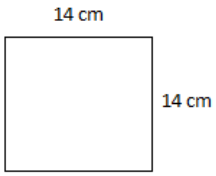
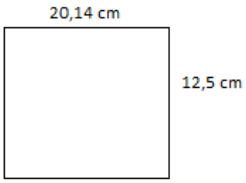
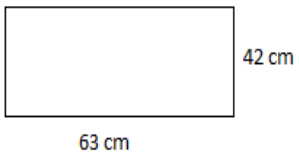
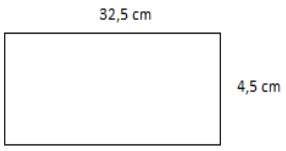
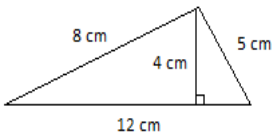


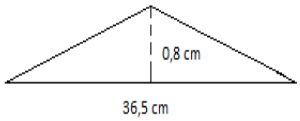
Figura 16. Codificación de los informantes.

La *segunda codificación* identifica los aspectos (A) planteados en los ítems que componen los test empleados. Los aspectos A1 al A4 son abordados tanto el examen diagnóstico como el examen final, mientras que de A5 hasta A14 solo se abordar en el examen final. En cada caso se indica lo que se espera en las respuestas de los informantes (Tabla 7).

Tabla 7. Codificación de los ítems planteados en el examen diagnóstico y final.

Código	***Aspecto abordado***	***Ítems***	***Propósito***
A1	Adición de números decimales.	a)12,45 + 23,51 d) 123, 63 + 89,142 g) 875 + 35,4	Se espera que el informante aplique correctamente el algoritmo de la suma de decimales.
A2	Sustracción de números decimales	b)457,6 – 145,487 e) 478 – 364,145 j) 96,44 – 36,47	Se espera que el informante aplique correctamente el algoritmo de la resta de decimales.
A3	Multiplicación de números decimales.	c)1,45 x 3,6 h) 45 x 1,2 k) 45,6 x 23	Se espera que el informante aplique correctamente el algoritmo de la multiplicación de decimales.
A4	División de números decimales.	f)478÷ 0,4 i) 15,6÷ 3 l) 6,9÷ 0,3	Se espera que el informante aplique correctamente el algoritmo de la división de decimales.

A5	Problema (con enunciado) de adición y sustracción de números decimales.	María va a un centro comercial y quiere comprar un MP3 que cuesta S/. 250,4. Si le falta S/. 32,2 para poder adquirirlo, ¿cuánto dinero tiene María?	Se espera que el informante interprete correctamente el problema de resta de decimales.
A6	Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos naturales.		Se espera que el informante conozca el área del cuadrado y la aplique a partir de datos con números naturales.
A7	Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos decimales.		Se espera que el informante conozca el área del rectángulo y la aplique a partir de datos con números decimales.
A8	Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos naturales.		Se espera que el informante conozca el área del rectángulo y la aplique a partir de datos con números naturales.
A9	Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos decimales.		Se espera que el informante conozca el área del rectángulo y la aplique a partir de datos con números decimales.
A10	Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos naturales.		Se espera que el informante conozca el área del triángulo y la aplique a partir de datos con números naturales. Así como identifique aquellos datos que son relevantes de aquellos que no lo son.

A11	Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos decimales.		Se espera que el informante conozca el área del triángulo y la aplique a partir de datos con números decimales.
A12	Problema (con enunciado) sobre el área del cuadrado.	Halla el área de un cuadrado si su perímetro es 24 cm.	Se espera que el informante interprete correctamente el problema, al inferir previamente el lado del cuadrado para después aplicar su área.
A13	Problema (con enunciado) sobre el área del triángulo.	Halla el área de un triángulo si su base es 12,5 y su altura es 6.	Se espera que el informante interprete el problema y aplique el área del triángulo con datos decimales.
A14	Problema (con enunciado) sobre el área del rectángulo.	Un patio de forma rectangular tiene 12,5 m de ancho y 24,3 m de largo. Calcula el área de dicho patio.	Se espera que el informante interprete el problema y aplique el área del rectángulo con datos decimales.

La *tercera codificación* asocia a las tipologías revisadas en el marco teórico (y sus respectivas categorías) con los aspectos abordados en los test elaborados para recoger información (Tabla 8). Esta asociación permite analizar las coincidencias y lo relevante de esas propuestas para establecer una tipología de análisis que permita clasificar y caracterizar los errores matemáticos encontrados, considerando la frecuencia de los mismos. Cabe mencionar que a cada categoría indicada se asocia más de un aspecto abordado, esto debido a que en un solo ejercicio o problema se comete más de un tipo de error, pero, para el análisis solo se han considerado los aspectos que proporcionan información más resaltante.

Tabla 8. Relación de las tipologías de errores con los aspectos de los exámenes.

Tipología	***Categorías***	***Aspecto***
Según el procesamiento de la información. (Radatz, 1980)	Errores debidos a dificultades de lenguaje.	A5, A12, A13, A14
	Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	A6, A7, A8 A9, A10, A11
	Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	A6, A7, A8, A9, A11, A13, A14
	Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.	A1, A2, A3, A4
Según los constructos personales. (Davis, 1984)	Errores por recuperación de un esquema previo.	A1, A2, A3, A4
Según una referencia empírica de los errores. (Movshovitz-Hadar, Zaslavky e Inbar, 1987)	Datos mal utilizados.	A10, A12
	Interpretación incorrecta del lenguaje.	A5, A12, A13, A14
	Teoremas o definiciones deformados.	A6, A7, A8, A9, A11, A13, A14
	Falta de verificación en la solución.	A1, A6, A13
	Errores técnicos.	A1, A2, A3, A4
Según una categorización de errores (Esteley y Villareal, 2002)	No empleo o uso parcial de la información.	A10, A12
	No verificación de resultados parciales o totales.	A6, A13
	Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la nada.	A10, A12
	Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.	A6, A13
Tipología de los errores aritméticos. (Menchinskaya y Moro, 1975, citado por Gómez, 1994)	Errores mecánicos.	A6,A13
	Errores de calidad.	A6, A7, A8, A9, A11, A13, A14
Errores en el cálculo con números decimales. (Centeno, 1997)	Errores relacionados con las operaciones.	A1, A2, A3, A4

Evidenciadas y analizadas las semejanzas entre las propuestas de los diferentes autores (Tabla 8), se propone una tipología de errores (E) para analizar los datos recogidos en esta investigación (Tabla 9).

Tabla 9. Tipología de errores propuesta para el análisis de los resultados.

Código	***Tipologías propuestas***	***Categorías***[11]	***Aspectos abordados***
E1	Errores derivados de la incorrecta ejecución de algoritmos básicos.	Errores técnicos. Errores por recuperación de un esquema previo.	A1, A2, A3, A4
E2	Errores debidos a un empleo incorrecto de los datos o la información.	No empleo o uso parcial de la información. Datos mal utilizados.	A10, A12
E3	Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas gráficos.	Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	A6, A7, A8 A9, A11
E4	Errores debidos a la falta de verificación de los resultados.	Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo. No verificación de resultados parciales o totales.	A6, A13
E5	Errores debidos a definiciones deformadas o una falta de conceptos previos.	Errores de calidad.	A6, A7, A8, A9, A11, A13, A14
E6	Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas verbales.	Interpretación incorrecta del lenguaje.	A5, A12, A13, A14

A continuación, se describen los seis tipos de errores (E) que se consideran para el análisis de los resultados (Tabla 9), tomando en cuenta los trabajos de referencia desde los que se han definido, así como las categorías asociados:

[11]Dentro de todas las categorías asociadas a un tipo de error se han resumido solo las siguientes por la similitud en su definición.

- **Errores de Tipo E1:** *Errores derivados de la incorrecta ejecución de algoritmos básicos.*

Basado en los aportes de Movshovitz-Hadar, Zaslavky e Inbar (1987), Davis (1984) y Centeno (1997), estos errores se caracterizan por la aplicación de reglas o estrategias de cálculo ya sea en números naturales o cuando se traslada el algoritmo a las operaciones con números decimales.

Se evidencian en los ítems que abordan los aspectos: adición de números decimales (A1), sustracción de números decimales (A2), multiplicación de números decimales (A3) y división de números decimales (A4), tanto en el examen diagnóstico como en el final. Por ejemplo, en la figura 17 muestra los ítems correspondientes a A1 y A2 (adición y sustracción de números decimales) en que los errores que se esperan encontrar, en su mayoría, son aquellos relacionados con las reglas para operar de los números naturales (Centeno, 1997).

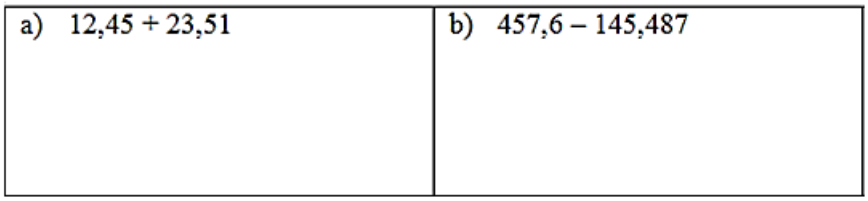


Figura 17. Ítems asociados a la Adición de números decimales (A1) y Sustracción de números decimales (A2) de los exámenes diagnóstico y final.

En esta tipología se analizan dos categorías: Errores técnicos y Errores por recuperación de un esquema previo. Los *errores técnicos* se caracterizan por una deficiente manipulación de un algoritmo, como, por ejemplo, cuando se multiplica 5 x 6 = 35 o cuando se suma 5+9=15. Mientras que los *errores por recuperación de un esquema previo*, los encontramos cuando se traslada el algoritmo de los números naturales a los decimales, sin tener en cuenta la coma decimal.

- **Errores de Tipo E2:** *Errores debidos a un empleo incorrecto de los datos o la información.*

Se basa en los aportes de Movshovitz-Hadar, Zaslavky e Inbar (1987) y Esteley y Villareal (2002). Se analizarán a partir de los problemas sobre el área del triángulo con datos naturales (A10) y problemas (de enunciado) sobre el área del cuadrado (A12), propuestos en el examen final. Consideramos que la resolución de estos, evidencia la capacidad del informante de determinar qué datos son necesarios para la solución del problema y cuáles son elementos distractores. Como puede verse en la figura 18, en A10 se presentan dos datos innecesarios (los lados 8cm y 5 cm), donde el error se evidenciará al momento que el informante haga uso de esas cantidades al hallar el área del triángulo en vez de la base de 12 cm y de la altura de 4cm.

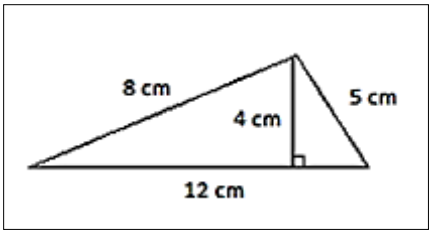


Figura 18. Ítem asociado al Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos naturales (A10) del examen final.

De la misma forma ocurre en el aspecto A12 (***Figura 19***), donde el estudiante primero tiene que inferir el lado del cuadrado con el dato que dan del perímetro, para después aplicar la fórmula de su área.

a) Halla el área de un cuadrado si su perímetro es 24 cm.

Figura 19. Ítem asociado al Problema (con enunciado) sobre el área del cuadrado (A12) del examen final.

En esta tipología se analizarán dos categorías: No empleo o uso parcial de la información y Datos mal utilizados. Cuando se habla de *no empleo o uso parcial de la información* se refiere a omitir algunos datos del problema o ejercicio, a usar aquellos que no son relevantes para la resolución o cuando se inventan datos de la nada. De igual modo, la

categoría de *datos mal utilizados* se evidencia cuando sí se toman los datos del problema o ejercicio, pero se utilizan de forma incorrecta.

- **Errores de Tipo E3:** *Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas gráficos.*

Este tipo de error parte del aporte de Radatz (1980), y se evidencia en los problemas con imagen sobre: el área del cuadrado con datos naturales (A6), el área del rectángulo con datos decimales (A7), el área del rectángulos con datos naturales (A8), el área del cuadrado con datos decimales (A9), el área del triángulo con datos decimales (A11)[12] propuestos en el examen final. Así, por ejemplo, se espera que en los problemas mostrados en la figura 20 el estudiante no sea capaz de interpretar los datos y la información espacial.

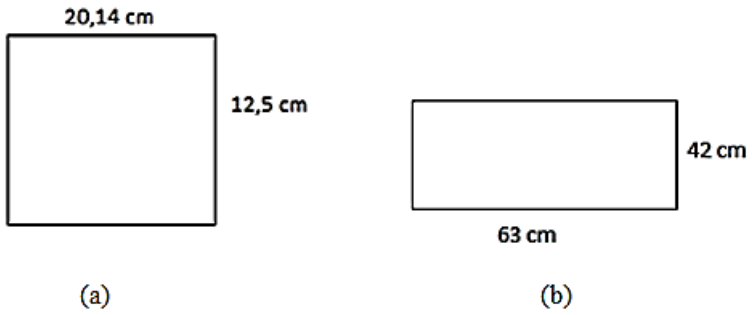


Figura 20. (a) Ítem asociado al Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos decimales (A7) y (b) Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos naturales (A8).

Dentro de este tipo se encuentra la categoría de *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial*. Aquí se analizan los problemas donde se pide determinar un concepto geométrico como el área de las figuras planas y para esto, se requiere identificar los elementos de cada una. De esta forma, se evidencia una deficiencia de un contenido geométrico.

[12] El aspecto A10, pese a que es un problema con imagen, no se toma en cuenta aquí porque posteriormente se analiza en el tipo de error E2.

- **Errores de Tipo E4:** *Errores debidos a la falta de verificación de los resultados.*

Tomando en cuenta los aportes de Menchinskaya y Moro (1975), Movshovitz-Hadar, Zaslavky e Inbar (1987) y Esteley y Villareal (2002), estos errores se evidencian en todos los aspectos, pero para efecto del análisis solo nos enfocaremos en los relacionados con el problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos naturales (A6) y el problema (con enunciado) sobre el área del triángulo (A13) propuestos en el examen final (Figura 23). Este tipo de error se justifica en la que medida que el estudiante puede llegar a conocer el concepto previo y la estrategia más adecuada, pero al momento de dar la respuesta final, comete un error inconscientemente producto del cansancio o cualquier situación ajena a sus conocimientos.

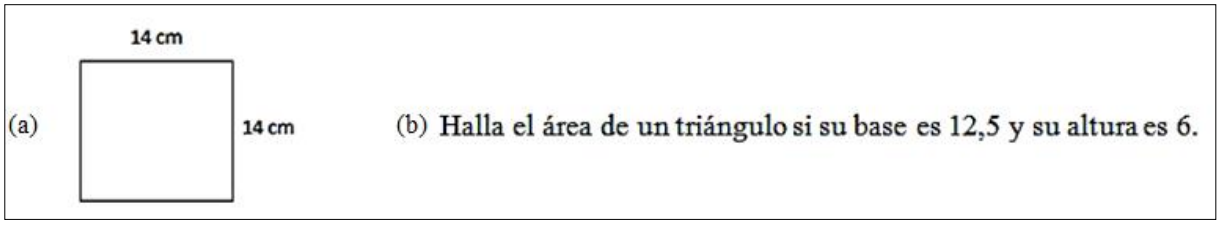


Figura 21. (a) Ítem asociado al Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos naturales (A6) y (b) Problema (con enunciado) sobre el área del triángulo (A13).

Dentro de esta tipología se tienen las categorías de Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo y No verificación de resultados parciales o totales. Cuando se mencionan los *errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo* se hace referencia a los datos de un problema o ejercicio son copiados de forma incorrecta y, por ende, se obtiene un resultado diferente al esperado. Mientras que la *no verificación de resultados parciales o totales,* nos lleva a observar errores en los que el problema o ejercicio se interpretan correctamente, pero al momento de manipular los datos, ocurre una respuesta parcial o total diferente de la esperada y de ahí surge el error.

- **Errores de Tipo E5:** *Errores debidos a definiciones deformadas o una falta de conceptos previos.*

Estos errores se basan en los aportes de Radatz (1980), Menchinskaya y Moro (1975) y Movshovitz-Hadar, Zaslavky e Inbar (1987) y se evidencian sobre todo en los problemas (con imagen) sobre el área del: cuadrado con datos naturales (A6), rectángulo con datos decimales (A7), rectángulo con dados naturales (A8), cuadrado con datos decimales (A9) y triángulo con datos decimales (A11). También en los problemas (con enunciado) sobre el área del triángulo (A13) y del rectángulo (A14)[13] propuestos en el examen final. En estos los informantes han de evidenciar su conocimiento respecto del concepto de área y las fórmulas para calcular está en los polígonos que se indican. Además, la relación entre dichas fórmulas es necesaria para evitar confusiones como las que se pueden propiciar al resolver los ítems mostrados en la figura 22.

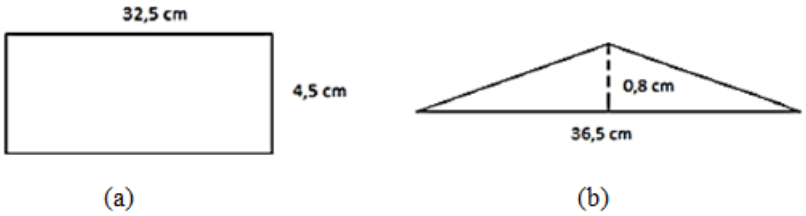


Figura 22. (a) Ítem asociado al Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos decimales (A9) y (b) Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos decimales (A11).

Aquí se analiza la categoría asociada a los *Errores de calidad* que se produce debido a una falta de dominio de concepto matemático previo que facilite la resolución de un problema o ejercicio. Tal es el caso en el que en un problema donde se pide determinar el área de un triángulo, este se confunda con el área de un rectángulo o simplemente haya un desconocimiento de la fórmula.

[13] No se han tomado los aspectos A10 y A12 en esta clasificación porque su análisis será contemplado en el tipo de error E2.

- **Errores de Tipo E6:** *Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas verbales.*

Este tipo de error se fundamenta en los aportes de Radatz (1980), Esteley y Villareal (2002) y Movshovitz-Hadar, Zaslavky e Inbar (1987) y se consideran para su análisis los problemas (con enunciados) de adición y sustracción de números decimales (A5), sobre el área del cuadrado (A12), sobre el área del triángulo (A13) y sobre el área del rectángulo (A14) propuestos en el examen final. Estos aportan distinta información sobre los números decimales. Por ejemplo, en el aspecto A5 (Figura 17) se espera que el informante interprete correctamente el problema de resta de decimales.

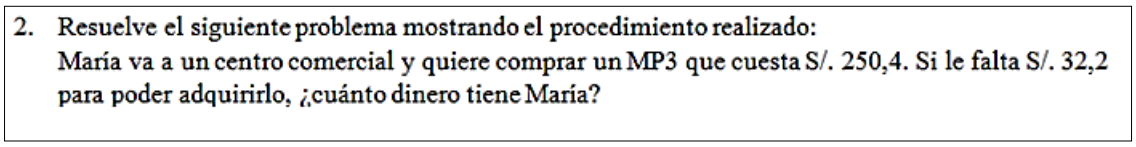

2. Resuelve el siguiente problema mostrando el procedimiento realizado:
María va a un centro comercial y quiere comprar un MP3 que cuesta S/. 250,4. Si le falta S/. 32,2 para poder adquirirlo, ¿cuánto dinero tiene María?

Figura 23. Ítem asociado al Problema (con enunciado) de adición y sustracción de números decimales (A5).

Sin embargo, en el aspecto A13 (Figura 18), pese a que también es un problema verbal como el anterior, implica una operación de cálculo del área del triángulo a partir de la base y la altura.

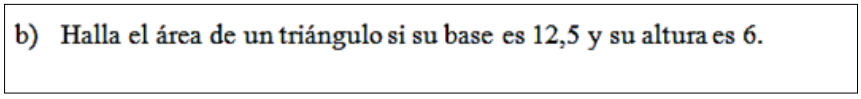

b) Halla el área de un triángulo si su base es 12,5 y su altura es 6.

Figura 24. Ítem asociado al Problema (con enunciado) sobre el área del triángulo (A13).

En estos problemas se espera que el informante no comprenda de qué trata el problema y, por consiguiente, no traduce la información a un lenguaje matemático ocasionando la aplicación de diferentes estrategias no apropiadas para dicha situación.

Dentro de este tipo se analizan los errores relacionados a la categoría de *Interpretación incorrecta del lenguaje*, donde se evidencia que, en un problema verbal, no hay una correcta traducción de un lenguaje usual a un lenguaje matemático o viceversa. Por tanto, no hay una comprensión del problema lo que dificulta su resolución.

3.6.Análisis de datos

Para el *análisis de datos* se toman en cuenta los cuatro métodos propuestos por Mulhern (1989) que cumplen el rol de orientar el análisis de los resultados obtenidos por los informantes, así como comunicar los errores más frecuentes según cada tipología propuesta:

- ***Método 1:*** *Conteo del número de soluciones incorrectas.* Esto se manifiesta al momento de contabilizar el número de soluciones correctas, incorrectas y en blanco para cada uno de los ítems correspondientes a los aspectos (A) a evaluar y según el tipo de error al que pertenece (Tabla 9) para luego determinar cuál es el más frecuente. Este método facilita el contraste de los resultados obtenidos en los dos exámenes, así como entre los dos grupos de la muestra. Este análisis se lleva a cabo al principio de cada tipología y se evidencia por medio de un gráfico de barras comparativo.
- ***Método 2:*** *Análisis de los tipos de errores cometidos.* Esto se manifiesta cuando en la investigación se clasifican los errores hallados de acuerdo a la tipología propuesta (Tabla 9). Luego de mencionar las soluciones incorrectas de cada tipo de error, se procede a identificar aquellos que han sido más recurrentes para posteriormente, vincularlos con cada categoría asociada y describirlos a partir de ejemplos tomados de las respuestas de los informantes.
- ***Método 3****: Análisis de patrones de error.* Se aplica esta categoría cuando en cada tipo de error, se distinguen aquellas respuestas que son recurrentes en los informantes producto de concepciones inadecuadas. Este método se lleva a cabo cuando a partir de la identificación de las respuestas incorrectas (Método 1) y su relación con las tipologías y categorías propuestas (Método 2), se procede a establecer como **Discusión final**, los patrones de error, es decir, conceptos inválidos que se mantienen constante en los instrumentos aplicados y en cada grupo de informantes.
- ***Método 4:*** *Construir problemas que puedan provocar errores en los individuos.* Siguiendo este método se plantean los aspectos A10 y A12 (Tabla 7) en los que se proponen problemas con datos irrelevantes, con el fin de determinar si el informante realmente reconoce los principales datos para resolver un problema. Cabe mencionar que este método solo se aplica para facilitar el análisis del error Tipo E2 - Errores debidos a un empleo incorrecto de los datos o la información.

Capítulo 4
Resultados y discusión

Los resultados del trabajo de investigación se muestran de acuerdo a la tipología de errores propuesta en la tabla 9, siguiendo las categorías del método de análisis propuesto por Mulherm (1989) y diferenciando los resultados de cada grupo de informantes y los instrumentos aplicados.

4.1.Errores de tipo E1. *Errores derivados de la incorrecta ejecución de algoritmos básicos.*

En este tipo de error se analizan los resultados obtenidos tanto en el examen diagnóstico como en el examen final, puesto que en ambos se proponen ítems para abordar las operaciones básicas con números decimales (Tabla 10).

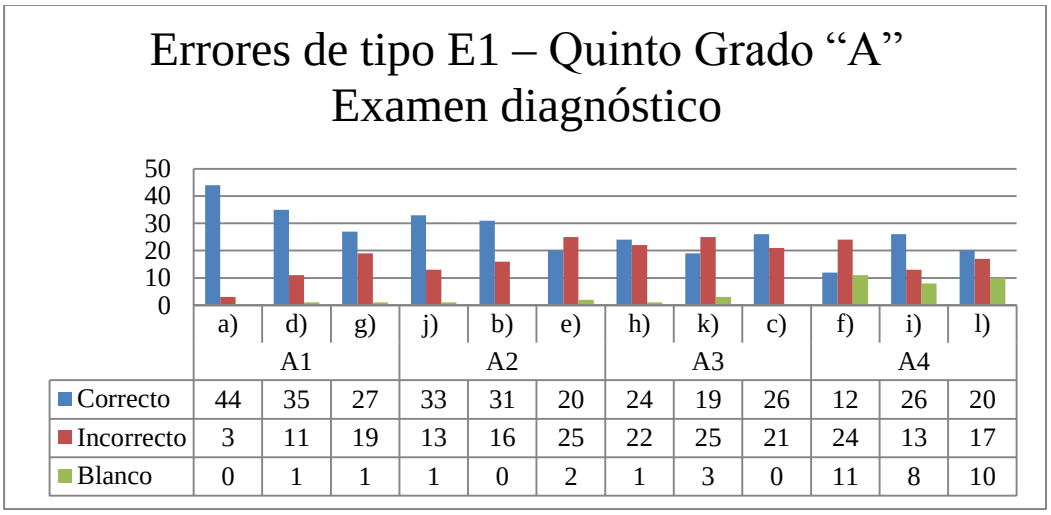
Tabla 10. Ítems asociados a E1- Errores debidos a una incorrecta ejecución de algoritmos básicos

Código	***Aspecto abordado***	***Ítems***
A1	Adición de números decimales.	a)12,45 + 23,51 d) 123, 63 + 89,142 g) 875 + 35,4
A2	Sustracción de números decimales	b)457,6 – 145,487 e) 478 – 364,145 j) 96,44 – 36,47
A3	Multiplicación de números decimales.	c)1,45 x 3,6 h) 45 x 1,2 k) 45,6 x 23
A4	División de números decimales.	f)478÷0,4 i) 15,6÷3 l) 6,9÷0,3

4.1.1. Errores de tipo E1 – Quinto Grado “A”

Examen diagnóstico

Los resultados obtenidos por los estudiantes de quinto grado “A” en el examen diagnóstico muestran que la adición de números decimales (A1) es el aspecto mejor abordado, seguido de la sustracción (A2), multiplicación (A3) y división de números decimales (A4). De este modo, el ítem (*a)* es resuelto correctamente por 44 estudiantes (94%), mientras que el ítem (*f)* solo por 12 estudiantes (26%), siendo este ejercicio el menos resuelto (figura 25).



	a)	d)	g)	j)	b)	e)	h)	k)	c)	f)	i)	l)
	A1			A2			A3			A4		
Correcto	44	35	27	33	31	20	24	19	26	12	26	20
Incorrecto	3	11	19	13	16	25	22	25	21	24	13	17
Blanco	0	1	1	1	0	2	1	3	0	11	8	10

Figura 25. Errores de tipo E1 – Quinto Grado “A” del Examen diagnóstico.

Los resultados correctos mostrados en la figura 25 evidencian una correspondencia con el grado de complejidad de las operaciones. Siendo la adición menos compleja que la división, da como resultado el mayor número de respuestas correctas. De igual forma, se observa un traslado de los algoritmos aplicados con los números naturales a los decimales. Así, el ítem (*a)* al ser una operación que involucra la misma cantidad de cifras decimales, no demanda otra estrategia más que resolver como si fueran dos números naturales como se observa en la figura 26. Lo mismo ocurre para el ítem (*j)* donde la cantidad de cifras decimales es la misma en ambos números.

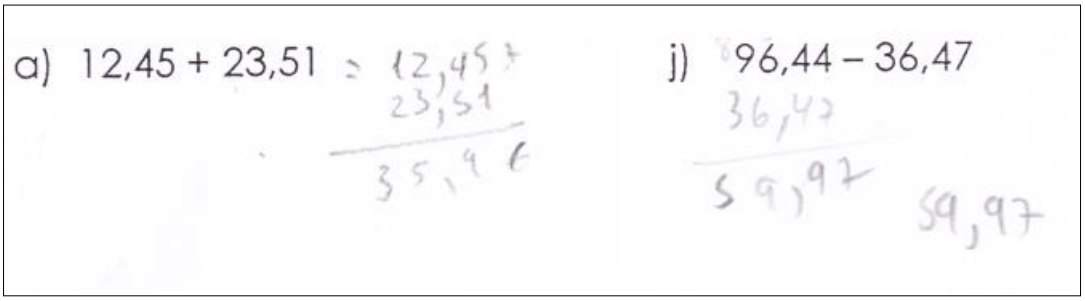


Figura 26. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen diagnóstico.

Caso contrario ocurre con los ítems (*g)* y (*e)* pertenecientes a A1 y A2 respectivamente en los que se halló más respuestas incorrectas. En la solución de estos ejercicios se observa que los números tienen distinta cantidad de cifras decimales y han sido escritos sin que coincidan la coma decimal (Figura 27). En el ítem (e) puede verse que se extiende el algoritmo de los números naturales puesto que la alineación de minuendo y sustraendo es de derecha a izquierda sin tomar en cuenta la coma decimal. Contrariamente, en el ítem (g) no se sigue un algoritmo vinculado a los números naturales puesto que la alineación de los sumandos es de izquierda a derecha y no se toma en cuenta la coma decimal, evidenciándose también con ello la categoría de *Errores por recuperación de un esquema previo.*

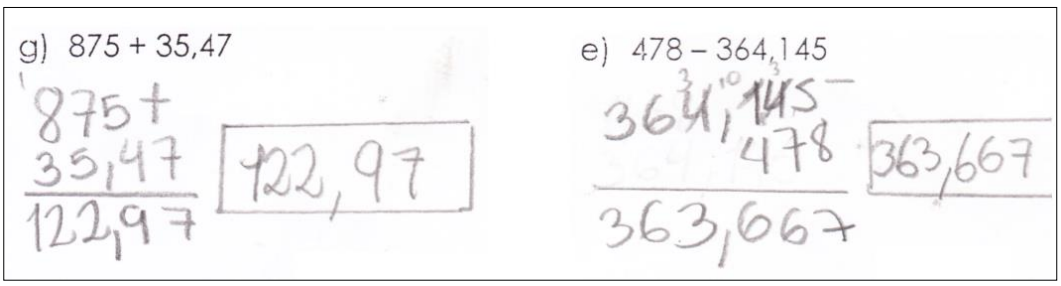


Figura 27. Respuesta obtenida por el informante I5A-8 en el examen diagnóstico.

Con respecto a A3 se observa que es uno de los aspectos donde más errores se han identificado en todo el examen diagnóstico. Así se tiene que en el ítem (*k),* donde se multiplica un número natural con un decimal, solo 19 (40%) informantes contestaron correctamente este ejercicio, frente a 25 (53%) que lo desarrollaron erróneamente. Nuevamente se repite la categoría anterior de considerar la operación como si se tratara de dos números naturales, obviando en este caso, la coma decimal (Figura 28).

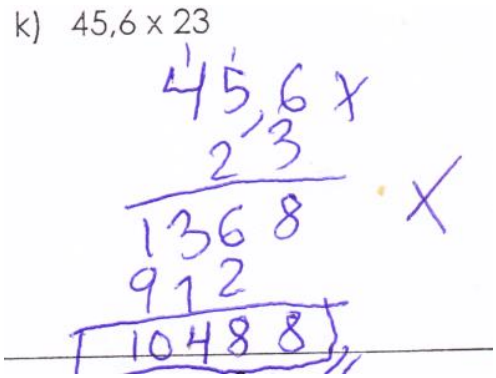


Figura 28. Respuesta obtenida por el informante I5A-40 en el examen diagnóstico.

Por su parte, el ítem (*f)* solo fue resuelto correctamente por 12 informantes (26%), 24 (51%) desarrollaron incorrectamente y 11 (23%) no resolvieron. En la figura 29 puede verse que los informantes operan como si fueran números naturales, por ello cambian el divisor 0,4 por 4. Por lo tanto, efectuar con números decimales como si fuesen naturales, es uno de los errores recurrentes en el examen diagnóstico.

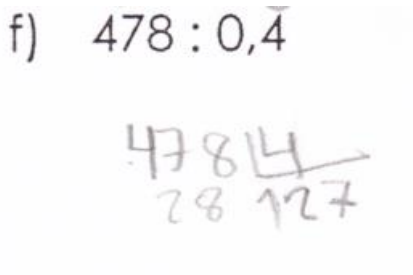


Figura 29. Respuesta obtenida por el informante I5A-4 en el examen diagnóstico.

Como se observa en los ejemplos anteriores aparece como error recurrente en el examen diagnóstico la categoría asociada a *errores por recuperación de un esquema previo* (Tabla 9). Dicha aplicación involucra a estrategias similares en contenidos diferentes. Como al resolver operaciones con decimales como si fueran naturales.

De igual forma, la categoría de *errores técnicos* (errores de cálculo, donde ha implicado la incorrecta manipulación de algoritmos básicos) también se manifiesta en el examen diagnóstico, como se aprecia en la figura 30, donde el informante, a pesar de colocar correctamente los números decimales, manipula de forma errónea los algoritmos básicos, restando 14 – 7 = 6.

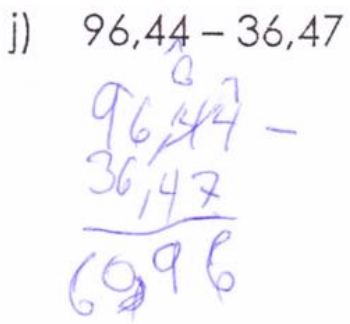
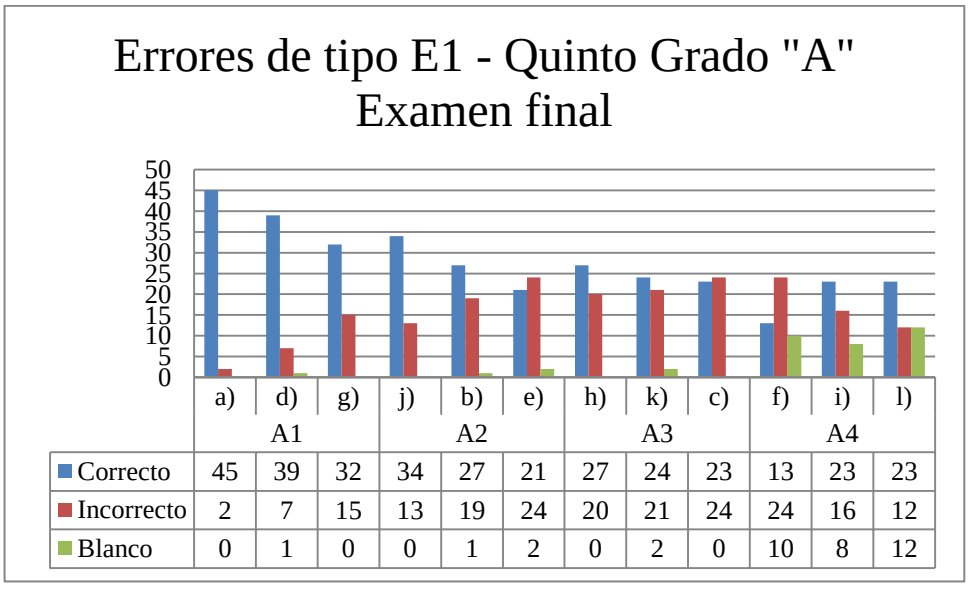


Figura 30. Respuesta obtenida por el informante I5A-11 en el examen diagnóstico.

Examen final

Se observa que 45 estudiantes (96%) resuelven correctamente el algoritmo de la *adición de números decimales con la misma cantidad de cifras decimales* (A1-ítem a), mientras que solo 13 estudiantes (28%) consiguen *dividir un número natural con un decimal* (A4-ítem f). Además, este último ejercicio, junto con A4-ítem l son los menos resueltos, así como A2-ítem e, A3-ítem c y A4-ítem f son los ejercicios resueltos con más alta incidencia de error (Figura 31). Esto evidencia, una vez más, que la operación de sumar resuelta más "fácil" para los estudiantes que la operación de dividir, sobre todo si se trata de dos números decimales.



	a)	d)	g)	j)	b)	e)	h)	k)	c)	f)	i)	l)
	A1			A2			A3			A4		
Correcto	45	39	32	34	27	21	27	24	23	13	23	23
Incorrecto	2	7	15	13	19	24	20	21	24	24	16	12
Blanco	0	1	0	0	1	2	0	2	0	10	8	12

Figura 31. Errores de tipo E1 – Quinto Grado "A" del Examen Final.

Los errores más recurrentes en el aspecto A1, se muestran en el ítem *g)* que implica la *adición de un número natural con un número decimal*, donde 15 (32%) de los informantes aplican correctamente el algoritmo, pero fallan al realizar algún cálculo como se observa en la figura 32, donde suma 1+8=11, evidenciándose los errores técnicos.

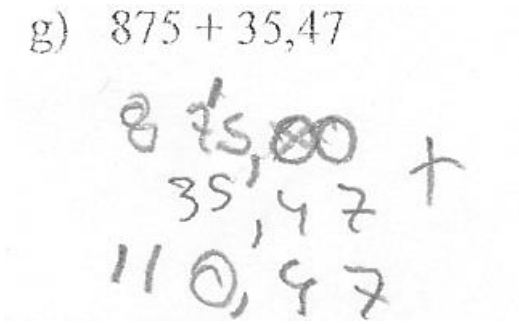


Figura 32. Respuesta obtenida por el informante I5A-4 en el examen final.

En el aspecto A2- ítem *b) sustracción de dos números decimales con distinta cantidad de cifras decimales*, se obtiene que los estudiantes aplican el algoritmo de la resta como si se tratara de dos números naturales, omitiendo la coma decimal (Figura 34), donde se muestran los errores por recuperación de un esquema previo.

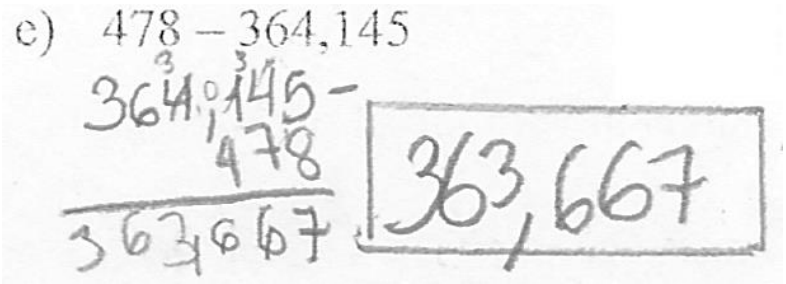


Figura 33. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen final.

Al igual que en el aspecto anterior, en A3-ítem *c) multiplicación de dos números decimales,* se observa una disminución de respuestas correctas respecto del examen diagnóstico. Así se tiene que 23 (49%) informantes aplican correctamente el algoritmo y ubican correctamente la coma decimal pero no llegan a la concretar la respuesta al sumar erróneamente 2+5=5 (Figura 34), mostrándose una vez más, los errores técnicos.

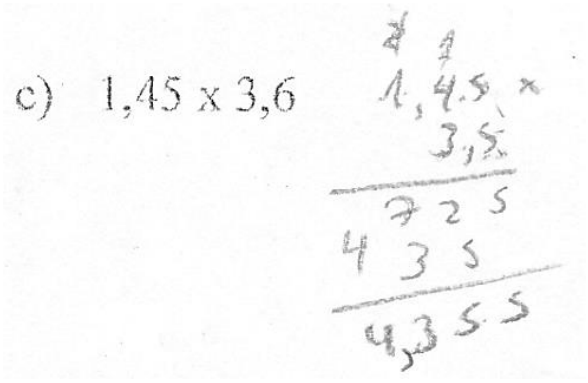


Figura 34. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen final.

De igual forma que en el examen diagnóstico, se tiene que en el aspecto A4-ítem *f) división de un número natural entre un decimal,* se mantiene la misma cantidad de soluciones erradas: 24 (51%). Aquí se evidencian nuevamente las dos categorías antes señaladas: 1) los informantes siguen operando como si fueran dos números naturales, omitiendo el cero y la coma decimal (Errores por recuperación de un esquema previo) y 2) aplican correctamente el procedimiento, pero fallan al momento de aplicar el algoritmo de la división (errores técnicos), como se observa en la figura 35:

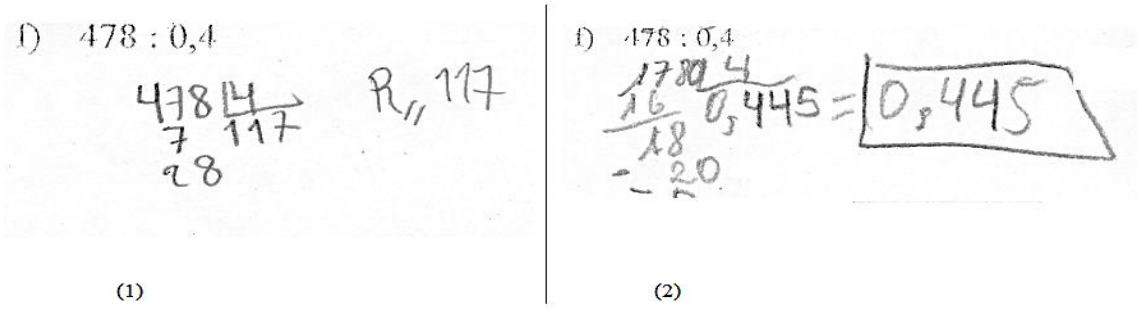


Figura 35. Errores frecuentes en el examen final de Quinto Grado "A".

Como se observa en los ejemplos anteriores, la categoría de *errores técnicos*, representa un patrón de error en el examen final, cuando el informante aplicó incorrectamente los algoritmos básicos motivo por el cual no llega a la respuesta final y, en segundo lugar, se evidencia la categoría de *errores por recuperación de un esquema previo*, donde los informantes aplican los algoritmos de los números naturales en la ejecución de ejercicios con decimales, en especial, cuando se trabajan divisiones.

Finalmente, se pueden contrastar los resultados del examen final con los del examen diagnóstico, mostrándose (Figura 33) un incremento de informantes que resuelven correctamente operaciones con números decimales sobre todo en los aspectos (A1 y A3), puesto que entre estos dos test se llevó a cabo un periodo de enseñanza en los que recibieron las nociones básicas respecto a este tópico. Llama la atención observar los resultados de los aspectos A2 y A4 donde no hubo una mejoría o esta fue mínima, respectivamente.

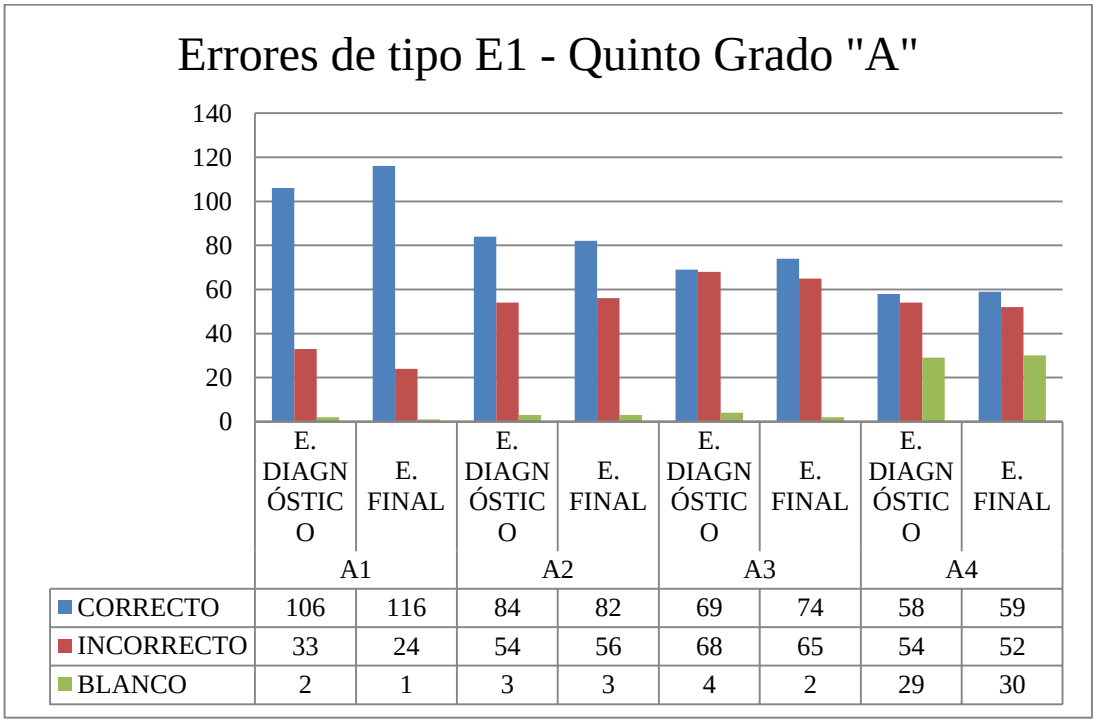


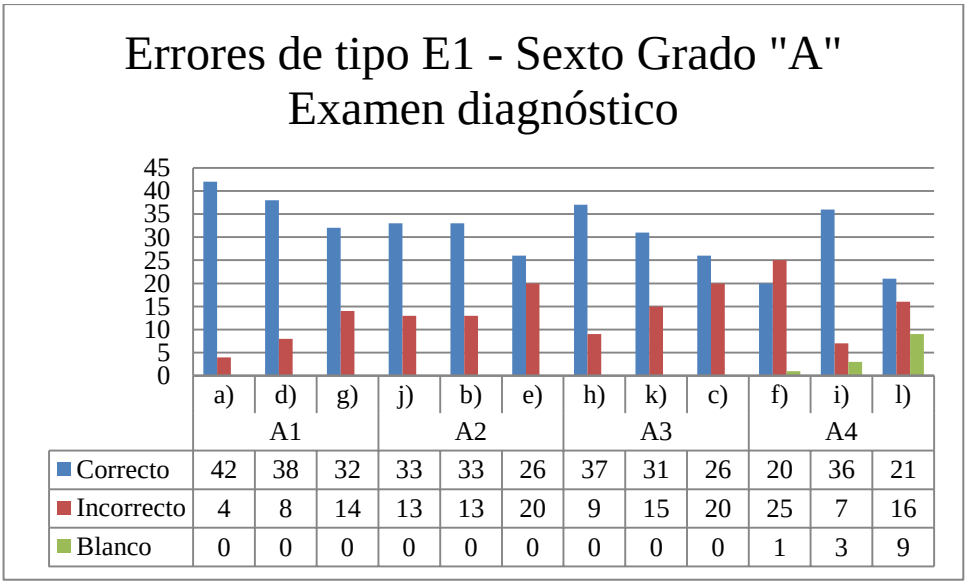
Figura 36. Errores de tipo E1 – Quinto Grado “A”.

Pese a que los resultados en general han sido alentadores en el examen final, aún se muestran algunos errores recurrentes, aun cuando entre el examen diagnóstico y el final se ha desarrollado un periodo de enseñanza del tópico números decimales. Al igual que como ocurrió en el examen diagnóstico, el aspecto A1 (adición de números naturales) sigue siendo el mejor desarrollado seguido de A3, A4 y A2.

4.1.2. Errores de tipo E1 – Sexto Grado “A”

Examen diagnóstico

Los resultados obtenidos por los estudiantes de sexto grado “A” en el examen diagnóstico muestran que A1 es el aspecto mejor resuelto, seguido de A3, A2 y A4. De este modo, el ítem (*a)-adición de números decimales con la misma cantidad de cifras decimales* es resuelto correctamente por 42 estudiantes (91%), a diferencia del ítem (*f)-división de un número natural con un decimal*, resuelto correctamente solo por 20 estudiantes (43%). Además, este ejercicio registró la mayor cantidad de errores (Figura 37).



	a)	d)	g)	j)	b)	e)	h)	k)	c)	f)	i)	l)
	A1			A2			A3			A4		
Correcto	42	38	32	33	33	26	37	31	26	20	36	21
Incorrecto	4	8	14	13	13	20	9	15	20	25	7	16
Blanco	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	9

Figura 37. Errores de tipo E1 – Sexto Grado “A” del Examen diagnóstico.

Los resultados correctos mostrados en la figura 37 evidencian una correspondencia con la complejidad de las operaciones. Se confirma con ello que la adición es menos compleja que todas las demás. Sin embargo, a diferencia del grupo de estudiantes de quinto grado “A”, es el aspecto A3-multiplicación de números decimales, quien ocupa el segundo lugar en respuestas correctas.

Las categorías asociadas a este error en el aspecto A1, el ítem (*g) adición de un número natural con un decimal* es el que, dentro de este grupo, presentó más respuestas incorrectas con 14 informantes (30%) y dentro de los principales aspectos que observamos en

la figura 38 (1), son los errores técnicos. En este caso, el informante deja cuatro espacios para colocar la coma decimal en la suma debido a que previamente se contabilizan las cifras decimales de cada uno de los sumandos para tomar en cuenta la posición de la coma en el resultado final. También, se observa que al igual que quinto grado "A", el informante calcula como si se tratara de dos números naturales, alineando los sumandos de derecha a izquierda sin considerar la coma decimal, así como se muestra en la figura 38 (2), observándose la categoría de *errores por recuperación de un esquema previo*.

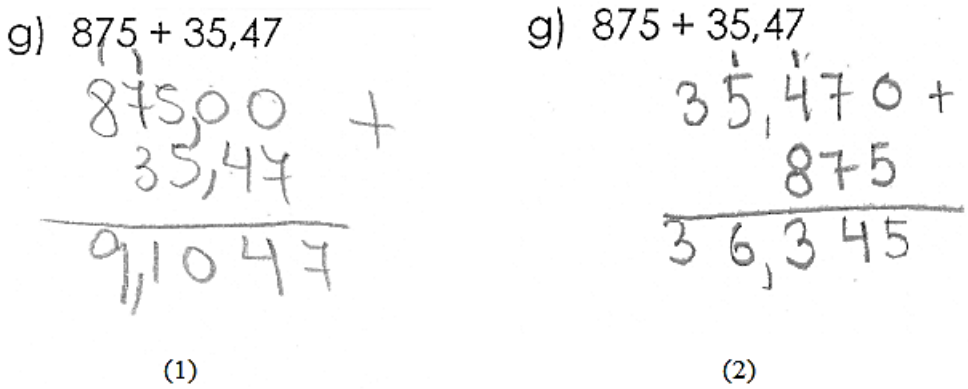


Figura 38. Respuesta obtenida por el informante I6A-1 y I6A-2 en el examen diagnóstico.

Lo mismo ocurre en el aspecto A2, en el ítem (*e) sustracción de un número natural con un decimal*, se tiene 20 (43%) soluciones erradas. Dentro de los principales patrones que se repiten están: (1) realizan correctamente el procedimiento, pero se equivocan al momento de calcular la respuesta final (errores técnicos); (2) efectúan la operación como si fueran números naturales puesto que alinean las cifras de derecha a izquierda y coloca como sustraendo al número mayor por tener "menos cifras" que el otro número (errores por recuperación de un esquema previo). Este segundo error se encontró con más frecuencia (Figura 39-2):

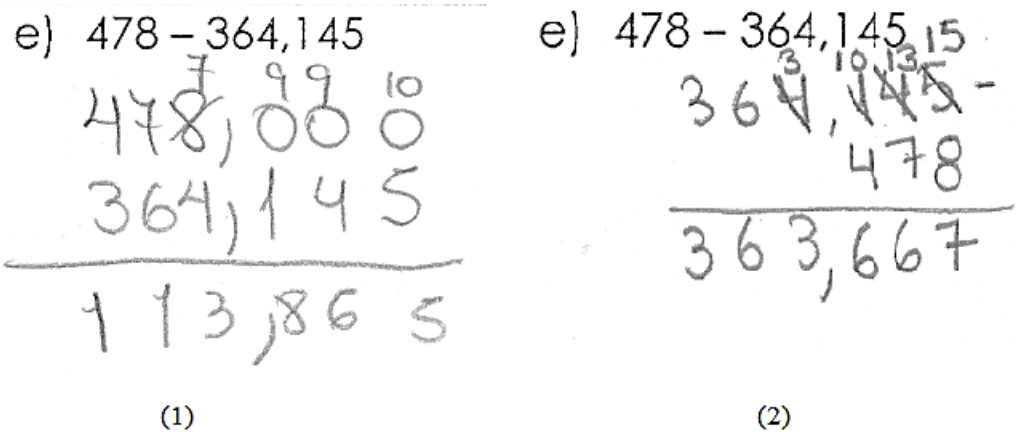


Figura 39. Respuesta obtenida por el informante I6A-1 y I6A-31 en el examen diagnóstico.

En el aspecto A3 la mayor cantidad de errores frecuentes, se encuentra el ítem (*c) multiplicación de dos números decimales* donde 20 informantes (43%) no efectúan correctamente este tipo de ejercicio, evidenciándose la categoría de *errores técnicos*, donde (1) se aplicó correctamente el algoritmo de la multiplicación, pero la coma decimal no fue colocada adecuadamente y la categoría de *errores por recuperación de un esquema previo* (2) donde se operó como si fueran dos números naturales. El primero de estos es el que se presenció más en estos informantes (Figura 40):

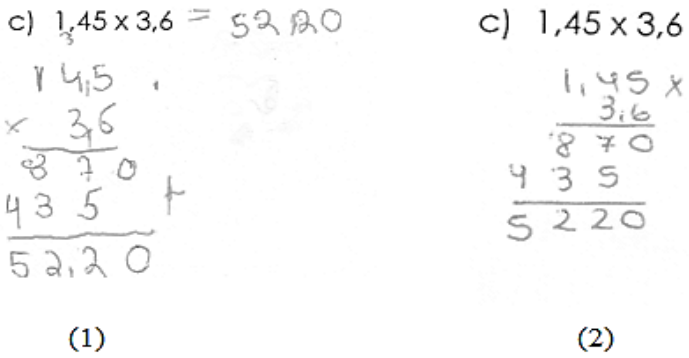


Figura 40. Respuesta obtenida por el informante I6A-26 y I6A-30 en el examen diagnóstico.

Finalmente, en el aspecto A4, el ítem (*f) división de un número natural con un decimal*, es el que más errores presenta en todo el examen diagnóstico, puesto que 25 informantes (54%) desarrollan incorrectamente este ejercicio. Dentro de los principales

patrones que se evidencian en este aspecto tenemos que (1) consideran los números como si fueran dos naturales y colocan la coma decimal indistintamente en cualquier lugar, (errores técnicos) y (2) otro grupo de informantes efectúan correctamente el algoritmo de división de decimales, pero fallan al calcular la respuesta final (errores por recuperación de un esquema previo) como se observa en la figura 41.

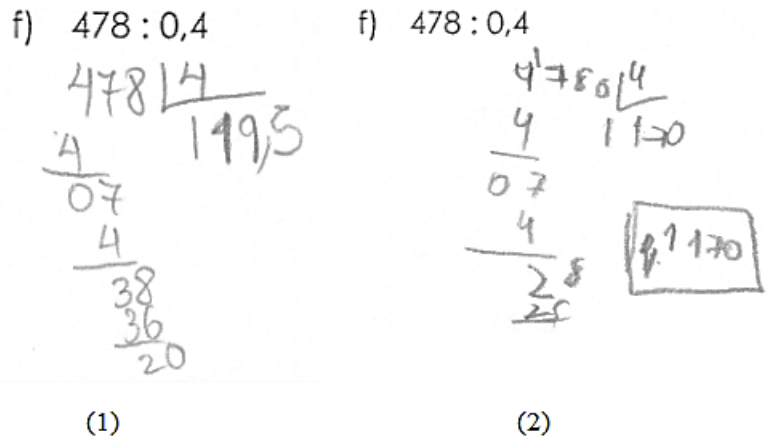


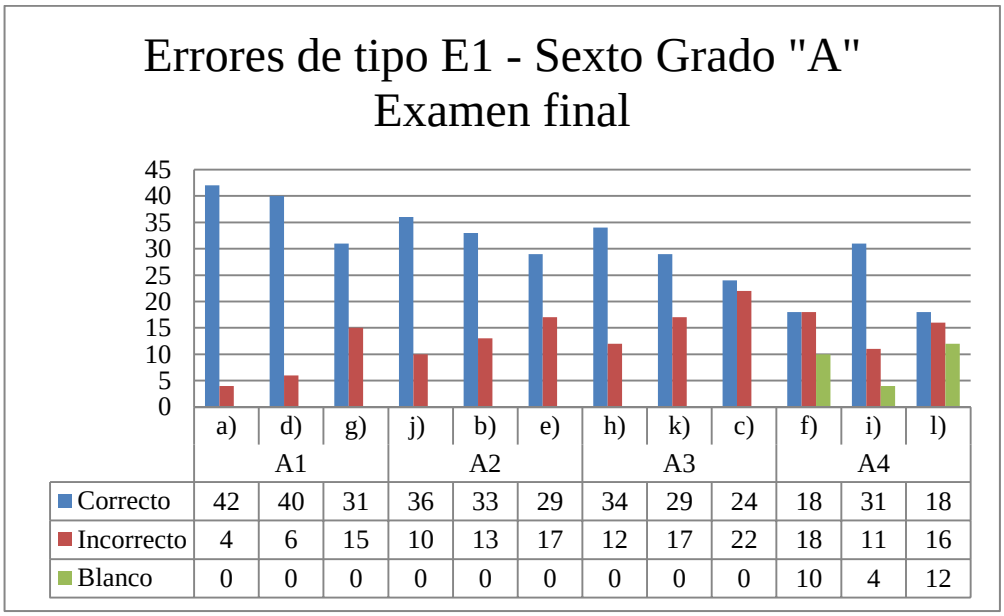
Figura 41. Respuesta obtenida por el informante I6A-26 y I6A-8 en el examen diagnóstico.

En resumen, de las categorías que pertenecen a este tipo de error E1- Errores derivados de la incorrecta ejecución de algoritmos básicos, tenemos que los *errores técnicos* representan un patrón de error en los resultados obtenidos por los informantes de sexto grado. Esto se evidencia en la forma en que el estudiante ejecuta el algoritmo y antes de dar el resultado final comete algún cálculo incorrecto. Por otro lado, *los errores por recuperación de un saber previo* se manifiestan cuando el informante sigue efectuando las operaciones como si se trataran de números naturales.

Examen final

En el aspecto A1, donde se obtuvieron mejores resultados seguido de A2, A3 y A4, el ítem *a)* con 42 estudiantes (89%), evidencia que los informantes resuelven correctamente el algoritmo de la *adición de números decimales con la misma cantidad de cifras decimales* a diferencia de los ítems (*f) división de un número natural con un decimal* con 18 estudiantes (39%) y el ítem (*l) división de dos números decimales,* que representan los ejercicios con

menos respuestas correctas (Figura 42). Esto evidencia una vez más, que la división con números decimales es la que resulta más compleja para los informantes.



	a)	d)	g)	j)	b)	e)	h)	k)	c)	f)	i)	l)
	A1			A2			A3			A4		
Correcto	42	40	31	36	33	29	34	29	24	18	31	18
Incorrecto	4	6	15	10	13	17	12	17	22	18	11	16
Blanco	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	4	12

Figura 42. Errores de tipo E1 – Sexto Grado "A" en el examen final.

Los errores más recurrentes en el aspecto A1, se muestran en el ítem (*g)* que implica la *adición de un número natural con un número decimal,* donde 15 (32%) de los informantes no aplican correctamente los algoritmos básicos, como por ejemplo en la figura 43, al sumar 2+1=4 ponen de manifiesto la categoría de errores técnicos.

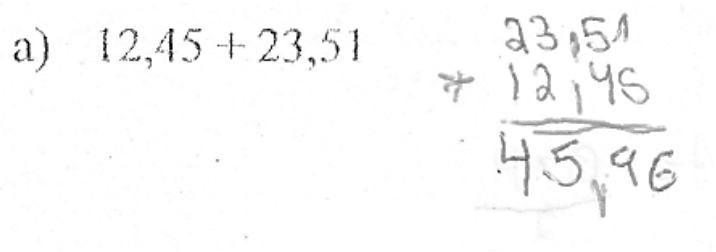


Figura 43. Errores de tipo E1 – Sexto Grado "A" del examen final.

En el aspecto A2 se observa la categoría de *errores por recuperación de un esquema previo* donde el ítem (*e) sustracción de un natural con un decimal,* con 17 (37%) de los informantes, resuelven la operación de la sustracción asumiendo que el número que tiene más

cifras es el mayor y sin tomar en cuenta la coma, obviando completamente que 364,145 es un número decimal y al colocarse como minuendo, nos llevaría a restarlo con 478, obteniéndose un número entero negativo como respuesta, sin embargo, el resultado que da es positivo (Figura 44). En este ejemplo no solo se aprecia la categoría de considerar a los decimales como naturales, sino también de un deficiente conocimiento de otros conjuntos numéricos como los enteros.

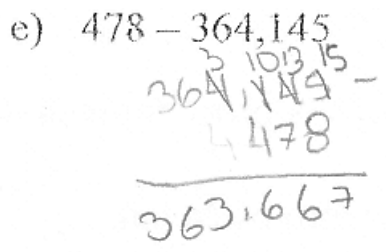


Figura 44. Respuesta obtenida por el informante I6A-9 en el examen final.

Los errores más frecuentes en el aspecto A3, se encontraron en el ítem (*c) multiplicación de dos números decimales*, donde 22 (48%) de los informantes cometen errores técnicos como al multiplicar y sumar 3 x 5 + 3, en vez de colocar 18, coloca 180, como se observa en la figura 45.

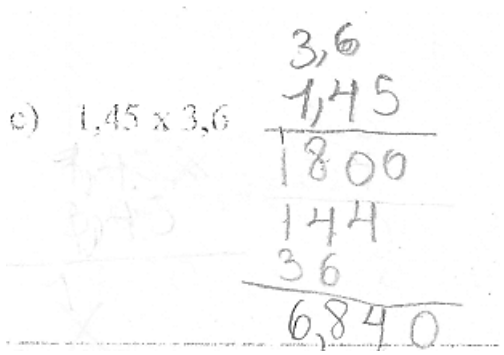


Figura 45. Respuesta obtenida por el informante I6A-1 en el examen final.

Finalmente, en el aspecto A4, en el ítem (*f) división de un número natural entre un decimal*, se observa que 18 (39%) informantes cometen más errores en este ejercicio. Aquí se aprecia que los informantes siguen operando como si fueran dos números naturales, omitiendo el cero y la coma decimal del divisor, dándose lugar a la categoría de errores por recuperación

de un esquema previo y también se halla error en el cálculo de las operaciones cuando se divide 478 entre 4 dando 119 con residuo 2, evidenciándose también los errores técnicos (Figura 46):

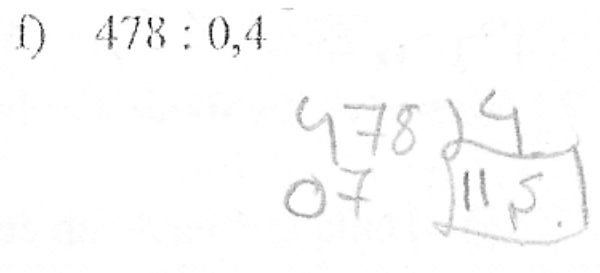


Figura 46. Respuesta obtenida por el informante I6A-12 en el examen final.

En cuanto a las categorías propuestas en la tabla 9 llegamos a la conclusión que los errores obtenidos en el examen final corresponden a *errores técnicos* y *errores por recuperación de un esquema previo*, al igual que los obtenidos en el examen diagnóstico.

Con respecto al contraste de resultados entre el examen final y el diagnóstico se muestra (Figura 47) un incremento de informantes que resuelven correctamente operaciones con números decimales sobre todo en los aspectos A1 y A2, así como una ligera tendencia a disminuir la cantidad de informantes que resuelven incorrectamente una operación con decimales sobre todo en los aspectos A1, A2 y A4. Sin embargo, llama la atención observar los resultados de A3 y A4 la tendencia es de hallar menos resultados correctos al resolver operaciones de multiplicación y división de decimales.

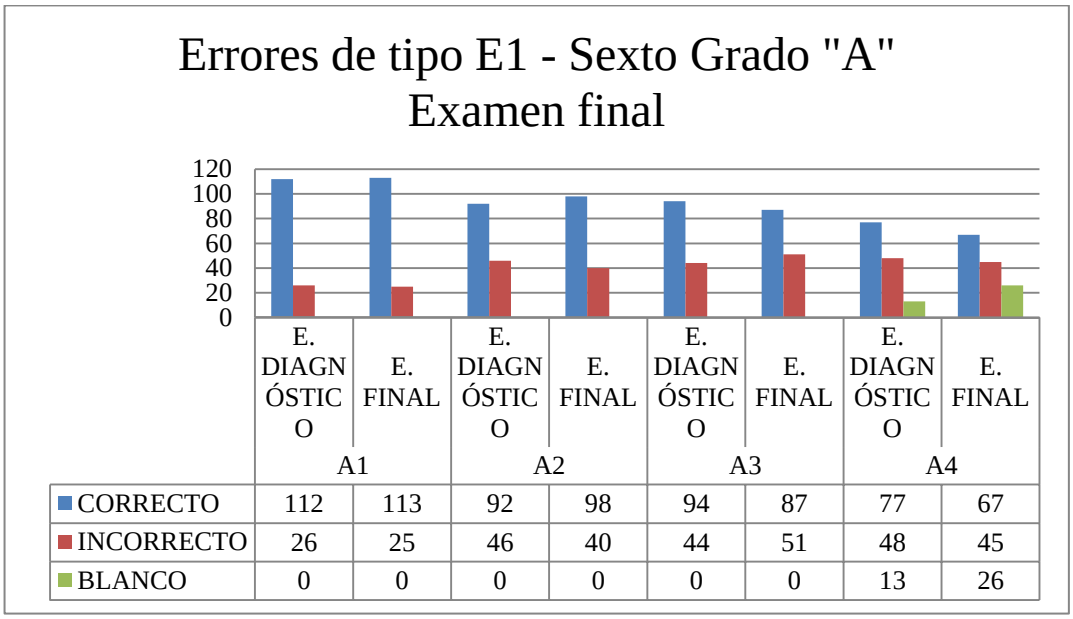


Figura 47. Errores de tipo E1 – Sexto Grado "A" del examen final.

Discusión final

Los resultados obtenidos en la aplicación del examen diagnóstico y el examen final para los dos grupos de informantes, señalan que la adición es la operación donde los estudiantes evidencian un mejor manejo de algoritmos, Asimismo, las categorías asociadas al error E1 se han manifestado a lo largo del todo el análisis y en los diferentes aspectos (Tabla 11).

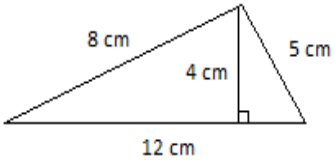
Tabla 11. Patrones de error del tipo E1.

Aspectos	***Patrones de error***	***Categorías de error***
A1	• Siendo la operación una suma, el informante restó. • Sumó como si se tratara de dos números naturales, por lo tanto, no completó con ceros el número natural. • Aplicó incorrectamente el algoritmo de la suma.	Errores técnicos. Errores por recuperación de un esquema previo.
A2	• Aplicó incorrectamente el algoritmo de la resta. • Restó como si se tratara de dos números naturales, por lo tanto, no completó con ceros el número natural. • Siendo la operación una resta, el alumno sumó.	
A3	• No aplicó correctamente el algoritmo de la multiplicación. • Multiplicó como si se tratara de dos números naturales, por lo tanto, no colocó la coma decimal en el resultado final.	
A4	• Dividió como si se tratara de dos números naturales. • Aplicó incorrectamente el algoritmo de la división.	

*4.2.*Errores de tipo E2. *Errores debidos a un empleo incorrecto de los datos o la información.*

Pese a que estos errores son frecuentes en varios aspectos, tomamos en cuenta solo *A10-Problema con imagen* sobre el área del triángulo con datos naturales y *A12-Problema con enunciado* sobre el área del cuadrado propuesto en el examen final. Esta decisión tiene como propósito evidenciar con más claridad si los informantes son capaces de identificar los datos relevantes del problema, de aquellos que no lo son. Así se tiene que en el ítem asociado a A10, se proporciona dos datos innecesarios para hallar el área del triángulo como son los lados 8cm y 5 cm. Complementariamente, con el ítem asociado a A12, se busca la interpretación correcta del problema, que lleve a inferir previamente el lado del cuadrado para después aplicar su área, como se observa en la tabla 12.

Tabla 12. Ítems asociados a E2- Errores debidos a un empleo incorrecto de los datos o la información.

Código	Aspecto abordado	Ítems
A10	Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos naturales.	
A12	Problema (con enunciado) sobre el área del cuadrado.	Halla el área de un cuadrado si su perímetro es 24 cm.

4.2.1. Errores de tipo E2 – Quinto Grado “A”

Los resultados obtenidos por los estudiantes de quinto grado “A” muestran que A12 es resuelto con corrección por 14 informantes (30%), mientras que A10 solo alcanza 7 (15%) respuestas correctas. Además de esto, llama la atención que 27 (59%) estudiantes no resuelven correctamente A12, como se observa en la figura 48:

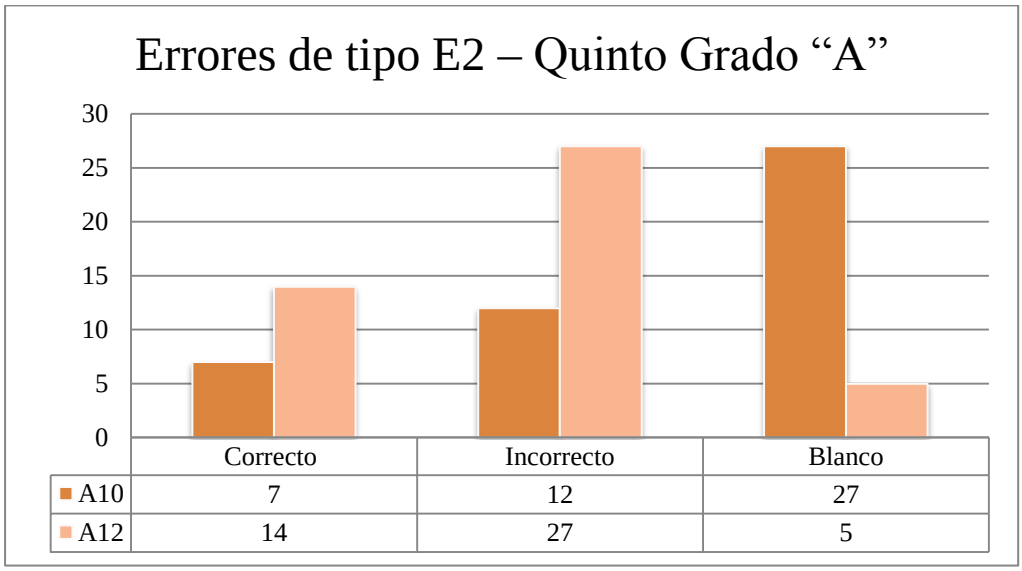


Figura 48. Errores de tipo E2 - Quinto Grado “A”.

Los resultados correctos observados en la figura 48 muestran que *un problema con enunciado* probablemente resulta menos complicado que el resolver un *problema con imagen.* Sin embargo, es el problema con más respuestas incorrectas (59%), mientras que el problema A10 tiene esa misma cantidad (59%) pero en respuestas ausentes.

Con respecto a los errores frecuentes observados en el aspecto A10 (problemas con imagen) se observa una serie de patrones de errores en los que destacan que el informante conoce la fórmula, pero no identifica los datos necesarios lo que ocasiona un uso parcial de la información o el mal uso de ella. Así se observa en la figura 49 donde el informante I5A-25 confunde la base de referencia y en su lugar usa uno de los lados para hallar el área del triángulo, teniendo claro solamente que la altura es 4 cm.

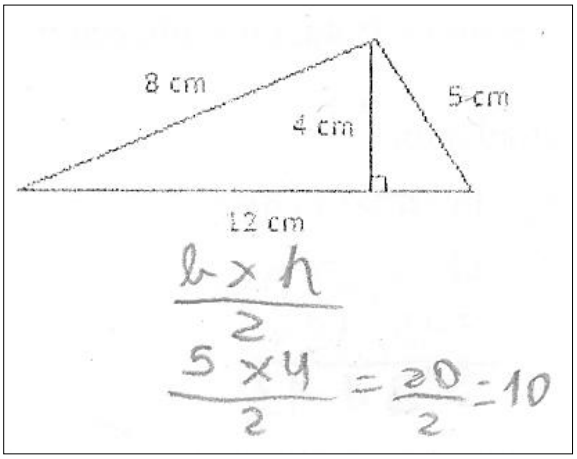


Figura 49. Respuesta obtenida por el informante I5A-25 en el examen final.

Otro de los patrones recurrentes en A10 se evidencia en la figura 50 cuando el informante I5A-21 en vez de aplicar la fórmula del triángulo, intenta sumar las bases para luego multiplicarlas por la altura. Esto evidencia un desconocimiento de dicha fórmula lo que le lleva a inventar una.

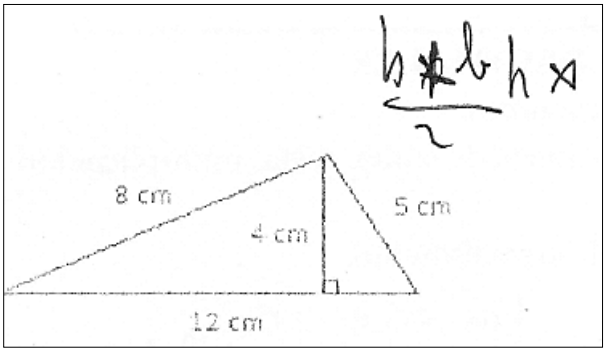


Figura 50. Respuesta obtenida por el informante I5A-21 en el examen final.

Finalmente, el último patrón recurrente en este aspecto probablemente se justifica en una confusión del área con perímetro (Figura 51). Aquí el informante I5A-54, suma todos los datos del problema, incluyendo la altura de 4cm. Por lo tanto, hace un mal uso de los datos dados, como consecuencia de una deducción incorrecta de información.

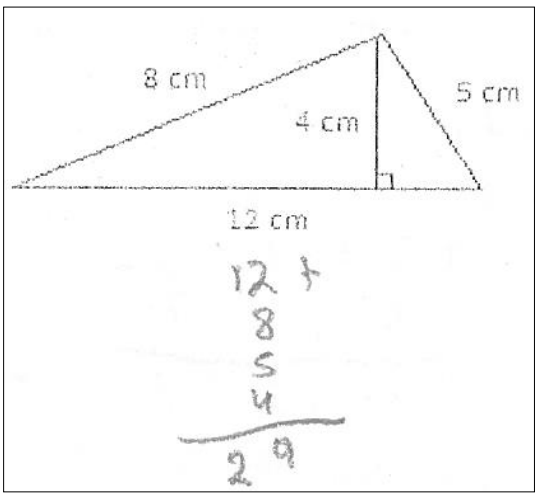


Figura 51. Respuesta obtenida por el informante I5A-54 en el examen final.

De igual manera, sobre A12 (problema con enunciado), se pueden apreciar algunos patrones que guardan relación con los anteriores. Así se tiene que los informantes no identifican los datos del problema y solo aplican el área del cuadrado con el número dado, así como se observa en la figura 52. Esto evidencia una deducción incorrecta de información y, por ende, la mala utilización de datos.

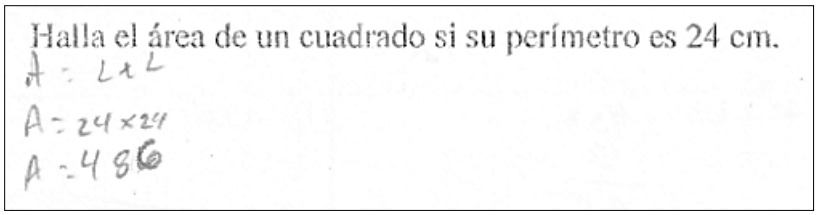


Figura 52. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen final.

Otro patrón en el aspecto A12, se da cuando los informantes sí logran identificar los datos relevantes del problema, pero la respuesta final es incorrecta, así tenemos en la figura 53 donde el informante I5A-47 deduce la medida del lado del cuadrado, aplica correctamente la fórmula para hallar el área de este, pero al efectuar la multiplicación de la medida de su lado (6x6) escribe un producto erróneo (12).

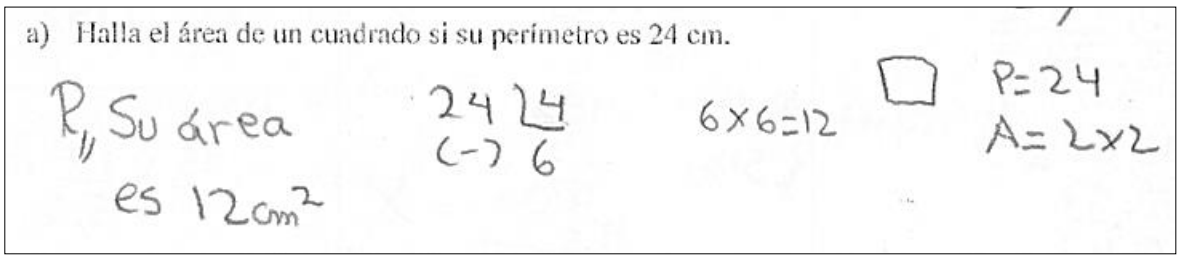


Figura 53. Respuesta obtenida por el informante I5A-47 en el examen final.

Como último patrón tenemos que los informantes confunden los conceptos perímetro y área. Así en la figura 54 se observa que para determinar el área I5A-10 suma el dato proporcionado cuatro veces, pese a que explicita la fórmula $A = L \times L$, como si fuera un lado del cuadrado y como si el área fuera igual a perímetro.

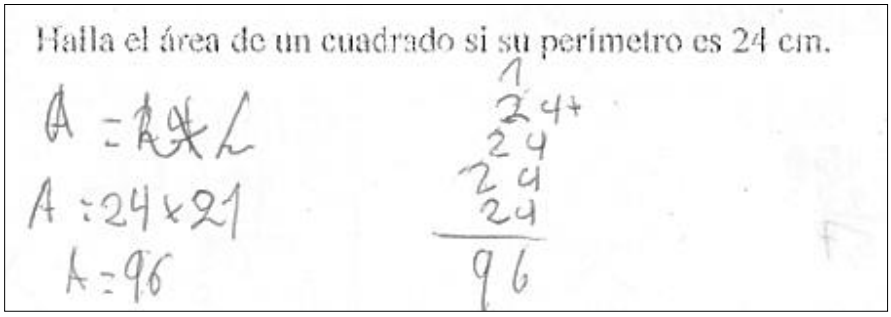


Figura 54. Respuesta obtenida por el informante I5A-10 en el examen final

4.2.2. Errores de tipo E2- Sexto Grado "A"

Los resultados obtenidos por los estudiantes de sexto grado "A" muestran que A12 es el problema con mayor cantidad de respuestas correctas (50%), pero también incorrectas (37%). Por su parte, A10 que es el problema con mayor ausencia de respuestas (37%), tal como se puede observar en la figura 55:

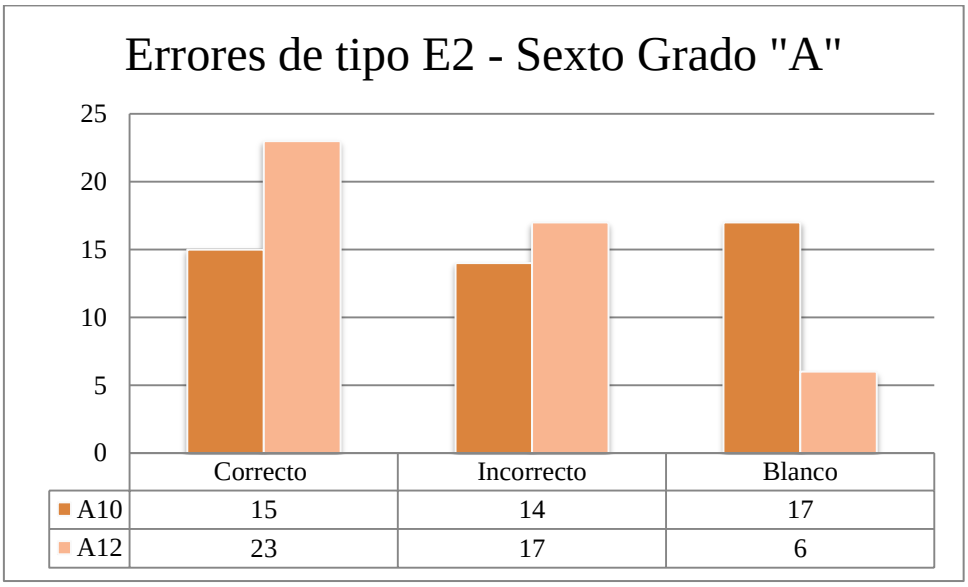


Figura 55. Errores de tipo E2- Sexto Grado "A".

Al analizar el problema con imagen (A10) se puede mencionar algunos patrones de error como el que se muestra en la figura 56. En este se observa conocimiento de la fórmula para hallar el área del triángulo y de que el área total de una superficie es igual a la suma de las áreas parciales. Sin embargo, utiliza incorrectamente los datos.

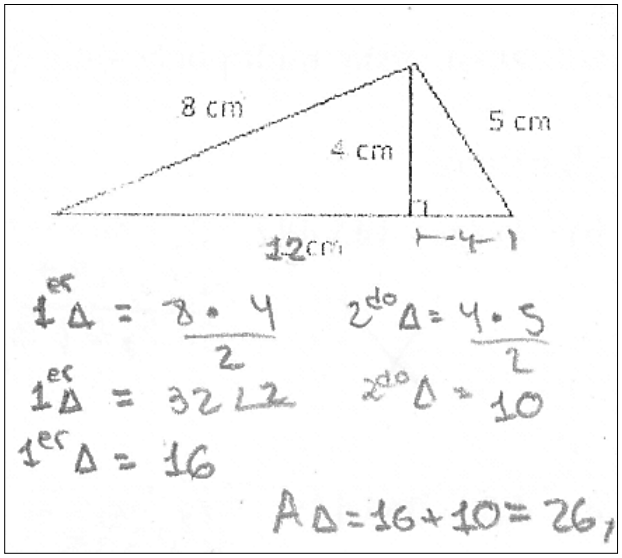


Figura 56. Respuesta obtenida por el informante I6A-21 en el examen final

Otro de los patrones al resolver este tipo de problemas con imagen es desconocer la fórmula del área del triángulo o confundirla con la de otro polígono, por ejemplo, un trapecio. Así se tiene que en la figura 57, el estudiante considera que el área del triángulo es $\frac{(B\times b)\times h}{2}$, expresión parecida a la fórmula del trapecio $\frac{(B+b)\times h}{2}$. Esto evidencia que el estudiante no conoce la fórmula para hallar el área del triángulo y tampoco reconoce sus elementos (el triángulo no tiene base mayor *B* ni base menor *b*).

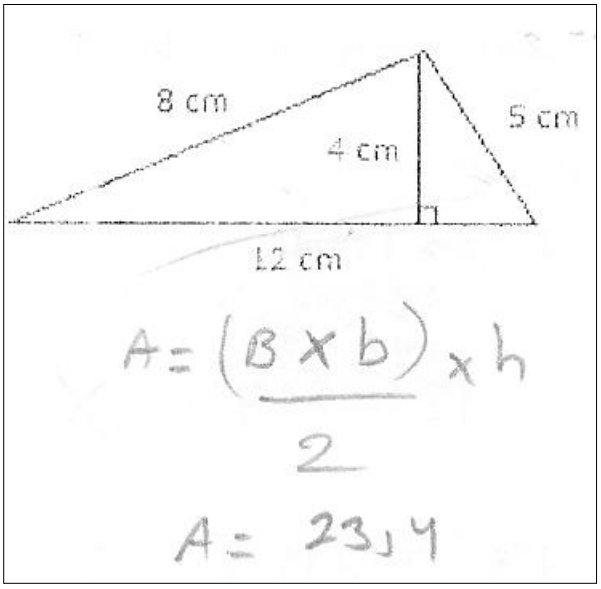


Figura 57. Respuesta obtenida por el informante I6A-26 en el examen final

Con relación al problema (con enunciado) A12 se observa que, uno de los errores recurrentes es que el informante lograr reconocer el lado del cuadrado que es 6cm, pero no llega a aplicar la fórmula para hallar el área a partir de este dato probablemente por desconocimiento de dicha fórmula (Figura 58).

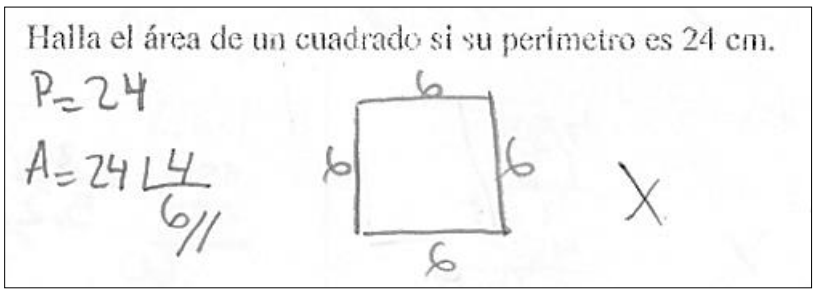


Figura 58. Respuesta obtenida por el informante I6A-10 en el examen final.

Otro error recurrente es que el informante no identifica los datos relevantes del problema. De esta manera se observa en la figura 59, que los 24 cm del perímetro son tomados como si fueran los lados del cuadrado y por lo tanto se hace un mal uso de los datos.

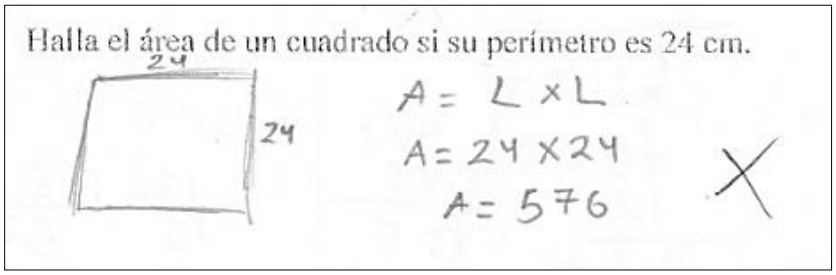


Figura 59. Respuesta obtenida por el informante I6A-26 en el examen final.

Discusión final

Los resultados obtenidos en los dos grupos de informantes, señalan que el patrón recurrente en este tipo de error se basa en la incorrecta manipulación de los datos llevando a confundir un área con otra, o inventando una fórmula para dar la solución de un problema (Tabla 13).

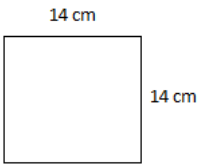
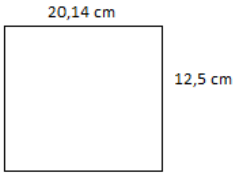
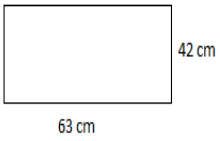
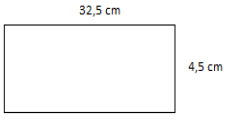
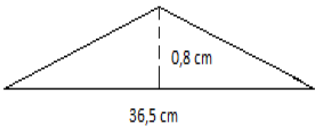
Tabla 13. Patrones de error del tipo E2.

Aspectos	***Patrones de error***	***Categorías de error***
A10	Conoce la fórmula, pero no identifica los datos necesarios. Desconocimiento de la fórmula del área del triángulo lo que lleva a inventar una. Mal uso de los datos al confundir área con perímetro. Deducción incorrecta de los datos para hallar el área del cuadrado.	No empleo o uso parcial de la información.
A12	Deduce incorrectamente los lados del cuadrado. Cofunde el perímetro con el área del cuadrado.	Datos mal utilizados.

4.3.Errores de tipo E3. *Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas gráficos.*

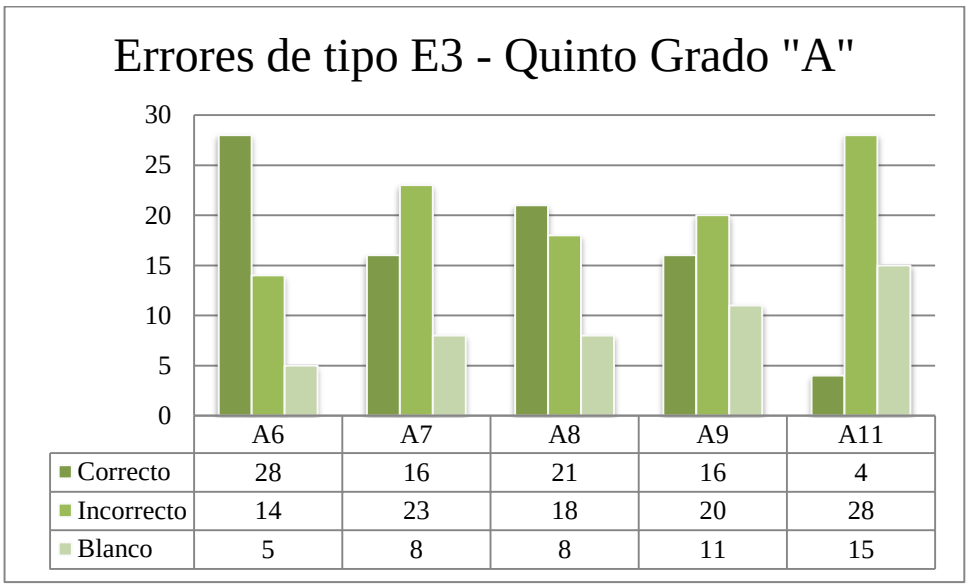
Los errores de este tipo toman en cuenta los problemas con imagen mostrados en la tabla 14 con los aspectos A6, A7, A8, A9, A11:

Tabla 14. Ítems asociados a E1-Errores debidos a la incorrecta interpretación de problemas verbales.

Código	***Aspecto abordado***	***Ítems***
A6	Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos naturales.	
A7	Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos decimales.	
A8	Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos naturales.	
A9	Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos decimales.	
A11	Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos decimales.	

4.3.1. Errores de tipo E3 – Quinto Grado “A”

Los resultados obtenidos por los estudiantes de quinto grado “A” en el examen final muestran que A6 es el problema mejor resuelto, seguido de A8, A9, A7 y A11. De este modo, A11 se presenta como el problema con menos respuestas correctas 4(9%), más incorrectas 28(60%) y con más problemas en blanco 15(32%), como se muestra en la Figura 60.



	A6	A7	A8	A9	A11
Correcto	28	16	21	16	4
Incorrecto	14	23	18	20	28
Blanco	5	8	8	11	15

Figura 60. Errores de tipo E3 – Quinto Grado “A”

Los resultados correctos mostrados en la Figura 60 evidencian que los informantes manejan mejor la información espacial dada por el cuadrado en el aspecto A6 con 28(60%) y el rectángulo en el aspecto A8 con 21(45%) a diferencia del triángulo con 4(8%).

Los patrones de errores que se muestran en estos problemas se evidencian en la figura 61, donde los informantes tienen dificultad para obtener la información que le facilite hallar el área del triángulo, de este modo, opera con los datos sin tener en cuenta la forma de la figura, resolviendo como si fuera un rectángulo.

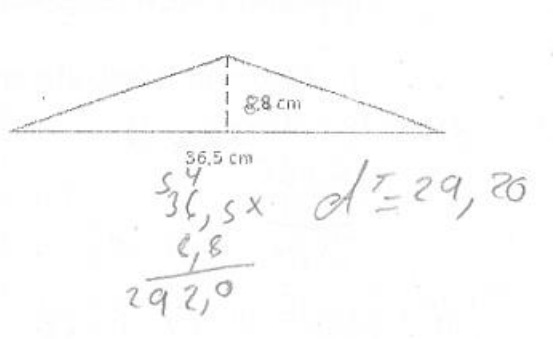


Figura 61. Respuesta obtenida por el informante I5A-19 en el examen final.

De igual forma, se observa en la Figura 62 que los informantes también hallan dificultad al identificar los elementos del rectángulo, de modo que, para hallar su área se opera como si se tratara de un triángulo.

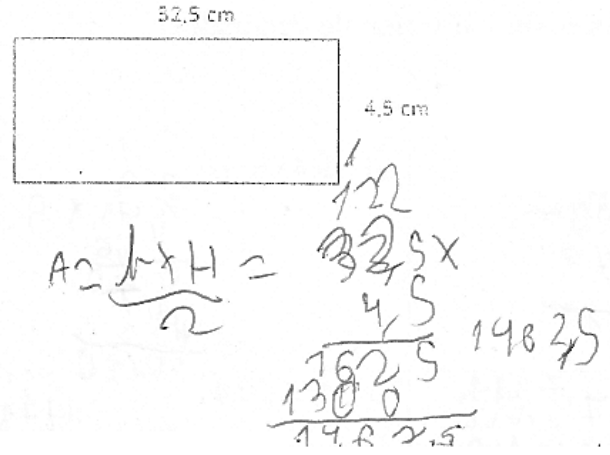
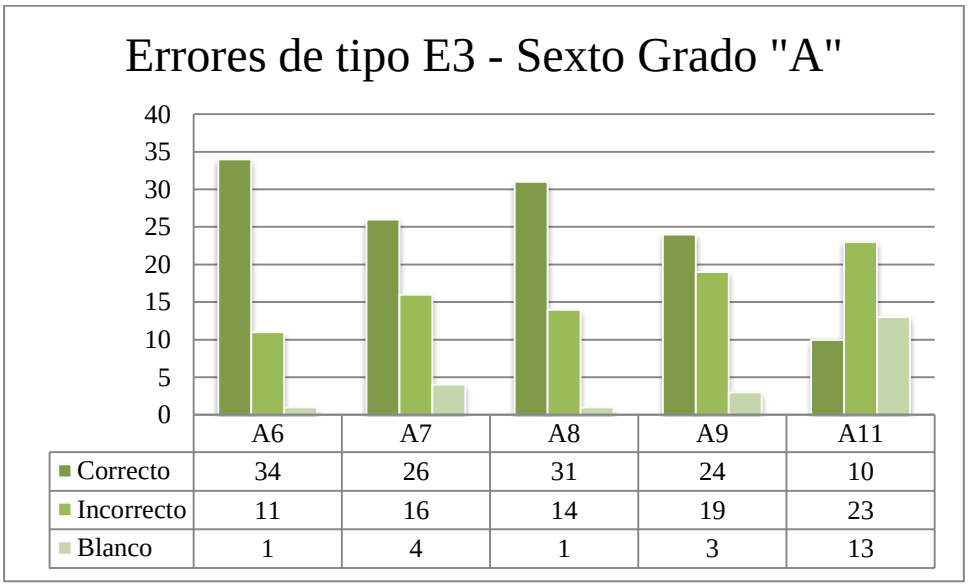


Figura 62. Respuesta obtenida por el informante I5A-13 en el examen final.

En resumen, con respecto a la categoría relacionada a este tipo de error E3- Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas gráficos (Tabla 9), *errores debidos a dificultades para obtener información espacial*, se observa que los estudiantes, a pesar de que tienen los datos para resolver el problema, no reconocen la estrategia más adecuada o carecen de conceptos previos que le faciliten aplicar adecuadamente la información espacial.

4.3.2. Errores de tipo E3 – Sexto Grado “A”

Los resultaos obtenidos por los estudiantes de sexto grado “A” en el examen final muestran que A6 se mantiene como el problema mejor resuelto, seguido de A8, A7, A9 y A11. Así A11 se presenta nuevamente como el problema con menos respuestas correctas 10(22%), más incorrectas 23(50%) y más respuestas en blanco 13(28%) informantes como se muestra en la figura 63:



	A6	A7	A8	A9	A11
Correcto	34	26	31	24	10
Incorrecto	11	16	14	19	23
Blanco	1	4	1	3	13

Figura 63. Errores de tipo E3 – Sexto Grado “A”.

Los resultados correctos mostrados en la figura 71 evidencian una vez más, que los informantes ejecutan con mayor eficiencia los problemas con imagen donde los datos pertenecen al cuadrado, así como ocurre con el aspecto A6 con 34(74%) y al rectángulo en el aspecto A8 con 31(67%) de informantes. Sin embargo, cuando en los problemas se propone hallar el área del triángulo, les cuesta más trabajo a los estudiantes aplicar el algoritmo correspondiente como lo que ocurre con la figura 64.

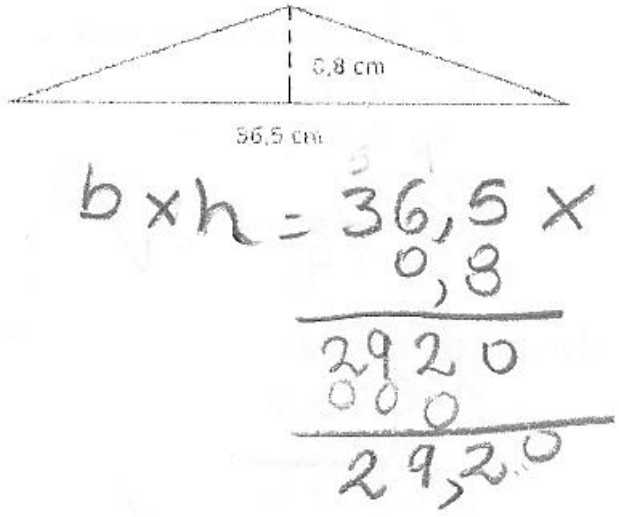


Figura 64. Respuesta obtenida por el informante I6A- 3 en el examen final.

De igual modo se observa que los informantes no infieren correctamente la información proporcionada por la figura 65, en la que se busca hallar el área del rectángulo y no el área del triángulo, confundiendo las fórmulas de las áreas de las diferentes figuras geométricas.

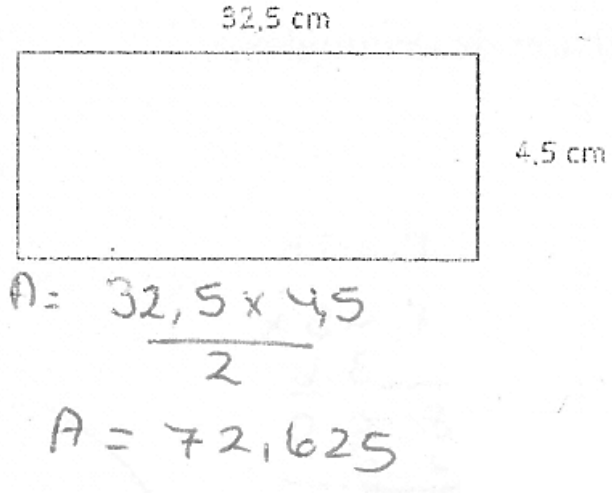


Figura 65. Respuesta obtenida por el informante I6A- 7 en el examen final.

Discusión final

En la categoría *errores debidos a dificultades para obtener información espacial*, relacionada con este tipo de error E2- Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas gráficos, se aprecia que los informantes desconocen los datos que les permiten aplicar el algoritmo correspondiente para cada operación; así como desconocen las nociones básicas de las fórmulas para hallar el área de las figuras geométricas (Tabla 15).

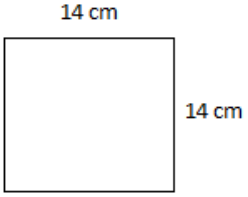
Tabla 15. Patrones de error del tipo E3.

Aspectos	***Patrones de error***	***Categorías de error***
A6	No diferencia una figura de otra.	Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
A7	Confunde el área del triángulo con el área del rectángulo.	
A8	No identifica los datos relevantes de la imagen.	
A9	Desconoce la fórmula del área del rectángulo.	
A10	Desconoce la fórmula del área del triángulo.	
A11	Aplica una fórmula diferente a la del área del triángulo.	

4.4.Errores de tipo E4. *Errores debidos a la falta de verificación de los resultados.*

Los errores de tipo E4 se analizan mediante los aspectos A6 y A13 del examen final, solo para tomar en cuenta los diferentes tipos de problemas; con figura y con enunciado, así como se observa en la tabla 14:

Tabla 16. Ítems asociados a E4- Errores debidos a la falta de verificación de los resultados.

Código	***Aspecto abordado***	***Ítems***
A6	Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos naturales.	
A13	Problema (con enunciado) sobre el área del triángulo.	Halla el área de un triángulo si su base es 12,5 y su altura es 6.

4.4.1. Errores de tipo E4 – Quinto Grado “A”

Los resultados obtenidos por los estudiantes de quinto grado “A” en el examen final muestran que A6-Problema con imagen, es el problema mejor resuelto con 28 informantes (17%), a diferencia del aspecto A13-Problema con enunciado, con 11(23%) de informantes que cometen más errores como se observa en la figura 66:

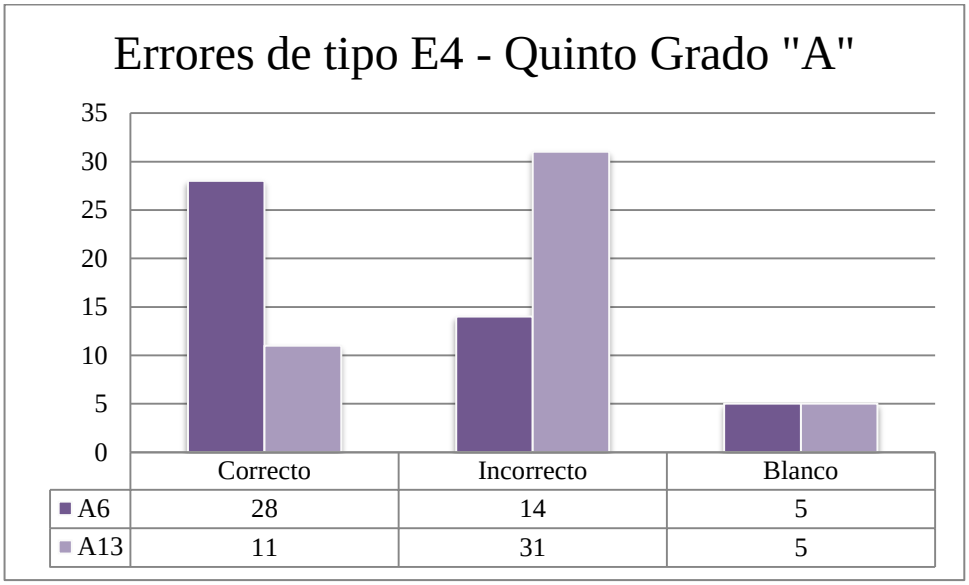


Figura 66. Errores de tipo E4 – Quinto Grado “A”.

Al analizar los errores cometidos en el aspecto A13-Problemas con enunciado, se observa en la figura 67 que los informantes conocen la fórmula y la aplican correctamente hasta llegar al resultado parcial de 12,5 x 6 = 75 pero no hay una verificación del resultado final de la operación, motivo por el cual no se llega a dividir 75 entre 2 que da 37,5; sino se obtiene un resultado diferente de 36,15.

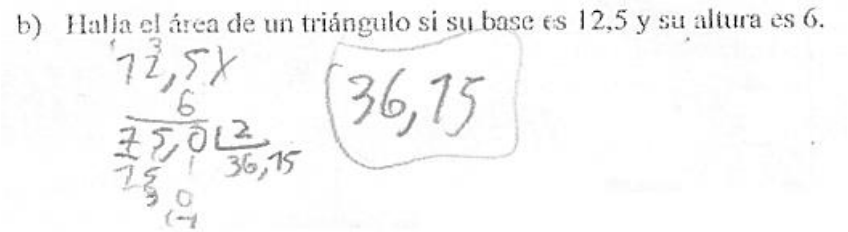


Figura 67. Respuesta obtenida por el informante I5A- 39 en el examen final.

Esta misma categoría de *no verificación de resultados parciales o totales* también se manifiesta no solo al aplicar algoritmos sino también al colocar incorrectamente la coma decimal o simplemente al omitirla, tal como se observa en la figura 68. Aquí se aplica correctamente el área del triángulo, pero en el resultado final se omite el cero.

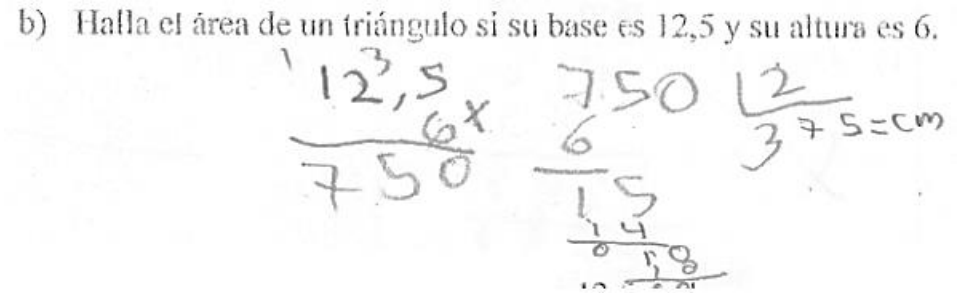


Figura 68. Respuesta obtenida por el informante I5A- 53 en el examen final.

De igual forma, en el aspecto A6- Problemas con imagen, pese a que es el mejor resuelto, también se evidencia esta categoría, donde el informante aplica el algoritmo perteneciente al área del cuadrado pero en el resultado final da una respuesta incorrecta al multiplicar $14 \times 14 = 616$, como se observa en la figura 69.

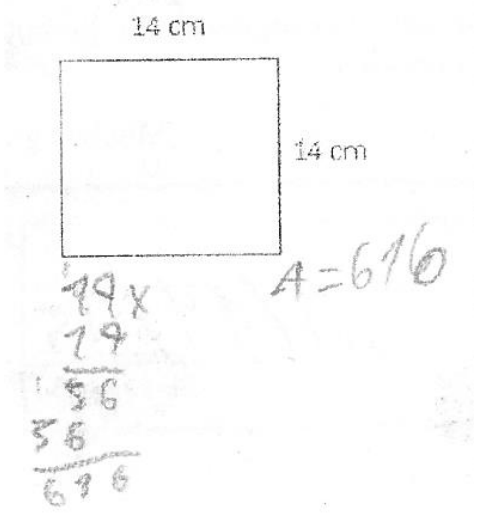


Figura 69. Respuesta obtenida por el informante I5A- 39 en el examen final.

La categoría de e*rrores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo*, también se evidencia en las respuestas de los informantes (Figura 70) donde no se copia correctamente los datos en el espacio donde va a desarrollar el problema y se comete el error de, en vez de multiplicar 14×14, se calcula 14×4, confundiendo el 14 con el 4.

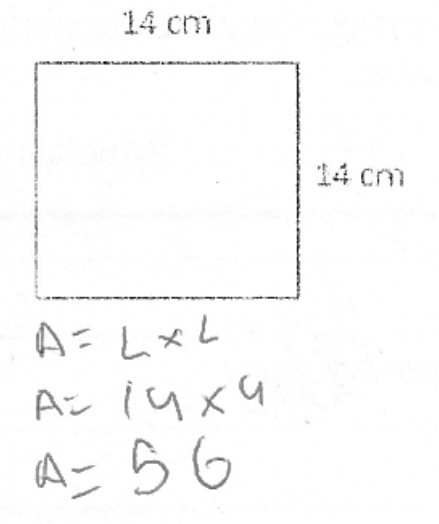


Figura 70. Respuesta obtenida por el informante I5A- 39 en el examen final

4.4.2. Errores de tipo E4 – Sexto Grado "A"

Los resultados obtenidos por los estudiantes de sexto grado "A" en el examen final muestran que A6 se mantiene como el problema mejor resuelto con 34 informantes (74%), a diferencia del aspecto A13 con 24 (52%) que sigue siendo el problema con menos respuestas correctas como se observa en la figura 71:

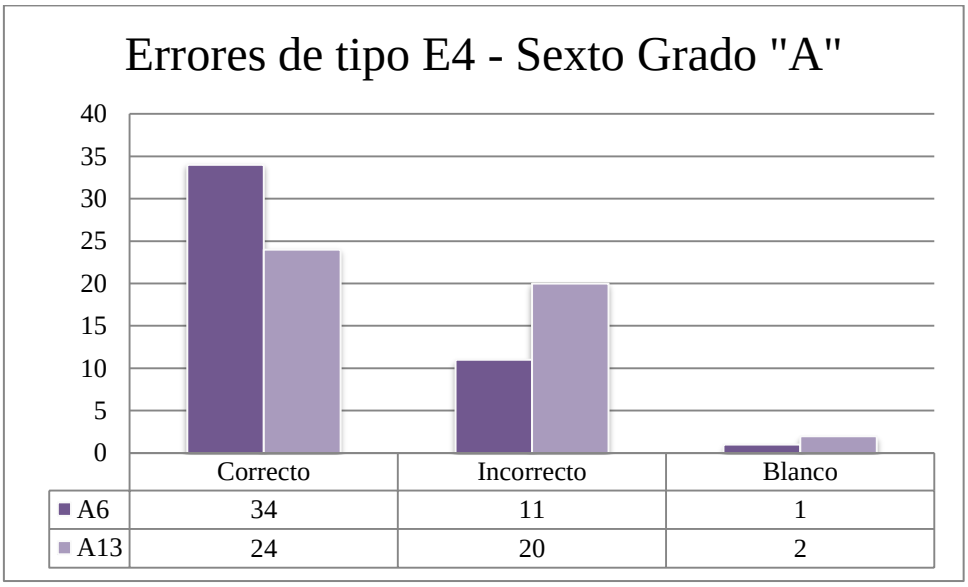


Figura 71. Errores de tipo E4 – Sexto Grado "A".

En el ítem A6-Problemas con imagen, se pone de manifiesto la categoría de *no verificación de resultados parciales o totales*, donde el informante (Figura 72) aplica correctamente la fórmula del área del cuadrado pero al momento de calcular la respuesta final, se equivoca al sumar $6 + 0 = 0$.

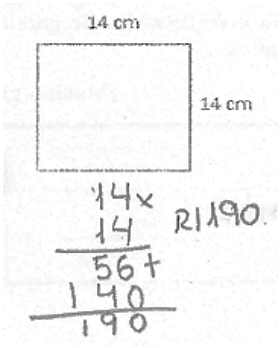


Figura 72. Respuesta obtenida por el informante I6A- 2 en el examen final.

Con respeto a la categoría de *errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo*, no se evidencia en los resultados obtenidos en sexto grado "A", en ninguno de los dos aspectos A6-Problema con imagen ni en el aspecto A13-Problema con enunciado.

Discusión final

En los errores de tipo E4- Errores debidos a la falta de verificación de los resultados, se observa una mayor recurrencia de errores en la categoría de *no verificación de resultados parciales o totales* evidenciados sobretodo en quinto grado a diferencia de la categoría *errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo* que se presentó rara vez en las respuestas de los estudiantes, llegando a presentarse los patrones de errores en los aspectos A6 y A13 como se muestra en la tabla 17.

Tabla 17. Patrones de error del tipo E4.

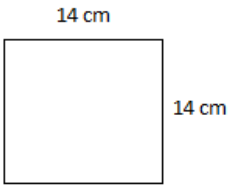
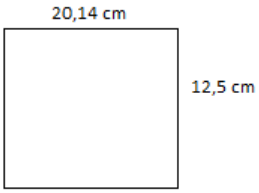
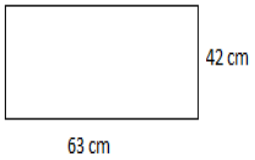
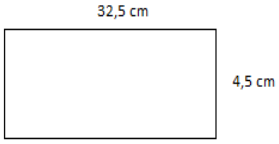
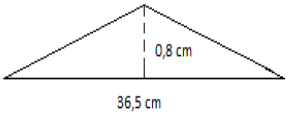
Aspectos	***Patrones de error***	***Categorías de error***
A6	Aplica correctamente el algoritmo de la multiplicación, pero falla al dar el resultado parcial. Copia incorrectamente los datos de la figura. Aplica correctamente todo el algoritmo pero falla en dar la respuesta final.	Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.
A13	Aplica una fórmula diferente a la del área del triángulo. Transcribe de forma incorrecta los datos del problema.	No verificación de resultados parciales o totales.

4.5.Errores de tipo E5. *Errores debidos a definiciones deformadas o una falta de conceptos previos.*

En este apartado se analiza los errores producto de la falta de un concepto matemático previo. Pese a que se pueden poner en evidencia en más de un aspecto, solo se tomará en cuenta los problemas A6, A7, A8, A9, A11, A13 y A14[14] (Tabla 18) del examen final, donde se manifiestan de forma más clara la aplicación del contenido matemático sobre áreas de las distintas figuras geométricas con datos en números naturales y decimales. De igual forma se determinará en qué medida el conocimiento previo sobre áreas, garantiza la correcta solución del problema.

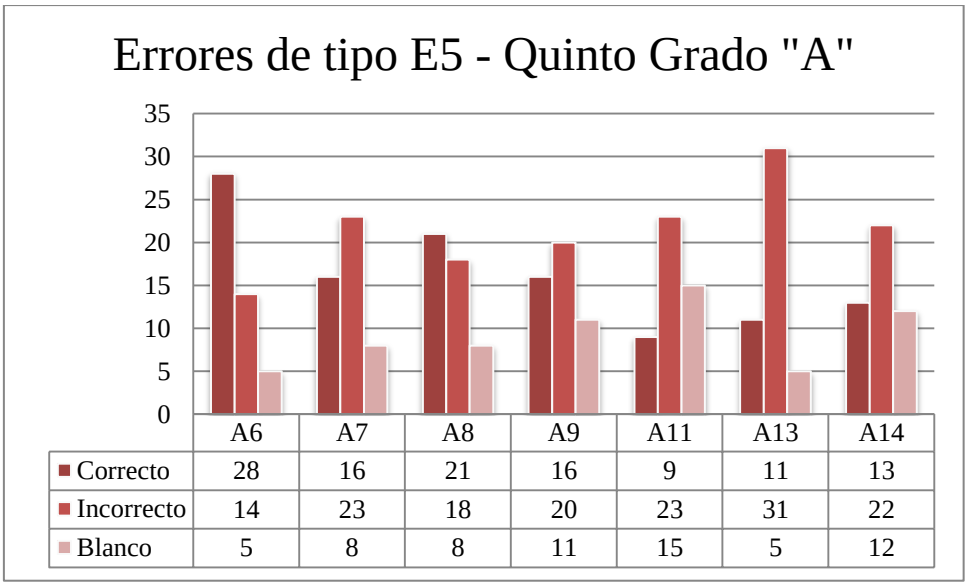
[14] Los aspectos A10 y A12 no se toman en cuenta en este tipo de error porque ya se analizaron en los errores de tipo E2- Errores debidos a un empleo incorrecto de los datos o la información.

Tabla 18. Ítems asociados a E5- Errores debidos a definiciones deformadas o una falta de conceptos previos.

Código	***Aspecto abordado***	***Ítems***
A6	Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos naturales.	
A7	Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos decimales.	
A8	Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos naturales.	
A9	Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos decimales.	
A11	Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos decimales.	
A13	Problema (con enunciado) sobre el área del triángulo.	Halla el área de un triángulo si su base es 12,5 y su altura es 6.
A14	Problema (con enunciado) sobre el área del rectángulo.	Un patio de forma rectangular tiene 12,5 m de ancho y 24,3 m de largo. Calcula el área de dicho patio.

4.5.1. Errores de tipo E5 – Quinto Grado “A”

Los resultados obtenidos por los estudiantes de quinto grado “A” en el examen final muestran que A6 es el problema mejor resuelto, seguido de A8, A7 y A9 (en la misma cantidad), A14, A13 y A11. Lo cual evidencia que el conocimiento que se tiene sobre el área del cuadrado (A6) es la que tiene mayor dominio con 28 (60%) a diferencia del área del triángulo donde se evidencia menos respuestas correctas ya sea en problemas con imagen (A11) con 9 (19%) y en problemas con enunciados (A13) con 11 (23%) como se observa en la Figura 73:



	A6	A7	A8	A9	A11	A13	A14
Correcto	28	16	21	16	9	11	13
Incorrecto	14	23	18	20	23	31	22
Blanco	5	8	8	11	15	5	12

Figura 73. Errores de tipo E5 – Quinto Grado “A”.

En los problemas con imagen mostrados en los aspectos A6, A7, A8, A9, A10 y A11, se evidencian los *errores de calidad*, al observar donde existe una falta de conceptos previos que son requisitos para resolver el problema. Así se tiene que en el aspecto A9- *Problema (con imagen) sobre el área del cuadrado con datos decimales* de la figura 74, el informante confunde aplica el área del triángulo en la figura de un rectángulo.

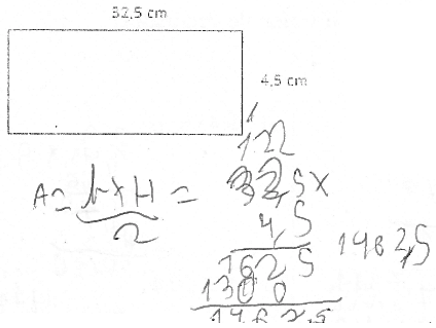


Figura 74. Respuesta obtenida por el informante I5A- 13 en el examen final.

El área del rectángulo no solo se suele confundir con la del triángulo, sino que también como observamos en la figura 75, en el aspecto A7- *Problema (con imagen) sobre el área del rectángulo con datos decimales,* se observa una deficiencia en cuanto a los elementos del rectángulo considerando que está formado por lados iguales como el rectángulo y que su área estaría dada también como L x L (lado por lado).

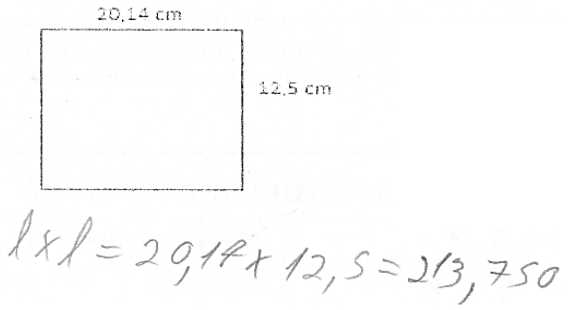


Figura 75. Respuesta obtenida por el informante I5A- 28 en el examen final.

Estos errores de calidad también se manifiestan también en el aspecto A11- *Problema (con imagen) sobre el área del triángulo con datos decimales*, donde se trata de hallar el área del triángulo y el informante tienden confundir con la del rectángulo, así como se observa en la figura 75, donde existen definiciones deformadas o una falta de conceptos previos; que los llevan a desconocer el área del triángulo y por lo tanto, no puede aplicar su área pese a que los datos se muestran de forma explícita:

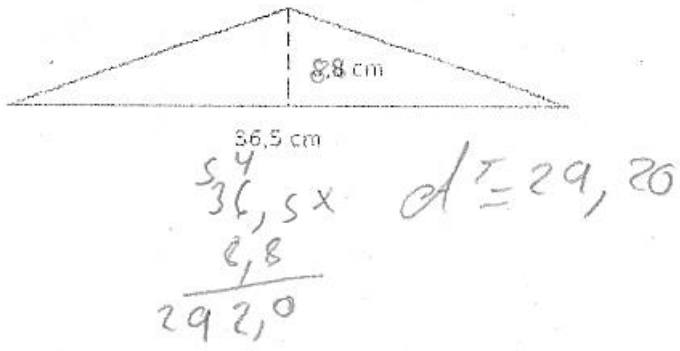


Figura 76. Respuesta obtenida por el informante I5A- 19 en el examen final.

En cuanto a los problemas con enunciado se observa en la figura 77 del aspecto A13- *Problema (con enunciado) sobre el área del triángulo*, que el informante desconoce cómo hallar el área del triángulo para lo cual, solo se limita a multiplicar los elementos.

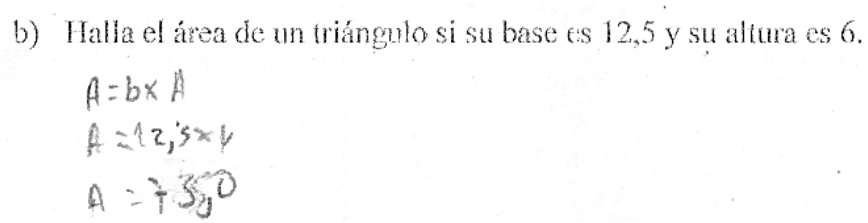
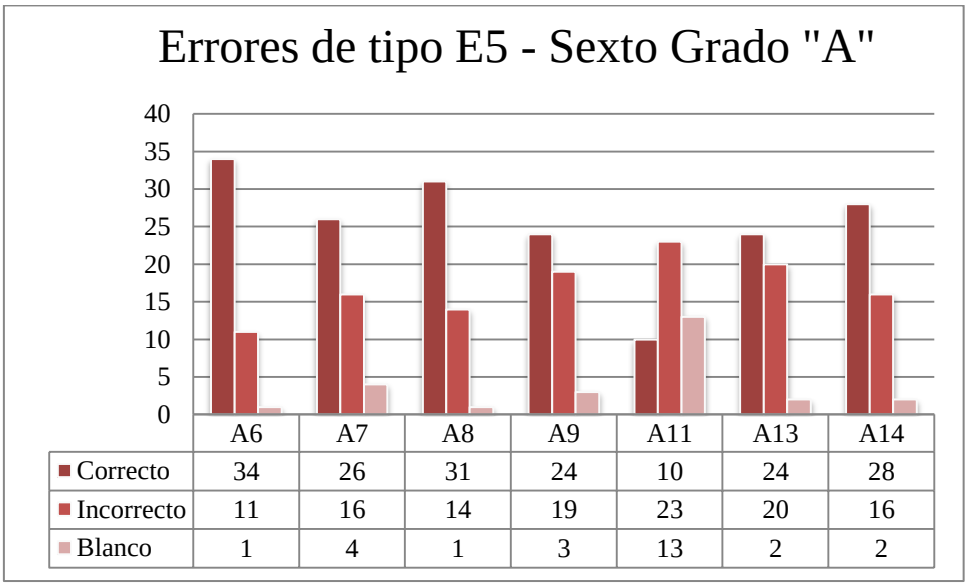


Figura 77. Respuesta obtenida por el informante I5A- 1 en el examen final.

4.5.2. Errores de tipo E5 – Sexto Grado "A"

Los resultados obtenidos por los estudiantes de sexto grado "A" en el examen final muestran que A6 es el problema mejor resuelto, seguido de A8, A14, A7, A9 y A13 (las dos últimas en la misma cantidad) y A11. Lo cual evidencia que el conocimiento que se tiene sobre el área del cuadrado (A6) es la que tiene mayor dominio con 34 (74%) a diferencia del área del triángulo donde se evidencia menos respuestas correctas ya sea en problemas con figuras (A11) con 10 (22%) y en problemas con enunciados (A13) con 24 (52%) como se observa en la figura 78.



	A6	A7	A8	A9	A11	A13	A14
Correcto	34	26	31	24	10	24	28
Incorrecto	11	16	14	19	23	20	16
Blanco	1	4	1	3	13	2	2

Figura 78. Errores de tipo E5 – Sexto Grado "A".

Los *errores de calidad* se manifiestan tanto en los problemas con imagen como en los problemas con enunciado. Así se tiene que en la figura 79, del aspecto A13- *Problema (con enunciado) sobre el área del triángulo,* el informante desconoce el área del triángulo y por lo tanto, no puede aplicar su área pese a que en el problema los datos se muestran de forma explícita.

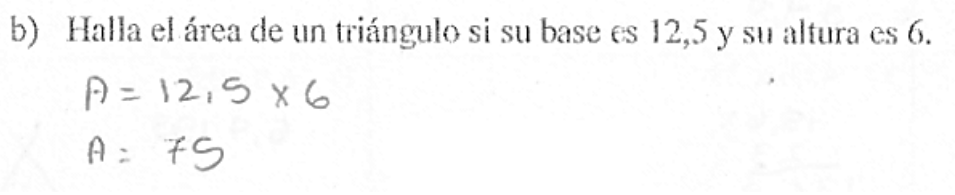


Figura 79. Respuesta obtenida por el informante I6A- 7 en el examen final.

De la misma forma ocurre en el aspecto A14- *Problema (con enunciado) sobre el área del rectángulo,* el informante no aplica el área del rectángulo, sino que lo confunde con el área del triángulo. Así se aprecia una falta de nociones previas sobre áreas que hagan posible la realización del problema, tal como se muestra en la Figura 80.

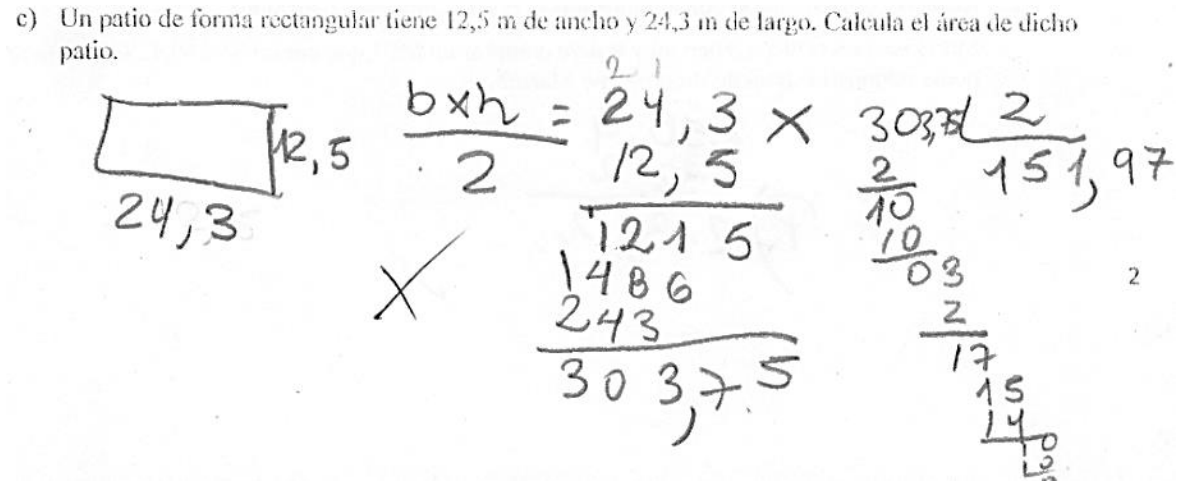


Figura 80. Respuesta obtenida por el informante I6A- 3 en el examen final.

En los aspectos donde se involucran problemas con imagen, también ocurren errores de calidad, donde se suele confundir el área del triángulo con el área del rectángulo (Figura 81a) y los elementos del rectángulo (Figura 81b) al considerarlos como iguales.

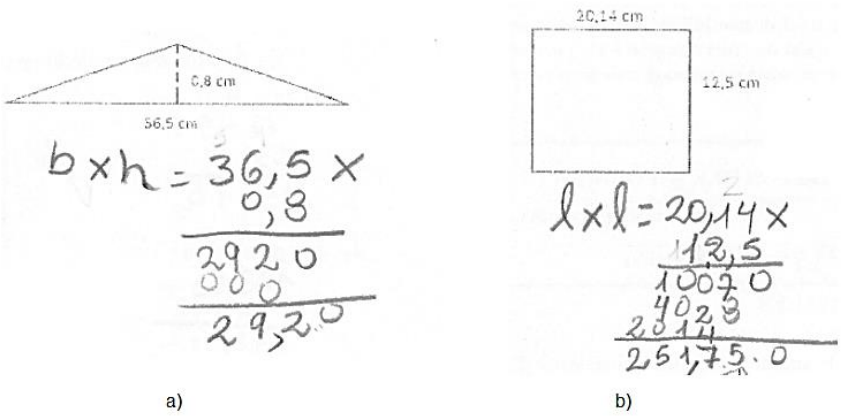


Figura 81. Respuesta obtenida por el informante I6A- 3 en el examen final.

Discusión final

En los errores de tipo E5- Errores debidos a definiciones deformadas o una falta de conceptos previos, se observa como patrón de error la categoría de errores de calidad sobre todo en los problemas de figuras como el triángulo y el rectángulo, tal como se muestra en la tabla 19.

Tabla 19. Patrones de error del tipo E5.

Aspectos	*Patrones de error*	*Categorías de error*
A6 A7	Desconoce los elementos del rectángulo.	
A8	Desconoce los elementos del rectángulo.	
A9	Desconoce las fórmulas para hallar el área del rectángulo.	Errores de calidad.
A11	Confunde el término rectángulo con triángulo.	
A13	Desconoce las fórmulas para hallar el área del triángulo.	
A14		

4.6.Errores de tipo E6. *Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas verbales.*

Los errores de este tipo se han manifestado en los aspectos A5, A12, A13 y A14 del examen final, así como también guardan relación con los ítems mostrados en la tabla 20:

Tabla 20. Ítems asociados a E1-Errores debidos a la incorrecta interpretación de problemas verbales

Código	*Aspecto abordado*	*Ítems*
A5	Problema de adición y sustracción de números decimales.	María va a un centro comercial y quiere comprar un MP3 que cuesta S/. 250,4. Si le falta S/. 32,2 para poder adquirirlo, ¿cuánto dinero tiene María?
A12	Problema sobre el área del cuadrado.	Halla el área de un cuadrado si su perímetro es 24 cm.
A13	Problema sobre el área del triángulo.	Halla el área de un triángulo si su base es 12,5 y su altura es 6.
A14	Problema sobre el área del rectángulo.	Un patio de forma rectangular tiene 12,5 m de ancho y 24,3 m de largo. Calcula el área de dicho patio.

4.6.1. Errores de Tipo E6 - Quinto Grado "A"

Los resultados obtenidos por los estudiantes de quinto grado “A” en el examen final muestran que A5 es el problema mejor resuelto, seguido de A12, A14 y A13. Sin embargo, si bien 30 estudiantes (58,8%) lo resuelven correctamente, 10 (19,6%) no lo desarrollan. Esto llama la atención porque, luego de A14, es el problema menos resuelto (Figura 82).

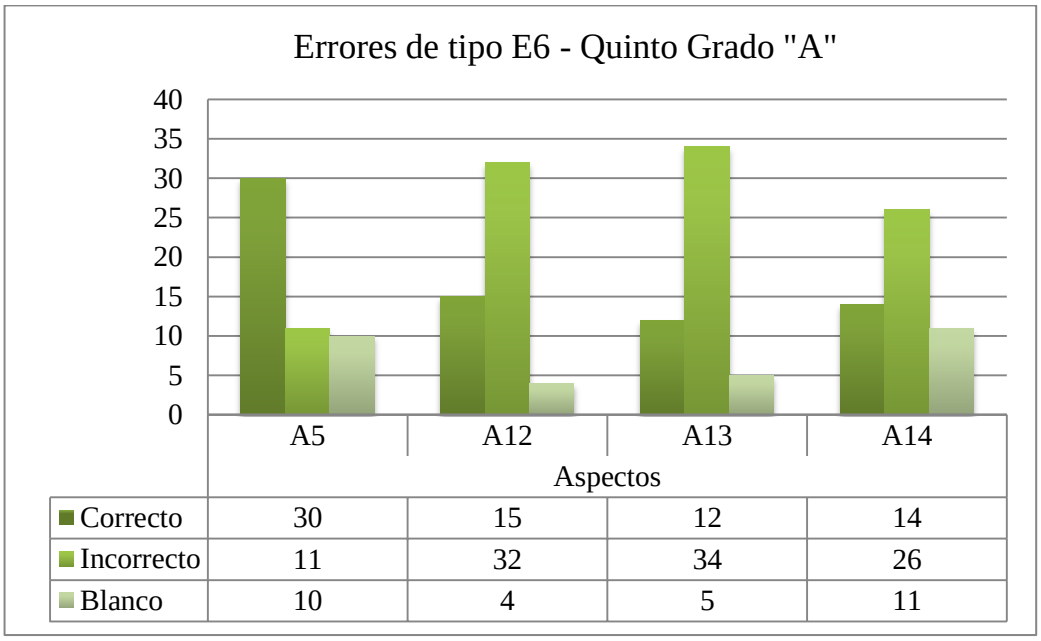


Figura 82. Errores de tipo E6 – Quinto Grado "A".

Los resultados correctos mostrados en la figura 82 evidencian cierta correspondencia con complejidad de los problemas propuestos. Así, para resolver A5 los estudiantes deben aplicar la sustracción de un número decimal en un contexto de compra-venta de un artefacto (Figura 83) mientras que en los demás problemas están involucrados con los conceptos de área y perímetro por lo que se requiere efectuar operaciones de multiplicación y división con números naturales (A12), multiplicación y división de números naturales y decimales (A13) y multiplicación de decimales (A14).

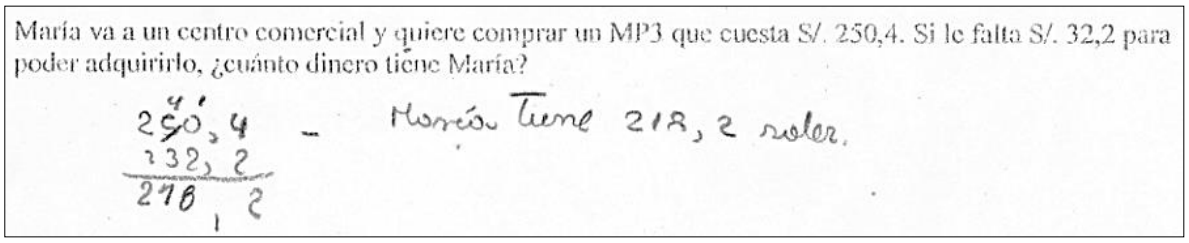


Figura 83. Respuesta obtenida por el informante I5A-2 en el examen final.

Recíprocamente al analizar la frecuencia de errores, se observa (Figura 82) que A13 es desarrollado erróneamente por 34 (66,7%) informantes. Esto puede corresponderse con la complejidad del problema en sí puesto que, como se comentó antes, se requiere del concepto de área de un triángulo en el que están involucradas la multiplicación y división de números naturales y decimales. Por su parte, A12, problema que requiere la división y multiplicación de números naturales es resuelto erróneamente por 32 (62,75%) estudiantes, mientras que A14, que involucra la multiplicación de números decimales, es resuelto equivocadamente por 26 (51%) estudiantes.

De la categoría asociadas a E6-Errores debido a una correcta interpretación de problemas verbales, es posible que la *interpretación incorrecta del lenguaje* (Tabla 9), sobre todo, ocasione la frecuencia de respuestas erróneas puesto que, dicha categoría supone la traducción equivocada de un lenguaje simbólico a otro tipo de lenguaje. Así, en los problemas involucrados (A5, A12, A13 y A14) se requiere, inicialmente, la traducción de un lenguaje verbal a numérico. Sin embargo, dicha traducción puede estar influenciada por la comprensión semántica de los términos empleados en el problema. Así, por ejemplo, en la figura 84 se observa que I5A-1 equipara "lado" con "perímetro" y luego, aplica la fórmula correcta para hallar el área de un cuadrado.

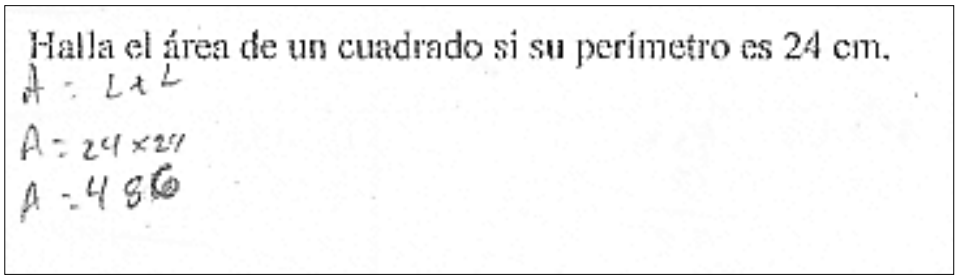


Figura 84. Respuesta obtenida por el informante I5A-1 en el examen final.

A diferencia del ejemplo anterior, la figura 85 muestra la traducción errónea de la expresión verbal a numérica porque I5A-3 aplica una fórmula incorrecta para calcular el área de un triángulo. Como puede verse, dicha fórmula corresponde al área de un rectángulo o cuadrado.

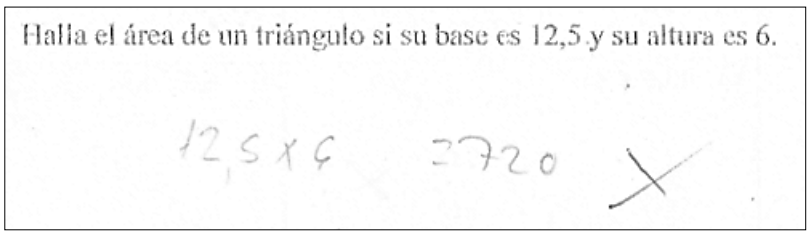


Figura 85. Respuesta obtenida por el informante I5A-3 en el examen final.

Caso contrario al anterior se puede observar en la figura 86 puesto que la fórmula que emplea I5A-23 es la del triángulo cuando corresponde la del rectángulo. Esto hace que la traducción de la expresión numérica sea incorrecta, pero además de lo anterior, también hay que decir que, se ve un conocimiento correcto del algoritmo para multiplicar dos números decimales, aun cuando el resultado final sea erróneo. Dicho error es consecuencia de haber multiplicado equivocadamente dos de las cifras que componen los números involucrados.

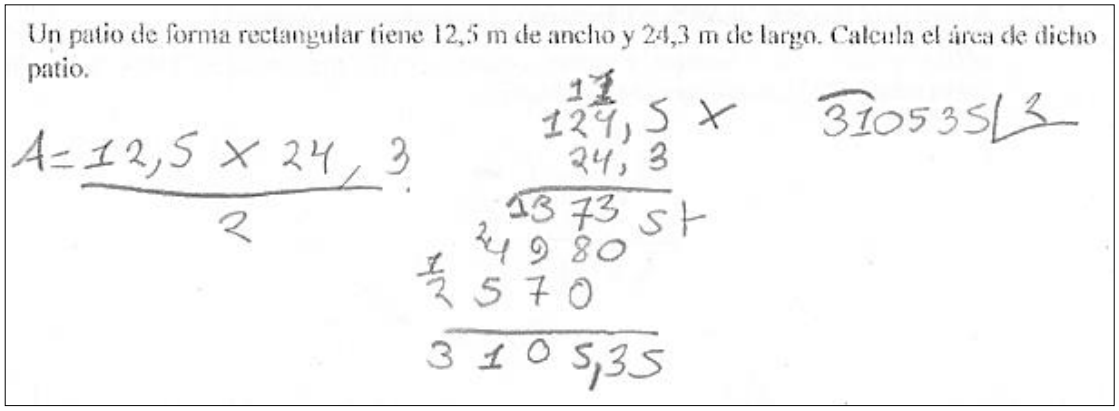
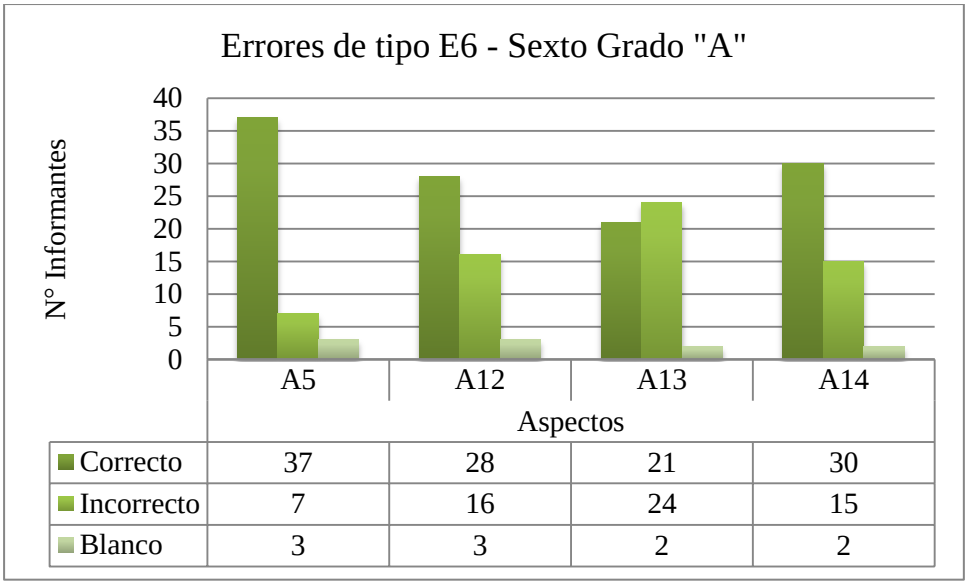


Figura 86. Respuesta obtenida por el informante I5A-23 en el examen final.

Después de lo anterior, se concluye que los errores de tipo E6 son más frecuentes en problemas donde interviene el concepto de área. Así los estudiantes en su mayoría, confunden las fórmulas para calcular las áreas de las figuras del cuadrado y del rectángulo.

4.6.2. Errores de Tipo E6 – Sexto Grado "A"

De la misma manera, se obtuvieron los resultados en el examen final de los estudiantes de Sexto Grado “A” los cuales se resumen en la figura 87:



	A5	A12	A13	A14
Correcto	37	28	21	30
Incorrecto	7	16	24	15
Blanco	3	3	2	2

Figura 87. Errores de Tipo E6 – Sexto Grado “A”.

A diferencia de quinto grado “A”, este tipo de error no es frecuente en los estudiantes de sexto grado “A”, donde se aprecia una mayor cantidad de respuestas correctas en los aspectos señalados. Sin embargo, se conserva la tendencia de cometer menos errores en A5 que en los A12; A13 y A14 donde se trabaja con áreas. De este modo se observa en la figura 88 que el informante I6A-23 en A5, no ha interpretado correctamente el problema, de modo que ha sumado los datos en vez de restarlos.

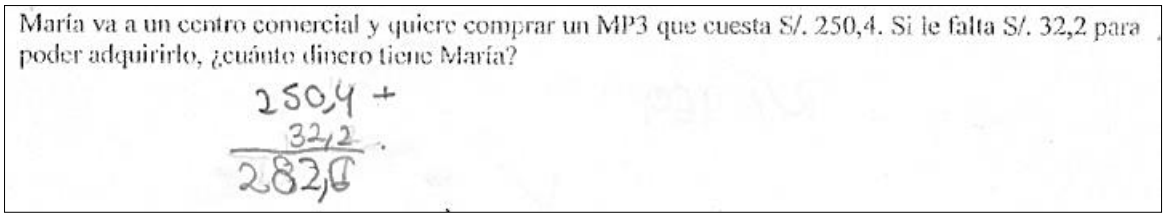


Figura 88. Respuesta obtenida por el informante I6A-23 en el examen final.

Lo mismo ocurre con el informante I6A-5 que en A12 de la figura 89 no ha interpretado correctamente lo que se pide en el problema, solo se ha limitado a determinado a hallar el lado de cuadrado y no su área.

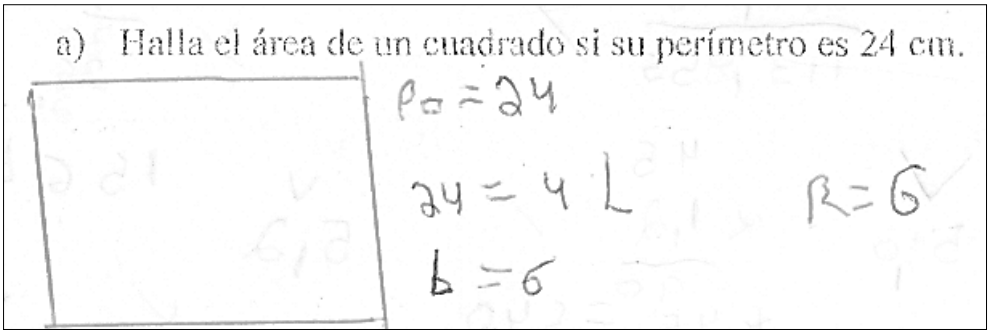


Figura 89. Respuesta obtenida por el informante I6A-5 en el examen final.

Así tenemos que en la figura 90, el informante I6A-12 en A13, confunde el área del triángulo con la del rectángulo. Lo mismo que pasaba en quinto grado A con los informantes I5A-3 y I5A-23 en las Figuras 85 y 86 respectivamente.

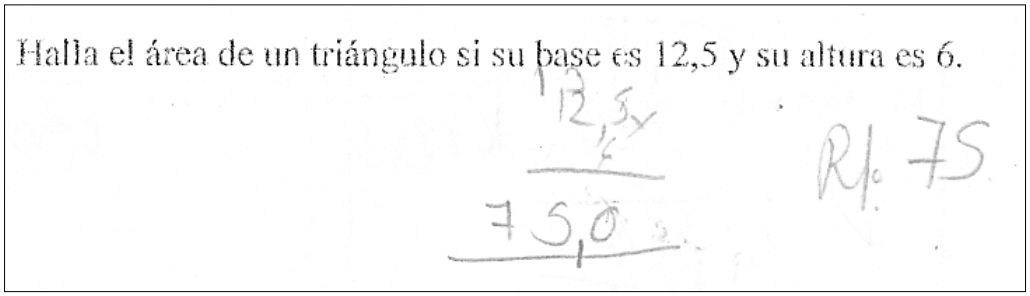


Figura 90. Respuesta obtenida por el informante I6A-12 en el examen final.

Algo similar ocurre en la figura 91 con el resultado dado por el informante I6A-40 en A14, donde lejos de aplicar la fórmula del área del rectángulo, se procedió a sumar los datos dados, notando claramente una incorrecta interpretación del problema.

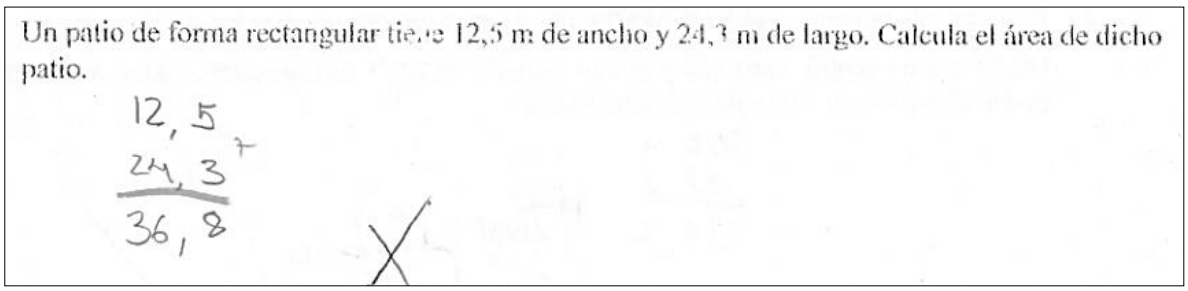


Figura 91. Respuesta obtenida por el informante I6A-40 en el examen final.

Se concluye que en los errores de tipo E6, los informantes no interpretan correctamente el uso de las áreas de las figuras del rectángulo y del triángulo para solución de un problema con enunciado verbal. Asimismo, se aplica la categoría en la que existen *errores debidos a las dificultades de lenguaje* y a la *interpretación incorrecta del lenguaje.*

Discusión final

En los errores de tipo E6- Errores debidos a una incorrecta interpretación de problemas verbales, se observa como patrón de error la categoría *Interpretación incorrecta del lenguaje*, sobre todo en los problemas con enunciado, tal como se muestra en la tabla 21.

Tabla 21. Patrones de error del tipo E6.

Aspectos	***Patrones de error***	***Categorías de error***
A5	No infiere datos correspondientes a compra-venta.	Interpretación incorrecta del lenguaje.
A12	Traduce incorrectamente un problema de áreas.	
A13	Confunde términos como el triángulo y el rectángulo.	
A14	Confunde perímetro con área.	

A parte de los test aplicados en la muestra principal, también se llevó a cabo una ***entrevista*** para cada uno de los tres estudiantes de la muestra secundaria. Cabe mencionar que las entrevistas se realizaron en los ambientes de la institución y tuvo como objetivo conocer la estrategia aplicada por el informante para así determinar el posible origen del error.

- **Entrevista al informante I6A – 4:**

El ejercicio planteado corresponde al aspecto A1 como se observa en la figura 92 y está basado en la división de un número natural entre un decimal para lo cual el estudiante explica que para resolver el ejercicio se debe multiplicar el divisor, que es decimal, por 10 para convertirlo en natural: *"lo multiplico, en el decimal lo multiplico, si es dos (dos cifras en la parte decimal del divisor) lo multiplico por cien, pero esta es por diez porque es 0,4 (el divisor) como hay una (cifra) lo multiplico por 10…me da cuatro y divido 478 entre 4".* (I6A – 4, 30 de noviembre de 2016).

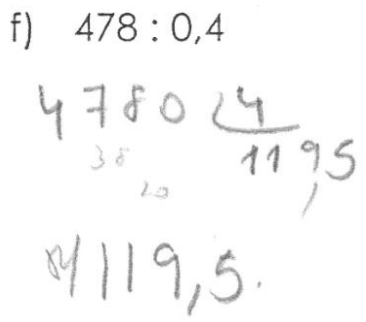


Figura 92. Entrevista al informante I6A – 4.

Cuando se le pregunta al alumno por qué no multiplicó también al dividendo por 10, él afirma que no, porque el dividendo ya es un número natural y solo el divisor falta convertir ya que es decimal:

> ***Profesora*:** pero si en el divisor multiplicas por diez, ¿por qué en el dividendo no multiplicas también por diez?
>
> ***I6A – 4*:** porque aquí (dividendo) ya está en naturales y en el otro [divisor] hay decimal. (I6A - 4, 30 de noviembre de 2016).

En esta entrevista se puede identificar que el estudiante a pesar de que aplica correctamente la división, presenta una falta de dominio de las propiedades de los números tanto que si a una cantidad se le multiplica por 10 la otra también debe quedar multiplicada

por 10 para no alterar la igualdad. De este modo, el estudiante debió multiplicar por 10 tanto al dividendo como al divisor antes de efectuar el algoritmo de la división.

- **Entrevista al informante I5A – 6:**

La segunda entrevista se realiza a un estudiante que resolvió de manera incorrecta un problema de decimales aplicando mal el dato dado en el examen final (Figura 93).

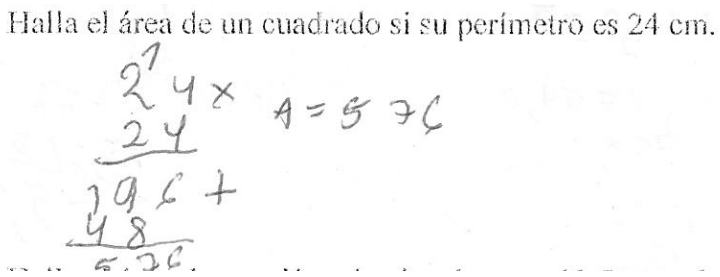


Figura 93. Entrevista al informante I5A – 6.

El estudiante al resolver el problema propuesto, multiplicó 2,4 x 2,4 empleando el dato incorrectamente puesto que el problema lo señala a 2,4 como el perímetro y no como el lado del cuadrado. Pese a que aplica de forma correcta la fórmula para hallar el área del cuadrado, no identifica adecuadamente el dato relevante del problema.

Cuando se pregunta al estudiante sobre el procedimiento que siguió para resolver el problema, este responde: *"como ahí dice el área del cuadrado… y el área del cuadrado es lado por lado… multipliqué 2,4 por 2,4".* (I5A – 6, 09 de diciembre de 2016).

Al observar el error se le pregunta al estudiante sobre los datos del problema para lo cual no sabe qué responder y después de un silencio se da cuenta que el dato que le dan no corresponde al lado del cuadrado sino a su perímetro:

***Profesora*:** pero en el problema dice que 2,4 es el perímetro del cuadrado y no el lado.

I5A – 6: …

***Profesora*:** entonces ¿de qué otra forma damos solución al problema?

I5A – 6: …

***Profesora*:** ¿qué es el perímetro de una figura?

I5A – 6: es la suma de los lados

***Profesora*:** entonces si 2,4 es el perímetro del cuadrado ¿qué dato te falta encontrar?

I5A – 6: el perímetro (suma 2,4 + 2,4 + 2,4 + 2,4)

***Profesora*:** ¿estás hallando el perímetro nuevamente?

I5A – 6: … 2,4 es el perímetro entonces

***Profesora*:** … entonces si ya tienes el perímetro ¿qué dato te falta?

I5A – 6: el lado del cuadrado. (I5A-6, 09 de diciembre de 2016).

Se aprecia claramente la falta de identificación de los datos relevantes del problema, así como una deficiente interpretación puesto que el estudiante iba a sumar nuevamente el perímetro para encontrar el lado y no la operación de dividir 2,4 entre 4.

- **Entrevista al informante I5A – 32:**

Se realiza una última entrevista a un estudiante de sexto grado el cual debe resolver un problema de decimales. Al principio identifica los datos correctamente, luego la estrategia adecuada, pero al final comete un error por falta de verificación, dando lugar a una respuesta errónea. El problema planteado es el que se muestra en la figura 94:

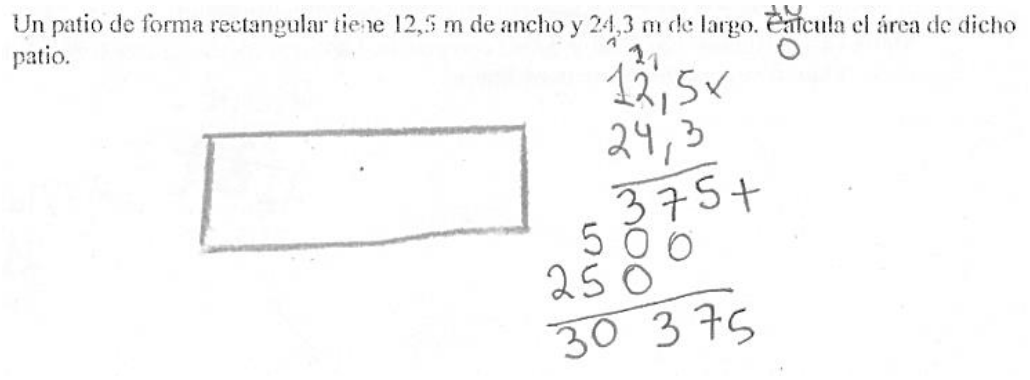


Figura 94. Entrevista al informante I5A – 32.

El estudiante resuelve correctamente el problema planteado sin errores en el procedimiento, pero olvida la coma decimal:

***Profesora*:** ¿qué estrategia aplicas?

I5A – 32: multiplico, multiplico 12,5 por 24,3… resuelvo como si fueran normales (naturales) y digo 5 por 3 es 15, llevo uno, dos por 3 es 6 y uno, es 7. Luego 5 por 4 es 20, llevo dos; 2 por 4 es 8, llevaba 2 me da 10, llevo 1; y 4 por 1 es 4 y una que llevaba es 5. Luego 2 por 5 es 10 y llevo 1, 2 por 2 es 4 y una que llevaba es 5 y 2 por uno es 2. Luego sumo.

***Profesora*:** ¿y la coma decimal?

I5A – 32: … (sonríe)

***Profesora*:** ¿dónde la ubico o ya no se pone?

I5A – 32: me olvidé… es que como estaba sumando…ya no vi la coma… (I5A – 32, 09 de diciembre de 2016).

Finalmente se observa que, a pesar de realizar un correcto procedimiento, el estudiante comete el error de olvidar la coma decimal por una distracción o cansancio durante el examen final.

En síntesis, se puede determinar que las entrevistas aplicadas a los tres informantes buscan contrastar los resultados hallados en los test. De tal modo, en la entrevista realizada a I6A – 4, se reafirma que, en las operaciones aritméticas con números decimales, se cometen

los errores de Tipo E1, donde el informante conoce el algoritmo para dividir, pero no lo aplica correctamente cometiendo un error técnico. Así mismo en la entrevista del estudiante I5A – 6, se tiene que, en un problema con enunciado, los errores de Tipo E2, E5 y E6 se hacen presentes en cuanto no se aplican correctamente los datos debido a una falta de conocimientos previos que se demuestran cuando el informante confunde el perímetro con el área, observándose también una incorrectamente interpretación del enunciado. De igual forma, el informante I5A – 32 refleja que los errores de Tipo E4 encontrados en los test, se causan por una falta de verificación de los resultados, que se manifiesta en la medida en que todo el procedimiento es correcto, pero en la respuesta final fallan. Por esta razón, los errores encontrados en los test y las entrevistas, no se dan de forma aislada, sino que se dan de forma simultánea.

Conclusiones y prospectiva

En base a las fuentes consultadas en los antecedentes de estudio y del marco teórico se concluye lo siguiente:

- El aprendizaje de las matemáticas es un proceso dinámico y constante donde se busca sentar las bases desde los primeros años de vida con las nociones elementales del número y sus propiedades para que, progresivamente, se logren esquemas más complejos que lleven a un pensamiento matemático más abstracto de acuerdo a la edad.

- Los errores matemáticos son un factor constante en todo el proceso de aprendizaje por lo cual deben ser vistos como una oportunidad, es decir, una herramienta eficaz que contribuya a retroalimentar el proceso de enseñanza con nuevas estrategias tanto por parte del docente como del estudiante que faciliten su comprensión.

- Cuando se presente un obstáculo en la comprensión de las matemáticas se recomienda buscar la causa u origen del problema para actuar sobre él y aplicar alternativas de solución para mejorar sus aprendizajes.

- Las tipologías de errores mostrados en esta investigación podrían extenderse a otras ramas de la matemática y estudiarse en distintos niveles educativos.

- La clasificación que se plantea en este proyecto busca resumir los errores más frecuentes cometidos por estudiantes del quinto ciclo de educación primaria, a partir de la revisión bibliográfica. Este trabajo puede ser un aliciente para implementar estrategias que favorezcan un buen dominio del área y disminuir el porcentaje de alumnos desaprobados.

En base a los resultados obtenidos al aplicar los instrumentos en la muestra secundaria y la muestra principal se concluye:

- Después de llevar a cabo un examen diagnóstico y un examen final sobre la resolución de operaciones con decimales, se pudo concluir que los alumnos presentan más errores al momento de aplicar la división de decimales y menos errores cuando se trata de la adición.

- Con respecto a los ejercicios planteados, se observó que los estudiantes cometen más errores cuando se enfrentan a números decimales que cuando resuelven con naturales.

- De acuerdo a la tipología propuesta (Tabla 9) se distinguió una serie de patrones en cada grupo de errores ya sea cuando se está frente a un problema o cuando se resuelve un ejercicio, siendo el más frecuente aquel en el que los informantes operan con los números decimales como si fueran naturales. A parte de lo mencionado, se dan otros patrones y no de forma aislada sino de manera simultánea, así como se muestran a continuación:

    - Cambia la operación propuesta por otra al momento de ejecutarla.

    - Opera sin diferenciar los números decimales de los naturales, sin colocar la coma decimal en el resultado final.

    - No transcribe los datos correctamente.

    - Aplica incorrectamente el algoritmo de la suma, resta, multiplicación o división.

    - Realiza correctamente la operación, pero falla al momento de colocar la coma decimal.

    - Plantean incorrectamente el problema.

    - Plantean correctamente el problema, pero fallan en la aplicación del algoritmo.

  - Plantean correctamente el problema y aplican el algoritmo correctamente, pero fallan en el resultado final.

- Asimismo, se concluye que de acuerdo a cada tipología propuesta se puede determinar posibles causas que dieron origen a errores, entre las más importantes tenemos:

  - Falta de comprensión lectora.

  - Aprendizaje deficiente de nociones básicas como reconocer los elementos de figuras como el triángulo, cuadrado y rectángulo; diferenciar perímetro de área e identificar la fórmula para calcular el área de cada figura.

  - Escasas estrategias para determinar los datos de un problema.

  - Poca interpretación de una información espacial.

  - Cansancio o fatiga.

  - Deficiente dominio de estrategias de cálculo.

Finalmente se concluye que este trabajo brinda orientaciones sobre qué aprenden o no los estudiantes para que, en investigaciones posteriores, se planteen métodos y estrategias de enseñanza que faciliten una mejor comprensión de los números decimales o de cualquier contenido matemático en general y evitar que los errores cometidos no se conviertan en obstáculos, sino que, a partir de una mejor comprensión, los estudiantes sean capaces de aplicar dichos contenidos a diferentes circunstancias, desarrollando de manera óptima sus competencias matemáticas.

Referencias

Ariza, K. P., García, E. Á., & Rivero, C. B. (2016**).** Reflexiones sobre el concepto de problema matemático. Revista Bases de la Ciencia. e-ISSN 2588-0764, 1(1), 25-34.

Astolfi, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar.* Díada.

Ausubel, D. P., & Novak, J. H. (1976). Significado y aprendizaje significativo. *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, 53-106.

Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales: Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. Educación matemática, 20(2), 5-33.

Bravo, M., González, N., & Paz, A. (2014). Secuencias didácticas para el aprendizaje de las razones trigonométricas. (Tesis doctoral).

Campoy, T., & Gomes, E. (2009). Técnicas e instrumentos cualitativos de recogida de datos. *Manual básico para la realización de tesinas, tesis y trabajos de investigación*, 275-302.

Castro, W., & Godino, J. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones de los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, & M. Palarea (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XV* (págs. 99-116). Ciudad Real: SEIEM.

Cook, T. D., & Reichardt, C. S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación educativa.* Madrid: Morata.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. una espistemología a través de la actividad humana. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa., 4*(2), 103-128.

Córdova, J. M. (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Revista educación y pedagogía, 23*(59), 179-193.

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education.* Greenwood Publishing Group.

Denzin, NK (1989). Biografía interpretativa (vol. 17). Sabio.

Dienes, Z. P., Golding, E. W., & Bonet, M. D. (1981). Los primeros pasos en matemáticas: Lógica y juegos lógicos. Teide.

Domingo, J. C., & LA TENSION, E. Y. (1987). De estudiante a profesor: socialización y aprendizaje en las prácticas de enseñanza. *Revista de educación no 282. Teoría del currículo*, 203.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprenizaje de las matemáticas. *Revista Premisas*, 23-29.

Estudiante, G. (30 de Noviembre de 2016). Entrevista N° 01. (J. Gonzaga, Entrevistador)

Estudiante, J. (09 de Diciembre de 2016). Entrecvista N°03. (J. Gonzaga, Entrevistador)

Estudiante, M. (9 de Diciembre de 2016). Entrevista N° 02. (J. Gonzaga, Entrevistador)

Fernández, A. I. (s.f.). *Universidad de Granada.* Recuperado el 01 de Diciembre de 2015, de www.ugr.es/~fherrera/PI3.doc

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa.* Madrid: Morata.

Flores, P. (2003). Aprendizaje en Matemáticas.

Godino, J. D., Batanero, C., & Vicenç, F. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada.

Gómez, A. B. (1994). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 13,* 313 - 325.

Konic, P. M. (2011). Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales. Granada: Universidad de Granada.

Marco Curricular Nacional. Propuesta para el diálogo. (2014). Lima.

Milsom, A., & Hartley, M. T. (2005). Assisting students with learning disabilities transitioning to college: What school counselors should know. Professional School Counseling, 436-441.

Moreyra, R. G. (1998). Psicología educacional de las matemáticas. *Revista de Investigación en Psicología, 1*(2), 09-40.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). A veces los errores de los estudiantes son culpa nuestra. Profesor de matemáticas, 80 (3), 191-94.

Nuñez, R. (2007). Obstáculos para el logro de aprendizajes en matemáticas. *Eutopía*, 57-62.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura-UNESCO.(2015). *Educación 2030. Declaración de Incheon y Marco de Acción para* la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4.

Pardos, A. B. C., Rodríguez, I. M., Moreno, M. M. G., & Herrero, M. H. (2014). Dificultades, conflictos, errores y obstáculos epistemológicos en la identificación visual del resto de la división con números decimales. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales", (87), 55-70.

Pérez Sánchez, P. (2006). *Apuntes de Psicología.* Piura: Universidad de Piura. Facultad de Educación.

Pérez Serrano, G. (2008). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes* (Vol. I Métodos). Madrid: La Muralla, S.A.

Pérez, C. Julia (1988): Números decimales. Colección “Matemáticas: Cultura y Aprendizaje”.

Pérez, C. Julia (1997): Números decimales. Colección “Matemáticas: Cultura y Aprendizaje”.

Piñero Nieto, E. (2011). *Errores y obstáculos en el concepto de número decimal de alumnos adultos de diferentes culturas.*

Pozo, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Ediciones Morata.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. For the learning of Mathematics, 1(1), 16-20.

Rebollo, M. A., & Rodríguez, S. (2006). El aprendizaje y sus dificultades. *Revista de neurología, 42*(2), 139-142.

Rico, L. (1992). Iinvestigación sobre Errores de Aprendizaje en Educación Matemática.

Rico, L. (1995b). Consideraciones sobre el currículo escolar. *Revista Ema, 1*(1), 4-24.

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En K. J, P. Gómez, & L. Rico (Edits.), *Educación matemática.* (págs. 69-108). Bogotá: Una empresa docente.

Riviére, Á. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. Dins Marchesi, A., Coll, C. i Palacios, J.(Comp.): Desarrollo psicológico y educación. III. Madrid: Alianza, 155.

Robayna, M. M., & Medina, M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 16*, 91-98.

Rodríguez, G., Gil , J., & García , E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Aljibe.

Ruiz, J. I. (2004). *Metodología de la investigación cualitativa.* Bilbao: Universidad de Deusto.

Schunk, D. H. (1997). *Teorías del aprendizaje.* Pearson Educación.

Sirvent, V. F. (2004). Sistemas de numeración, sistemas dinámicos substitutivos y fractales de Rauzy. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 11(2), 191-212.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.

Unidad de Medición de la Calidad Educativa-UMC. (2016). *Informe de evaluación de Matemática en sexto grado-2013 ¿Qué logros de aprendizaje en Matemática muestran los estudiantes al finalizar la primaria?* Lima: Ministerio de Educación del Perú.

Villareal, M. E., & Esteley, C. B. (2002). Una caracterización de la Educación Matemática en Argentina. Revista de Enseñanza de la Física, 15(2), 23-36.

Zapata, A., Ortiz, F., Rojas, B., Torres Albarrán, R., & Vásquez, S. (2014). Errores y obstáculos más frecuentes que presentan los estudiantes de séptimo año básico en la resolución de problemas que involucran números decimales.

Anexos

Anexo 1. Examen diagnóstico

EXAMEN N°01 – CUARTO PERÍODO – MATEMÁTICA

NOMBRE Y APELLIDOS:	N° DE OR.

DOMINIO	Número y operaciones
INDICADOR DE LOGRO	Resuelve operaciones con números decimales

Efectúa las operaciones realizando el procedimiento.

a) 12,45 + 23,51	b) 457,6 – 145,487	c) 1,45 x 3,6
d) 123,63 + 89,142	e) 478 – 364,145	f) 478 : 0,4
g) 875 + 35,47	h) 45 x 1,2	i) 15,6 : 3
j) 96,44 – 36,47	k) 45,6 x 23	l) 6,9 : 0,3

Anexo 2. Examen final

CUESTIONARIO PARA ESTUDIANTES DEL QUINTO Y SEXTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El presente cuestionario forma parte de la Tesis de Licenciatura *"Errores aritméticos al efectuar operaciones con números decimales. Un estudio en quinto ciclo de Educación Básica Regular"*. Así pues, se busca *identificar y clasificar dichos errores*. En este sentido, se pide su colaboración y total disponibilidad para completar, de forma detalla, las preguntas que se plantean, dado que las respuestas serán de crucial importancia para concretar esta investigación. Se garantiza la confidencialidad de la información recogida así como el anonimato de los encuestados.

¡Muchas gracias!

DATOS DEL INFORMANTE			
N° orden:		Fecha de aplicación:	
Grado y sección:		Duración:	

I. OPERACIONES CON DECIMALES

Dominio: Número y operaciones.

Indicador: Efectúa operaciones de suma, resta, multiplicación y división de decimales.

1. Efectúa realizando el procedimiento.

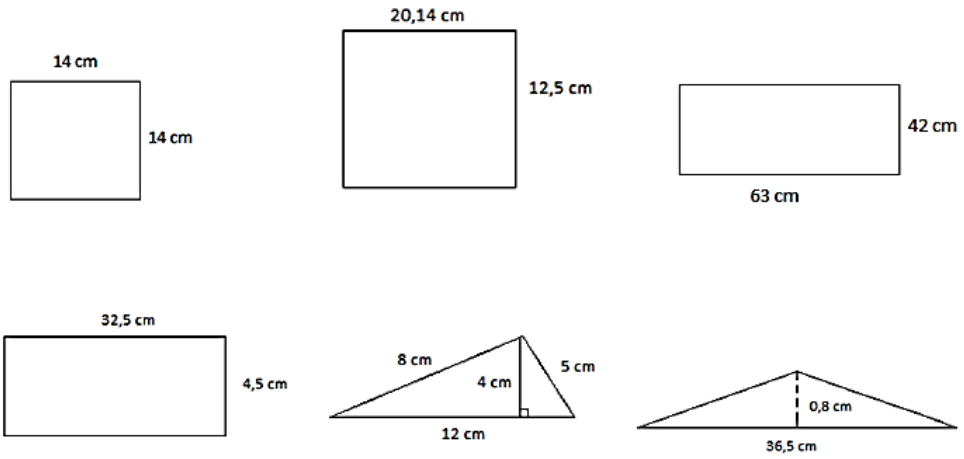
a) 12,45 + 23,51	b) 457,6 – 145,487	c) 1,45 x 3,6
d) 123,63 + 89,142	e) 478 – 364,145	f) 478 : 0,4
g) 875 + 35,47	h) 45 x 1,2	i) 15,6 : 3
j) 96,44 – 36,47	k) 45,6 x 23	l) 6,9 : 0,3

2. Resuelve el siguiente problema mostrando el procedimiento realizado:
   María va a un centro comercial y quiere comprar un MP3 que cuesta S/. 250,4. Si le falta S/. 32,2 para poder adquirirlo, ¿cuánto dinero tiene María?

II. ÁREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Dominio: Geometría.
Indicador: Calcula el área y perímetro de las figuras geométricas.

1. Calcula el área de las siguientes figuras, mostrando el procedimiento seguido:



2. Resuelve realizando el procedimiento:
   a) Halla el área de un cuadrado si su perímetro es 24 cm.

   b) Halla el área de un triángulo si su base es 12,5 y su altura es 6.

   c) Un patio de forma rectangular tiene 12,5 m de ancho y 24,3 m de largo. Calcula el área de dicho patio.

Anexo 3. Entrevista al informante I6A – 4.

Fecha: 30-11-2016
Nombre de la evaluación: Examen Diagnóstico
Contenido de la evaluación: Operaciones con números decimales
Informante: I6A – 4

P : … ¿cómo resuelves esa división de decimales cuando tienes un natural entre un decimal?
I6A – 4: … lo multiplico, en el decimal lo multiplico, si es dos (dos cifras en la parte decimal del divisor) lo multiplico por cien pero esta es por diez porque es 0,4 (el divisor) como hay una lo multiplico por 10…me da cuatro y divido 478 entre 4. Así tengo 4 por 1, 4; al 4, 0; 4 por 1, 4; al 7, tres; baja el 8. Luego tengo 9 por 4, 36 al 38 es 2. Aumento el cero (en el dividendo) y la coma en el cociente y digo 4 por 5 es 20, al 20 es 0.
P : …y ¿por qué sólo multiplicaste por diez al divisor?
I6A – 4:…
P :... ¿crees que deberías multiplicar también al dividendo por diez?
I6A – 4: No
P : ¿por qué no?
I6A – 4: porque aquí el decimal (el divisor 0,4) se multiplica… para convertirlo en natural.
P : pero si en el divisor multiplicas por diez, ¿por qué en el dividendo no multiplicas también por diez?
I6A – 4: porque aquí (dividendo) ya está en naturales y en el otro hay decimal (divisor).

Anexo 4. Entrevista al informante I5A – 6.

Fecha: 09-12-2016
Nombre de la evaluación: Examen Final
Contenido de la evaluación: Problemas con números decimales
Informante: I5A – 6

P : ¿qué procedimiento empleaste para resolver el problema?
I5A – 6:… como ahí dice el área del cuadrado… y el área del cuadrado es lado por lado… multipliqué 2,4 por 2,4
P : pero en el problema dice que 2,4 es el perímetro del cuadrado y no el lado.
I5A – 6: …
P : entonces ¿de qué otra forma damos solución al problema?
I5A – 6: …
P : ¿qué es el perímetro de una figura?
I5A – 6: es la suma de los lados
P : entonces si 2,4 es el perímetro del cuadrado ¿qué dato te falta encontrar?
I5A – 6: el perímetro (suma 2,4 + 2,4 + 2,4 + 2,4)
P : ¿estás hallando el perímetro nuevamente?
I5A – 6: … 2,4 es el perímetro entonces
P : … entonces si ya tienes el perímetro ¿qué dato te falta?
I5A – 6: el lado del cuadrado
P : entonces ¿qué numero sumado cuatro veces te da 2,4?
I5A – 6:…
P : es como decir 2,4 dividido entre 4, ¿cuánto nos da?
I5A – 6:…
P : puedes realizar la operación aparte…
I5A – 6: 6?
P : 2,4 es menor que 4, ¿crees que te pueda dar 6?
I5A – 6: 0,6
P: por lo tanto si el lado es 0,6, ¿cuál es el área del cuadrado?
I5A – 6: …0,36

Anexo 5. Entrevista al informante I5A – 32.

Fecha: 09-12-2016
Nombre de la evaluación: Examen Final
Contenido de la evaluación: Problemas con números decimales
Informante: I5A – 32

P : ¿qué procedimiento empleaste para resolver el problema?
I5A – 32: … ahí te piden que encuentres el área del patio rectangular o sea el área del rectángulo
P : ¿y qué datos te da el problema?
I5A – 32: el largo y el ancho
P : ¿qué estrategia aplicas?
I5A – 32: multiplico, multiplico 12,5 por 24,3… resuelvo como si fueran normales (naturales) y digo 5 por 3 es 15, llevo uno, dos por 3 es 6 y uno, es 7. Luego 5 por 4 es 20, llevo dos; 2 por 4 es 8, llevaba 2 me da 10, llevo 1; y 4 por 1es 4 y una que llevaba es 5. Luego 2 por 5 es 10 y llevo 1, 2 por 2 es 4 y una que llevaba es 5 y 2 por uno es 2. Luego sumo.
P: ¿y la coma decimal?
I5A – 32: … (sonríe)
P: ¿dónde la ubico o ya no se pone?
I5A – 32me olvidé… es que como estaba sumando…ya no vi la coma…
P: ¿y dónde debe ir?
I5A – 32ahí (señala después del 3)
P: entonces la respuesta no es 30 375 ¿cuál es?
I5A – 32303, 75