FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Niveles de algebrización en las actividades propuestas para la adquisición del lenguaje algebraico en los libros de texto de 1° secundaria (EBR, Perú)

Tesis para optar el Título de
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria, especialidad Matemática y Física

Mirelly Fabiola Rivas Yarlequé

Asesor(es):
Mgtr. Emma Lizelly Carreño Peña

Piura, mayo de 2021

Dedicatoria

A mi pequeño Sebástian.

A Raúl, por la insistencia casi diaria para que termine la tesis y por su apoyo incondicional.

A mis padres y familiares cercanos, por su apoyo permanente durante toda mi carrera universitaria. Agradezco infinitamente a ellos y les dedico esta tesis, porque me enseñaron a ser perseverante y fuerte a pesar de los momentos difíciles que nos tocó y nos toca afrontar, porque ellos son el motor para lograr salir adelante y luchar por mis sueños.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a Dios y a profesora Emma Carreño, por ser mi segunda mamá en la universidad, y con la que logré sacar adelante este trabajo de investigación. A la profesora María del Carmen Barreto, mi asesora académica, por aconsejarme todos los 5 años de universidad y por alentarme a llevar bien mis estudios.

A todos los profesores de la Facultad de Ciencias de la Educación, especialmente a las profesoras Flor Hau Yon, porque a raíz de su curso Álgebra y su didáctica encontré un problema de investigación; Claudia Mezones, por enseñarme que el problema es encontrar el problema para la tesis; Luzmila Flores, por su sentido del humor en cada clase; y a todos en general, por ser partícipes de mi formación profesional.

También a mis compañeros de estudios, los que se convirtieron en amigos. Y las instituciones que hicieron posible este logro: Beca Vocación de Maestro del Programa Nacional de Becas y Créditos Educativos. Gracias totales.

Resumen

Tesis de grado en Educación perteneciente a la línea de investigación sobre la enseñanza - aprendizaje del álgebra escolar en escuelas públicas del Perú. La autora presenta el resultado de la investigación acerca de los niveles de algebrización promovidos en las tareas propuestas en el libro de texto de matemática para 1° de secundaria, distribuido por el Ministerio de Educación del Perú. El trabajo se aborda desde un enfoque interpretativo, empleando una metodología cualitativa. De acuerdo al análisis realizado en la investigación, se observa que el nivel de algebrización promovido en los capítulos de ecuaciones e inecuaciones del libro de texto analizado al igual que los desempeños vinculados a estos capítulos corresponde al nivel intermedio de algebrización. Se puede afirmar que las actividades planteadas en el libro de texto de Matemática de 1° de secundaria promueve un nivel intermedio de algebrización, que no va en concordancia con los niveles de algebrización propuestos por el RAE para esta etapa escolar. Es decir, el nivel promovido, según el modelo RAE, corresponde para grados de la Educación primaria.

Tabla de contenido

Introducción......15

Capítulo 1. Planteamiento del problema......17

1.1 Justificación y planteamiento del problema 17

1.1.1 *Problema general* 20

1.1.2 *Problemas específicos* 20

1.2 Antecedentes 20

1.3. Objetivos de la investigación......23

1.3.1 *Objetivo general* 23

1.3.2 *Objetivos específicos* 23

Capítulo 2. Marco teórico......25

2.1. Teorías que sustentan los procesos algebraicos......25

2.1.1 *Capas de generalidad* 25

2.1.2 *Teoría Antropológica de lo Didáctico* 26

2.1.3 *Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS)*......27

2.2 Modelo de Razonamiento Algebraico Elemental: Niveles de algebrización......33

2.3 Niveles de algebrización que propone el Currículo Nacional (2016) en el V y VI ciclo de la EBR. 40

2.4 Estándares de algebrización propuestos por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 42

2.5 El Libro de texto como recurso didáctico......44

Capítulo 3. Marco metodológico de la investigación 47

3.1 Metodología de la investigación 47

3.2 Técnica de análisis de contenido......48

Capítulo 4. Análisis de los datos y discusión de los resultados......55

4.1Análisis de las tareas presentes en el libro de texto 55

4.1.1 *Ecuaciones lineales*......55

4.1.2 *Inecuaciones lineales*......72

4.2 Análisis de los desempeños propuestos por el currículo nacional......82

4.3 Síntesis del análisis realizado a las tareas propuestas en el libro de texto y a los desempeños propuestos en el currículo nacional 87

Conclusiones 91

Reflexiones...93

Lista de referencias. 95

Lista de tablas

Tabla 1. Síntesis de los niveles de algebrización de Educación Secundaria propuestos en el modelo RAE. 40
Tabla 2. Estándares de contenido de grados 6- 8 y 9- 12, según la NCTM. 43
Tabla 3. Estructura a seguir para el análisis de contenido de las tareas 49
Tabla 4. Ejemplo del análisis de una tarea propuesta en el libro de texto Matemática 1. 50
Tabla 5. Análisis de desempeño con los objetos primarios propuestos en el EOS. 52
Tabla 6. Ejemplo del análisis epistémico de un desempeño de 1° de Secundaria. 52
Tabla 7. Análisis de la tarea 1 del libro de texto Matemática 1....56
Tabla 8. Análisis de la tarea 2 del libro de texto Matemática 1....58
Tabla 9. Análisis de la tarea 3 del libro de texto Matemática 1....59
Tabla 10. Análisis de la tarea 4 del libro de texto Matemática 1....61
Tabla 11. Análisis de la tarea 5 del libro de texto Matemática 1....62
Tabla 12. Análisis de la tarea 6 del libro de texto Matemática 1....64
Tabla 13. Análisis de la tarea 7 del libro de texto Matemática 1....65
Tabla 14. Análisis de la tarea 8 del libro de texto Matemática 1....67
Tabla 15. Análisis de la tarea 9 del libro de texto Matemática 1....69
Tabla 16. Análisis de la tarea 10 del libro de texto Matemática 1....70
Tabla 17. Resumen de los hallazgos en la unidad de ecuaciones....71
Tabla 18. Análisis de la tarea 11 del libro de texto Matemática 1....73
Tabla 19. Análisis de la tarea 12 del libro de texto Matemática 1....74
Tabla 20. Análisis de la tarea 13 del libro de texto Matemática 1....76
Tabla 21. Análisis de la tarea 14 del libro de texto Matemática 1....77
Tabla 22. Análisis de la tarea 15 del libro de texto Matemática 1....79
Tabla 23. Análisis de la tarea 16 del libro de texto Matemática 1....80
Tabla 24. Resumen de los hallazgos de la unidad de inecuaciones....81
Tabla 25. Análisis del desempeño 1....82
Tabla 26. Análisis del desempeño 2....83
Tabla 27. Análisis del desempeño 3....84
Tabla 28. Análisis del desempeño 4. 85
Tabla 29. Resumen de los hallazgos en los desempeños....86
Tabla 30. Tabla resumen de las tareas analizadas. 87
Tabla 31. Tabla resumen de los desempeños analizados. 89
Tabla 32. Relación entre tarea, desempeño y nivel de algebrización correspondiente. 90

Lista de figuras

Figura 1. Evolución de los resultados de estudiantes peruanos en PISA (2009-2018). 18
Figura 2. Configuración de objetos primarios del EOS..30
Figura 3. Herramientas teóricas del EOS..32
Figura 4. Niveles protoalgebraicos de razonamiento matemático. 35
Figura 5. Rasgos característicos de los niveles de Razonamiento Algebraico Elemental 36
Figura 6. Estructura de espacios- vectoriales en el sexto nivel del RAE...39
Figura 7. Portada de libro de texto de 1° de secundaria para colegios públicos del Perú.................48
Figura 8. Tarea analizada del libro de texto Matemática 1 como ejemplo.......................................50
Figura 9. Pasos a seguir para lograr los objetivos de la investigación 53
Figura 10. Tarea 1: Introducción a las ecuaciones a partir de una tabla y plano cartesiano 56
Figura 11. Tarea 2: Introducción a las ecuaciones a partir de una tabla y plano cartesiano. 57
Figura 12. Tarea 3: Ejercicio de ecuaciones equivalentes..59
Figura 13. Tarea 4: Ecuación resuelta con la ayuda la gráfica de una balanza 60
Figura 14. Tarea 5: Problema resuelto mediante el planteamiento de una ecuación lineal 62
Figura 15. Tarea 6: Ecuación resuelta mediante un cuadro de doble entrada 63
Figura 16. Tarea 7: Ecuación resuelta utilizando números racionales..65
Figura 17. Tarea 8: Ecuación resuelta utilizando expresiones decimales 66
Figura 18. Tarea 9: Ecuación resuelta operando con números naturales y racionales 68
Figura 19. Tarea 10: Ecuación resuelta operando con expresiones decimales 70
Figura 20. Tarea 11: Inecuación resuelta haciendo uso de intervalos 72
Figura 21. Tarea 12: Situación resuelta a partir del planteamiento de una inecuación 74
Figura 22. Tarea 13: Resolución de inecuación aplicando ley de signos...75
Figura 23. Tarea 14: Situación resuelta planteando una inecuación 77
Figura 24. Tarea 15: Situación resuelta a partir del planteamiento de una inecuación 78
Figura 25. Tarea 16: Situación resuelta a partir del planteamiento de dos desigualdades 80

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra en los estudiantes de la educación básica ha dado paso a innumerables investigaciones debido a las problemáticas generadas. Así, han surgido corrientes de investigación como, por ejemplo, Early Algebra o Pre- álgebra, que proponen la iniciación en el pensamiento algebraico desde los primeros años de la vida escolar.

Entre las problemáticas que aborda el estudio del álgebra escolar, algunas guardan relación con uno de los recursos didácticos más utilizados en el proceso de la enseñanza – aprendizaje: el libro de texto. Debido a esto, la investigación se enfoca en analizar las actividades propuestas en el libro de texto del primer año de secundaria, correspondientes a los capítulos ecuaciones e inecuaciones, vinculados a la competencia de regularidad, equivalencia y cambio, propuesta en el Currículo Nacional (2016). Este estudio se realiza con una metodología cualitativa, utilizando rejillas de análisis de contenido para desarrollar una revisión epistemológica a las tareas seleccionadas de los capítulos en mención, basada en el modelo de Razonamiento Algebraico Elemental, propuesto desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Dichas rejillas de análisis de contenido ayudarán a precisar el nivel de algebrización correspondiente de cada tarea. Los resultados son organizados en una tabla resumen que facilita una visión general de los hallazgos, y se describen a continuación de la misma. En resumen, la tesis de investigación está compuesta por cuatro capítulos.

El primer capítulo está compuesto por las razones que originan la necesidad del estudio y que permitieron generar el problema de investigación, sustentado en investigaciones antecedentes que forman parte de la línea de investigación: enseñanza – aprendizaje del álgebra escolar. Además, se da a conocer los objetivos, general y específicos, de la investigación que corresponden a describir los niveles de algebrización propuestos en las tareas seleccionadas del texto escolar.

El segundo capítulo corresponde a brindar un panorama sobre el sustento teórico de la investigación. Se explican las teorías que fundamentan el pensamiento algebraico, enfocando la teoría del EOS, además de describir las características de los niveles de algebrización correspondientes a las etapas de primaria y secundaria de la educación básica. Por otro lado, se expone las capacidades y desempeños que corresponden a la competencia regularidad, equivalencia y cambio del actual Currículo Nacional. Así también, se explica los estándares de algebrización que propone la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y se habla sobre el texto escolar como recurso didáctico del proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra.

El tercer capítulo corresponde a la metodología de la investigación. En este se justifica el uso de la metodología cualitativa y de la técnica de análisis de contenido, tanto para las tareas seleccionadas como para los desempeños del Currículo Nacional. Para ejemplificar dicho análisis, se ha seleccionada una tarea del texto escolar y un desempeño del documento curricular.

El cuarto capítulo corresponde al análisis de las tareas seleccionadas en los apartados de ecuaciones e inecuaciones del libro de texto, distribuido por el Ministerio de Educación para primero de secundaria, y de los desempeños correspondientes a los apartados mencionados. En cada análisis se identifica y describe el nivel de algebrización promovido. Posteriormente, se realiza una síntesis que engloba los resultados conllevando a afirmaciones de manera general.

Finalmente, se propone unas conclusiones, producto de los resultados obtenidos, en torno a los objetivos propuestos para la investigación. Así, se infieren ideas vinculadas a los niveles de algebrización en relación con el bajo rendimiento académico de los alumnos en el área de matemática y con los resultados obtenidos en los exámenes internacionales con los que son evaluados los estudiantes. Esto permite plantear algunas reflexiones y cuestiones abiertas para posibles investigaciones

Capítulo 1. Planteamiento del problema

1.1 Justificación y planteamiento del problema

El álgebra escolar se visualiza, en los libros de textos, como el tránsito de enunciados verbales a expresiones simbólicas (algebraicas) y viceversa. De esta manera se llega al foco de atención del contenido del álgebra: la resolución de ecuaciones (Calvo et al., 2016). Esto hace que la mayoría de estudiantes no encuentren sentido a esta rama de la matemática, pues muchos de los ejercicios de enunciados verbales propuestos pueden ser resueltos de manera aritmética, geométrica o por tanteo. No obstante, el álgebra va más allá de la resolución de expresiones con incógnitas, variables o parámetros puesto que «proporciona un lenguaje y unas herramientas más útiles: la expresión e investigación de relaciones numéricas, de leyes de generalización» (p. 115). En consecuencia, esta rama de la matemática requiere de la formación de la capacidad que conlleva al desarrollo de un lenguaje abstracto, es decir, de la generalización. Esta «es un rasgo característico del razonamiento algebraico, así como los medios para generalizar, tanto las situaciones de generalización, como la indeterminación (uso de incógnitas y ecuaciones para modelizar situaciones)» (Godino et al., 2012, p. 488).

Diversas investigaciones realizadas en el álgebra escolar, centradas en las dificultades de su enseñanza y aprendizaje, son abordadas por Socas (2011). En estas se considera que el problema surge a partir de las malas prácticas de enseñanza promovidas en las escuelas, pues el estudiante tiende a relacionar los problemas algebraicos con procesos aritméticos vistos en la Educación Primaria. De este modo, se entiende que Kieran y Filloy (1989) afirme:

> Los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. Aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. (p. 229)

Según lo anterior, el tratamiento del álgebra en las aulas evidencia un proceso conocido como “aritmética generalizada” (Socas y Palarea, 1997). Esto implica el uso de métodos enseñados en la primaria para tratar de resolver problemas que implican objetos algebraicos. Así pues, conciben el objeto desconocido como un número específico mas no como una incógnita que puede adquirir diversos valores. Esta mecanización provoca que el nivel de algebrización alcanzado por los estudiantes no promueva el adecuado desarrollo del lenguaje algebraico.

Debido a la problemática presentada, se ha desarrollado una línea de investigación que propone la iniciación del estudio del álgebra desde niveles tempranos de la educación: El *Early Álgebra* (Godino et al., 2012). Esta es una propuesta que persigue el desarrollo del lenguaje numérico y del lenguaje algebraico en la educación primaria, para sentar las bases sobre el desarrollo del álgebra en educación secundaria. Esta línea de investigación se basa en que, desde el punto de vista psicológico, los niños se encuentran en pleno desarrollo del lenguaje. «Sus capacidades lingüísticas y comunicativas condicionan, pues, los procesos de representación y argumentación, para justificar, convencer al igual y operativizar el pensamiento». (Wilhelmi, 2017, p. 16)

Las dificultades del estudio del álgebra en Perú son evidenciadas en los resultados de la evaluación PISA. Al año 2015, no hay estudiantes que hayan alcanzado el mayor nivel de desempeño en el área de Matemática (Figura 1). Esto significa que los estudiantes no logran conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de modelos complejos, ni pueden utilizar sus conocimientos en contextos no usuales (Ministerio de Educación, 2017). Así, es evidente que el lenguaje algebraico no se ha logrado desarrollar y en consecuencia tampoco se alcanza el desarrollo de competencias que van a la par con el área algebraica, aquellas que necesitan de un análisis abstracto, que no se reduce a lo explícito, sino que busca el establecimiento de inferencias y juicios, a partir de una visión global de una situación propuesta. Afirmamos de esta manera que la educación en general debe ser atendida, pues cada una de las competencias se interrelacionan, y por tanto deben ser tratadas en la misma medida.

Figura 1

Evolución de los resultados de estudiantes peruanos en PISA (2009-2015).

Niveles de desempeño	PISA 2009 %	PISA 2012 %	PISA 2015 %	PISA 2018 %
6	0,1	0,0	0,0	0,1
5	0,5	0,5	0,4	0,8
4	2,1	2,1	2,7	4,1
3	6,8	6,7	9,8	11,6
2	16,9	16,1	21,0	23,1
1	25,9	27,6	28,4	28,3
< 1	47,6	47,0	37,7	32,0
$\underbrace{1 + (< 1)}$	73,5	74,6	66,1	60,3
Medida promedio	365	368	387	400

Nota. Extraído de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Libro_PISA.pdf

En relación con lo anterior, investigaciones citadas por Socas (2011) (p.ej. Kieran y Wagner, 1989; Kieran y Filloy, 1989; Kieran, 1992; Kieran, 2017) abordan la transición de la aritmética al álgebra, los procesos involucrados en el desarrollo del pensamiento algebraico y propuestas curriculares que promueven su desarrollo. El interés por estas cuestiones ha llevado a la constitución de grupos de investigación, tales como: Pre Álgebra y Early Álgebra, que promueven la investigación sobre el desarrollo de las capacidades que requiere el lenguaje algebraico en cursos tempranos de la Educación Básica.

El Early Álgebra (Aké et al., 2013) propone un modelo de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), correspondiente con la educación primaria, descrito en tres niveles. Así, se plantea distinguir una actividad matemática que no incorpora rasgos algebraicos (nivel cero de algebrización) de otra propiamente algebraica, entre las que podría diferenciarse niveles incipientes e intermedios de la algebrización. La asociación de cada actividad que se realiza con los distintos niveles propuestos, no se establece por la tarea en sí misma sino por la actividad matemática que se desencadena en ella.

En base a las diversas investigaciones sobre las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra, hay una necesidad que amerita atención: la forma de adquirir el lenguaje algebraico en los estudiantes. Para Socas y Palarea (1997), las dificultades que se generan en las alumnas y los alumnos con respecto al aprendizaje del álgebra tienen distinta naturaleza: «Tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos y alumnas, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra». (p. 17)

Estas dificultades son posibles de revertir, ya que el acercamiento al álgebra es posible desde edades tempranas en la educación (niveles Inicial y Primaria), en tanto que es un modo de pensar. Así pues, «sirve como método de aprehender y de explicar interrelaciones, permite una manera de llegar a la generalidad por la vía de lo particular, y descubrir los "modelos" que se presentan en lo cotidiano». (Palarea, 1998, p. 6)

Por otro lado, en cuanto a las dificultades de enseñanza del álgebra, se hace mención a los planteamientos propuestos en los libros de texto. Kieran (1992) considera que dichas dificultades están referidas a sustitución de expresiones y ecuaciones, la resolución de estas, además de la introducción de métodos formales para la resolución de polinomios, expresiones racionales, funciones, con sus respectivas representaciones algebraicas, tabulares y gráficas. Estas actividades están centradas en una enseñanza tradicional del álgebra, que conlleva a consideraciones como las que proponen Campos y Giménez (1996):

> A menudo se oyen frases como éstas: «Si no enseñamos a resolver ecuaciones, ¿cómo van a resolver problemas mediante el lenguaje algebraico?, « ¿Quién lo hará? » o «Lo importante es que sepan dominar las operaciones elementales cuando vienen de primaria y ya iremos introduciendo el sentido matemático en secundaria». (p. 27)

Lo anterior, muestra un desconcierto de los docentes por la naturaleza de la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar. Es un desafío al que se enfrentan, debiendo lograr que los estudiantes entiendan el significado de los símbolos, que no es precisamente la traducción de las operaciones aritméticas, sino la comprensión y adquisición del significado del lenguaje de las matemáticas, el álgebra. El problema se agudizará con el paso del tiempo, formando generaciones de estudiantes escolares con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, derivadas de los errores en su enseñanza.

En base a lo referido en líneas anteriores, es necesario abordar el estudio de esta problemática, de modo que se puedan brindar aportes que ayuden a los docentes de matemáticas a cuestionar su práctica docente en relación con el desarrollo de la generalización y, en consecuencia, del razonamiento algebraico. Como elemento de esa práctica docente, se reconoce al libro de texto como un recurso de apoyo al proceso de enseñanza – aprendizaje, cuyo uso en muchos casos es indispensable. En este sentido, resulta oportuno acercarse a conocer el nivel de algebrización que se propone en las actividades de los libros de texto, de tal forma que pueda determinarse las que contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

1.1.1 *Problema general*

Ante la necesidad existente en nuestro país, sobre la enseñanza – aprendizaje del álgebra, se plantea: ¿Qué niveles de algebrización se promueven en los libros de texto de Matemática, para la adquisición del lenguaje algebraico, en primer grado de secundaria?

1.1.2 *Problemas específicos*

- ¿Qué objetos algebraicos, que diferencian los niveles de algebrización, caracterizan las actividades propuestas en los libros de texto para la adquisición del lenguaje algebraico?
- ¿Qué desempeños se proponen en el Currículo Nacional (2016) en relación con los niveles de algebrización, para la adquisición del lenguaje algebraico en 1° de Secundaria?
- ¿Los niveles de algebrización promovidos en los libros de texto se corresponden con las capacidades y desempeños propuestos en el Currículo Nacional (2016)?

1.2 Antecedentes

La constante preocupación por el desarrollo del pensamiento algebraico ha dado paso a múltiples investigaciones y grupos de trabajo en diversos encuentros académicos. En este sentido Socas (1999) realiza un análisis de las investigaciones en pensamiento algebraico en la III Conferencia de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), desarrollada en Valladolid y que se recoge en el documento «Perspectivas de Investigación en el Pensamiento Algebraico». Este documento muestra los aportes dados en el desarrollo curricular de dicho tópico y las líneas de investigación que se vienen ejecutando en torno a él. Esta investigación presenta un panorama general de la preocupación del proceso de enseñanza- aprendizaje del álgebra, que está siendo atendida por investigadores de diversos países, desde variadas perspectivas: cognitiva, psicológica, sintáctica, semántica, epistemológica, histórica, vinculadas a las tecnologías, a la enseñanza y al desarrollo curricular que de alguna manera guardan estrecha relación entre sí. El documento finaliza con cuestiones que aún están siendo atendidas entre muchas que aún quedan por plantear y dar respuesta.

> La primera y principal, es la continua y generalizada dificultad con la que los estudiantes y profesores se enfrentan a la materia a pesar de dos décadas de reformas y desarrollos de planes de estudio. La segunda, obviamente relacionada con la primera, es el carácter del lenguaje algebraico, que podemos formular en la siguiente pregunta: ¿Que es el pensamiento algebraico y cuáles son las razones esenciales de la actividad algebraica que deben constituir las metas que tenemos para el aprendizaje de los alumnos en este campo?. La tercera, y no menos importante razón, es la que concierne a la riqueza de los diversos hallazagos en la investigación, escasamente coordinados, que existen en este campo tanto a nivel internacional como nacional. (Socas, 1999, p. 276)

Por otro lado, un documento de interés es «Niveles de Algebrización en las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemióticas y antropológicas» (Godino et al, 2015), donde se aborda la distinción de niveles de algebrización en educación primaria y secundaria. Los autores centran su preocupación en el álgebra, puesto que hay una necesidad de promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los distintos niveles de la educación básica hasta la universidad, disminuyendo las brechas entre estos niveles formativos. En este sentido propone distinguir rasgos característicos que deben tener las actividades matemáticas según cada nivel de razonamiento algebraico.

El punto de partida de esta línea de investigación es el estudio de los tres niveles de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) promovidos en el nivel primaria, en el que se toma en cuenta el papel del sujeto en el momento de la resolución del problema. Así pues, la actividad matemática realizada en las distintas soluciones que puede tener un problema determina el nivel de algebrización alcanzado. A partir de esta primera propuesta, se hace una extensión a tres niveles superiores. Los tres primeros se asocian a la educación primaria y los tres siguientes a la educación secundaria. Estos niveles según Duval (citado en Godino et al. (2015)) son grados de generalidad en los que se ponen de manifiesto diversas representaciones simbólicas del lenguaje algebraico.

El aporte de estos autores están estrechamente relacionados con los objetivos perseguidos en la investigación a realizarse, pues a partir del reconocimiento de los distintos niveles de algebrización se puede determinar cuales son los promovidos en las actividades matemáticas que se proponen en los libros de texto, a los estudiantes de 1° de Secundaria, además de su correspondencia con los lineamientos propuestos en el documento normativo de la educación peruana: el Currículo Nacional (2016).

Por otro lado, la tesis «Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización» (Ricaldi, 2011) aborda el análisis de libros de texto de primero de secundaria para describir el proceso de algebrización que se promueve, tomando como referencia la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), propuesta por

Chevallard y empleando una metodología de tipo cualitativa. Esta investigación, parte de la preocupación por las dificultades que evidencian los estudiantes al momento de resolver actividades que implican conocimientos algebraicos, además de considerar la impartición de contenido académico de manera aislada. El objetivo principal es describir y analizar si el proceso de algebrización que se está llevando a cabo corresponde al nivel educativo en el que se ejecuta, para luego proponer un modelo didáctico alternativo.

Su relevancia se ve resaltada porque ha sido desarrollada en el contexto nacional peruano, lo que permite tener una visión previa del proceso de algebrización que se viene llevando a cabo en el sistema educativo peruano.

La siguiente investigación denominada «Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea estructural de números racionales» (Carrillo et al., 2019) analiza el nivel de algebrización de 15 estudiantes de un colegio de Lima, en la resolución de una tarea. El análisis tiene como base las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Concluye que los estudiantes desarrollan un nivel de algebrización 1, demostrando un carácter puramente aritmético en sus operaciones. El enfoque cualitativo de esta investigación y las bases teóricas en que se sustentan, hace que se tenga en cuenta en esta investigación, además del contexto de la población que se estudia.

Asimismo, en el artículo denominado «El modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis de tareas matemáticas de Educación Primaria» (Aké, 2017) se aborda el análisis, de una tarea extraída de un libro de texto de primaria, que no necesariamente propone un pensamiento algebraico, pues su planteamiento es puramente numérico. Sin embargo, a partir de esta tarea, se proponen cuatro transformaciones a partir del planteamiento inicial, donde cada una de estas propuestas van promoviendo un razonamiento diverso, hasta llegar a la manipulación de símbolos, obteniendo de esta forma, un razonamiento intermedio de algebrización, según el modelo propuesto por el EOS. La investigación concluye que no necesariamente una tarea propone explícitamente objetos algebraicos. Estos pueden estar presentes de manera implícita, y para reconocerlos, el docente debe estar preparado para que conduzca al estudiante por un correcto desarrollo del pensamiento algebraico.

Del mismo modo, Aké y Godino (2018) realizaron una investigación similar en México, denominada «Análisis de tareas de un libro texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización» que aborda el análisis de un libro de primer grado de primaria donde se toman en cuenta 57 tareas, analizadas a través de cuatro elementos del Modelo de Algebrización según el EOS. Al igual que la anterior investigación, se llega a la conclusión que las tareas, de carácter aritmético, pueden ser orientadas para ir desarrollando niveles progresivos de algebrización. Cabe precisar que, ambas investigaciones han sido desarrolladas a través de un método cualitativo, el mismo que trataremos de desarrollar en esta investigación. Además, estas investigaciones tienen en cuenta la importancia del estudio de libros de texto, dentro de la enseñanza – aprendizaje, propiciando un vínculo estrecho con la investigación.

Otro de los documentos de interés que guarda estrecha relación con la línea de investigación es propuesta por Salazar (2017), denominado «Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en los libros de texto de matemáticas de primaria». Dicha investigación aborda el análisis de 68 tareas identificadas en el libro de texto de primero de primaria distribuido en las escuelas públicas de México y organizadas en tres categorías. Tiene como finalidad evaluar la presencia del pensamiento algebraico desde los primeros años de la escuela. Sobretodo, el desarrollo que se propone en uno de los elementos básicos de apoyo en la enseñanza – aprendizaje, el libro de texto. En este sentido, las investigaciones presentadas se tendrán de referencia como un trabajo previo en estrecha relación con lo que se busca en la investigación actual.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1 *Objetivo general*

Describir los niveles de algebrización promovidos en primero de secundaria, a partir del análisis de las actividades propuestas en el libro de texto de Matemática empleado en escuelas públicas del Perú y del Currículo Nacional.

1.3.2 *Objetivos específicos*

- Analizar las actividades seleccionadas mediante una rejilla basada en el modelo de razonamiento algebraico elemental (RAE) propuesto por Godino y Wilhelmi (2015), para interpretar los niveles de algebrización que se promueven en ellas.
- Analizar los desempeños propuestos en la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, mediante una rejilla de análisis de dimensiones, para determinar la relación con los niveles de algebrización.
- Determinar la relación entre los desempeños propuestos en el Currículo Nacional con los niveles de algebrización encontrados en el análisis de las actividades seleccionadas del libro de texto de 1° de Secundaria.

Capítulo 2. Marco teórico

> Es muy bien sabido que uno de los tópicos curriculares más difíciles de la matemática enseñada a principios del nivel secundario es álgebra. En particular, resulta muy difícil para el alumno alcanzar una competencia y maestría adecuada del complejo lenguaje simbólico. (Radford, 1999, p. 26)

El álgebra escolar requiere de una modelación de contenidos matemáticos a través de una simbología que, para muchos estudiantes, se les hace dificultoso. Esta materia deriva de las formalizaciones aritméticas, conocidas también como aritmética generalizada, que se apoyan en procesos abstractos. Corrientes de investigaciones como el Pre Álgebra o Early algebra, proponen desarrollar desde edades tempranas la formación de esta materia.

Así pues, el interés por abordar esta rama de la matemática, en los diversos ciclos de la formación escolar, ha permitido la emergencia de teorías y modelos. Estos proponen enfoques de estudio que ayudan a entender el complejo lenguaje simbólico del álgebra, presentado en las situaciones desarrolladas en las tareas matemáticas escolares.

2.1. Teorías que sustentan los procesos algebraicos

2.1.1 *Capas de generalidad*

La teoría de Radford propone una generalización conceptualizada como «observar algo que va más allá de lo que realmente se ve» (Radford, 1997, p.80 citado por Vergel, 2014, p. 29). Pero, además expone que la generalización es un proceso de observaciones concretas que conllevan a una conclusión y esta, posteriormente a una validación. En este sentido, se considera a la generalización de patrones como punto de partida para la algebrización, pues se necesita de la formación de esquemas globales de pensamiento. Esta generalización algebraica pone sus bases en «darse cuenta de una comunalidad[1] local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión» (Vergel, 2014, p. 81). Esta afirmación da sentido a lo expresado en líneas anteriores, es decir, la comunalidad local remite a la generación de esquemas llegando más allá de lo concreto.

Además, después de la generalización de patrones, se propone generalizaciones factuales, conceptuales y simbólicas (Vergel, 2014). Estas son las denominadas capas de generalidad que se caracterizan por medios semióticos de objetivación[2] (que no se detendrá en profundizar, pues no es motivo de esta investigación), que darán el carácter progresivo de generalidad en cada una de estas etapas (Radford, 2010). Las generalizaciones factuales, se refieren al uso concreto de símbolos numéricos que queda en evidencia en todo tipo de actividad que pueda ser percibida. Las generalizaciones conceptuales refieren a un nivel más complejo, donde no sólo se generalizan los

---

[1] Entiéndase "comunalidad" como la identificación de la característica común. Término usado por Radford.

[2] Radford considera a estos medios como artefactos, gestos, símbolos, palabras. Es decir, son mediadores de los actos intencionales en la práctica matemática.

objetos presentes en las prácticas matemáticas, sino también, aquellos objetos de las acciones, estas van más allá de lo que se puede percibir. Por último, en las generalizaciones simbólicas intervienen los signos alfanuméricos. En cada una de estas generalizaciones se muestra una complejidad creciente en el pensamiento algebraico.

2.1.2 *Teoría Antropológica de lo didáctico*

Como segundo modelo teórico encontramos a la Teoría Antropológica de lo didáctico (en adelante TAD), que «propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologías (praxis + logos). Esta noción primitiva constituye la herramienta fundamental propuesta desde la TAD para modelizar la actividad matemática, entendida como una actividad humana más» (Bosch et al., 2006, p. 38). Se concibe a la praxis como el "saber hacer", refiriéndose al conjunto de técnicas que se emplean para resolver un problema; y al logos como el "saber", referido a la teoría.

La TAD, como todo modelo teórico, se basa en herramientas que enriquecen su postura. Teniendo en cuenta que las praxeologías también asumen un carácter institucional, se afirma que «la "vida" (en el sentido de emergencia o construcción, desarrollo, mantenimiento, difusión, evolución, etc.) de las praxeologías no depende, en primera instancia, de las personas individualmente consideradas, sino de las instituciones en las que actúan estas personas» (Bosch y Gascón, 2009, p. 93). Tal es así que, Yves Chevallard (máximo ponente de esta teoría) propone cuatro herramientas que analizan la actividad matemática, teniendo en cuenta una jerarquización en cuanto a los niveles de complejidad que envuelven:

- Praxeologías puntuales, si están generadas por lo que se considera en la institución como un único tipo de tareas T. Esta noción es relativa a la institución considerada y está definida, en principio, a partir del bloque práctico-técnico [T/τ].
- Praxeologías locales, resultado de la integración de diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología local está caracterizada por una tecnología q, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran.
- Praxeologías regionales, se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración alrededor de una teoría matemática común Q, de diversas praxeologías locales. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar, justificar y producir las diferentes tecnologías (θj) de las praxeologías locales (PLj) que integran la praxeología regional.
- Praxeologías globales, que surgen agregando varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías. (Bosch et al., 2006, p. 39)

Cada una de estas herramientas, si se relaciona con la teoría del EOS, se pueden caracterizar como sistemas de prácticas institucionales. Es decir, en estos enfoques, se tiene en cuenta el carácter personal e institucional de las prácticas matemáticas.

Continuando con el desarrollo de la TAD, se distinguen tres dimensiones de estudio: epistemológica, ecológica y económica (Gascón y Nicolás, 2019). La dimensión económica responde a la cuestión de saber «cuáles son las actividades y conocimientos que constituyen el álgebra elemental en cuanto saber enseñado» (Ruiz Munzón et al., 2015, p. 117). Y la dimensión ecológica responde a «¿Por qué las praxeologías han llegado a ser como son en dicha institución y cómo podrían modificarse?»

Para el estudio de la dimensión epistemológica, se ha construido un Modelo Epistemológico de Referencia (MER), que apunta a dos fines:

> En primer lugar, será útil para reinterpretar lo que se considera "álgebra" en la matemática escolar actual (en el ámbito de la enseñanza secundaria) y para indagar el papel que desempeña el álgebra elemental en relación con las demás áreas; y, en segundo lugar, el MER será imprescindible para estudiar la ecología institucional de este ámbito de la matemática escolar. (Ruiz Munzón et al., 2015, p. 112)

El MER, está constituido por tres etapas que responden a un proceso de algebrización. La primera etapa la concibe, no como el uso de letras para representar números, sino como el respeto a la jerarquía de operaciones, teniendo en cuenta elementos como paréntesis, llaves o corchetes. En la segunda etapa, aparece el cálculo ecuacional, por así llamarlo, donde intervienen incógnitas de mayor manipulación algebraica. Y en la tercera fase, intervienen un número no limitado de variables (Ruiz Munzón et al., 2015). Cada una de estas etapas es concebida de manera general en cuanto a las prácticas o manipulaciones algebraicas que intervienen en una situación problemática. Además, el MER, de acuerdo con los fines propuestos por los autores citados, responde no sólo a la dimensión epistemológica, sino también a la dimensión ecológica y económica. La construcción de este modelo esclarece la normatividad y ecología de la didáctica de la matemática y «dar cuenta, en primera instancia, de ciertos fenómenos didácticos que emergen en la institución de enseñanza secundaria» (Gascón et al., 2017, p. 40), que es precisamente el objeto de estudio de la TAD.

2.1.3 *Enfoque Ontosemiótico de la cognición e Instrucción Matemática (EOS)*

El campo de la Didáctica de la Matemática ha puesto interés en sistematizar modelos de carácter teórico que aporten herramientas para facilitar los estudios con respecto a las actividades escolares abordadas en el área de Matemáticas. Desde 1993, se han construido nociones de un modelo que relaciona el pensamiento matemático, la simbología y las situaciones – problema. Tal es así que, Godino et al. (2017) afirman que el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (en adelante EOS) es un:

Sistema teórico que trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática. Dicho enfoque se apoya en presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y adopta principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje. (p.93)

Esta noción del EOS presenta herramientas que relacionan la matemática con resolución de problemas, lenguaje simbólico y sistema conceptual organizado. Así mismo, cuando se refiere a la adaptación de principios didácticos[3], Godino (2012) hace referencia a que este enfoque no sólo debe basarse en conocer la ecología de los saberes matemáticos[4], o en saber todas las estrategias para diseñar propuestas didácticas; sino, también se debe enfocar en conocer los fenómenos referidos al aprendizaje de los alumnos. Con respecto a la noción del EOS, que se hablaba en líneas anteriores, se permite una triangulación de información que conlleva a definir cinco herramientas teóricas de este enfoque. Dichas herramientas se exponen a continuación.

1. *Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas*

Godino y Batanero (1998) considera a las prácticas matemáticas como «toda actuación o expresión –verbal, gráfica, etc.– que efectúa alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas» (citado en D'Amore y Godino, 2007). El sistema de prácticas tiene a la resolución de problemas como elemento central de estudio, del cual los objetos presentados en éste serán analizados de acuerdo a los significados que adoptan en los diversos contextos. Estos significados deberán ser relacionados a un significado global, dando lugar a la práctica institucional, es decir, concebida dentro un grupo de personas con la misma situación problemática. A partir de esto, se podrán diseñar procesos que se aplicarán en circunstancias particulares. Por lo tanto, esta herramienta muestra una postura de la perspectiva ontosemiótica que se interesa por el aprendizaje individual del sujeto, y a la vez, por un aprendizaje colectivo. Para los significados individuales; Godino et al. (2007) proponen 3 tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

[3] Son ideas matrices generales sobre la estructuración de los contenidos, la organización y los métodos de enseñanza-aprendizaje que se derivan de las leyes del proceso docente educativo, constituyendo los fundamentos para su dirección (Vargas y Hernández, 2006).
[4] Es decir, conocer los métodos de aplicación o los distintos teoremas. Se entiende como ecología al ambiente en que se promueven los saberes, los objetos con los cuales entra en asociación, las estructuras de soporte, conformando un sistema educativo (Godino, 1993).

- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen. (p.5)

2. Emergencia de los objetos matemáticos

El objeto matemático es: «un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito». (Chevallard (1991) citado en Godino y Batanero, 1994, p. 6)

Se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articulando de manera coherente la concepción antropológica[5] (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos.

Para la emergencia de los objetos matemáticos, en la configuración ontosemiótica se pretende lograr el reconocimiento, tanto de los objetos como de las prácticas matemáticas que intervienen en la resolución de problemas. El estudio de D'Amore y Godino (2007), propone seis tipos de objetos matemáticos, que a su vez se organizan en sistemas, ya sean epistémicos o cognitivos, que demandan una mayor complejidad. Estos tipos de objetos se indican a continuación:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones o gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, entre otros).
- Situaciones (problemas, aplicaciones extra-matemática, ejercicios).
- Procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).
- Conceptos (que son introducidos mediante definiciones o descripciones, como recta, punto, número, media o función).
- Propiedad o atributo de los objetos (como los enunciados sobre conceptos).
- Argumentos (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados por deducción o de otro tipo). (p. 209)

El reconocimiento explícito de estos objetos es necesario porque «permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e

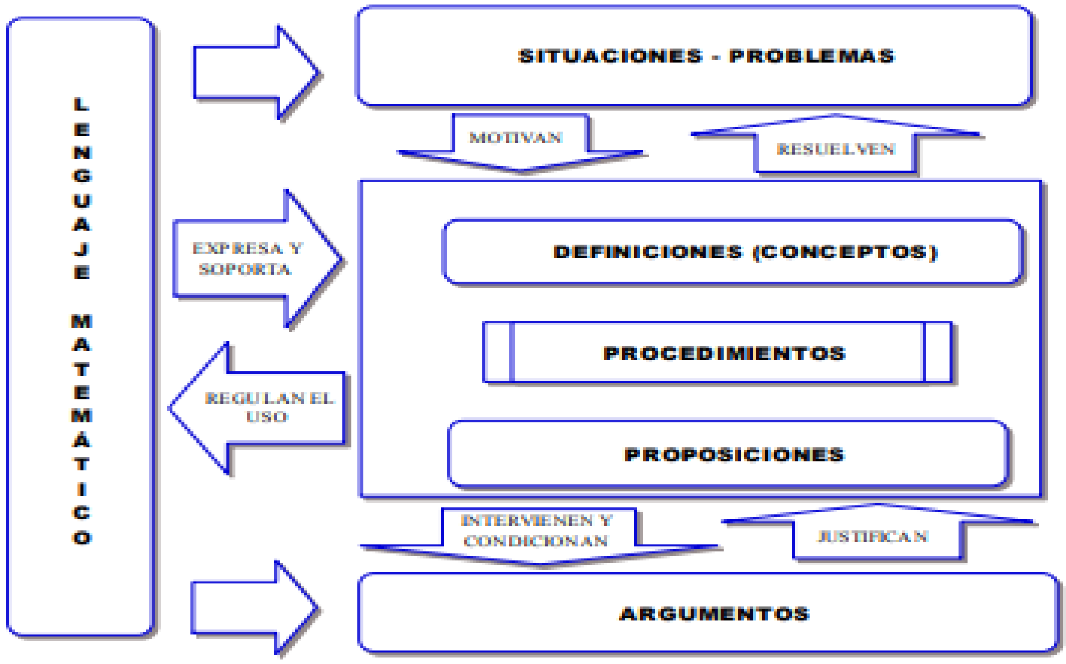
[5] Wittgenstein propone una visión alternativa: Las proposiciones matemáticas deben verse como instrumentos, como reglas de transformación de proposiciones empíricas. Por ejemplo, los teoremas de la geometría son reglas para encuadrar descripciones de formas y tamaños de objetos **(Godino, 2010).** Esta alternativa propone de dejar de considerar a las matemáticas como entidades ideales que se descubren.

identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio» (Godino et al., 2017, p. 94). Así mismo, «los objetos matemáticos y su significado dependen no sólo de los problemas que se afrontan en la matemática, sino también de los procesos de su resolución; en suma, dependen de la práctica humana» (D'Amore y Godino, 2007, p. 196). Es decir, los objetos matemáticos cobran importancia en la actuación humana, al momento de que el sujeto propone las estrategias para resolver una situación-problema. Es preciso afirmar que un problema matemático se puede resolver de múltiples maneras. Cada vía seleccionada empleará ciertos objetos matemáticos que el aprendiz deberá reconocer explícitamente.

A continuación, en la Figura 2, se sistematiza gráficamente los seis objetos matemáticos primarios que se visualizan en las situaciones- problema de una práctica matemática.

Figura 2

Configuración de objetos primarios del EOS



Nota. Tomado de Godino et al. (2007, p.7)

Por otro lado, los objetos matemáticos presentes en las prácticas matemáticas y aquellos que derivan de estos, pueden analizarse desde cinco dualidades, propuestas por Godino y Burgos (2017):

- Personal – Institucional, que distingue la perspectiva de los sujetos individuales (personal) de la compartida en una institución o comunidad de prácticas (institucional).
- Ostensivo – no ostensivo, que permiten distinguir lo material o perceptible (ostensivo) de lo abstracto, ideal o inmaterial (no ostensivo).

- Significante – significado, es decir, antecedente o consecuente de una función semiótica que relaciona una expresión en un contenido.
- Extensivo – intensivo, que diferencia la función particular de un objeto en un contexto o práctica (extensivo) de la función general en diversos contextos o clases de prácticas (intensivo).
- Unitario - sistémico, que diferencia los objetos considerados globalmente como un todo (unitario) de aquellos que son considerados como sistemas formados por componentes estructurados (sistémico) (pp. 48-49).

3. Configuración didáctica, como sistema articulado de roles docentes y discentes

> A propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema, constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta la faceta epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica (teorías curriculares) que caracterizan los procesos de estudio matemático. (Godino, 2012, p. 55)

La configuración didáctica se relaciona directamente con las acciones del docente sobre las prácticas matemáticas. Es el docente el que propone las situaciones problema a partir del uso de herramientas tecnológicas u otros materiales que posibiliten el logro del aprendizaje de los estudiantes.

4. Dimensión normativa

La dimensión normativa del EOS, se puede entender como el reconocimiento y aplicación de las reglas para la resolución de problemas. Por ello se dice que:

> Es un sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos. (Godino, 2012, p. 55)

5. Idoneidad didáctica

> Como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Godino, 2012, p. 55)

Está referida a la conveniencia de las prácticas o estrategias propuestas por el docente para el logro de los aprendizajes esperados en los estudiantes.

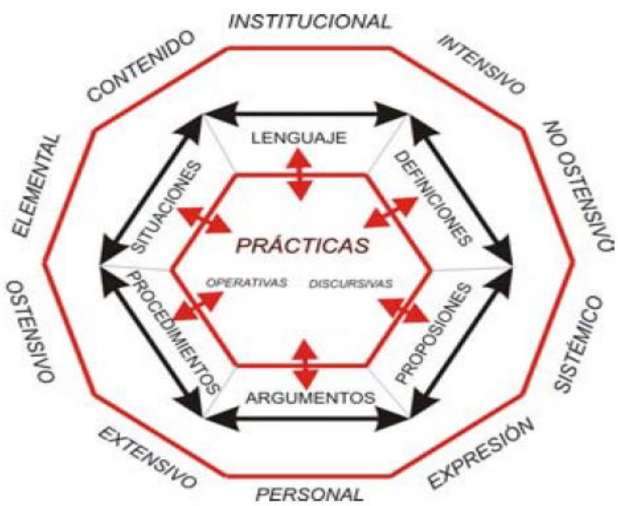
Según lo expuesto, se evidencia una relación estrecha entre las prácticas matemáticas y los objetos que intervienen en estas. Es por ello que, Godino et al. (2017) afirman que:

> La práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una capacidad o competencia por parte del sujeto que la realiza. Pero la realización competente de una práctica implica la intervención de objetos interconectados que regulan y emergen de la misma, los cuales constituyen el conocimiento declarativo o discursivo correspondiente. La dialéctica entre práctica y objeto, entre competencia y conocimiento, se puede mostrar mediante el análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas puestas en juego para la resolución de un problema matemático. (p. 95)

En la Figura 3 se evidencia un resumen gráfico de las herramientas teóricas del EOS, expuestas en líneas anteriores. En este gráfico se muestra que la actividad matemática, es el elemento central, que está expresado en las prácticas operativas y discursivas. Dichas prácticas presentan la existencia de objetos primarios y emergentes que se configuran en procesos de mayor complejidad, teniendo en cuenta que los objetos tanto primarios como emergentes, se pueden percibir desde las cinco facetas de dualidad propuestas por Godino y Burgos (2017).

Figura 3

Herramientas teóricas del EOS



Nota. Extraído de Godino et al, 2006, p. 136

2.2 Modelo de Razonamiento algebraico elemental: Niveles de algebrización

Diversos autores (p.ej. Kieran y Filloy (1989), Socas y Paralea (1994)) han coincidido que una de las limitaciones del álgebra escolar es la inadecuada transición de la aritmética al álgebra. Es así que los resultados de las investigaciones centradas en los errores algebraicos, han dado lugar a una propuesta sobre la naturaleza del álgebra escolar (Godino et al., 2012), para luego proponer niveles de algebrización, que abarcan desde los primeros grados de educación primaria (Godino et al., 2014) avanzando con una creciente complejidad hasta la educación secundaria (Godino, y otros, 2015). Cabe precisar que los niveles de algebrización se asignan por la actividad, en sí misma, que realiza el sujeto cuando ejecuta una práctica matemática, y no a las tareas que se presentan, puesto que, se considera que una actividad puede resolverse de múltiples maneras.

La propuesta que hace Godino et al. (2012) con respecto al razonamiento algebraico elemental (en adelante RAE), lo considera como un sinónimo del Early álgebra. Es así que, el modelo RAE es visto desde una perspectiva epistemológica, por ello, se afirma que «la inclusión del álgebra en la escuela elemental supone un cambio del foco de atención desde los aspectos simbólicos y procedimentales hacia aspectos estructurales del razonamiento algebraico» (p. 487). Dicho esto, el modelo RAE es tratado desde la teoría del EOS, pues utiliza ciertas herramientas teóricas como los procesos y objetos que intervienen en las prácticas matemáticas. En este sentido, se afirma que:

> Uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es su manera de abordar los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones en las que se pasa de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos, etc.; (objetos determinados) a las clases o tipos de tales objetos. (Godino et al., 2012, p. 489)

Partiendo de lo citado, se muestra que el modelo RAE tiene como eje central los procesos de generalización. Dichos procesos son esenciales para desarrollar el pensamiento algebraico. Además, el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2012) es de mucha utilidad, en cuanto se refiere a sus herramientas teóricas. A partir de estas, se formularán qué practicas matemáticas (objetos y procesos que intervienen) corresponden a un determinado nivel algebraico.

Los niveles de algebrización surgen a partir de la propuesta del razonamiento algebraico elemental (Godino et al., 2012) en la línea del EOS.

Niveles de algebrización en primaria.

La introducción del álgebra desde los primeros niveles de la educación básica ha surgido gracias a los planteamientos de las líneas de investigación como el Pre – álgebra y el Early álgebra. Tal es así que, Aké (2010) afirma:

> La introducción del razonamiento algebraico en la escuela primaria, trae consigo reconocer el carácter algebraico en las actividades matemáticas de la escuela elemental, así como el diseño de actividades que expresen un proceso de generalización y que también puedan resolverse tanto de una forma aritmética como de manera algebraica. (p.52)

Es necesario incidir que el nivel de algebrización se otorga de acuerdo a los objetos y prácticas que utiliza el sujeto en un determinado problema, ya que, una tarea matemática puede resolverse de diversas maneras, y no está supeditada a la utilización específica de utilización de objetos determinados según los niveles de algebrización. Además, se plantea que «las actividades se consideran "algebraicas" en tanto que exhiban algunas características atribuidas por el maestro y utilizadas por los estudiantes para resolverlas» (Martínez Escobar, 2014, p. 27). Antes de empezar a describir cada uno de los niveles, se debe tener en cuenta que Godino et al. (2014) proponen como criterios básicos cuatro elementos que ayudan a caracterizar cada nivel. Dichos criterios son:

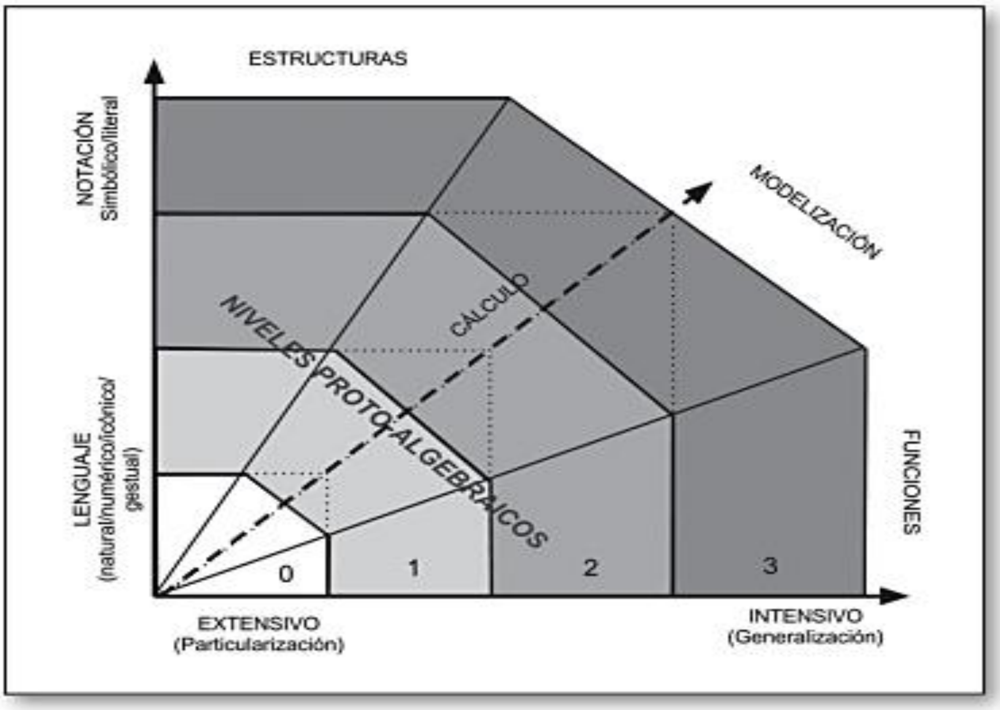
1. Generalización. Generación o inferencia de intensivos[6].
1. Unitarización. Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
2. Formalización y ostensión. Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.
3. Transformación. Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones. (p. 2016)

En la Figura 4, los investigadores de la propuesta de estos niveles de algebrización resumen los objetos y procesos que determinan el nivel de algebrización correspondiente.

[6] Recuérdese que los intensivos son aquellos que diferencian de la función general en diversos contextos o clases de prácticas.

Figura 4

Niveles protoalgebraicos de razonamiento matemático.



Nota. Extraído de Godino et al. (2014, p.17)

Así también, en el documento citado, se propone una tabla (Figura 5) que resume los objetos presentes en cada uno de los niveles, y que ha ayudado a la clasificación de estos según la jerarquía de los procesos que intervienen, además de las transformaciones que se realizan y los lenguajes que se emplean en cada nivel.

Figura 5

Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental

Niveles	*Tipos de objetos*	*Transformaciones*	*Lenguajes*
0	No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales, pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.
1	En tareas estructurales, pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales, se reconocen los intensivos.	En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales, se calcula con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos.
2	Intervienen indeterminadas o variables.	En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $Ax\pm B=C$. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico -literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.
3	Intervienen indeterminadas o variables.	En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $Ax\pm B=Cx\pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico -literal ; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.

Nota. Extraído de Godino et al. (2014, p.16)

Nivel 0.

Este nivel se caracteriza por la ausencia de razonamiento algebraico. Es frecuente encontrar, en los textos de educación primaria, tareas matemáticas que no implican la utilización de símbolos o signos, desarrollándose básicamente con operaciones aritméticas. Sin embargo, la utilización de los conceptos de las operaciones aritméticas no justifica que no haya algún razonamiento por parte del alumno. Pero este razonamiento no necesita de los objetos que se describen para caracterizar una actividad como algebraica. Es por ello que los autores (Godino, et al., 2014) plantean la siguiente regla:

> Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización. (p. 207)

Según lo expuesto en la cita, las actividades matemáticas inmersas en este nivel corresponden a ejemplos como: 548 + 639= _____. Este tipo de ejercicios sólo necesitan de una sustracción. Y se visualiza a la igualdad, no como un objeto algebraico, sino como el resultado de la operación aritmética.

Nivel 1.

En este nivel, ocurre un encuentro de «objetos intensivos de grado 2 cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual» (Godino, et al., 2015). Estos objetos intensivos, si bien no son explícitos en la tarea matemática, el alumno debe sostenerse de propiedades que requieren más allá de saber los conceptos de operaciones aritméticas. Un ejemplo sencillo es la suma de dos elementos (327+436= 763; entonces si se le añade 327+436+150; el alumno debe añadir el último sumando al resultado de la operación anterior, teniendo en cuenta las propiedades asociativa o conmutativa, sin expresarlo explícitamente), y luego añadiendo un elemento más que permite hacer uso de conceptos de mayor complejidad como lo son las propiedades algebraicas de las operaciones con números naturales. Por ello, Godino et al. (2014) describen este nivel incipiente de algebrización como:

> Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. (p.208)

En este nivel también interviene el cálculo de áreas y perímetros de una figura geométrica, pues intervienen objetivos intensivos y fórmulas para hallar el área y perímetro. Además, a partir de un área determinada, se puede hallar distintos valores que pueden tomar la base y altura de una figura. Para ejemplificar proponemos que un cuadrilátero tiene un área de 24 cm². A partir de este dato, el alumno puede dar posibles valores que cumplen con esta área; un cuadrilátero puede tener las siguientes medidas: 1 x 24; 2 x 12; 3 x 8; 4 x 6. A pesar de que no hay presencia de símbolos, el razonamiento para hallar este conjunto de valores, con los objetos intensivos presentes, hacen que este ejercicio tenga un nivel incipiente de razonamiento algebraico.

Nivel 2.

Este nivel es considerado como un nivel intermedio de algebrización, donde se manifiesta explícitamente la intervención de objetos intensivos. Es así que se describe de la siguiente forma:

> Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma Ax ± B = C. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión. (Godino et al., 2012, p. 290)

En este nivel ya se nota la presencia de objetivos intensivos de grado 2. Se ponen en práctica las fórmulas con una incógnita (Ax +4= 28). En un ejemplo cercano se puede definir que, para hallar el número de triángulos trazados desde un vértice en un polígono, se nota el patrón de generalización, para luego determinar que, para "n" lados del polígono el número de triángulos será: n-2.

Nivel 3.

Este es un nivel consolidado de algebrización que se describe bajo la siguiente regla:

> Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo Ax±B=Cx±D, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones. (Godino et al., 2014, p. 211)

Hay una presencia inmediata de elementos simbólicos, sin necesidad de deducirlos, se nota la utilización habitual de fórmulas y tratamiento con las incógnitas.

Niveles de algebrización en secundaria.

En el nivel de educación secundaria, la presencia de los procesos algebraicos se da con mayor énfasis. Es así que, con los niveles propuestos para la educación primaria, se ampliaron tres niveles para la educación secundaria (Godino et al., 2015). Estos niveles muestran explícitamente la presencia de parámetros que implican mayores grados o capas de generalidad (Radford, 2013).

En cuanto a los parámetros, Drijvers (2003) realiza una justificación del uso de estos en las prácticas matemáticas de los estudiantes. La importancia se hace notar en que dichos parámetros permiten ahondar en la identificación de proceso – objeto, concebido como el mayor problema en el álgebra escolar. La segunda razón es que son usados como medios de generalización, es decir, con estos se puede determinar familias de objetos. Además, el estudiante puede realizar un análisis de la noción de variable, e incluso llegar a encontrar sentido a las estructuras de las fórmulas algebraicas (aprendidas, en su mayoría, de forma mecánica).

Así mismo, estos nuevos niveles van en concordancia con lo expuesto en líneas anteriores. A la vez, los tres primeros niveles expuestos, también harán notar su presencia en los alumnos del nivel secundaria. Esta problemática se da por la incorrecta transición de la aritmética al álgebra (Callejo y Rojas, 2016).

Nivel 4.

> En este nivel se da el primer encuentro con los parámetros, entendidos como sistemas de ecuaciones o funciones, donde interviene el hallazgo de más de 2 incógnitas. Este tipo de parámetros son los denominados "placeholder" o registro numérico. En este sentido, «el parámetro se ve como una posición, un lugar vacío en el que se pueden insertar valores numéricos y desde el cual se pueden recuperar». (Godino, et al., 2015)

Este cuarto nivel denota la presencia de parámetros que pueden ser vistos en los temas de ecuaciones o funciones. Para ejemplificar se remite al tema de función lineal. Cuando se aborda este tema, se suele emplear expresiones como y= 2x, donde el valor de y, depende del producto de 2 con el valor asignado para x. Es en este caso que "x e y" son vistos como variables, y el 2 viene a ser el parámetro, pues si este valor se generaliza, pues se ve como una posición dentro de la expresión algebraica, se puede denotar como: y= ax; donde "a" siendo un valor generalizable toma la forma de parámetro en dicha situación.

Nivel 5.

Es el uso o tratamiento de parámetros donde se manifiesta más de 1 variable o incógnita. Para mejor entendimiento se puede remitir al tema de progresiones geométricas donde apreciamos tratamiento de parámetros pues existe la presencia de términos que cumplen la función de parámetros; estos son a_1, r y a(η); donde a (n) es el término n- ésimo. El tratamiento de los dos primeros términos conlleva al encuentro del término n- ésimo.

> Las operaciones con parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel dado que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas de prácticas ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior (familia de ecuaciones, familia de funciones). (Godino et al., 2015, p. 127)

Nivel 6.

No es frecuente encontrar este nivel en la educación secundaria, sin embargo, es necesario considerarlo, aunque su presencia se note en los estudios de grado superior. En el sexto nivel se encuentran las estructuras de espacio vectorial (objetos matemáticos) y simbologías de mayor abstracción, que en su conjunto dan lugar a configuraciones complejas, como se muestra en la Ilustración 5.

Figura 6

Estructura de espacios- vectoriales en el sexto nivel del RAE

. Sea $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) / x_i \in K\}$. Se definen

$$+ \ : \ K^n \times K^n \to K^n, \quad (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\cdot \ : \ K \times K^n \to K^n, \quad \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Entonces K^n es un K-espacio vectorial.

Nota. Extraído de http://mate.dm.uba.ar/~jeronimo/algebra_lineal/Capitulo1.pdf

A continuación, en la Tabla 1. Se presenta una síntesis de los tres niveles algebraicos de la educación secundaria, determinando y esclareciendo los objetos y procesos que intervienen en estos niveles propuestos por Godino et al. (2015).

Tabla 1

Síntesis de los niveles de algebrización de educación secundaria propuestos en el modelo RAE.

Niveles	Objetos	Transformaciones	Lenguajes
4	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer Grado de generalidad).	Hay operaciones con variables, pero no con los parámetros.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.
5	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer grado de generalidad).	Hay operaciones con los parámetros y, por tanto, con objetos con un tercer grado de generalidad.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual
6	Estructuras algebraicas abstractas (espacios vectoriales, grupos, anillos, …) Relaciones binarias generales y sus propiedades. (Objetos intensivos con cuarto grado de generalidad)	Hay operaciones con los objetos que forman parte de las estructuras.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.

Nota. Adaptado de Godino et al. (2015).

2.3 Niveles de algebrización que propone el Currículo Nacional (2016) en el V y VI ciclo de la EBR.

La educación básica regular (EBR) en el Perú está compuesta por 7 ciclos, de los cuales, el V ciclo corresponde a los grados de quinto y sexto de primaria; y para el VI ciclo, los grados de primero y segundo de secundaria. Dichos ciclos están caracterizados por el logro de estándares de aprendizaje, y de acuerdo a las competencias que se desarrollan en cada materia de estudio, al término de estos. Los desempeños están definidos como:

> Son descripciones específicas de lo que hacen los estudiantes respecto de los niveles de desarrollo de las competencias (estándares de aprendizaje). (Ministerio de educación, 2016a, p.62)

En tal sentido, para el área de Matemática, se desarrollan cuatro competencias, de las cuales, para efectos de la investigación, se centrará en la Competencia de Regularidad, Equivalencia y cambio. Es así que, los estudiantes que se han promovido a la Educación Secundaria, y que se encuentran en el primer año, deberán haber logrado el estándar de aprendizaje del Ciclo V:

> Resuelve problemas de equivalencias, regularidades o relaciones de cambio entre dos magnitudes o entre expresiones; traduciéndolas a ecuaciones que combinan las cuatro operaciones, a expresiones de desigualdad o a relaciones de proporcionalidad directa, y patrones de repetición que combinan criterios geométricos y cuya regla de formación se asocia a la posición de sus elementos. Expresa su comprensión del término general de un patrón, las condiciones de desigualdad expresadas con los signos > y <, así como de la relación proporcional como un cambio constante; usando lenguaje matemático y diversas representaciones. Emplea recursos, estrategias y propiedades de las igualdades para resolver ecuaciones o hallar valores que cumplen una condición de desigualdad o proporcionalidad; así como procedimientos para crear, continuar o completar patrones. Realiza afirmaciones a partir de sus experiencias concretas, sobre patrones y sus elementos no inmediatos; las justifica con ejemplos, procedimientos, y propiedades de la igualdad y desigualdad. (Ministerio de Educación, 2016b, p. 253)

Según este desempeño, el alumno debió alcanzar el nivel 2 a 3 de algebrización, pues hay presencia de intensivos y objetos matemáticos. En este nivel, el alumno empieza a traducir del lenguaje verbal, las expresiones algebraicas elementales como llegar a la formalización de un patrón básico como: n – 2. Con este logro alcanzado, los estudiantes deberán empezar a construir un nuevo estándar que le permita lograr el nivel VI, mostrado a continuación:

> Resuelve problemas referidos a interpretar cambios constantes o regularidades entre magnitudes, valores o entre expresiones; traduciéndolas a patrones numéricos y gráficos, progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y afín, y relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Comprueba si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. Expresa su comprensión de: la relación entre función lineal y proporcionalidad directa; las diferencias entre una ecuación e inecuación lineal y sus propiedades; la variable como un valor que cambia; el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una inecuación; las usa para interpretar enunciados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, y evaluar funciones lineales. Plantea afirmaciones sobre propiedades de las progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones, así como de una función lineal, lineal afín con base a sus experiencias, y las justifica mediante ejemplos y propiedades matemáticas; encuentra errores o vacíos en las argumentaciones propias y las de otros y las corrige. (Ministerio de Educación, 2016b, p.253)

Este nivel está relacionado únicamente con el nivel 3 de algebrización propuesto por Godino et al. (2012). Pues pone en evidencia que los estudiantes deberán lograr la manipulación del lenguaje algebraico con una sola variable y conocer las funciones básicas: lineal y afín. Sin embargo, para el nivel secundario, según la propuesta del RAE, el alumno deberá ser capaz de empezar a manipular parámetros, referidos a sistemas de ecuaciones con más de 2 variables y funciones cuadráticas.

La última idea conlleva a reflexionar sobre el uso o no de parámetros en primero de secundaria. Si se remite al nivel de algebrización 4 explicado en el marco teórico, se puede afirmar que hay un inicio en el tratado de parámetros, pues el estudiante ya empieza a familiarizarse con las funciones lineales. Aunque esta manipulación aún se logre vinculando a la proporcionalidad directa o a través de un gráfico cartesiano que ayude a visualizar el tratamiento de los datos. Este proceso que se lleva aun no permite realizar un verdadero tratamiento de dichos parámetros que aparecen en la expresión algebraica de una función lineal, pues ven la constante o coeficiente de “x” como un valor específico, pero no generalizable. Dicho esto, se concuerda con lo referido por Godino et al. (2012) quienes manifiestan que justamente en el primer año del nivel secundaria deben alcanzar el nivel 3 de algebrización propuesto en el RAE. Con esto, se aclara que los niveles de algebrización de dicho modelo no son limitados o cerrados a un cierto ciclo educativo, pues esto puede ser variable. Sin embargo, se deben tener en cuenta las herramientas u objetos que se deben trabajar una vez alcanzado cierto nivel para empezar con el siguiente.

2.4 Estándares de algebrización propuestos por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM) propuso en el año 2010 los Principios y Estándares que garantizan una calidad en la educación matemática. Tales principios son los siguientes: Igualdad, curriculum, enseñanza, aprendizaje, evaluación, tecnología. Según estos se desarrollan los estándares de aprendizaje que «tratan de dar respuesta a la pregunta ¿Qué contenidos y procesos matemáticos deberían los estudiantes aprender a conocer y a ser capaces de usar cuando avancen en su educación?» (Marín y Lupiáñez, 2005). Los estándares se desarrollan sobre las áreas que involucran las matemáticas: Números y Operaciones, Algebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad. Para efectos de la investigación nos centraremos en Álgebra, que involucra cuatro estándares de contenido con sus respectivos procesos. En la *Tabla 2*, se organiza los estándares de contenido con los procesos que el alumno debe lograr en la educación secundaria. Para ello se ha tomado como referencia los grados 6-8 y 9-12 señalados por el NCTM.

Tabla 2

Estándares de contenido de grados 6- 8 y 9- 12, según el NCTM.

Estándares de contenido	En los grados 6-8 los alumnos deberán lograr:
Comprender patrones, relaciones y funciones.	• representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficos, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas; • relacionar y comparar diferentes formas de representación para una relación; • Identificar funciones como lineales o no lineales y contrastar sus propiedades de tablas, gráficos o ecuaciones.
Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos.	• desarrollar una comprensión conceptual inicial de los diferentes usos de las variables; • explorar relaciones entre expresiones simbólicas y gráficos de líneas, prestando especial atención al significado de intercepción y pendiente; • usar álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, especialmente aquellos que involucran relaciones lineales; • reconocer y generar formas equivalentes para expresiones algebraicas simples y resolver ecuaciones lineales
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.	• modelar y resolver problemas contextualizados usando varias representaciones, como gráficos, tablas y ecuaciones.
Analizar el cambio en diversos contextos.	• use gráficos para analizar la naturaleza de los cambios en las cantidades en las relaciones lineales.
Estándares de contenido	**En los grados 9-12 los alumnos deberán lograr:**
Comprender patrones, relaciones y funciones.	• generalizar patrones usando funciones definidas explícitamente y definidas recursivamente; • comprender las relaciones y funciones y seleccionar, convertir de manera flexible y utilizar diversas representaciones para ellas. • analizar funciones de una variable investigando tasas de cambio, intercepciones, ceros, asíntotas y comportamiento local y global; • comprender y realizar transformaciones tales como combinar aritméticamente, componer e invertir funciones de uso común, utilizando tecnología para realizar tales operaciones en expresiones simbólicas más complicadas;

Tabla 2

Estándares de contenido de grados 6- 8 y 9- 12, según el NCTM. (Continuación)

	• comprender y comparar las propiedades de las clases de funciones, incluidas las funciones exponenciales, polinómicas, racionales, logarítmicas y periódicas; • interpretar representaciones de funciones de dos variables
Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos.	• comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, desigualdades y relaciones; • escriba formas equivalentes de ecuaciones, desigualdades y sistemas de ecuaciones y resuélvalas con fluidez, mentalmente o con papel y lápiz en casos simples y utilizando tecnología en todos los casos; • usar álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas; • utilizar una variedad de representaciones simbólicas, incluidas ecuaciones recursivas y paramétricas, para funciones y relaciones; • juzgar el significado, la utilidad y la razonabilidad de los resultados de las manipulaciones de símbolos, incluidas las realizadas por la tecnología.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.	• identificar relaciones cuantitativas esenciales en una situación y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelar las relaciones; • utilizar expresiones simbólicas, incluidas formas iterativas y recursivas, para representar relaciones que surgen de diversos contextos; • sacar conclusiones razonables sobre una situación que se está modelando
Analizar el cambio en diversos contextos.	• aproximar e interpretar las tasas de cambio a partir de datos gráficos y numéricos.

Nota. Extraído de Marín y Lupiañez, 2005.

2.5 El Libro de texto como recurso didáctico

Un buen libro de texto es aquel que hace posible aprender a resolver problemas a través de una enseñanza que se adhiera a los contenidos del libro, independientemente de los años de experiencia del docente o de la asignatura de su especialidad, por eso es necesario que todos los niños y niñas lleven a cabo el aprendizaje utilizando los libros de texto. En consecuencia, los libros de texto se constituyen en el material didáctico principal para las asignaturas, con

> una organización y distribución que va de acuerdo con la estructura del programa y al ciclo o nivel de estudio. (Cárcamo, 2012, p. 57)

La importancia del uso del libro de texto en las clases de matemáticas es evidente, tal como lo expresa Cárcamo (2012). Pero no sólo se basa en la trascripción de lo que señala el libro de texto, sino que se debe trabajar de una manera más profunda, por ello, el docente debe tener un rol competitivo para ser capaz de poner sus conocimientos, no de forma memorística y repetitiva, como se da en la mayoría de los casos, sino que debe ser analítico y promover el razonamiento o análisis previo en los alumnos. En consecuencia, que sean capaces, al momento de utilizar los libros de texto, de resolver ejercicios o afianzar el contenido visto en clase, de interpretar las soluciones en las situaciones problemáticas propuestas.

Nos referimos, en el caso de las matemáticas, a la interpretación del uso de variables, si fuera el caso, o la forma de operar y llegar al resultado. Pues, las distintas soluciones presentadas llevan a desarrollar un nivel de pensamiento o a adquirir un nivel de algebrización. Es así que, Brownell (1947, citado en Cárcamo, 2012) refería que las matemáticas deben desarrollar, en principio, una comprensión del problema o del concepto matemático, más no una mecanización de pasos o procesos de cálculo que lleven al resultado, y que no poseen sentido para el estudiante.

Capítulo 3. Marco metodológico de la investigación

El estudio se aborda desde un paradigma interpretativo, puesto que nos enfocamos a describir situaciones de manera profunda e integral dentro de un contexto específico y sin manipulación de datos o variables (Taylor y Bogdan, 1987). Así pues, este modelo «focaliza su atención en la descripción de lo individual, lo distintivo, la existencia de realidades múltiples, lo particular del hecho que se estudia» (Gonzáles Morales, 2003, p.130). En este sentido, tratamos de comprender el estudio del álgebra promovida en los textos escolares, poniendo atención en los niveles de algebrización que corresponden al VI ciclo de la Educación Básica Regular (EBR).

3.1 Metodología de la investigación

Partiendo de que la metodología «designa el modo en que enfocamos los problemas y buscamos las respuestas» (Taylor y Bogdan, 1987, p. 15), a continuación, explicamos las decisiones metodológicas tomadas en esta investigación.

El presente estudio constituye una investigación de tipo cualitativo, en la que se producen datos empíricos y descriptivos. Su desarrollo transcurre de manera flexible, es decir, los objetivos pueden ser modificados a lo largo del análisis de los datos. Además, de acuerdo con esta metodología, seguimos una lógica inductiva cuya finalidad es encontrar el significado de la situación analizada, partiendo de una descripción profunda (Gonzáles Morales, 2003). La manera de llegar a esto se explica en el apartado siguiente.

Dado que el objetivo de la investigación es explicar los niveles de algebrización identificados en las actividades propuestas y a la vez resueltas en el libro de texto de Matemática de 1° de Secundaria (Figura 7), distribuido por el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) en las escuelas públicas, este constituye nuestra fuente primaria de datos. Así pues, se evalúan los dos capítulos relacionados a la competencia Regularidad, equivalencia y cambio, que corresponden específicamente a los contenidos de ecuaciones e inecuaciones De estos capítulos se analizan 10 y 6 tareas, respectivamente, precisando que las tareas son desarrolladas en el texto. De acuerdo a esto, la direccionalidad de los objetivos ha contribuido a que la muestra sea seleccionada de manera intencional o basada en criterios (Taylor y Bogdan, 1987).

Figura 7

Portada del libro de texto de 1° de secundaria para colegios públicos del Perú

Nota. Ministerio de Educación, 2016, Grupo Editorial Norma.

3.2 Técnica de análisis de contenido

El estudio de los capítulos seleccionados (muestra) se realiza de acuerdo a la técnica de análisis de contenido. Esta es una forma particular del análisis de documentos en la que se precisa la asignación de categorías (López Noguero, 2002). La categorización es entendida como las dimensiones de los aspectos a investigar que se desagregan para evaluar las unidades a estudiar y de acuerdo a esto se debe llegar a la interpretación.

En el estudio, las categorías a evaluar provienen de los objetos matemáticos propuestos en el segmento de idoneidad epistémica del modelo EOS (apartado 1.1.3) propuesto por D'Amore y Godino (2007): situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos. Además, el análisis de las situaciones seleccionadas tiene como preámbulo la asociación de estas a un ámbito intramatemático[7] o extramatemático[8] y se abordan utilizando el verbo en presente en el orden mencionado.

De esta manera, las categorías han sido adaptadas a la naturaleza de la investigación para llevar a cabo el análisis de contenido. La tabla de análisis a utilizar, instrumento de análisis de datos (Tabla 3), ha sido propuesta por Julian (2017)[9]. El autor ha empleado los seis objetos primarios matemáticos que permiten llegar a la idoneidad epistémica según el EOS, y por ende, a clasificar de acuerdo al nivel de algebrización según el modelo RAE. Esta tabla la adaptamos a nuestra investigación, presentando el primer objeto primario "situación-problema" externo a la tabla. La adaptación del instrumento de Julian (2017) la consideramos viable por la procedencia de este, pues se ha empleado en un estudio llevado a cabo en nuestro país y por la semejanza con los objetivos planteados. Con este

[7] Se considera intramatemático a aquellas situaciones propias del área que no conectan con otras disciplinas.
[8] Se considera extramatemático a aquellas situaciones que conectan con otras disciplinas o también, aquellas que presentan situaciones del mundo real, cotidiano.
[9] Es necesario precisar que Julian (2017) ha realizado la adaptación de este instrumento, basándose en el análisis que realizó Aké (2013) en la tesis doctoral denominada: Evaluación y desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental en maestros en formación.

instrumento alcanzamos nuestro primer objetivo: analizar las actividades seleccionadas mediante una rejilla basada en el modelo de razonamiento algebraico elemental (RAE) propuesto por Godino et al. (2015), para interpretar los niveles de algebrización que se promueven en ellas.

El esquema que empleamos en el análisis de las tareas del libro de texto, luego de mostrar esta en una figura, es el siguiente:

Tabla 3

Estructura a seguir para el análisis de contenido de las tareas

Lenguaje
Definiciones
Procedimientos
Propiedades
Argumentos

Nota. Adaptado de Julian, 2017, p.50

Se considera importante ejemplificar el análisis que se llevará a cabo mediante esta tabla de categorías, empleando la primera tarea del capítulo de ecuaciones del texto escolar seleccionado. Antes es importante precisar que las tareas extraídas del texto escolar son situaciones ya resueltas, y de acuerdo con la solución propuesta es que se determina qué nivel de algebrización se está promoviendo, pues una tarea puede resolverse de distintas formas, pero la forma en que sea resuelta determina el nivel de algebrización promovido. A continuación, se presenta el análisis de una tarea con su respectiva relación con el nivel de algebrización al que corresponde.

Ejemplo de análisis de una tarea:

La siguiente situación (Figura 8) nos muestra un problema intramatemático, pues no nos lleva a una disciplina externa a las matemáticas. Esta situación es propia del área, y es resuelta mediante dos opciones. La Tabla 4 muestra el análisis realizado.

Figura 8

Tarea analizada del libro de texto de Matemática 1 como ejemplo

Julián compró 5 cajas de CD. Cada una con 6 discos. Soraya compró una caja de 25 discos y 5 discos sueltos. ¿Quién compró más discos?

$5 \times 6 = 30$ $\qquad$ $25 + 5 = 30$

Con la compra que hizo Julián completó 45 discos. ¿Cuántos tenía antes? Este interrogante se traduce en la expresión: $30 + \square = 45$, la cual podemos escribir de otra forma si usamos una letra para representar el valor desconocido: $30 + d = 45$.

Tabla 4

Ejemplo del análisis de una tarea propuesta en el libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: compró, cajas de CD, compró una caja, cuantos tenía antes, usamos una letra para representar el valor desconocido. **Simbólico:** 5,6,25,30, 45, d, x, +, =, □
Definiciones
Operaciones aritméticas básicas (suma y multiplicación), ecuación, N, expresiones aritméticas de igualdad.
Procedimientos
Multiplica el número de cajas por la cantidad de discos que hay en cada una de ellas. Suma los veinticinco discos de la caja con los que están sueltos. Compara ambas cantidades, encontrando una igualdad. Utiliza un ícono o variable para encontrar el término desconocido.
Propiedades
De adición, multiplicación, igualdad, estrategia heurística para hallar el valor desconocido
Argumentos
Se utiliza un razonamiento de tipo deductivo, pues parte de operaciones básicas para luego expresar una igualdad y con ello, finalizar con una expresión algebraica simple que conlleva al resultado correcto

Nota. Elaboración propia

Nivel de algebrización 1:

Para esta primera tarea analizada, se atribuye el nivel 1 de algebrización en cuanto a la primera parte de la solución, pues intervienen objetos intensivos[10] y símbolos que interfieren en ellos. En esta

[10] Recuérdese que los intensivos son aquellos que diferencian de la función general en diversos contextos o clases de prácticas

parte, el alumno no necesita saber sumar o restar, éste debe ser capaz de reconocer una igualdad en ambas expresiones presentes en la solución.

Nivel de algebrización 2:

En cuanto a la segunda propuesta de solución, donde se le da un nombre al valor desconocido, se relaciona con un nivel intermedio de algebrización, como es el nivel 2, pues se evidencia de manera explícita la expresión variables, que para esta situación es la variable “d”, o de expresiones indeterminadas que corresponde al símbolo □, cuya presencia indica la presencia de un dato desconocido. Ambas expresiones (□, d) nos llevan a ubicar dicha solución al nivel 2. Se precisa, además, lo conveniente de partir de una situación meramente aritmética a una expresión algebraica simple para ir generando un pensamiento más abstracto. Esto es necesario, pues los estudiantes están pasando de un nivel donde han obtenido una riqueza de contenidos aritméticos sobre aquellos que contienen presencias de símbolos y variables indeterminadas.

Por otro lado, el segundo objetivo: Analizar los desempeños propuestos en la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, mediante una rejilla de análisis de dimensiones, para determinar la relación con los niveles de algebrización, se alcanza con el empleo de una rejilla de análisis de contenido para evaluar los desempeños propuestos en la competencia de Regularidad, equivalencia y cambio de 1° de secundaria, y así determinar a qué nivel de algebrización corresponde. Los desempeños son extraídos del Currículo Nacional (2016a).

La Tabla 5 constituye la rejilla que permite analizar el desempeño con los objetos primarios matemáticos que se evidencian en este. En esta tabla se utilizan solamente cinco objetos primarios, no considerándose el objeto de situaciones, pues no se pretende evaluar una situación matemática sino un desempeño. Al igual que las tareas analizadas del texto escolar, a cada desempeño le corresponderá un nivel de algebrización promovido. Para determinar a qué nivel de algebrización corresponde, se utilizará la tabla 4. Tengamos en cuenta que en los resultados obtenidos en la Tabla 4 se define explícitamente los objetos matemáticos intervinientes y con ello se puede corresponder al nivel de algebrización en la Tabla 5. De esta manera, con los resultados se podrá explicar la relación entre los niveles de algebrización en las situaciones-problema con los niveles identificados en los desempeños. Esta última premisa corresponde al tercer objetivo que consiste en determinar la relación entre los desempeños propuestos en el Currículo Nacional (Ministerio de Educación, 2016a) con los niveles de algebrización encontrados en el análisis de las actividades seleccionadas del libro de texto de 1° de Secundaria.

Tabla 5.

Análisis de desempeño con los objetos primarios propuestos en el EOS.

Desempeño	Lenguaje	Definiciones	Propiedades	Procedimientos	Argumentos

Nota. Elaboración propia.

A continuación, en la Tabla 6, ejemplificamos el análisis de un desempeño extraído del Currículo Nacional correspondiente a la competencia Regularidad, equivalencia y cambio de 1° de Secundaria.

Tabla 6

Ejemplo del análisis epistémico de un desempeño de 1° de Secundaria.

Desempeño	**Lenguaje**	**Definiciones**	**Propiedades**	**Procedimientos**	**Argumentos**
Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la solución de una ecuación lineal y sobre la solución del conjunto solución de una condición de desigualdad, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.	Algebraico Gráfico Tabular Simbólico	Ecuación lineal Conjunto solución Desigualdad	No se evidencia explícitamente	Expresa Interpreta Establece relaciones	Problemas según el contexto. Establece inducciones para realizar relaciones entre representaciones

Nota. Elaboración propia.

De acuerdo con el análisis en las tablas anteriores, se afirma que el desempeño guarda correspondencia con el nivel 3 de algebrización. Además, según el apartado 2.3.2 de este estudio, podemos relacionar este resultado con el estándar de contenido según la NCTM que precisa el uso de problemas contextualizados mediante diversas representaciones como las explicitadas en dicho desempeño.

En consecuencia, se ha definido las técnicas de recogida de datos. Ahora se presentan los pasos que sistematizan la ruta a seguir para dar respuesta a los objetivos planteados en nuestra investigación.

Figura 9

Pasos a seguir para lograr los objetivos de la investigación

1
- Selecionar el texto escolar distribuido por el MINEDU a las instituciones públicas.
- Seleccionar de manera intencionada los tres capítulos correspondientes a la competencia de Regularidad, equivalencia y cambio.

2
- Determinar la técnica de análisis de contenido para estudiar las situaciones planteadas en el texto escolar de los capítulos seleccionados.
- Determinar las rejillas de análisis de dimensiones para estudiar los desempeños presentes en el Currículo Nacional, de acuerdo al nivel investigado.

3
- Analizar las situaciones- problema a través de la tabla de análisis de contenido propuesta por Julián (2017) y determinar a qué nivel de algebrización según el RAE, pertenecen.
- Analizar los desempeños propuestos en el Currículo Nacional, a través de dos rejillas de análisis de contenido para determinar la relación que guardan con los niveles de algebrización encontrados en las diferentes situaciones - problema, analizados del texto escolar.

4
- Determinar la relación que guardan los niveles de algebrización promovidos en las situaciones- problema con el nivel de algebrización propuestos en los desempeños del Currículo nacional.

Nota. Elaboración propia.

Capítulo 4. Análisis de los datos y discusión de los resultados

De acuerdo a lo explicado en el capítulo de metodología, el análisis de los datos y la comunicación de los resultados se organizan en dos apartados. En el primero se abordan las tareas presentes en el libro de texto, tanto de los capítulos de ecuaciones como de inecuaciones, para ello, se hace uso de la tabla propuesta por Julián (2017) que permite analizar cada uno de los aspectos que servirán para determinar los niveles de algebrización correspondientes a cada tarea.

Luego se aborda el análisis de los desempeños correspondientes a la competencia de regularidad, equivalencia y cambio correspondientes al nivel estudiado. Finalmente, en cada uno de estos apartados se hace una tabla resumen con los resultados obtenidos, permitiendo hacer una síntesis general, tanto para el análisis de las tareas como de los desempeños.

4.1Análisis de las tareas presentes en el libro de texto

4.1.1 *Ecuaciones lineales*

El capítulo de ecuaciones muestra, de manera general, métodos para el inicio de la generalización de una variable o dato desconocido dentro de una situación ya sea extramatemático o intramatemático. Cada tarea propuesta es resuelta, describiendo las propiedades que se utilizan para llegar al resultado. Usualmente se empieza con el reconocimiento del dato que se desconoce y que debe ser hallado para el posterior planteamiento de la expresión algebraica equivalente a una ecuación. A partir de ello se va desagregando paso a paso hasta llegar a la solución. Es a través de esta forma de plantear y resolver las tareas propuestas, que se analizan y se logra vincular a los niveles de algebrización propuesto por el modelo RAE.

- **Tarea 1**

La siguiente situación se vincula como una actividad extramatemática[11] pues está relacionada con el ámbito de los negocios y el mercado (valoración de los productos a lo largo del tiempo, desvalorización).

[11] Recuérdese que lo extramatemático se corresponde con las situaciones que se relacionan con el contexto cotidiano.

Figura 10

Tarea 1: Introducción a las ecuaciones a partir de una tabla y plano cartesiano

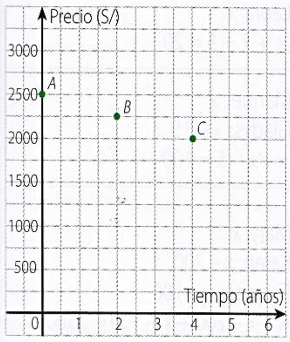


Figura 30.1

Una *tablet* costaba S/ 2500 en el 2008. En el 2010, una *tablet* similar costaba S/ 2250 y en el 2012, S/ 2000. Asumiendo que el precio sigue bajando a la misma tasa, ¿cuál será el precio de la *tablet* en el 2018?

Tenemos dos magnitudes que están involucradas, y se aprecia que una depende de la otra. De acuerdo con la información propuesta, el precio del artículo depende del tiempo; por ello, registramos esta relación en la tabla 30.1.

	Tiempo (años)	Precio (S/)
2008	0	2500
2010	2	2250
2012	4	2000
2014	6	1750

Tabla 30.1

Analizando la figura 30.1 podemos observar que a medida que aumentan los años, el precio de la *tablet* disminuye. Además, por cada dos años que aumenta, a partir del 2008, el precio disminuye en S/ 250. Por tanto, diremos que en el 2018 la *tablet* podría costar S/ 1250.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.79

Tabla 7

Análisis de la tarea 1 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: Tenemos dos magnitudes, registramos, analizando, podemos observar, diremos que. Simbólico: A, B, C, 2500, 2250,2000,1750,250,1250, 2008,2010,2012,2014,2018, 30.1, 0,2,4,6, s/. Gráfico: Tabla y plano cartesiano
Definiciones
Magnitudes inversamente proporcionales, razón aritmética.
Procedimientos
Relacionan las magnitudes a través de una tabla de doble entrada para obtener pares ordenados. Estos pares ordenados son puestos en un plano cartesiano para ver el comportamiento, evidenciando que, a mayor cantidad de años, el precio disminuye, el decir, el producto se desvaloriza
Propiedades
Propiedad de la sustracción Propiedad de la inversa proporcional: Si una magnitud aumenta, la otra disminuye
Argumentos
Esta situación presenta un razonamiento inductivo, pues las técnicas utilizadas para organizar los datos del problema y llegar al resultado, son técnicas que inducen a realizar operaciones para encontrar una razón por la que va disminuyendo el precio.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización: 1

En esta situación se ve un nivel incipiente de algebrización. Si bien es cierto, los datos (magnitudes) mostrados están organizados a través de una tabla de doble entrada y de un plano cartesiano, para organizar dichos datos ha sido necesario hallar una relación entre estos: la razón aritmética. El establecimiento de esta relación o razón hace que ubiquemos esta situación en el nivel 1 de algebrización. Se deja en claro que, no ha sido vinculado al nivel cero porque no se trata de una manipulación simple de operaciones aritméticas básicas, sino de encontrar una relación entre los datos, a través de un razonamiento inductivo, como se ha mencionado en líneas anteriores.

- **Tarea 2**

Esta situación, al igual que la anterior, es de carácter extramatemática, dado que presenta una realidad cotidiana: la agricultura en la sierra peruana (rendimiento de cultivo de la papa Yuraq Tumbay).

Figura 11

Tarea 2: Introducción a las ecuaciones a partir de una tabla y plano cartesiano

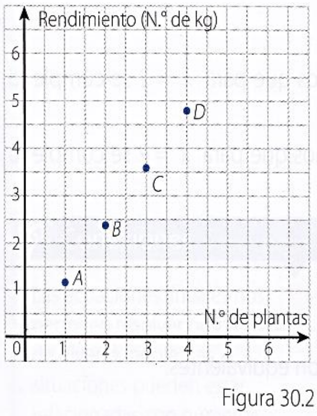


Figura 30.2

TIC

Resuelve ecuaciones y verifica tu respuesta: http://www.aaamatematicas.com/equ725x5.htm

Un agricultor cultiva papa nativa Yuraq Tumbay en una zona de Huancavelica. Esta papa tiene un rendimiento de 1,2 kg por planta. De acuerdo con la información de la tabla 30.2 y de la figura 30.2, ¿qué rendimiento se logrará si se siembran 100 plantas?

En este caso, tenemos dos magnitudes que están involucradas: número de plantas sembradas y el rendimiento de papa cosechada.

N.º de Plantas	Rendimiento (N.º de Kg)
1	1,2(1) = 1,2
2	1,2(2) = 2,4
3	1,2(3) = 3,6
4	1,2(4) = 4,8.

Tabla 30.2

Podemos observar que a medida que aumenta el número de plantas, el rendimiento de la papa cosechada también se incrementa. Respondiendo a la pregunta, diremos que por 100 plantas sembradas tendremos un rendimiento de 120 kg.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.79

Tabla 8

Análisis de la tarea 2 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: tiene, de acuerdo con la información, si se siembran, tenemos dos magnitudes, podemos observar, aumenta, se incrementa, tendremos. Simbólico: 1,2; 30.2, 100; 1, 2, 3, 4, 5, 6; 2,4; 3,6; 4,8; 120; N.°; kg; A; B; C; D; (). Gráfico: tabla, plano cartesiano
Definiciones
Magnitudes directamente proporcionales, pares ordenados, números decimales
Procedimientos
Realizan una tabla de doble entrada para ver la relación de magnitudes. Multiplican el rendimiento de papa por el número de plantas, permitiendo obtener una relación entre dos cantidades. Las dos cantidades obtenidas por cada fila de la tabla, son colocadas en el plano cartesiano, observando que al aumentar una magnitud, la otra también aumenta. Para llegar a la repuesta, multiplican el número de plantas por el rendimiento que tiene cada una de estas.
Propiedades
Propiedades de la multiplicación en R.
Argumentos
Este tipo de situación presenta un razonamiento de tipo inductivo, pues se ven reflejadas operaciones que conducen a encontrar una razón que es el rendimiento por planta y estas conllevan a definir el comportamiento de la situación, concluyendo que, a medida que aumenta el número de plantas, aumenta el rendimiento por kilogramo.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 1

Al igual que la situación anterior, esta situación presenta las mismas características que hacen que sea vinculada con el nivel de algebrización 1, puesto que, también encontramos cierta relación entre los datos presentados (magnitudes) que son organizados a través de una tabla y un plano cartesiano, y para organizar dichas estructuras se ha encontrado una razón en cada una de las magnitudes, considerándose un razonamiento inductivo para llegar a la solución del problema.

- **Tarea 3**

La siguiente situación tiene un carácter netamente intramatemático[12] pues lo que se presenta es un ejercicio.

Figura 12

Tarea 3: Ejercicio de ecuaciones equivalentes

Ejemplo 1

Determina si $4x - 1 = 7$ y $3x - 4 = 2$ son equivalentes.

Solución

En la primera ecuación $4x - 1 = 7$, tenemos que para $x = 2$ se cumple lo siguiente: $4(2) - 1 = 7$, entonces, $7 = 7$.

En la segunda ecuación $3x - 4 = 2$, tenemos que para $x = 2$ se cumple lo siguiente: $3(2) - 4 = 2$, entonces, $2 = 2$.

Por tanto, son equivalentes.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.80

Tabla 9

Análisis de la tarea 3 del libro de texto de Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: determina, tenemos que, se cumple lo siguiente.
Simbólico: 1,2,3,4,7, x como variable, -, =, ( )
Definiciones
Ecuaciones equivalentes, expresiones algebraicas, igualdades
Procedimientos
Resolver la primera ecuación, despejando el valor de “x”.
Reemplazar el valor de “x” en la ecuación para verificar la igualdad.
Resolver la segunda ecuación, despejando el valor de “x”.
Reemplazar el valor de “x” en la ecuación para verificar la igualdad.
Verificar que en ambas ecuaciones, el valor de “x” es el mismo, por tanto son equivalentes.
Propiedades
Propiedad de clausura de la adición
Propiedad de la multiplicación
Argumentos
En este ejercicio se muestra claramente un razonamiento deductivo, pues en primera instancia resuelve cada ecuación para luego igualarlas y dar por concluido que realmente eran ecuaciones equivalentes.

Nota. Elaboración propia.

[12] Recuérdese que lo intramatemático corresponde a las actividades específicas del área, es decir aquellos ejercicios que solo pueden ser vistos tal cual se presentan, en esta área.

Nivel de algebrización 2

En esta situación ya se hacen presentes de manera explícita los objetos intensivos[13], tales como la variable “x”. La sola presencia de esta incógnita y la generalidad de la situación a través de la forma Ax+ B= C (donde A, B y C son números naturales), y empleando un razonamiento deductivo, hace que se adjudique a esta situación un nivel intermedio de algebrización.

- **Tarea 4**

La siguiente situación presenta un carácter intramatemático por el objetivo al cual conlleva y por el procedimiento que presenta. Sin embargo, puede vincularse a una situación cotidiana de compra.

Figura 13

Tarea 4: Ecuación resuelta con la ayuda la gráfica de una balanza

Ejemplo 1

Una balanza tenía determinada cantidad de azúcar en su plato izquierdo. Después de agregar a este plato 480 g de azúcar, la balanza alcanzó el equilibrio. Si en el plato de la derecha quedaron 735 g, ¿cuánto azúcar había en el plato izquierdo?

Figura 32.1

Solución

Realicemos una gráfica de la situación (ver figura 32.1).

Llamemos x a la cantidad de azúcar inicial en el plato izquierdo. Después de agregar 480 g de azúcar a este plato, la balanza quedó en equilibrio. Como en el plato de la derecha había 735 g, modelamos la situación con la igualdad $x + 480 = 735$.

Para solucionar la ecuación lineal que modela la situación inicial, debemos hallar un número que al sumarle 480 dé cómo resultado 735. ¿Cómo podemos hallar el número?

$x + 480 = 735$ Ecuación planteada.

$x + 480 - 480 = 735 - 480$ Restamos 480 a ambos lados de la igualdad.

$x = 255$ Obtenemos la solución.

Obtenido el valor de x, verificamos el resultado.

$x + 480 = 735$ Ecuación inicial.

$255 + 480 = 735$ Reemplazamos x por 255.

$735 = 735$ Sumamos en el lado izquierdo.

Lo anterior significa que la cantidad de azúcar que había originalmente en el plato izquierdo era 255 g.

Nota: Libro de texto Matemática 1, p.83

[13] Los objetos intensivos son aquellos que diferencian la función general de una clase de prácticas.

Tabla 10

Análisis de la tarea 4 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: realicemos una gráfica, llamemos x a la cantidad, modelamos la situación, debemos hallar, restamos, obtenemos, verificamos, reemplazamos, sumamos. **Simbólica:**480, 735, 32.1, x, +, -, =, 255, g **Icónica**: 
Definiciones
Ecuaciones equivalentes, operaciones aritméticas básicas.
Procedimientos
Ubicar la ecuación planteada en el problema. Restar 480 a ambos lados de la igualdad Se obtiene la solución. A la ecuación inicial, se reemplaza “x” por el valor obtenido: 255. Se suma en el lado izquierdo, verificándose la igualdad.
Propiedades
Propiedad de clausura de la adición Si se suma o resta a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
Argumentos
En esta situación, al principio, se evidencia un razonamiento inductivo, al momento de realizar el gráfico para mostrar el equilibrio que logra la balanza propuesta en el problema, pero este camino no logra dar solución al problema. Luego, al plantear la ecuación, se puede ver un razonamiento deductivo, pues este planteamiento conduce directamente a la solución de la pregunta propuesta

Nota. Elaboración propia

Nivel de algebrización 2

Esta situación tiene presente la utilización de los objetos intensivos, que se conocen como variables o incógnitas, tales como “x”, durante el planteamiento o generalización del problema. Sin embargo, en el proceso de solución no se ve la utilización de esta incógnita, pues se utiliza otra técnica o método dentro de la solución, donde se ve claramente el uso de operaciones aritméticas básicas, es decir, la variable es vista como el resultado de una operación aritmética. Sin embargo, al tener presentes los objetos intensivos, tal como la tarea mencionada anteriormente, se adjudica este problema a un nivel intermedio de algebrización.

- **Tarea 5**

La siguiente situación presenta un carácter intramatemático, por su planteamiento para llegar a la solución del problema.

Figura 14

Tarea 5: Problema resuelto mediante el planteamiento de una ecuación lineal

Ejemplo 2

A finales del 2010, una firma petrolera confirmó el hallazgo de un nuevo pozo de petróleo a una profundidad de 3075 m en la selva peruana. Si en promedio cada día se perforaban 123 m, ¿cuántos días transcurrieron para hallar el pozo?

Solución

Para responder la pregunta, vamos a plantear y a resolver una ecuación.

t: número de días necesarios para encontrar el pozo.

Podemos representar la profundidad total del pozo como $-123 \times t$, porque cada día se perfora una profundidad de -123 m. Como la profundidad total del pozo es 3075 m, entonces:

$-123 \times t = -3075$ Ecuación propuesta.

$\frac{-123 \times t}{-123} = \frac{-3075}{-123}$ Dividimos a ambos lados por -123.

$1 \times t = 25$ Aplicamos la propiedad del elemento neutro de la multiplicación.

$t = 25$

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.83

Tabla 11

Análisis de la tarea 5 del libro de texto Matemática 1

Lenguaje
Verbal: vamos a plantear, resolver, podemos representar. Simbólico: 3075, 123, 25, m, -, x, t, =, __________
Definiciones
Ecuación lineal, multiplicación y división de números enteros
Procedimientos
Se plantea la ecuación, designando la variable “t” como el número de días necesarios para encontrar el pozo. Dividir a ambos lados por – 123. Aplicar la propiedad del elemento neutro de la multiplicación. Reemplazar el valor obtenido para verificar la igualdad.
Propiedades
Propiedad de clausura, propiedad del elemento neutro Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.
Argumentos
Se propone un razonamiento deductivo, con el planteamiento de la ecuación, que conduce al resultado.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

En esta situación encontramos un nivel intermedio de algebrización, pues hay presencia explicita de un objeto intensivo: “t”, al plantear una ecuación lineal. Cabe precisar que es importante variar las diferentes simbologías de variables, para que el estudiante no generalice que la única variable es la letra “x”. Además, hay presencia de propiedades que involucran la generalización, sin dejar de lado las propiedades aritméticas, que también son empleadas en esta tarea.

- **Tarea 6**

La tarea propuesta presenta un carácter intramatemático, pues dicho planteamiento y procedimiento es netamente del área de matemática.

Figura 15

Tarea 6: Ecuación resuelta mediante un cuadro de doble entrada

Ejemplo 3

Luis preguntó a su primo Carlos sobre su edad y este le respondió así:

"Si al triple de los años que tendré dentro de tres años le restaras el triple de los años que tenía hace tres años, obtendrías la edad que tengo ahora".

¿Cuál es la edad actual de Carlos?

Solución

1. Realiza una tabla con los datos del problema.

Edad de Carlos		
Edad hace 3 años	**Edad actual**	**Edad dentro de 3 años**
$x - 3$ años	x años	$x + 3$ años

Tabla 32.1

2. Resolvemos.

$3\,(x + 3) - 3\,(x - 3) = x$	Ecuación inicial.
$3x + 9 - 3x + 9 = x$	Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación.
$18 = x$	Resolvemos la ecuación.

Luego, Carlos tiene 18 años.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.84

Tabla 12

Análisis de la tarea 6 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje

Verbal: Realiza, resolvemos, aplicamos, tiene

Simbólico: x, 3, 9, 18, -, +, =, ( )

Gráfico: tabla

Edad de Carlos		
Edad hace 3 años	Edad actual	Edad dentro de 3 años
$x - 3$ años	x años	$x + 3$ años

Definiciones

Ecuación lineal, propiedades básicas aritméticas.

Procedimientos

Realizar una tabla para organizar los datos.

Plantear la ecuación.

Aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación.

Resolver la ecuación

Propiedades

Propiedad distributiva de la multiplicación.

Propiedad de clausura de la adición.

Argumentos

Para llegar a la solución se presenta un razonamiento deductivo, desde el planteamiento de la ecuación hasta llegar al resultado.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

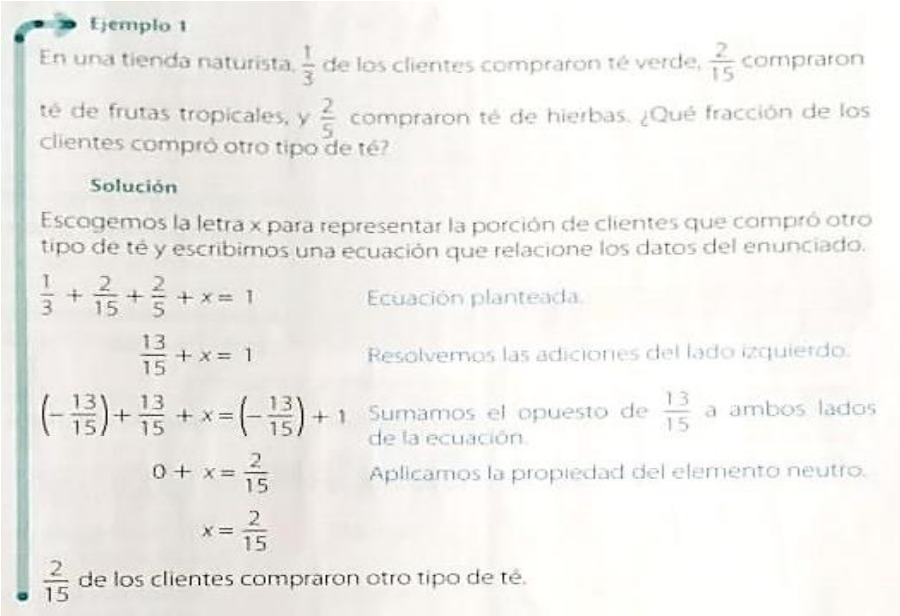
A esta situación se le adjudica un nivel intermedio de algebrización, pues identifica un dato desconocido y lo generaliza a través de la variable “x”, poniendo en evidencia de manera explícita, la presencia de un objeto intensivo. Además, se apoya de una tabla para modelar la situación que lo conduzca al resultado (razonamiento deductivo). Dicha tabla cumple un rol importante, puesto que ayuda a generalizar y organizar los datos mostrados de manera verbal a expresiones simbólicas.

- **Tarea 7**

La situación presentada a continuación es de carácter intramatemático por la naturaleza de su planteamiento y resolución, aunque está inmersa dentro de un contexto comercial.

Figura 16

Tarea 7: Ecuación resuelta utilizando números racionales



Ejemplo 1

En una tienda naturista, $\frac{1}{3}$ de los clientes compraron té verde, $\frac{2}{15}$ compraron té de frutas tropicales, y $\frac{2}{5}$ compraron té de hierbas. ¿Qué fracción de los clientes compró otro tipo de té?

Solución

Escogemos la letra x para representar la porción de clientes que compró otro tipo de té y escribimos una ecuación que relacione los datos del enunciado.

$\frac{1}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{5}+x=1$ Ecuación planteada.

$\frac{13}{15}+x=1$ Resolvemos las adiciones del lado izquierdo.

$\left(-\frac{13}{15}\right)+\frac{13}{15}+x=\left(-\frac{13}{15}\right)+1$ Sumamos el opuesto de $\frac{13}{15}$ a ambos lados de la ecuación.

$0+x=\frac{2}{15}$ Aplicamos la propiedad del elemento neutro.

$x=\frac{2}{15}$

$\frac{2}{15}$ de los clientes compraron otro tipo de té.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.84

Tabla 13

Análisis de la tarea 7 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: escogemos, para representar, compró, escribimos, relaciones, resolvemos, sumamos, aplicamos. Simbólico: $\frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{2}{5}, \frac{13}{15}$, 0, 1, x, +, - , =
Definiciones
Ecuación lineal, suma y resta de fracciones, propiedad del elemento neutro
Procedimientos
Designar la variable “x” para representar la porción de clientes que compró otro tipo de té. Plantear la ecuación. Resolver las adiciones del lado izquierdo. Sumar el opuesto de $\frac{13}{15}$ a ambos lados de la ecuación. Aplicar la propiedad del elemento neutro.
Propiedades
Propiedad del elemento neutro. Si se suma o resta a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
Argumentos
Se presenta una situación que genera un razonamiento deductivo, al plantear la ecuación y generar un único resultado.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

En esta situación podemos afirmar que hay presencia de un objeto intensivo, como es la variable “x”, aunque no se aprecia el uso de forma profunda, pues se ponen en práctica técnicas de suma o resta de fracciones. Sin embargo, la presencia de este objeto hace que se le adjudique este nivel de algebrización. Por otro lado, es importante destacar el manejo de propiedades de números enteros. Dichas propiedades resultan complejas frente al estudiante. El uso de variables y de propiedades para agrupar términos ha determinado el nivel intermedio de algebrización.

- **Tarea 8**

La situación que se presenta a continuación tiene un carácter extramatemático, pues evidencia una situación cotidiana. Es común que las personas que tienen una movilidad se preocupen siempre por el kilometraje recorrido por su unidad móvil.

Figura 17

Tarea 8: Ecuación resuelta utilizando expresiones decimales

Ejemplo 2

Mario lee en el tablero de kilometraje de su carro que ha completado 12 748,7 km de recorrido. A los 20 000 km, debe llevarlo a revisión. ¿Cuántos kilómetros faltan para la revisión?

Solución

Llamemos x a la cantidad de kilómetros que le faltan y escribamos la ecuación.

$$12\,748{,}7 + x = 20\,000$$

$$12\,748{,}7 + (-12\,748{,}7) + x = 20\,000 + (-12\,748{,}7)$$

$$x = 7251{,}3$$

Faltan 7251,3 km para la revisión.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.85

Tabla 14

Análisis de la tarea 8 del libro de texto de Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: llamemos, escribamos, faltan Simbólico: 12 748,7; 20 000; 7251,3; km, x, +, - , ( ), =.
Definiciones
Ecuación lineal, operaciones aritméticas de suma y resta
Procedimientos
Designar “x” a la cantidad de kilómetros que faltan. Plantear la ecuación. Restar a ambos lados 12 748,7. Resolver la ecuación.
Propiedades
Si se suma o resta a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
Argumentos
Se presenta una situación de razonamiento deductivo, al plantear una ecuación lineal y así obtener la solución.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

El planteamiento de la situación evidencia un nivel intermedio de algebrización, por la sola presencia de un objeto intensivo, como es la variable “x”. Sin embargo, la participación de esta variable en la resolución del problema no es de gran relevancia, pues actúa como un número desconocido que pudo ser representado de la forma: 12 748, 7 + ________ = 20 000. Es decir, el procedimiento que propone es de índole aritmético que tiene adjudicado un nivel incipiente de algebrización, pero por la presencia de la variable, se le atribuye el nivel intermedio de algebrización.

- **Tarea 9**

La situación a presentar pone de manifiesto un carácter intramatemático, por la naturaleza de su planteamiento.

Figura 18

Tarea 9: Ecuación resuelta operando con números naturales y racionales

Ejemplo 4

Los $\frac{7}{8}$ de los estudiantes de un colegio almuerzan en el comedor. Si 588 estudiantes almuerzan en el comedor, ¿cuántos estudiantes hay en el colegio?

Solución

Llamemos x al total de los estudiantes del colegio y escribamos una ecuación que relacione los datos: $\frac{7}{8}x = 588$

Solucionemos la ecuación.

$\frac{7}{8}x = 588$	Ecuación original.
$\left(\frac{8}{7}\right)\frac{7}{8}x = \left(\frac{8}{7}\right)588$	Multiplicamos a ambos lados por el recíproco del coeficiente de x.
$1x = 672$	Efectuamos las multiplicaciones. Al lado izquierdo, el producto de un racional y su recíproco es 1.
$x = 672$	Aplicamos la propiedad del elemento neutro de la multiplicación.

En el colegio hay 672 estudiantes.

Comprobemos la respuesta: $\frac{7}{8} \cdot 672 = \frac{7 \cdot 672}{8} = 588$

Nota: Libro de texto Matemática 1, p.86

Tabla 15

Análisis de la tarea 9 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: Llamemos "x", escribamos una ecuación, solucionemos, multiplicamos, efectuamos, aplicamos, comprobemos. Simbólico: $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{7}$, 588, 1, 672, x, =, ( ), . , ________
Definiciones
Ecuación lineal, fracciones, números recíprocos, operaciones aritméticas de multiplicación y división.
Procedimientos
Se designa una variable al total de estudiantes del colegio. Se plantea la ecuación. Se multiplica a ambos lados de la igualdad por el recíproco del coeficiente de la variable. Se efectúa las multiplicaciones. Se aplica la propiedad del elemento neutro. Se da solución a la ecuación y se comprueba.
Propiedades
Propiedad de clausura de la multiplicación Propiedad del elemento neutro
Argumentos
Se presenta un razonamiento deductivo, pues está presente el planteamiento inicial de una ecuación lineal para obtener una única solución.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

La situación mostrada tiene un planteamiento de la forma: ax = b (donde a y b son R, distintos de 0). Por el planteamiento en sí, se le adjudica un nivel intermedio de algebrización, pues notamos la presencia de un objeto intensivo, que es la variable "x". Además, en el procedimiento se nota la presencia de propiedades distintas a las de operaciones aritméticas básicas, que conducen a denominarlo como un razonamiento deductivo, pues ha permitido llegar a la solución del problema.

- **Tarea 10**

La situación a presentar es de carácter intramatemático, pues se vincula directamente con el área, además de evidenciar un planteamiento neto de matemática. Aunque la situación también se vincula con un contexto de la industria textil.

Figura 19

Tarea 10: Ecuación resuelta operando con expresiones decimales

Ejemplo 5

María coloca cintas al borde de unos manteles navideños. Cada mantel requiere 4,75 m de cinta. Si María cuenta con 142,5 m de cinta, ¿para cuántos manteles de igual longitud le alcanzará?

Solución

Llamemos x al número de manteles y escribamos la ecuación correspondiente.

$4{,}75x = 142{,}5$ Ecuación original.

$\frac{4{,}75\,x}{4{,}75} = \frac{142{,}5}{4{,}75}$ Revertimos la operación de multiplicar por 4,75 dividiendo por 4,75 a ambos lados de la ecuación.

$x = 30$ Efectuamos las divisiones.

La cinta alcanza para 30 manteles.

Comprobemos la respuesta: $4{,}75 \cdot 30 = 142{,}5$

Nota. Libro de texto Matemática, p. *86*

Tabla 16

Análisis de la tarea 10 del libro de texto Matemática 1. (Continuación)

Lenguaje
Verbal: Llamemos “x”, escribamos la ecuación, revertimos la operación, efectuamos, comprobemos. Simbólico: 4,75; 142,5; 30, m, x, =, . , _______
Definiciones
Ecuación lineal, números decimales, operaciones aritméticas básicas de multiplicación y división.
Procedimientos
Se designa la variable al número de manteles. Se plantea la ecuación. Se divide a ambos lados de la ecuación por 4,75. Se comprueba la respuesta.
Propiedades
Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.
Argumentos
La situación tiene un razonamiento deductivo, puesto que se ha planteado una ecuación para llegar a una única solución

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

Esta situación plantea una ecuación con una variable (“x”), y ésta corresponde a un objeto intensivo, dándole un nivel intermedio de algebrización. La variable actúa como un dato desconocido, reconociendo que existe una generalidad, pero no operando directamente con esta, pues se ponen en evidencia procesos de división de números decimales. Además, el planteamiento de la ecuación general permite adjudicar un razonamiento deductivo a esta situación.

Tabla 17

Resumen de los hallazgos en la unidad de ecuaciones.

Tarea	Situación problema (contexto intramatemático o extramatemático)	Lenguaje (verbal, simbólico, gráfico)	Definiciones	Argumentos (razonamiento deductivo o inductivo)	Nivel de razonamiento
1	Extramatemático	Verbal Simbólico Gráfico	Magnitudes directamente proporcionales	Inductivo	1
2	Extramatemático	Verbal Simbólico	Ecuaciones equivalentes	Inductivo	1
3	Intramatemático	Verbal Simbólico	Ecuaciones equivalentes	Deductivo	2
4	Intramatemático	Verbal Simbólico Icónico	Ecuaciones equivalentes	Inductivo	2
5	Intramatemático	Verbal Simbólico	Ecuación lineal	Deductivo	2
6	Intramatemático	Verbal Simbólico Grafico	Ecuación lineal	Deductivo	2
7	Intramatemático	Verbal Simbólico	Ecuación lineal	Deductivo	2
8	Extramatemático	Verbal Simbólico	Ecuación lineal	Deductivo	2
9	Intramatemático	Simbólico Verbal	Ecuación lineal	Deductivo	2
10	Intramatemático	Simbólico Verbal	Ecuación lineal	Deductivo	2

Nota. Elaboración propia.

De acuerdo con los resultados obtenidos, que se resumen en la tabla anterior, se puede visualizar que la mayoría de las actividades analizadas en el capítulo de ecuaciones promueven un nivel intermedio de algebrización, a través de un proceso deductivo. En las tareas propuestas se rescata una introducción al tema a través de un tópico aritmético sobre magnitudes directamente proporcionales donde se evidencian procesos de solución a través de gráficos como el plano cartesiano, empezando de esa manera con un nivel incipiente de algebrización que poco a poco se va convirtiendo en un nivel intermedio.

Cada actividad va siendo resuelta paso a paso, determinando la propiedad a emplear, que en la mayoría son propiedades básicas de la aritmética. Además, se va explicitando las acciones a realizar, partiendo de la generalización de la variable. Este capítulo propone situaciones que desarrollan la comprensión de la ecuación lineal promoviendo todas las características que esta conlleva, así como también, el reconocimiento de ecuaciones equivalentes.

4.1.2 *Inecuaciones lineales*

El capítulo de inecuaciones, al igual que el capítulo anterior, parte de situaciones básicas y cotidianas que conectan al estudiante con situaciones reales que guardan relación con este tópico, la desigualdad.

- **Tarea 11**

La situación a presentar tiene un carácter extramatemático, por su vinculación a una situación cotidiana dentro de una institución educativa. Las estrategias para dar solución pueden ser diversas, sin embargo, se opta por una solución intramatemático.

Figura 20

Tarea 11: Inecuación resuelta haciendo uso de intervalos

Ejemplo

En un salón de clases, hay en total 30 estudiantes y sus edades correspondientes son las siguientes:

12	12	12	11	10	10
11	11	12	10	12	9
12	12	12	10	9	10
10	10	11	9	9	9
12	11	10	11	9	11

Si el coordinador académico necesita redactar un informe acerca de la edad de cualquier estudiante de este salón, ¿cómo podríamos ayudarlo a simplificar la información?

Solución

Haciendo uso de las **desigualdades**, podemos establecer un intervalo en el que todas las edades de los estudiantes del salón estén contempladas.

$$\text{Mínimo} \leq \text{edad de cualquier estudiante} \leq \text{Máximo}$$

$$9 \leq m \leq 12$$

Esta expresión matemática significa que la edad de cualquier estudiante del salón es menor o igual a 12 y mayor o igual a 9.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.92

Tabla 18

Análisis de la tarea 11 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: haciendo uso de, podemos establecer un intervalo, esta expresión matemática significa, menor o igual a, mayor o igual a, mínimo, máximo. Simbólico: 9,10, 11, 12, 30, m, ≤.
Definiciones
Desigualdad, intervalo, mínimo, máximo.
Procedimientos
Se establece un intervalo para las edades de los estudiantes., de manera literal. Se asigna una variable para las edades dentro del intervalo. Se expresa el intervalo de manera simbólica.
Propiedades
Propiedad de la transitividad de la desigualdad: Si a, b y c son números reales se cumple que: Si a < b y b < c, entonces en este caso a < c.
Argumentos
Se plantea un razonamiento deductivo, pues busca una estrategia que sí o sí lo conduce a lo que se quiere saber, tratando de asignar valores y simbologías que representen el planteamiento verbal del problema.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

Se asigna el nivel intermedio de algebrización porque se manifiesta de manera explícita el uso de variables o indeterminadas, tal como lo es la letra “m”. Y, el uso de estos objetos intensivos hace que tenga un nivel medio de algebrización, además, este nivel es asignado por el uso de propiedades que van más allá del uso de operaciones aritméticas básicas, como son las propiedades de las desigualdades.

- **Tarea 12**

La situación a presentar tiene un carácter intramatemático, pues no es común usar el tipo de planteamiento que contiene, en una situación cotidiana.

Figura 21

Tarea 12: Situación resuelta a partir del planteamiento de una inecuación

Ejemplo 1

Si al triple de la cantidad de canicas que tiene Andrés se le agrega 13, resulta menor que 25. ¿Cuántas canicas tiene Andrés?

Solución

Como se desconoce la cantidad de canicas de Andrés, le asignamos x.

Luego, podemos representar la expresión de la siguiente manera:

$$3x + 13 < 25$$

Resolvamos la inecuación.

$3x + 13 < 25$	Inecuación planteada.
$3x + 13 - 13 < 25 - 13$	Restamos 13 a ambos lados de la desigualdad.
$3x \div 3 < 12 \div 3$	Dividimos por 3.
$x < 4$	

Andrés tiene menos de 4 canicas.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.94

Tabla 19

Análisis de la tarea 12 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: Asignamos x, podemos representar la expresión, resolvamos, restamos, dividimos, tiene menos. Simbólico: 3, 4, 13, 25, <, x, +, -, :
Definiciones
Expresión de desigualdad, inecuación, operaciones aritméticas básicas.
Procedimientos
Se asigna la variable “x” al dato desconocido que representa la cantidad de canicas. Se plantea la inecuación. Se resta 13 a ambos lados de la desigualdad. Se divide por 3 a ambos lados.
Propiedades
Propiedad de clausura de la división. Si se suma o resta un mismo número real a ambos miembros de la desigualdad, resulta una desigualdad en el mismo sentido que la dada. Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un mismo número real positivo, resulta una desigualdad en el mismo sentido que la dada.
Argumentos
Se encuentra una razonamiento deductivo, al plantear la expresión algebraica de una inecuación y resolverla, aplicando diversas propiedades de esta temática, para poder llegar al resultado exacto o conjunto solución del problema.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

Se asigna un nivel intermedio de algebrización a esta actividad, pues encontramos uso de variables y simbologías que representan un planteamiento verbal propuesto en el problema (evidencia a partir de este momento un razonamiento deductivo). Este planteamiento de modo verbal a un modo simbólico y por ende, reducido, hace que tenga un carácter algebraico. Además, el planteamiento de esta inecuación y su respectiva resolución ha hecho desencadenar propiedades un poco más complejas que se deben tener en cuenta al momento de resolver esta inecuación, pues la separación de los dos miembros de una inecuación está representado por signos de desigualdad, que hace tener más cuidado al momento de aplicar una regla para resolverla.

- **Tarea 13**

Al igual que la situación anterior, la que viene a continuación también presenta un carácter intramatemático, por la naturaleza de la relación entre sus elementos, y que por ende, no conduce a una situación cotidiana.

Figura 22

Tarea 13: Resolución de inecuación aplicando Ley de signos

Ejemplo 2

Resolvamos cada inecuación.

a. $s - 10 > -20$

$s + (-10) > -20$	Escribimos la sustracción del lado izquierdo como una adición.
$s + (-10+10) > -20 + 10$	Sumamos a ambos lados de la desigualdad el opuesto de −10.
$s + 0 > -10$	Aplicamos la propiedad del elemento neutro de la adición.
$s > -10$	

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.95

Tabla 20

Análisis de tarea 13 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: Resolvamos cada inecuación, escribimos, sumamos, aplicamos. Simbólico: 10, 20, s, >, +, -, ( )
Definiciones
Inecuación, números enteros
Procedimientos
Se escribe la sustracción del lado izquierdo como una adición. Suma a ambos lados de la desigualdad el opuesto de – 10. Aplica la propiedad del elemento neutro de la adición.
Propiedades
Propiedad del elemento neutro de la adición. Propiedad de adición de números enteros: Si son signos diferentes, se restan los números y se coloca el signo del número mayor. Si se suma o resta un mismo número real a ambos miembros de la desigualdad, resulta una desigualdad en el mismo sentido que la dada.
Argumentos
Se presenta un razonamiento deductivo, por el planteamiento simbólico dado y por el uso de propiedades y técnicas para resolver la inecuación y obtener así el conjunto solución.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

Se asigna un nivel intermedio de algebrización por el planteamiento presentado, pues, hace uso de indeterminadas o variables y de simbología que expresa desigualdad. Además, hace uso de técnicas que permiten operar con el conjunto de números enteros, poniendo en práctica conocimientos más complejos para la edad del estudiante, pues son comunes las dificultades para manejar las operaciones con números enteros, implicando propiedades diferentes a las aritméticas en el conjunto de los naturales.

- **Tarea 14**

La situación a presentar tiene un carácter extramatemático, pues nos informa acerca de un problema usual referido a la salud de las personas, como es la hipotermia.

Figura 23

Tarea 14: Situación resuelta a partir del planteamiento de una inecuación

Ejemplo 3

La hipotermia ocurre cuando la temperatura corporal de una persona desciende a menos de 35 °C. Escribamos y resolvamos una desigualdad que describa la diferencia que puede haber entre la temperatura corporal de una persona con hipotermia y la temperatura corporal normal de 37 °C.

Solución

Sea *x*: número de °C

$$37 - x < 35$$
$$-x < 35 - 37$$
$$-x < -2$$
$$x > 2$$

La diferencia es mayor a 2 °C.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.96

Tabla 21

Análisis de tarea 14 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: Sea x, la diferencia es. Simbólico: 2, -2, 35, 37, x, <, >, °C
Definiciones
Inecuación, operaciones con números enteros
Procedimientos
Se asigna la variable al dato desconocido. Se plantea la inecuación. Se despeja la variable en el primer miembro, y se opera los términos independientes en el segundo miembro. Al obtener resultados negativos en ambos miembros, se multiplica por – 1 para obtener valores positivos, al realizar esto, se invierte el signo de la desigualdad. Se obtiene el resultado.
Propiedades
Multiplicación de signos: - . - = + Si el minuendo es menor que el sustraendo, la diferencia es negativa Cambio de sentido de la desigualdad.
Argumentos
Presenta un razonamiento deductivo, desde el momento en que se asigna una variable al dato que se desea conocer, para que posteriormente se inserte dentro de una expresión de inecuación y poder, de esta manera, llegar a dar valor o valores al dato desconocido. Es decir, a partir de ese planteamiento general, se llega a un dato específico.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

Al igual que la situación anterior, se asigna un nivel intermedio de algebrización al hacer uso de objetos intensivos para llegar a resultados específicos, estos objetos son variables como x y el uso de simbología que expresa desigualdad, propiciando un razonamiento que va de lo general a lo específico.

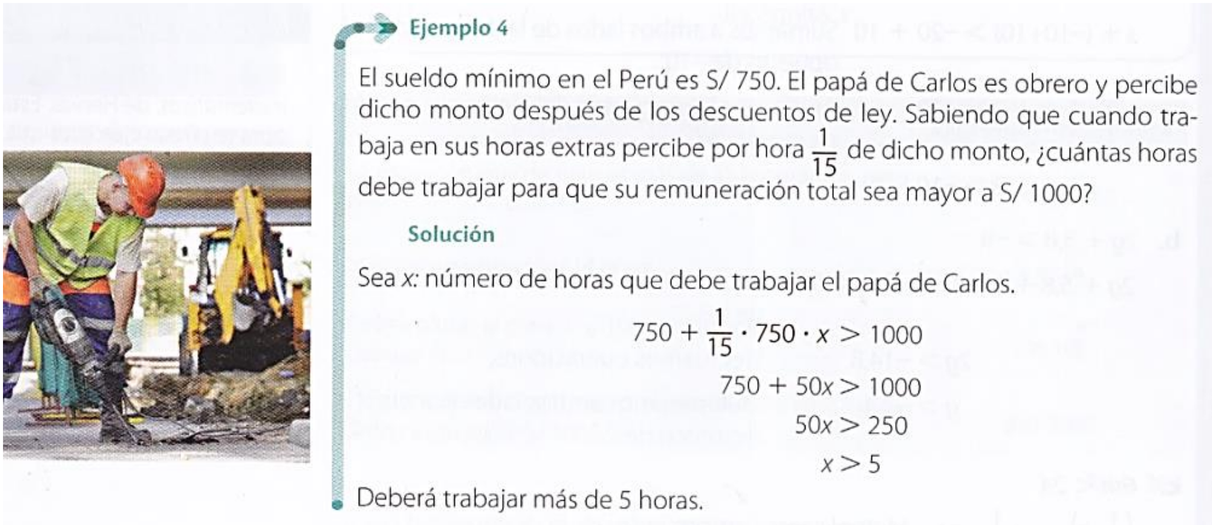
Además, se pone en evidencia el uso de propiedades de mayor complejidad para el estudiante.

- **Tarea 15**

La situación a presentar también tiene un carácter extramatemático, pues nos muestra un panorama cotidiano, referido al sueldo mínimo en el Perú y al precio de las horas extras que se trabajan para adquirir un monto adicional al sueldo mínimo. Esta situación es muy real en nuestro contexto. Sin embargo, cabe precisar que la información está basada en años anteriores, pues para el 2020, el sueldo mínimo ha subido a S/. 930.0 mensual.

Figura 24

Tarea 15: Situación resuelta a partir del planteamiento de una inecuación



Ejemplo 4

El sueldo mínimo en el Perú es S/ 750. El papá de Carlos es obrero y percibe dicho monto después de los descuentos de ley. Sabiendo que cuando trabaja en sus horas extras percibe por hora $\frac{1}{15}$ de dicho monto, ¿cuántas horas debe trabajar para que su remuneración total sea mayor a S/ 1000?

Solución

Sea *x*: número de horas que debe trabajar el papá de Carlos.

$$750 + \frac{1}{15} \cdot 750 \cdot x > 1000$$
$$750 + 50x > 1000$$
$$50x > 250$$
$$x > 5$$

Deberá trabajar más de 5 horas.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.96

Tabla 22

Análisis de tarea 15 del libro de texto Matemática 1

Lenguaje
Verbal: sea x, más de Simbólico: 5, 50, 250, 750, 1000, $\frac{1}{15}$, x, +, ., >
Definiciones
Inecuación, fracciones, números racionales
Procedimientos
Asignar una variable al número de horas que se debe trabajar. Plantear la inecuación. Simplificar la multiplicación: $\frac{1}{15}.\ 750$ Operar con los términos independientes en el segundo miembro. Despejar la variable x Hallar el conjunto solución o dar respuesta a la pregunta planteada.
Propiedades
Propiedad de clausura de la multiplicación y división. Si el minuendo es mayor que el sustraendo, la diferencia es positiva.
Argumentos
Presenta un razonamiento deductivo, desde el momento de asignar una variable al dato que se desea conocer para, posteriormente completar una expresión general equivalente a una inecuación, y poder, de esta manera conocer el o los posibles valores del dato desconocido.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

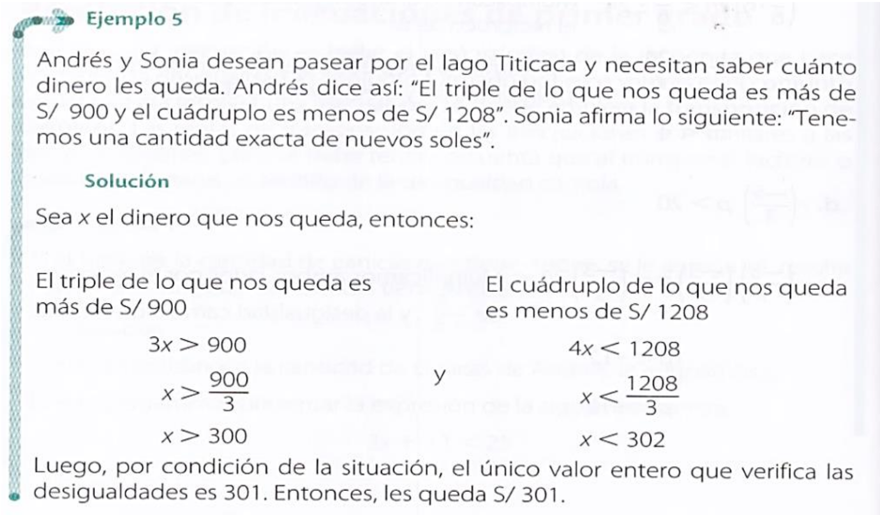
Se asigna un nivel intermedio de algebrización, al igual que las situaciones anteriores, por la presencia y uso de variables en el planteamiento del problema y por el uso de propiedades que abarcan un campo más amplio en el conjunto de los números racionales.

- **Tarea 16**

La situación a presentar es intramatemático, por la naturaleza de la relación entre sus elementos, a pasar que evidencia una aparente situación cotidiana dentro de una experiencia de viaje.

Figura 25

Tarea 16: Situación resuelta a partir del planteamiento de dos desigualdades



Ejemplo 5

Andrés y Sonia desean pasear por el lago Titicaca y necesitan saber cuánto dinero les queda. Andrés dice así: "El triple de lo que nos queda es más de S/ 900 y el cuádruplo es menos de S/ 1208". Sonia afirma lo siguiente: "Tenemos una cantidad exacta de nuevos soles".

Solución

Sea x el dinero que nos queda, entonces:

El triple de lo que nos queda es más de S/ 900

$$3x > 900$$
$$x > \frac{900}{3}$$
$$x > 300$$

y

El cuádruplo de lo que nos queda es menos de S/ 1208

$$4x < 1208$$
$$x < \frac{1208}{3}$$
$$x < 302$$

Luego, por condición de la situación, el único valor entero que verifica las desigualdades es 301. Entonces, les queda S/ 301.

Nota. Libro de texto Matemática 1, p.96

Tabla 23

Análisis de tarea 16 del libro de texto Matemática 1.

Lenguaje
Verbal: Sea x, el triple, el cuádruplo Simbólico: 3, 4, 300, 301, 302, 900, 1208, x, <, >, ___
Definiciones
Desigualdad, inecuación, N
Procedimientos
Designar una variable al dinero que se desconoce. Plantear la expresión: el triple de lo que nos queda es más de s/. 900, de manera simbólica. Resolver la expresión de desigualdad planteada. Plantear la expresión: el cuádruplo de lo que nos queda es menos de s/. 1208. Resolver la expresión de desigualdad planteada. Comparar y verificar las desigualdades para deducir el resultado.
Propiedades
Propiedad de clausura de la división. Propiedad de la transitividad de la desigualdad: Si a, b y c son números reales se cumple que: Si a < b y b < c, entonces en este caso a < c.
Argumentos
Presenta un razonamiento deductivo, pues plantea simbólicamente las dos expresiones usadas a través de una inecuación, a partir de ello, se llega a dos resultados, los cuales, se verifican y se llega a un solo conjunto solución, de naturaleza unitario, pues el número exacto que es mayor a 300 pero menor a 302 es 301.

Nota. Elaboración propia.

Nivel de algebrización 2

Se asigna un nivel intermedio a esta última situación, por la presencia de una variable en el planteamiento de dos inecuaciones, que han sido resultas y comparadas para dar a conocer el valor unitario del conjunto solución que se debía conocer, además del involucramiento de propiedades de desigualdad. Estos planteamientos han sido de carácter deductivo, utilizando además simbologías que conducen a la deducción del resultado.

Tabla 24

Resumen de los hallazgos de la unidad de inecuaciones

Tarea	Situación problema (contexto intramatemático o extramatemático)	Lenguaje (verbal, simbólico, gráfico)	Definiciones	Argumentos (razonamiento deductivo o inductivo)	Nivel de razonamiento
11	Extramatemático	Verbal Simbólico	Desigualdad	Deductivo	2
12	Intramatemático	Verbal Simbólico	Desigualdad Inecuación	Deductivo	2
13	Intramatemático	Verbal Simbólico	Inecuación	Deductivo	2
14	Extramatemático	Verbal Simbólico	Inecuación	Deductivo	2
15	Extramatemático	Verbal Simbólico	Inecuación Fracciones	Deductivo	2
16	Intramatemático	Verbal Simbólico	Desigualdad Inecuación	Deductivo	2

Nota. Elaboración propia.

De acuerdo a lo resumido en la Tabla 24 de hallazgos del capítulo de inecuaciones se afirma que, a diferencia de las tareas propuestas en ecuaciones, en este apartado se vislumbra en la misma proporción la propuesta de tareas de carácter extramatemático, es decir, se proponen situaciones cotidianas que evidencian la comprensión de la desigualdad y que conllevan al planteamiento de inecuaciones, e intramatemático, pues se evidencian situaciones propias del área. Además, se observa que todas las tareas de este capítulo promueven un razonamiento deductivo, favorable para el proceso de generalización en el estudiante y para la adquisición del nivel intermedio de algebrización.

4.2 Análisis de los desempeños propuestos por el currículo nacional

A continuación, se analiza los cuatro desempeños que corresponden a la competencia de regularidad, equivalencia y cambio de 1° de secundaria, ya que responden específicamente a los campos temáticos analizados en el apartado anterior. Posteriormente, se vincula dichos desempeños con el nivel de algebrización al que corresponden.

Tabla 25

Análisis del desempeño 1.

Desempeño	Lenguaje	Definiciones	Propiedades	Procedimientos	Argumentos
Selecciona y emplea recursos, estrategias heurísticas y procedimientos pertinentes a las condiciones del problema, como determinar términos desconocidos en un patrón gráfico o progresión aritmética; simplificar expresiones algebraicas, solucionar ecuaciones y determinar el conjunto de valores que cumplen una desigualdad usando propiedades de la igualdad y de las operaciones; y determinar valores que cumplen una relación de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes.	Expresiones algebraicas Gráfico Numérico	Patrón gráfico Progresión aritmética Ecuación Desigualdad Proporcionalidad directa e inversa.	Propiedades de la igualdad y de las operaciones	Empleo de recursos y estrategias heurísticas. Determinar términos desconocidos Simplificar expresiones Determinar valores que cumplen una relación.	Razonamiento inductivo Situaciones intramatemá-ticas

Nota. Elaboración propia.

Este primer desempeño se vincula con un nivel intermedio de algebrización. Si bien es cierto, no se explicitan los objetos intensivos en su planteamiento, se puede deducir que, al hablar de simplificación de expresiones algebraicas y de la solución de ecuaciones, se está haciendo uso de estos objetos o, como comúnmente se conocen, variables. Otro punto para vincular a este nivel son las propiedades que se evidencian, como las de igualdad, que van más allá de las operaciones aritméticas. Además, se está proponiendo un razonamiento inductivo al hablar del uso de estrategias heurísticas para dar solución a los problemas, así también, se puede hablar de un razonamiento deductivo, cuando se refiere al uso de procedimientos pertinentes a las condiciones del problema. Por otro lado, este desempeño se vincula con el estándar de contenido propuesto por la NCTM, que se refiere al uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

Tabla 26

Análisis del desempeño 2.

Desempeño	Lenguaje	Definiciones	Propiedades	Procedimientos	Argumentos
Plantea afirmaciones sobre las propiedades de igualdad que sustentan la simplificación de ambos miembros de una ecuación. Las justifica usando ejemplos y sus conocimientos matemáticos. Reconoce errores en sus justificaciones o en las de otros, y las corrige.	Verbal Simbólico	Ecuación lineal	Propiedades de igualdad	Plantear afirmaciones Justificar con uso de ejemplos y conocimientos matemáticos Reconocer errores	Razonamiento inductivo: ensayo - error

Nota. Elaboración propia.

A este segundo desempeño se le asigna también un nivel intermedio de algebrización, por el lenguaje simbólico que se manifiesta al hablar de ecuaciones y sus respectivas propiedades que las caracterizan. Proponiendo también, un razonamiento inductivo, pues plantea que el estudiante sea capaz de lograr justificar sus hipótesis a través de ejemplos, valiéndose de ensayo – error, para afirmar o corregir lo planteado, utilizando conocimientos matemáticos (estos no son especificados, pues cabe la posibilidad de tratarse de conocimientos aritméticos). Además, al igual que el desempeño anterior, este se vincula al estándar de contenido a cerca del uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

Tabla 27

Análisis del desempeño 3.

Desempeño	Lenguaje	Definiciones	Propiedades	Procedimientos	Argumentos
Plantea afirmaciones sobre las condiciones para que dos ecuaciones sean equivalentes o exista una solución posible. Las justifica usando ejemplos y sus conocimientos matemáticos. Reconoce errores en sus justificaciones o en las de otros, y las corrige.	Verbal Simbólico	Ecuaciones equivalentes	No se evidencian de manera explícita.	Plantear afirmaciones Justificar usando ejemplos o conocimientos matemáticos. Reconocer errores.	Razonamiento inductivo

Nota. Elaboración propia.

El desempeño 3, se puede vincular, en un principio, a un nivel incipiente de algebrización, pues se refiere a la premisa de solo plantear afirmaciones, justificando con ejemplos y conocimientos matemáticos (que pueden solo ser conocimientos aritméticos), además de no precisar de manera explícita las propiedades que se utilizan. Sin embargo, si hablamos de definiciones presentes en este desempeño, encontramos a las ecuaciones. Y éstas, por naturaleza tienen al menos presencia de un objeto intensivo o variable, que hace que también se pueda asignar un nivel intermedio de algebrización. Con lo afirmado, se relaciona también con el estándar de contenido propuesto por la NCTM sobre representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos, sobre todo para reconocer y generar formas equivalentes para expresiones algebraicas simples y resolver ecuaciones lineales.

Tabla 28

Análisis del desempeño 4.

Desempeño	**Lenguaje**	**Definiciones**	**Propiedades**	**Procedimientos**	**Argumentos**
Establece relaciones entre datos, regularidades, valores desconocidos, o relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas (modelo) que incluyen la regla de formación de progresiones aritméticas con números enteros, a ecuaciones lineales (ax + b = cx + d, a y c ϵ Z), a desigualdades (x > a o x < b), a funciones lineales, a proporcionalidad directa o a gráficos cartesianos.	Verbal Simbólico Algebraico Gráfico	Números enteros. Progresiones aritméticas. Ecuaciones lineales. Desigualdades. Funciones lineales. Proporcionalidad directa.	No se evidencian de manera explícita.	Establecer relaciones Transformar esas relaciones a expresiones algebraicas	Razonamiento inductivo y deductivo

Nota. Elaboración propia.

Asignamos un nivel intermedio de algebrización por la presencia explícita de objetos intensivos en el planteamiento, evidenciando un lenguaje algebraico mayor a los desempeños anteriores. Además, se puede afirmar el uso de propiedades de igualdad, de desigualdad (aunque no se manifiestan), que implican un cierto grado de complejidad para el pensamiento del estudiante. Por otro lado, se encuentra procedimientos de mayor nivel como el establecimiento de relaciones entre diversas temáticas para transformarlas a expresiones algebraicas, dando certeza de este nivel intermedio de algebrización asignado. Por último, con lo afirmado, se puede vincular al estándar de contenido de la NCTM que afirma lo siguiente: explora relaciones entre expresiones simbólicas.

Tabla 29

Resumen de los hallazgos en los desempeños.

Desempeño	**Lenguaje (Verbal, Simbólico, Algebraico, Gráfico)**	**Definiciones**	**Argumentos (razonamiento deductivo, inductivo)**	**Nivel de algebrización**
1	Simbólico Algebraico Gráfico Numérico	Patrón gráfico Progresión Ecuación Desigualdad Proporcionalidad	Inductivo	2
2	Verbal Simbólico	Ecuación lineal	Inductivo: ensayo-error	2
3	Verbal Simbólico	Ecuaciones equivalentes	Inductivo	1
4	Verbal Simbólico Gráfico	Progresiones Ecuaciones lineales Desigualdad Proporcionalidad Función lineal	Inductivo Deductivo	2

Nota. Elaboración propia.

De acuerdo a los datos organizados en la Tabla 30, se puede apreciar que la mayoría de los desempeños promueven un nivel intermedio de algebrización, resultado que reafirma el análisis de las tareas propuestas en los capítulos de ecuaciones e inecuaciones. Así también, hay concordancia con el razonamiento inductivo y deductivo propuesto en cada uno de los desempeños, con respecto a las definiciones o tópicos desarrollados en las tareas analizadas.

4.3 Síntesis del análisis realizado a las tareas propuestas en el libro de texto y a los desempeños propuestos en el currículo nacional

De acuerdo al análisis de cada una de las actividades propuestas y resueltas en los capítulos de ecuaciones e inecuaciones del libro de texto de 1°de secundaria del MINEDU, se puede afirmar que gran parte de las actividades se les adjudica un nivel intermedio de algebrización, debido a la presencia explicita de los objetos intensivos, comúnmente conocidos como variables o indeterminadas. Estas variables son planteadas de una forma general que conduzca a un resultado (ecuaciones) o conjunto de resultados posibles (inecuaciones), propiciando de esta manera un razonamiento deductivo, es decir, que va desde lo general a lo específico. Los resultados se resumen a través de la siguiente tabla.

Tabla 30

Tabla resumen de las tareas analizadas.

Tarea	Unidad a la que pertenece	Nivel de algebrización asignado
Tarea 1	Ecuaciones	Nivel 1
Tarea 2	Ecuaciones	Nivel 1
Tarea 3	Ecuaciones	Nivel 2
Tarea 4	Ecuaciones	Nivel 2
Tarea 5	Ecuaciones	Nivel 2
Tarea 6	Ecuaciones	Nivel 2
Tarea 7	Ecuaciones	Nivel 2
Tarea 8	Ecuaciones	Nivel 2
Tarea 9	Ecuaciones	Nivel 2
Tarea 10	Ecuaciones	Nivel 2
Tarea 11	Inecuaciones	Nivel 2
Tarea 12	Inecuaciones	Nivel 2
Tarea 13	Inecuaciones	Nivel 2
Tarea 14	Inecuaciones	Nivel 2
Tarea 15	Inecuaciones	Nivel 2
Tarea 16	Inecuaciones	Nivel 2

Nota. Elaboración propia.

En el capítulo de ecuaciones, las dos primeras situaciones analizadas presentaron un nivel incipiente de algebrización. Esto, debido a la ausencia de manipulación de variables en sus dos planteamientos, que fueron desde la organización de datos en una tabla, hasta el uso de estos en un plano cartesiano, propiciando además el uso de recursos heurísticos para llegar a dar respuesta al planteamiento. Estas dos primeras situaciones, no solo no hacen uso de variables, sino que presentan un carácter de naturaleza aritmética. Además, presentan un contexto extramatemático, informando acerca de actividades económicas de interés en nuestro país.

Las siguientes situaciones de este capítulo presentan un nivel intermedio de algebrización, que se ha visto evidenciado desde el lenguaje verbal que presentan, con las siguientes expresiones: “plantea”, “modela la situación”, “sea” o “llamemos”, que da paso a generalizar o transformar una expresión verbal a expresión algebraica, utilizando variables, que vienen a ser los objetos intensivos, donde se confirma este nivel de algebrización. Estas generalizaciones propician el desarrollo de un razonamiento deductivo, pues, se propone una estrategia o camino que conduce a encontrar el valor del dato desconocido que representa la variable. Es importante destacar la heterogeneidad de las variables, pues es muy común ver que la variable sea siempre la letra “x”, pero, en una situación se ha dado otra letra, como “t”. Con estas representaciones, el estudiante ha de darse cuenta que el dato desconocido expresado a través de una variable puede ser cualquier letra o símbolo.

Así pues, una vez planteadas las ecuaciones, se procede a resolverlas haciendo uso de propiedades de la igualdad o equivalencia. Sin embargo, en una parte de estas resoluciones, se ve a la variable como el resultado de una operación aritmética, que bien pudo ser propuesta de la siguiente forma: 12 + 13 = ____, donde el espacio vacío ha tomado simplemente la forma de la variable. No obstante, como se ha dicho en el análisis de cada tarea, la sola presencia de un objeto intensivo, le da el carácter intermedio de algebrización a la tarea propuesta.

En el capítulo de inecuaciones se adjudicó a todas las tareas propuestas, un nivel intermedio de algebrización. Se encontró, al igual que en el capítulo anterior, un lenguaje verbal que da pie a formar expresiones algebraicas, tales como: “sea”, “asignamos”, “podemos representar” o “esta expresión”. A partir de ello, el planteamiento algebraico ha sido resuelto haciendo uso de propiedades propias de la desigualdad, que denotan un carácter más complejo a la situación, pero, eso no quita que se siga haciendo uso de propiedades básicas de las operaciones aritméticas. Además, este planteamiento ha generado un razonamiento deductivo en todas las situaciones analizadas de este capítulo, que se han dado desde un contexto cotidiano y de información general que la población debe tener en cuenta, pero que parte del planteamiento le ha dado un carácter intramatemático a las situaciones. Asimismo, la presencia de variables y simbologías que representan un valor mínimo o máximo, marcan el nivel de algebrización adjudicado.

Por otro lado, a los cuatro desempeños analizados se les adjudicó un nivel intermedio de algebrización (tabla 29), por la temática que abordan, los procesos y las propiedades que manifiestan en algunos casos, ya que no en todos los desempeños se hacen explícitos. Así mismo, en la mayoría de estos se precisa el razonamiento inductivo, pues plantea el ensayo – error. Sin embargo, en el análisis realizado a cada una de las tareas, se evidencia un razonamiento deductivo que no da paso al tanteo o ensayo – error. Se destaca el último desempeño por tener la presencia de objetos intensivos en su planteamiento que nos permite también, vincular a un indicador propuesto por la NCTM.

Tabla 31

Tabla resumen de los desempeños analizados.

Desempeño	Nivel de algebrización adjudicado
Desempeño 1	Nivel 2
Desempeño 2	Nivel 2
Desempeño 3	Nivel 1
Desempeño 4	Nivel 2

Nota. Elaboración propia.

Con lo expuesto, las tareas analizadas y los desempeños promueven un nivel intermedio de algebrización, que permite el inicio a la adquisición de un pensamiento abstracto del estudiante. Esto se realiza a través del uso de estrategias y procedimientos que demandan mayor complejidad para el estudiante. Además, se evidencian, en ambos análisis, el uso de propiedades propias del campo temático, que facilitan el reconocimiento de los procesos pertinentes, así como los elementos que lo caracterizan: los objetos intensivos. Se resalta que la presencia de estos objetos no garantiza el adecuado uso, sin embargo, por su sola presencia y de la forma general correspondiente se le adjudica el nivel intermedio de algebrización.

Por otro lado, en cuanto al razonamiento que se utiliza, se encuentra que la mayoría de tareas presentan un razonamiento deductivo. Sin embargo, si se recurre al análisis de los desempeños, se puede notar que sus planteamientos denotan un razonamiento no sólo deductivo, sino también el razonamiento inductivo. Lo último se afirma con la presencia, en gran parte de los desempeños, de planteamientos de ensayo - error para corregir o afirmar una hipótesis. Esto conlleva a un razonamiento inductivo, razonamiento que se ve escasamente desarrollado en las tareas analizadas.

Con lo expuesto y considerando la naturaleza de los resultados, se afirma que los campos temáticos considerados en la investigación, y, por ende, vinculados con la competencia de regularidad, equivalencia y cambio, así como sus respectivos desempeños, muestran una correspondencia en cuanto al nivel de algebrización promovido. Se resalta, además, que según el modelo RAE, el nivel 2 corresponde a un nivel de educación primaria. Sin embargo, según lo señalado, este nivel se está proponiendo en los inicios de la educación secundaria de la Educación Básica Regular peruana. Esto significa que los lineamientos educativos de la educación peruana, aun no se ponen a la vanguardia de las corrientes educativas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico desde los inicios de la etapa escolar, tales como el Early algebra, que se presentó en los inicios de esta investigación. A continuación, a través de la Tabla 32 se organiza y relaciona las tareas analizadas con el desempeño y nivel de algebrización correspondiente, permitiendo ver de manera general los resultados obtenidos y afirmando las concordancias entre estos tres apartados.

Tabla 32

Relación entre tarea, desempeño y nivel de algebrización correspondiente.

Tarea	Desempeño	Nivel de algebrización
1	1	1
2	1	1
3	3	1
4	3	1
5	1	2
6	4	2
7	2	2
8	2	2
9	4	2
10	4	2
11	4	2
12	4	2
13	4	2
14	4	2
15	4	2
16	4	2

Nota. Elaboración propia.

Conclusiones

Primera. La puesta en marcha de esta investigación surgió a partir de la problemática de la enseñanza – aprendizaje del álgebra, vinculada al uso del libro de texto en este proceso educativo. En el inicio de este estudio, basado en la revisión de la bibliografía, se afirmó que el álgebra es entendida como una aritmética generalizada, pues en su enseñanza se extienden las nociones aritméticas, tal como funcionan en esta área de la matemática. Un hecho visible sobre lo dicho es la práctica común de operaciones básicas en lugar de procesos que conlleven a una generalidad como proceso propio del álgebra. Si bien, tomar en cuenta el conocimiento aritmético no está mal, limita desarrollar un pensamiento más abstracto en el estudiante, es decir, el pensamiento algebraico. Con el desarrollo de esta investigación, lo afirmado se fue reafirmando.

Segunda. De acuerdo al objetivo de esta investigación, el nivel de algebrización promovido en las tareas propuestas en el libro de texto de primero de secundaria, distribuido en las escuelas públicas del Perú, y de los desempeños propuestos en el Currículo Nacional (2016), es el nivel intermedio de algebrización. Este, según el modelo RAE forma parte de los asignados para la Educación primaria. Además, de acuerdo con las soluciones propuestas para las tareas del libro de texto, a la mayoría se le ha asignado este nivel por el planteamiento de la ecuación o inecuación, ya que se hace uso de una variable o indeterminada. Sin embargo, en el desarrollo de la tarea, esta variable es considerada como un dato numérico específico que puede ser el resultado de una manipulación de operaciones aritméticas básicas. Así pues, no se evidencian los procesos de generalización, propios del álgebra.

Tercera. Con lo dicho en el párrafo anterior, el sistema educativo se encuentra ante una precariedad con respecto al desarrollo del pensamiento algebraico. En esto, se puede encontrar una causa del bajo nivel en el que se ubica el Perú frente a los resultados de la prueba PISA, pues se está promoviendo mínimamente una de las competencias claves del área de matemática. Téngase en cuenta que el álgebra no es un área aislada, sino de esta dependen campos como la geometría, trigonometría, estadística, entre otras.

Cuarta. Asimismo, de acuerdo con el análisis realizado a través de la técnica de análisis de contenido se pudo determinar que, tanto en las actividades propuestas en el capítulo de ecuaciones como inecuaciones, se promueve el empleo de objetos intensivos que conllevan a asignar un nivel intermedio. El análisis epistémico realizado tomó en cuenta los aspectos de situación- problema, lenguaje, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos. Dichos aspectos fueron clave para asignar el nivel de algebrización promovido, pues a través de estos se ha desglosado cada actividad para luego ser analizada. En el capítulo de ecuaciones, las dos primeras actividades se vincularon con un nivel incipiente, el resto se le asignó un nivel intermedio, aunque no operen con la variable en sí.

Quinta. En el caso del capítulo de inecuaciones, todas las actividades están vinculadas a un nivel intermedio, resaltando también que las tareas analizadas de este capítulo son situaciones extra matemáticas, a diferencia del capítulo anterior donde la mayoría son intramatemáticas; siendo esta característica favorable en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, pues lo que se requiere es que el estudiante comprenda la utilidad de los aprendizajes de esta área y los familiarice con situaciones reales.

Sexta. En relación al análisis realizado a los desempeños propuestos en el Currículo Nacional, vinculados con la competencia de Regularidad, equivalencia y cambio se afirma que guardan estrecha relación con las tareas de los capítulos analizados, pues también se encontró que promueven el nivel intermedio de algebrización. Se precisa que para dar con este resultado también se utilizó una rejilla de análisis de contenido con los objetos empleados para el análisis de tareas, a excepción del objeto de situaciones – problemas, ya que no se trata de tareas sino de desempeños de aprendizaje. De esta forma se ha descrito el nivel de algebrización promovido en la muestra seleccionada de la investigación.

Reflexiones

Primera. La enseñanza – aprendizaje del álgebra envuelve diversos factores de los cuales, para el estudio ha sido elegido el aporte de los libros de texto. Por lo tanto, se dejan abiertas nuevas cuestiones: ¿Cómo los docentes reformulan las tareas propuestas en los textos escolares para promover niveles de algebrización acorde con el nivel de educación que tiene a cargo? ¿Cómo se está desarrollando el álgebra en la educación primaria del estado peruano? ¿Los docentes peruanos cuentan con las competencias necesarias para promover el álgebra temprana desde los primeros años escolares?

Segunda. Las cuestiones abiertas invitan a realizar una reflexión a los docentes, pues son eje fundamental para promover el pensamiento algebraico en los estudiantes. Es cierto que existen recursos como el libro de texto, pero estos dependen de las acciones que propone al docente para integrarlos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así pues, pensar la integración de recursos y la implementación de actividades debe tener como propósito promover el desarrollo de esquemas globales de pensamiento. El álgebra no debería ser un área temida en las escuelas por ello, es necesario que desde los organismos rectores, apoyados en el conocimiento y experiencia de los docentes, se piense en la promoción de capacidades matemáticas que contribuyan al desarrollo temprano del pensamiento algebraico.

UNIVERSITAS · STUDIORUM · PIURENSIS

Lista de referencias

Aké, L. (2010). *Una aproximación al razonamiento algebraico elemental desde el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático* [trabajo fin de máster]. Universidad de Granada. https://bit.ly/3bfNFmK

Aké, L. (2017). El modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis de las tareas matemáticas de Educación Primaria. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone, & M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/45415

Aké, L.P, & Godino, J.D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación matemática, 30(2), 171-201.* https://doi.org/10.24844/em3002.07

Aké, L., Godino, J., Gonzato, M., & Wilhelmi, M.R. (2013). Protoc-algebraic levels of mathematical thinking. En A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Matematics Education. 2*, (pp. 1-8). PME. https://bit.ly/2SKVz1j

Bosch, M., García, F.J., Gascón, J., & Ruíz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18 (2)*, 37-74. http://www.revista-educacion-matematica.com/revista/vol18-2/

Bosch, M., & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de los Didáctico en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. Gonzáles, MT. Gonzáles & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). SEIEM. https://bit.ly/3y43BCl

Callejo, L., & Rojas, F. (2016). La transición de la aritmética al álgebra. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 73*, 4-6. https://www.grao.com/es/producto/la-transicion-de-la-aritmetica-al-algebra

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., & Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria.* Síntesis.

Campos, R., & Giménez, J. (1996). Sentido aritmético y algebraico, ¿algo más?. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 9*, 23-31. https://www.grao.com/es/producto/sentido-aritmetico-y-algebraico-o-algo-mas

Cárcamo, D. (2012). *Uso de los Libros de Texto de matemática en el proceso de enseñanza: Un análisis de casos comparado* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán]. Repositorio Institucional. http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmcsb5v8

Carrillo, F., Gaita, C., & García, J. (2019). Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea estructural de números racionales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*, (pp. 85-93). CLAME.

D'Amore, D., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la Teoría Antropológica de Didáctica de la Matemática. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* *10*(2), 191-218. http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-10/numero-10-2/575-200701b

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter* [tesis doctoral]. Universidad de Utrecht. http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/886

Gascón, J., & Nicolás, P. (2019). Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática Pesquisa, 21*(4), 36-52. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p036-052

Gascón, J., Bosch, M., & Ruiz.Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XXI* (pp.17-23). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/21/ActasXXISEIEM.pdf

Godino, J. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, 2(2), 69-79. https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/cef/article/download/13731/9734

Godino, J. (2010). Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf

Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de Investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, P. M.C, F. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, (pp. 49-68). SEIEM. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M.R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, & M. Ordoñez (Eds.), *Investigacion en Educación Matemática XVI* (pp. 285-294). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/16/Actas16SEIEM.pdf

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M.R. (2014). Niveles de algebrización de la matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las ciencias, 32*(1), 199-219. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/287515

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135 [versión ampliada en español]. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J., & Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrilo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49-66). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/21/ActasXXISEIEM.pdf

Godino, J., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M.R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, 26*(42B), 483-511. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Godino, J., Font, V., & Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 131-156. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509907

Godino, J., Giacomone, B., & Batanero, C. & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M.R., Aké, L., Etchegaray, S., & Laza, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *AIEM- Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Gonzáles Morales, A. (2003). Los paradigmas de investigación en las ciencias sociales. *ISLAS*(138), 125-135. http://islas.uclv.edu.cu/index.php/islas/article/view/572

Julian, E. (2017). *Configuración epistémica e identificación de niveles de algebrización en tareas estructurales de los textos oficiales del V ciclo de educación primaria* [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional. http://hdl.handle.net/20.500.12404/9282

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws, & D. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematcs* (pp. 390-419). Macmillan Publishing Co, Inc.

Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229-240. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/51268/93013

López Noguero, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI: Revista de Educación*(4), 167-179. http://hdl.handle.net/10272/1912

Marín, A., & Lupiáñez, J. (2005). Principios y Estándares para la Educación Matemática. *SUMA*(48), 105-112. https://revistasuma.es/IMG/pdf/48/105-112.pdf

Martínez Escobar, J. D. (2014). Caracterizacón del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización [tesis de maestría, Universidad de Medellín]. Repositorio Institucional. http://hdl.handle.net/11407/299

Ministerio de Educación. (2016a). *Currículo Nacional de la Educación Básica.* http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf

Ministerio de Educación. (2016b). *Programa Curricular de Educación Secundaria.* http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

Ministerio de Educación. (2016c). Matemática 1. *Grupo Editorial Norma.*

Ministerio de Educación. (2020). *Evaluación PISA 2018. Informe Nacional de Resultados.* Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes. http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2020/10/PPT-PISA-2018_Web_vf-15-10-20.pdf

Palarea, M.M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años [tesis doctoral, Universidad de La Laguna]. Repositorio Institucional. http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21205

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática, 11*(3), 25-53. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol11/3/004Radford.pdf

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62. https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, I. Segovia, L. Rico, M. Cañadas, J. Gutierrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.), *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Comares. https://bit.ly/3f8mziM

Ricaldi, M. (2011). *Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de Secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización* [tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional. http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4716

Ruiz Munzón, N., Bosch, M., & Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *REDIMAT, 4*(2), 106-131. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2015.1386

Salazar, V. (2017). *Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en los libros de texto de matemáticas de primaria* [tesis de maestría, Universidad Autónoma de Guerrero]. Repositorio intitucional. http://ri.uagro.mx/handle/uagro/505

Socas, M. (1999). Perspectivas de Investigación en Pensamiento Algebraico. En T. Ortega (Ed.), *Investigación en Educación Matemática. III*, (261-282). SEIEM. https://bit.ly/3xXv8p0

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didácticas de las Matemáticas, 77*, 5-34. http://www.sinewton.org/numeros/

Socas, M., & Palarea, M. M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 14*, 7-24. https://bit.ly/33yrKDd

Taylor, S., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Paidós.

Vargas Jiménez, A., & Hernández Falcón, D. (2006). Los principios didácticos, guía segura del profesor. Pedagogía Universitaria, 11(3), 15-45. https://go.gale.com/ps/anonymous?id=GALE%7CA466940841&sid=googleScholar&v=2.1&it=r&linkaccess=abs&issn=16094808&p=IFME&sw=w

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria* [tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio institucional. https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2608

Wilhelmi, M.R. (2017). Didáctica del Álgebra. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.*), Investigación en Educación Matemática XXI* (pp.17-23). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/21/ActasXXISEIEM.pdf