FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Identificación de errores matemáticos vinculados a la solución de ejercicios y problemas de conjuntos y sistemas numéricos, que cometen estudiantes universitarios de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura

Tesis para optar el Título de
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria, especialidad Matemática y Física

Rosa María Benites Calle

Asesor(es):
Mgtr. Flor Manuela Hau Yon Palomino

Piura, junio de 2021

Dedicatoria

A Dios, porque cuidó de mí en todo momento, me dio fortaleza para no abandonar mis metas y puso personas valiosas en mi vida que me ayudaron y motivaron a no abandonar mis objetivos.

A mi madre quien con mucho esfuerzo, dedicación y firmeza pudo educarme y darme una oportunidad para salir adelante, quien siempre confió en mí y a quien agradeceré toda la vida.

Agradecimientos

A Dios, por brindarme fortaleza y perseverancia para no abandonar esta meta.

A mi madre Alicia, por confiar en mí y siempre estar a mi lado y darme su apoyo incondicional, y a mi hermana María Isabel por siempre alentarme en este largo camino.

A mi asesora de tesis Mgtr. Flor Hau Yon Palomino, por su tiempo y dedicación desde el inicio hasta el final del desarrollo de este trabajo de investigación.

Al Mgtr. William Reyes Cortés, por su ayuda y orientaciones brindadas en el trabajo metodológico realizado.

A mis amigos y colegas que siempre estuvieron motivándome y compartiendo sugerencias para enriquecer mi trabajo.

Resumen

La presente tesis tiene como objetivo Identificar errores matemáticos vinculados a la solución de ejercicios y problemas de conjuntos y sistemas numéricos, que cometen estudiantes universitarios de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura. Para ello primero se identificaron y describieron los errores matemáticos a evaluar en los cuatro instrumentos aplicados a los estudiantes inscritos en la asignatura de Matemática Básica, y luego se explican las razones de la aparición de éstos. Esta investigación se realiza desde el paradigma cuantitativo, es de alcance descriptivo y de diseño no experimental, pues se identifica cuál es el error matemático más frecuente en general y también considerando el contenido matemático que se aborde: Sistemas Numéricos y Conjuntos; para poder comparar los resultados e inferir presuntas causas. Los resultados obtenidos indican que los errores que los estudiantes cometen con mayor frecuencia son los que son debidos a dificultades para obtener información espacial.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

Los errores matemáticos son elementos que se manifiestan constantemente en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes que se encuentran en distintas etapas educativas (escolar y superior), sin embargo, su presencia no genera precisamente satisfacción en el estudiante, sino mucha frustración y que a su vez en muchos casos origina rechazo a la asignatura en la que se comenten los mismos.

Frente a esta situación, considerando que los errores son una constante en todos procesos de aprendizaje del ser humano y que además son una fuente desde donde se puede obtener relevante información sobre el grado en el que un estudiante se hace de un conocimiento y de una competencia; resulta necesario centrar un estudio en los errores que manifiestan cuando realizan una actividad, en este caso, la matemática; y con ello, poder intentar descubrir cuáles son aquellos factores que influyen de forma negativa en los aprendizajes de los estudiantes, reflexionar en base a ello para recién pensar y proponer alguna estrategia significativa para ellos

En este contexto, la realización de un estudio sobre los errores matemáticos que cometen estudiantes resulta conveniente para la actividad pedagógica, y es la razón por la que se propuso la presente investigación titulada: Identificación de errores matemáticos vinculados a la solución de ejercicios y problemas de conjuntos y sistemas numéricos, que cometen estudiantes universitarios de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, la cual se organizó en cuatro capítulos los cuales se exponen a continuación.

El capítulo 1: Planteamiento del estudio, expone la problemática en torno a la situación que se estudiará, también se incluye el planteamiento del problema de investigación, objetivos de la investigación, la justificación, hipótesis y antecedentes de la misma.

El capítulo 2: Marco teórico, organiza diversa literatura que empieza con el análisis de errores matemáticos desde el punto de vista pedagógico, y también la descripción de cada uno de los errores matemáticos que se abordarán.

El capítulo 3: Metodología de la investigación, describe las características del estudio, la forma en la que se organizó el recojo de información características del estudio (detallando los instrumentos utilizados) y la forma en la que se realizará el análisis de la información obtenida.

El capítulo 4: Análisis e interpretación de resultados, se expone los datos que se recogieron y el procesamiento de los mismos, los cuales se organizaron a través de tablas y gráficos en los que se consignaron los porcentajes en los que se concentraron los estudiantes que cometieron errores para posteriormente realizar la discusión correspondiente.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la investigación y algunas recomendaciones.

Capítulo 1

Planteamiento del estudio

1.1 Título del estudio

Identificación de errores matemáticos vinculados a la solución de ejercicios y problemas de conjuntos y sistemas numéricos, que cometen estudiantes universitarios de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura.

1.2 Caracterización de la problemática

El uso de operaciones numéricas es una realidad de la que las personas no son ajenas, y en cualquier momento se evidencia la necesidad de estas para poder resolver situaciones diversas. Así, la vida de toda persona está vinculada directa o indirectamente a los cálculos, y la vida universitaria tampoco escapa de esta vinculación, ya que independientemente de la especialidad o carrera elegidas esto no significará prescindir de ellos (cálculos) en su totalidad. Aún con esto, el docente percibe rechazo de gran parte de sus estudiantes hacia esta ciencia, lo cual puede surgir debido a factores relacionados a la complejidad de la asignatura en sí misma y también, por la carga emotiva que genera en el estudiante, por sentir que sus capacidades quizá son insuficientes para una materia que según piensan algunos requiere de ciertas condiciones intelectuales, las cuales hacen que los estudiantes presenten dificultades o deficiencias en el aprendizaje de la matemática, en este sentido Hidalgo et. al (2004) explican que:

> El rechazo a las matemáticas es la consecuencia de la influencia sobre el alumno de variables de naturaleza cognitiva y emocional, muy frecuentemente entrelazadas, que nos recuerda la idea expuesta en Goleman de las dos mentes. (…) De modo que estaríamos hablando de un mismo tema, pero a dos niveles: la dificultad objetiva de las Matemáticas como disciplina y la manera subjetiva con que el alumno afronta esta dificultad. (p. 92)

Desde la práctica docente se observa que los contenidos de la asignatura de matemática se caracterizan por el alto grado de abstracción que requieren los estudiantes para poder comprenderlos y poder hacer uso de ellos, por esta razón desde el proceso de enseñanza de las matemáticas el docente debe comprender de qué forma el aprendiz construye los conceptos y estructuras mentales para considerarlos en el proceso de enseñanza de la asignatura antes mencionada. Al respecto Skemp (1993) refiere que, “el estudio de las estructuras mismas es una parte importante de las matemáticas; y el estudio de las maneras en que se construyen y funcionan, se encuentra en el verdadero núcleo de la psicología del aprendizaje de las matemáticas” (p. 43), sin embargo, dado que las estructuras mentales formadas y los procesos intelectuales involucrados en los aprendizajes no son elementos tangibles, se hace necesario identificar una forma que permita el reconocimiento de deficiencias que tienen los estudiantes en su proceso de aprendizaje de las matemáticas; de hecho, Del Puerto, et. al (2004) proponen que "solo es posible conjeturar su concurrencia a través de manifestaciones indirectas. Los errores cometidos por los alumnos, la regularidad con que estos aparecen" (p. 4).

La figura del error se considera como un elemento presente en todo proceso de aprendizaje, de hecho, los errores cometidos por los estudiantes en el ámbito de la ciencia de las matemáticas, pueden ser entendidos como un indicador de ciertas deficiencias y dificultades que se manifiestan cuando el estudiante se enfrenta a una situación desequilibrante, por lo que la identificación y cuantificación de éstos, para el docente de la asignatura, resulta necesario. Del Puerto et. al (2004) aseguran también que:

> El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; por otro lado, constituye una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de retroalimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de mejorar los resultados. (p. 4)

Tomando como referencia el planteamiento anterior, el presente trabajo pretende abordar el estudio de errores matemáticos, identificando aquellos que son cometidos con mayor frecuencia cuando los estudiantes resuelven tareas matemáticas respecto a unos determinados contenidos y relacionarlos a las causas generadoras de éstos. Los datos recogidos servirán de referencia, para los docentes de la asignatura, en cuanto a los factores desencadenantes de estos errores, con una proyección para la formulación de propuestas de mejora en relación a las estrategias de enseñanza.

1.3 Planteamiento del problema de investigación

Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje el docente puede observar cómo los estudiantes van respondiendo a los contenidos y competencias que se van trabajando desde el área, es decir, evalúa el grado de progreso de sus estudiantes para identificar los logros obtenidos y también aquellos objetivos planteados que no fueron alcanzados, principalmente es en esta segunda situación donde se deberá realizar un análisis más exhaustivo para que facilite la detección de falencias y dificultades que pueden generar desaliento en los estudiantes cuando están en un difícil proceso de aprendizaje de matemática, de hecho, Godino et. al (2004) sostienen que el mayor o menor éxito que tengan los estudiantes frente a una tarea en general, es un indicador de la presencia o no de dificultades que esta actividad representa para ellos, e incluso establece una relación entre ambas variables: dificultad y éxito, es decir, un alto índice de dificultades supondría poco éxito en el desarrollo de actividades.

El aprendizaje matemático en la Educación Básica Regular en Perú, de acuerdo con los reportes difundidos por la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) del Ministerio de Educación y la Prueba del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) pone de manifiesto la presencia de diversas dificultades que tienen los estudiantes, lo cual empieza en la etapa de escolaridad y continúa en la etapa universitaria, que es precisamente el espacio en donde los estudiantes se enfrentan a mayores niveles de exigencia en cuanto al aprendizaje matemático y que les cuesta superar porque la debilidad de sus prerrequisitos hace que cometan errores matemáticos. Se distingue que los estudiantes utilizan procedimientos imperfectos y poseen concepciones inadecuadas, y a veces inventan sus propios procedimientos (Rico, 1998).

En tal sentido, es necesario tomar en cuenta dentro de la práctica docente dos aspectos, el primero de ellos hace referencia a la importancia de conocer qué dificultades tienen los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, y el segundo, sobre la relación de éstas con los errores comunes cometidos por ellos. En tal sentido, Del Puerto et. al (2004), aseguran que los errores cometidos, "son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje" (p.3). A partir de ello se plantea la siguiente cuestión, ¿Cuáles son los errores matemáticos más comunes en la solución de ejercicios y problemas sobre conjuntos y sistemas numéricos, cometidos por los estudiantes matriculados en la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura?

1.4 Objetivos de la investigación

1.4.1 *Objetivo general*

a) Identificar los errores matemáticos más comunes en la solución de ejercicios y problemas sobre conjuntos y sistemas numéricos que cometen estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura.

1.4.2 *Objetivos específicos*

a) Definir la clasificación de errores a estudiar en las evaluaciones que se aplicaron a los estudiantes, teniendo en cuenta las categorizaciones propuestas por Radatz (1979).
b) Medir la frecuencia e identificar las características de los errores que cometen los estudiantes debidos a dificultades en el lenguaje.
c) Medir la frecuencia e identificar las características de los errores que cometen los estudiantes debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento.
d) Medir la frecuencia e identificar las características de los errores que cometen los estudiantes debidos a dificultades para obtener información espacial.
e) Medir la frecuencia e identificar las características de los errores que cometen los estudiantes debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.

1.5 Justificación de la investigación

La matemática es una ciencia incluida en toda la Educación Básica Regular y también en la formación universitaria de los estudiantes, aún si la especialidad elegida no utiliza las operaciones matemáticas como herramienta básica de trabajo. La razón de la presencia de la matemática en la formación académica de estudiantes responde a la influencia que esta tiene en la formación y desarrollo del pensamiento abstracto de las personas, respecto a ello Mera y Peña (2011) aseguran que:

> Aporta conocimientos que le permiten a los aprendices integrarse en el proceso de tecnificación social, mediante el razonamiento, la rigurosidad de pensamiento y una actitud crítica que le ayudarán a enfrentarse a una sociedad del conocimiento con énfasis en la tecnología y en el progreso científico continuos. (p. 313)

Numerosos estudios califican a la matemática como una "asignatura compleja" lo cual es debido a la naturaleza del contenido y a los procesos intelectuales que deben realizar los estudiantes (abstracción y generalización), que preparan el camino en la construcción del pensamiento lógico, Garriga (2011) hace referencia a ello cuando afirma:

> Una de las características esenciales de la matemática es la construcción y uso de un lenguaje específico, que se caracteriza por el uso de una simbología propia y, por una precisión y rigor en la expresión que le permite contribuir a la formulación y resolución de problemas en los más diversos ámbitos científicos y cotidianos. En consecuencia, la materia de las matemáticas posibilita la comunicación y la construcción del pensamiento lógico y, por tanto, contribuye de forma muy importante a la consecución de la comprensión lingüística entre los alumnos de la Educación Secundaria Obligatoria. (p. 12)

Desde el punto de vista pedagógico, la enseñanza de las matemáticas adquiere importancia en el proceso formativo de los estudiantes, pues permite la ampliación de los esquemas cognitivos a través de procesos de transferencia, incrementando el grado de competitividad en la solución de todo tipo de ejercicios, problemas y situaciones desequilibrantes. Sin embargo, al parecer estas implicancias podrían no resultar atractivas para ellos, ya que perciben a la matemática como una ciencia con contenidos complejos y no apta para ser comprendida por cualquier persona; por lo que cuando intentan dar respuesta a situaciones problemáticas (que suponen la realización de procesos cognitivos), y principalmente cuando no lo logran por diferentes circunstancias, ponen en evidencia la necesidad que es para el docente anticiparse y prever la presencia de errores para así evitar hacer juicios negativos y poder comprender que información significativa se puede obtener de ellos, en este sentido De La Torre (2004) entiende al error como: "distorsión, inadecuación o improcedencia en un proceso, donde quiera que haya *proceso* es posible el error" (p. 18), e incluso propone que aunque no se espere la presencia de éstos en las actividades que se realizan, tampoco se debe condenar su presencia: "el error no es una meta que haya que perseguirse, pero tampoco es un resultado que haya que condenarse sin antes examinar su proceso. Ha de entenderse a la luz de los procesos cognitivos y el desarrollo del pensamiento humano" (p. 53). Por lo tanto, la presencia de errores y la frecuencia con la que aparecen en un contexto matemático, constituirían indicadores que revelan el estado real de conocimiento que tienen los estudiantes sobre el contenido matemático y el dominio de determinadas habilidades cognitivas y matemáticas, de hecho, también autores como Del Puerto et. al (2004) manifiestan que:

> Los errores cometidos por los alumnos, la regularidad con que éstos aparecen, los patrones comunes a que obedecen, son algunos de los elementos que permiten hacer inferencias acerca de estos procesos mentales, y acerca de las estructuras en que se van organizando los conocimientos. (pp. 4-5)

A partir de lo anterior, se puede concluir que en la medida en que el docente pueda identificar los errores y detecte la fuente generadora de los mismos, esto se convierte en una herramienta eficaz para mejorar su práctica pedagógica, por lo que el tratamiento que se le debe dar al error es de referente para tomarlo como punto de partida en la evaluación de las actividades cognitivas que realizan los estudiantes durante su paso por la Educación Básica Regular y la universitaria. Incluso, Viennot, citado en Gil y Guzmán (1993), asegura que el error no es solo un producto de simples olvidos o equivocaciones momentáneas, sino un elemento constante que limitaría el aprendizaje actual y futuro de los estudiantes, el cual podría generarse desde la Educación Básica, por lo que cuando ellos egresan de ella lo hacen sin comprender el significado de conceptos científicos básicos y con esquemas mentales equivocados y persistentes, por ello, conocer la forma en la que se materializa las deficiencias existentes en el aprendizaje de las matemáticas resulta imprescindible para el desarrollo de la práctica docente y probablemente sea el primer paso en las iniciativas que se puedan proponer para obtener aprendizajes significativos en la ciencia de las matemáticas. Esta forma de percibir al error está relacionada directamente con el modelo pedagógico con el que se trabaje; en esta línea, Astolfi (2004) considera que el error "es un buen indicador del modelo pedagógico usado en clase" (p.112). Estos modelos pedagógicos han ido cambiando con el tiempo, de hecho, las primeras concepciones que se tenían del error en el aprendizaje eran de matiz negativo, por lo que este era visto como un fallo y por lo tanto debía ser sancionado, este modelo pedagógico corresponde al "modelo transmisivo". Otra concepción de error fue basada en el "modelo comportamentalista", que propone evitar el error mediante el condicionamiento "operativo", por lo que se trata de descomponer la complejidad del contenido aplicando refuerzos (o recompensas) por cada adquisición de conocimientos, es decir, la actividad del estudiante se guía paso a paso, para llegar al comportamiento esperado. Finalmente, en la actualidad el modelo que se promueve es el constructivista, donde la presencia del error no es mal vista y es valorado positivamente (Astolfi, 2004), esto debido a que "en los modelos constructivistas los errores no se consideran fallas condenables ni fallos de programa lamentables: son síntomas interesantes de obstáculos con los que se enfrenta el pensamiento de los alumnos" (p. 113), incluso, se percibe al error como "el indicador y analizador de los procesos intelectuales puestos en juego" (p. 114).

A partir de lo anteriormente mencionado, se destaca la importancia de determinar bajo qué modelo pedagógico se estudiará el error en esta investigación, y este pueda ser abordado de una forma más conveniente y oportuna. Así, el desarrollo de este estudio está basado en el modelo pedagógico constructivista, pues se trata de mostrar al error como una posibilidad válida en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos ya no como un fallo del proceso de enseñanza, sino como una fuente de información, un indicador, sobre las operaciones mentales realizadas por los estudiantes. Sócrates reconocía que el errar es una posibilidad en la búsqueda de la verdad, y destaca que los errores cometidos deben ser examinados y corregidos para poder obtener un auténtico conocimiento (Del Puerto et al., 2004); incluso, Godino et al. (2004) afirman que "todas las teorías sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, determinar sus causas y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información" (p. 73), se trata de reconocerlo como una fuente inagotable de información cuando se construye el aprendizaje de las matemáticas. Del Puerto et al. (2007) señalan que los errores cometidos por los estudiantes en matemática son: "esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje, y se acepta unánimemente que es necesaria la detección y análisis de los mismos, y su utilización positiva en una suerte de realimentación del proceso educativo" (p. 2), entonces, el reconocimiento de la presencia de errores y el análisis de estos, previstos para esta investigación será una herramienta que permita revelar al docente, el grado de conocimiento y dominio de contenidos en la resolución de tareas matemáticas, el grado de dificultad que estas representan para los estudiantes y también, aquellos factores adicionales que influyen y condicionan el aprendizaje.

Así, la presente investigación es conveniente, relevante, pertinente y significativa.

La investigación es conveniente porque se ha detectado que los estudiantes universitarios cometen errores cuando resuelven ejercicios y problemas matemáticos, por lo que al ser una problemática constante en el proceso de aprendizaje matemático se hace necesario su identificación, cuantificación y caracterización, pues esto permitirá tener el conocimiento de aquellos factores que interfieren en su aprendizaje, los mismos que se deben tomar como referencia para futuras propuestas que permitan corregir y superar los mismos.

También es relevante porque el aprendizaje matemático constituye una necesidad ineludible en la formación de una persona, debido que permite el desarrollo del pensamiento lógico, el cual es fundamental según lo explicado por Jaramillo y Puga (2016):

> Se puede anotar que los procesos de pensamiento lógico abstracto, adecuadamente fomentados y aplicados, permiten a los educandos/as conseguir que piensen, razonen, analicen y argumenten de manera lógica, crítica y creativa cualquier conocimiento, los mismos que se convierten en insumos potenciales para aportar en la solución de problemas. (p. 39)

Frente a las positivas implicancias del desarrollo del pensamiento lógico en los educandos a través de la enseñanza de contenidos matemáticos, es que se hace necesario promover en los estudiantes, una concepción más positiva de la asignatura y que se puedan reconocer a los errores (que aparezcan en su proceso de aprendizaje) como fuentes de aprendizaje, de las que se puede tomar información para usarla como punto de partida y revisar aquello en lo que hubo confusión, corregir errores y continuar con el desarrollo de competencias importantes para su formación personal y profesional.

Este estudio es pertinente, pues el docente el docente requiere identificar el grado de logro de los objetivos propuestos desde el área, lo cual se abordaría reconociendo el valor del error en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes y a partir de ello darle el tratamiento adecuado.

Un estudio de este tipo resultaría significativo para el docente de la asignatura de matemáticas porque le muestra los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas, a partir de lo cual, de acuerdo a los datos recogidos, la práctica docente se convertiría en un escenario desde donde se pueden proponer estrategias en las que el error sea tomado como un punto referencial para la reorganización de la forma en la que se abordarán los contenidos propuestos en la asignatura. Por lo tanto, la investigación propuesta pretende analizar los errores cometidos por los estudiantes matriculados en la asignatura de Matemática Básica, desde el punto de vista constructivista, considerando la clasificación propuesta por Radatz. La investigación denominada: "Identificación de errores matemáticos vinculados a la solución de ejercicios y problemas de conjuntos y sistemas numéricos que cometen estudiantes universitarios de la facultad de Ciencias de la Educación" se aborda en el marco del desarrollo de la asignatura de Matemática Básica, curso general y obligatorio para estudiantes de primer año de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, desde donde se realizó el estudio, para hacer el diagnóstico. Los resultados serán de utilidad para proyectar posteriores intervenciones didácticas que conlleven a superar la problemática identificada, logrando que la Facultad mejore su servicio académico en formación docente.

1.6 Hipótesis de investigación

Los errores matemáticos cometidos con mayor frecuencia en los estudiantes de educación universitaria son los relacionados a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento y al deficiente dominio de habilidades, hecho y conceptos matemáticos.

1.7 Antecedentes de investigación

1.7.1 *Antecedentes internacionales*

- Fernández Lázaro Ángel (2013) realizó el estudio "Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas en ESO y bachillerato. Análisis de un caso práctico" el cual corresponde a su trabajo de fin de máster, cuyo objetivo fue identificar dificultades y errores cometidos por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato[1] en el aprendizaje de las matemáticas, con el objetivo de tratar de explicar posibles causas y proponer actividades que ayuden a disminuir la presencia de dificultades en los aprendizajes de los estudiantes. Para la realización del estudio el autor recabó la opinión de docentes del área de matemática de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato de tres centros de la comunidad de Madrid, mediante un cuestionario semicerrado diseñado para tal fin, asimismo, consideró su propia experiencia en el 1° Bachillerato para identificar errores y dificultades en el aprendizaje de derivadas. Toda la información fue recogida mediante una prueba escrita objetiva con la que se analizó y clasificó los errores originados por determinadas dificultades generadoras de estos.

Este autor aborda las dificultades de acuerdo con las percepciones recogidas de los docentes (de ESO y Bachillerato) en la enseñanza de la matemática, de las que hace las siguientes consideraciones: dificultades que profesores y estudiantes encuentran en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dificultades relacionadas con los contenidos de la materia, relacionadas con la metodología empleada, las relacionadas al tratamiento que le dan al error, a las cualidades requeridas para ser un buen estudiante de matemática y la imagen de la asignatura que, más motiva a los estudiantes. Por otro lado, también detectó en sus estudiantes ciertas dificultades cuando aprendían el tema de derivadas: debido a conocimientos previos insuficientes, dificultades por fallos de la atención y memoria, dificultades relacionadas con actitudes afectivas hacia las matemáticas, falta de sentido o incomprensión de conceptos, dificultad para aplicar algoritmos y resolver procesos de cálculo y el lenguaje simbólico matemático.

Entre sus principales conclusiones señala que un 29% considera que las dificultades en la enseñanza de las matemáticas se producen por las diversas capacidades y ritmos de aprendizaje en los estudiantes. En cuanto a las dificultades relacionadas al contenido de la materia, un 31% considera que el planteamiento y resolución de problemas constituyen una gran dificultad para los estudiantes, debido a dos particularidades de la matemática: "por un lado su papel de modelización y de representación de la realidad y la necesidad de traducir constantemente del lenguaje simbólico matemático al natural, y por otro, su naturaleza concepto-proceso" (Fernández, 2013, pp.37-38). En cuanto a las dificultades relacionadas a la metodología empleada, se obtuvo que el 26% de profesores consideran que los estudiantes prefieren las

[1] "El Bachillerato, según establece la LOGSE constituye un tramo no obligatorio de la Educación Secundaria al que pueden acceder los alumnos que han obtenido el título de Graduado en Educación Secundaria. (…) Las enseñanzas de Bachillerato están estructuradas en modalidades, (…) Las cuatro modalidades son: Artes, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Humanidades y Ciencias Sociales, y Tecnología". (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2000, pp. 173-174)

exposiciones magistrales y resolución de ejercicios en la pizarra y también que ellos consideran que es mejor la aplicación de conceptos estudiados en problemas de la vida real.

Un 30% de los profesores consideran que la metodología que optimiza el aprendizaje de los estudiantes es la realización de ejercicios por parte de ellos, además la mayoría de docentes (36%) coinciden en que la exposición magistral y resolución de ejercicios en la pizarra es la metodología más utilizada.

De la experiencia realizada por Fernández en la enseñanza de derivadas, este autor detectó errores y dificultades en el tema, a las que clasificó en tres grupos: dificultades que tienen que ver con el estudiante (incluye errores debido a conocimientos previos insuficientes, dificultades por fallo de atención y la memoria, y dificultades relacionadas con actitudes afectivas hacia las matemáticas), las relacionadas con la asignatura (falta de sentido e incomprensión de conceptos, dificultad para aplicar algoritmos y resolver procesos de cálculo, y el lenguaje simbólico matemático) y con otros aspectos (el clima del aula y del centro y el ambiente que rodea al estudiante).

El antecedente resulta de utilidad porque proporciona datos sobre la problemática en la enseñanza de las matemáticas vista desde el punto de vista del docente, incluso da a conocer propuestas (actividades) para la superación de las dificultades identificadas desde la enseñanza de derivadas las cuales constituyen un punto referencial para la presente investigación.

- Del Puerto et al. (2004) realizaron un estudio titulado “Análisis de errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas” el cual corresponde a un trabajo presentado en la IV CAREM (IV Conferencia Argentina de Educación Matemática), cuyo objetivo fue identificar el tipo de errores cometidos frecuentemente por los estudiantes de los últimos años de la escuela media[2], los que inician estudios universitarios y aquellos también que empiezan su formación en Institutos Superiores no universitarios (también denominados terciarios)[3], en contenidos de álgebra y teoría básica de funciones. Los responsables de la investigación recabaron la información a través de cuestionarios dirigidos a los estudiantes, los cuales estaban diferenciados de acuerdo con el nivel de escolaridad en el que ellos se encontraban. Para la detección y clasificación de errores se trabajó con la clasificación propuesta por Radatz: errores debido a dificultades en el lenguaje, dificultades para obtener información espacial, a un

[2] Otero y Corica (2017) explican que el Sistema Educativo de Argentina contempla que la escolaridad media obligatoria consta de 13 años comprendidos por los niveles: inicial, primario y secundario.

[3] García y Jacinto (2010) explican también que el Sistema Educativo Argentino tiene otros dos niveles de formación: Un nivel terciario o técnico y el nivel universitario.

aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, asociaciones incorrectas y a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Entre los resultados que más destaca la investigación se encuentran que en el nivel universitario se advierte un alto porcentaje (95%) de errores debido al "aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos", sin embargo, en el caso de estudiantes del nivel terciario y del nivel medio es significativamente menor la frecuencia de comisión de este tipo de error, representado por un 25% y 23%, respectivamente. En las dificultades asociadas al lenguaje se encontró que el margen de diferencia en la comisión de este tipo de error entre estudiantes de los tres niveles es poca, y además que el porcentaje que cometen este tipo de error es menor, en el caso de los estudiantes del nivel universitario 42%, en el nivel terciario 25% y en el nivel medio un 45%.

Asimismo, 70% de estudiantes tanto del nivel de instrucción medio como universitaria presentan errores "al aplicar reglas y estrategias irrelevantes", frente un 45% de estudiantes en su formación técnica no universitaria que cometen este mismo error. En los errores asociados a dificultades para obtener información espacial se detecta que en los estudiantes del nivel universitario este error es poco frecuente, pues se observa un porcentaje menor al 25% en la comisión de los mismos, por otro lado, se evidencia que en el nivel de formación terciaria y media los porcentajes que representan la presencia de este tipo de error es más alto, representado por un 82% y un 68%, respectivamente.

Respecto al error de "asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento" se encontró en primer lugar que entre los estudiantes que inician una formación universitaria y técnica, hay una ligera diferencia representada por un 44% y 50%, respectivamente. Y, en segundo lugar, se obtuvo que un 23% de estudiantes que ya son prácticamente egresados del nivel medio cometen este tipo de error.

A partir de ello se concluyó que la concurrencia de los errores está influida por el nivel de estudios de los estudiantes. El antecedente resulta de utilidad porque proporciona datos de la problemática de errores matemáticos en la resolución de ejercicios y problemas matemáticos en un país latino, en este caso Argentina, además este estudio trabaja con la taxonomía propuesta por Radatz, consultada desde la investigación hecha por Luis Rico, la misma que ha orientado la presente investigación.

- Abrate et al. (2006) autores del libro titulado: "Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo", realizaron dentro del marco del proyecto un estudio que resumía el contenido del libro, al cual titularon, *La articulación entre la Universidad y la Escuela Media: Un camino posible para construir la "inclusión" de los estudiantes y mejorar las prácticas educativas* en Argentina. Este estudio es de tipo diagnóstico-descriptivo, cuyo objetivo fue el análisis y categorización de errores cometidos por estudiantes egresados del nivel medio de enseñanza al resolver problemas y/o ejercicios correspondientes a contenidos matemáticos abordados en el Ciclo Básico Unificado y Ciclo de Especialización de la escuela secundaria argentina. El instrumento de recogida de datos consistió en entrevistas personales a docentes del área con las que se recopiló sus experiencias en la enseñanza de esta ciencia, a partir de lo que se propuso la categorización de errores: errores debido al lenguaje matemático, errores debido a dificultades para obtener información espacial, errores debido a inferencias o asociaciones incorrectas, errores debido a la recuperación de un esquema previo, errores debido a cálculos incorrectos o accidentales, errores eventuales debido a deficiencias en la construcción de conocimientos previos, errores debido a la ausencia de conocimientos previos. Para obtener datos sobre la comisión de errores, se aplicó a los estudiantes una evaluación con ejercicios los cuales debían estar enmarcados en una "situación matemática potencialmente generadora de error, la cual involucró algún contenido conceptual abordado en el Ciclo Básico Unificado o Ciclo de Especialización" (Abrate et al., 2006, p.45). Adicional a ello, desarrollaron entrevistas semiestructuradas con el propósito de profundizar unos aspectos que habían quedado incompletos en la evaluación inicial.

En sus resultados se encontró que el error cometido con mayor frecuencia fue el error debido a inferencias o asociaciones incorrectas con un 27,43%, seguido por errores debido a dificultades para obtener información espacial con un 24,28%, los errores debido a la ausencia de conocimientos previos registraron un 20,73%, en cuanto a los cometidos son los debidos al lenguaje matemático 9,52%, errores eventuales debido a deficiencias en la construcción de conocimientos previos 9,14%, y hay menor frecuencia en la comisión de errores debido a cálculos incorrectos o accidentales con un 0,49%.

Este libro es de utilidad en esta investigación porque proporciona datos de la problemática de errores desde el punto de vista de profesores a partir de la que se hace el estudio de errores en los estudiantes.

Finalmente, cabe mencionar que no se encontraron antecedentes nacionales ni antecedentes locales que podrían servir para la investigación realizada.

Capítulo 2
Marco teórico

Este capítulo ha sido diseñado para dar a conocer las bases teóricas que respaldan la investigación realizada. Los temas consignados se han organizado teniendo en cuenta dos aspectos, el primero de ellos es referido a la distinción entre los términos obstáculo, dificultad y error justificando por qué se estudiará la presencia de errores en esta investigación, y el segundo aspecto que se tendrá en cuenta es la comprensión de la matemática en relación al currículo dentro de la que se incluye el Análisis del Contenido, desde donde se aborda la importancia de los conceptos y el lenguaje matemático, también al Análisis Cognitivo y Análisis de Actuación, los cuales permitirán sustentar el análisis de errores propuestos para este trabajo.

2.1 Determinación y justificación del objeto de estudio

Para definir el objeto de estudio de esta investigación, se ha revisado distinta bibliografía para realizar el análisis de los términos: obstáculo, dificultad y error, y además se estudian los vínculos existentes entre ellos. Si bien los tres están relacionados, éstos no tienen el mismo significado, por lo cual poder distinguir a qué se refiere cada uno permitirá justificar con mayor precisión la razón por la que se ha determinado la elección de uno de ellos como objeto de estudio: Errores matemáticos en el aprendizaje de la matemática, pero comprendidos a la luz de los obstáculos y dificultades.

2.1.1 *Obstáculo*

Palarea y Socas (1994) proponen que se pueden estudiar los obstáculos a la luz de un error, de otro lado Giordan (1985) presenta la caracterización de un obstáculo de la siguiente forma:

> Los obstáculos no son ni evidentes, ni transparentes. Deben inferirse a partir de los elementos observables de los que se puede disponer, o que eventualmente pueden provocarse: acciones y palabras de los alumnos en situaciones, señales simbólicas producidas por los alumnos (formulación escrita, dibujos, esquemas). (p.12)

Con esta definición se reafirma que la presencia de obstáculos no se puede evidenciar por sí misma, sino que se debe de analizar a través de los efectos observables que generan. Otro aspecto relevante a considerar en la comprensión de un obstáculo es que es entendido como "fuente generadora de errores", ésta es la conclusión propuesta en la investigación realizada por Palarea y Socas (1994) a partir de una idea propuesta por Bachelard y Brousseau como:

> Aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta a nuevos problemas. (p.93)

En el mismo sentido Godino (1991) explica y describe en qué consiste un obstáculo:

> Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. (p. 22)

En el artículo de investigación titulado, *Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético – algebraico* elaborado por Gallardo y Rojano (1988) pero publicado por Rojano ese mismo año, se realiza una explicación sobre las áreas de dificultad en relación al aprendizaje de las matemáticas centrándose en el pensamiento aritmético y algebraico y basándose en un estudio clínico cuyo objetivo fue analizar los fenómenos de transición del pensamiento aritmético al algebraico; en el mencionado documento se postula la existencia de un obstáculo entre la frontera del pensamiento aritmético y algebraico, lo cual explican de la siguiente forma:

> La palabra corte o ruptura se emplea para enfatizar el hecho de que el obstáculo en cuestión (el operar lo representado) se localiza en la frontera entre dos tipos de pensamiento, el aritmético y el algebraico. Estos conocimientos son tales que para dar paso al segundo (el algebraico) es necesario romper con conceptos y hábitos del primero (el aritmético), pero que, a su vez, se requiere de extender las nociones y acciones asignadas a los objetos aritméticos a un nuevo universo de objetos que incluye a los algebraicos. (p.2)

Por lo anterior, se entiende entonces al obstáculo como la presencia de un conocimiento que inicialmente ha sido de utilidad para el estudiante y que se ha fijado en su mente, lo cual ocurre porque cuando se verifica la efectividad de un conocimiento entonces existe la tendencia a la perpetuidad, es decir, continuar utilizándolo en otras circunstancias, muchas veces incluso sin verificar si las condiciones del problema permiten la aplicación de éste, lo que significa que hay una resistencia a modificar este conocimiento ya aprendido, por lo tanto, esto puede actuar como un factor que obstruye la adquisición de un nuevo conocimiento.

2.1.2 *Dificultad*

Cuando una actividad no puede realizarse bien, parcialmente o en su totalidad es porque existe un factor o factores que lo impiden, a los que se les conoce como "dificultades". Así, por ejemplo, si una persona no puede caminar esto se puede deber a enfermedades congénitas o accidentes, desde MedlinePlus (2019) por ejemplo, se explica la existencia de factores causales, algunos de ellos son: "Desarrollo anormal de los músculos o huesos de sus piernas o los pies, artritis de cadera, (…) enfermedades del cerebelo, área del cerebro que controla la coordinación y el equilibrio, problemas de los pies (…)"; esto significa que existen componentes detrás de esta manifestación que hacen que en este caso la actividad del caminar no se realice en las condiciones normales como debería hacerse, por lo que al detectarse estas causas se tendría que trabajar sobre ellas para adoptar medidas correctivas que de una forma u otra ayuden a solucionar el problema en cuestión. De un modo análogo ocurre en el proceso de enseñanza – aprendizaje, así, cuando el docente detecta que un estudiante no logra llegar al aprendizaje esperado, entonces es deber de éste indagar para poder identificar cuál es el factor o factores que impiden la comprensión de un contenido (el cual está pensado como un medio para el desarrollo de una determinada competencia de acuerdo a los lineamientos que haya establecido un determinado Sistema Educativo), a partir de esto diseñar estrategias que permitan a los estudiantes poder trabajar sobre estas dificultades, las superen, y finalmente consoliden los aprendizajes esperados y desarrollen las competencias previstas desde el área de matemática.

En cuanto a las dificultades existentes en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, Socas (2007) explica en base a una publicación suya del 1997 que es necesario abordar el estudio de dificultades de acuerdo a los elementos involucrados en el proceso de enseñanza – aprendizaje y al rol que cumplen en éste, señalando que:

> Se analiza las dificultades del aprendizaje de las matemáticas y cómo éstas tienen orígenes distintos que se sitúan generalmente en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. (p.31)

Socas entiende que las dificultades existentes en el proceso de enseñanza – aprendizaje tienen orígenes distintos los cuales se ajustan a los agentes que participan en éste, estas dificultades desencadenan en obstáculos y luego estos últimos se materializan en modo de errores los cuales se evidencian en la práctica educativa.

Gavilán (2011) en su investigación titulada *Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo?* postula que la dificultad que presentan los estudiantes cuando aprenden específicamente el álgebra se origina precisamente por la complejidad que ésta supone en la comprensión de la misma, la cual a su vez también tiene su origen en el aparente desfase existente entre las actividades intelectuales que el estudiante debe efectuar para aprender y el desarrollo intelectual del mismo; ésto se manifiesta o bien cuando un estudiante cumple parcialmente una actividad o cuando no la puede realizar en su totalidad, y según lo explicado por la autora de la investigación ésto se debe a que el estudiante no estaría intelectualmente maduro, por lo que cuando éste se enfrente a la solución de alguna tarea propuesta ésta superaría en demasía las habilidades matemáticas del estudiante lo que generaría el "no logro" de las demandas requeridas y también en sentimientos y actitudes negativos hacia las matemáticas, Gavilán (2011) sostiene que "Cuando la tarea propuesta no se corresponde con el desarrollo intelectual, surgen los problemas tanto en la comprensión como en los sentimientos y actitudes hacia las Matemáticas" (p.98).

Un caso en particular que menciona Gavilán (2011) respecto a un factor generador de dificultades en los estudiantes en la misma investigación mencionada líneas arriba, es la complejidad existente por la relación entre el álgebra y aritmética, a la cual se refiere así:

> La mayor parte de los símbolos empleados en el álgebra ya han sido utilizados por los estudiantes en la aritmética, por lo que tienen previamente asignado un significado que puede entrar en conflicto con el que se les atribuye ahora. (p.98)

El álgebra y la aritmética están estrechamente relacionadas, de hecho es con la aritmética con la que se inicia el aprendizaje de las matemáticas, con ella el estudiante aprende a identificar los números, contar, realizar operaciones básicas con ellos y usar simbologías que le permiten efectuar diversas operaciones; a partir de lo anterior el estudiante puede pasar al estudio del álgebra, donde tendrá que realizar actividades en cierto grado más complejas, como por ejemplo, generalizar diversas operaciones (ya aprendidas con la aritmética) empleando diversos símbolos y variables. En este sentido, Rebollo y Rodríguez (2006) en su artículo sobre *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas* explican que cuando se trata de la “resolución de problemas” las dificultades están vinculadas a los siguientes factores, “al tipo de enunciado, su interpretación, al lenguaje específico, al grado de abstracción requerida, a los conocimientos previos que posea el niño” (p.136).

Entonces “las dificultades” son factores que tienen hasta cierto punto “incidencia” en el aprendizaje de la asignatura de matemática, las cuales pueden estar vinculadas a la persona que aprende: estudiante, a la persona responsable del diseño de situaciones de aprendizaje: docente, y a los contenidos con los que los escolares puedan desarrollar capacidades, habilidades y competencias que los acerquen a los fines de la educación ya establecidos. Por lo tanto, identificar los agentes desde donde se generan las dificultades resulta de suma importancia, pues, dependiendo del estamento del que se trate se diseñarán mecanismos de acción diferentes para que con la disminución de dificultades los estudiantes puedan lograr aprendizajes en el área mucho más significativos y duraderos, y que la motivación para realizar actividades matemáticas no disminuya.

2.1.3 *Error*

Siempre la presencia del error en un contexto cualquiera ha sido visto como un fatídico resultado, y en el ámbito educativo no es la excepción, de hecho esta concepción está relacionada a la “Pedagogía del éxito” explicada por De La Torre (2004) en la que el error es considerado como una consecuencia desfavorable en el aprendizaje. Desde esta perspectiva diversos autores plantean diferentes definiciones, por ejemplo la propuesta por el mismo autor en un artículo de investigación titulado: *Aprender de los errores en la enseñanza y en la vida* en el que señala que, “El error es el criterio sancionador, el termómetro que nos indica el nivel de conocimientos alcanzados” (De la Torre, 2013, p.6), e incluso hace referencia a las implicancias de éste: “Estar en un error significaría tener un concepto falso o equivocado acerca de una cosa" (De La Torre, 2004, p.68). Escudero (2007) recoge una idea asociada a error con el matiz mencionado e incluso intenta explicar una posible causa que pudo originarlo: "los errores e ideas equivocadas de los estudiantes son un conjunto de creencias establecidas por ellos y que el desarrollo de esos errores conduce a soluciones lógicas para los estudiantes" (p.14).

Bajo esta misma perspectiva, en la investigación *Uso del error como mediador cognitivo para el aprendizaje de la adición de fraccionarios aritméticos positivos,* realizada por Mendoza et al. (2009) explican que "El error ha sido visto tradicionalmente como un resultado sancionable, como un comportamiento o acto indeseable, es por ello que la teoría conductista trataba de eliminarlo antes de que ocurriera por sus efectos perniciosos y de fijación" (p.25). Esta es la forma primigenia desde la que se comprendió el error por bastante tiempo y desde la cual se adoptaron diversas medidas para evitarlo. Sin embargo, hay otra forma un poco más alentadora de cómo entender el error, y es la propuesta planteada por De La Torre (2004) quien explica que además de la existencia de una "pedagogía del éxito" hay otra a la que denomina "didáctica del error", en la que aclara que no se "exalta" la presencia del error en el aprendizaje del estudiante, pero sí se promueve una concepción positiva de éste en el sentido que el estudio del error se ve como una oportunidad desde la que el estudiante y el docente puedan identificar los factores que impiden los aprendizajes para que en experiencias futuras puedan adoptar medidas con las que puedan superarlos, así explica que de esta forma el estudiante: "valorará lo que ya se tiene conseguido y analizará, a través del error, lo que falta mejorar" (p.81), por lo tanto el análisis de los errores desde esta perspectiva significa verlo como una realidad que forma parte del proceso de aprendizaje del estudiante, el cual brinda información respecto a los avances o retrocesos para tomarlos como punto de partida para futuras decisiones en la práctica docente (De La Torre, 2004).

Existen por lo tanto, definiciones orientadas de acuerdo a la "didáctica del error" desde las que además de ver al error como una fuente de información importante también se explican las situaciones que están detrás de éste para comprender a través de ellas el significado del error y poder actuar sobre éste, por ejemplo la propuesta planteada por Escudero (2007) explica que los errores son: "ideas arraigadas en la mayoría de los estudiantes bien como elementos adquiridos de nuestra cultura o como funciones cerebrales procedentes de la selección natural de un momento dado" (p.14). En este mismo sentido De la Torre (2013) en el artículo ya antes mencionado manifiesta que el error es una fuente que brinda valiosa información tanto para el docente como para el estudiante, porque a partir de ella se podrían tomar acciones de ayuda, de hecho, sostiene que:

> El error, desde la mirada que proponemos, proporciona gran cantidad de información. En primer lugar le informa que el estudiante que se equivoca en sus ejercicios o evaluaciones necesita de ayuda. Alguien pudiera pensar que resulta superfluo, pero no es así. (p.9)

También, Gómez (1995) hace un análisis más profundo del error y explica que esta forma de comprenderlo es producto del desarrollo de la teoría constructivista desde la cual se postula que el estudiante es el autor de sus propios aprendizajes, así que tomando esta teoría como punto de partida resulta viable considerar oportuno un diagnóstico sobre las debilidades que se pueden detectar en los estudiantes a través del análisis de los errores matemáticos que cometen, con el objetivo de que éste oriente la reflexión sobre qué se ha aprendido y qué acciones hacen falta para mejorar los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas, todo lo que este autor expone de la siguiente forma:

> De acuerdo con la postura constructivista y en un enfoque de diagnóstico y remedio, los errores son una fuente de información para el profesor acerca de lo que han aprendido los estudiantes y cómo lo han aprendido (Borasi, 1994). Es más, son el síntoma indicativo de alguna patología subyacente, un método falso que el estudiante cree correcto. (p.314)

En la investigación realizada por Mendoza et al. (2009) se hace una comparación en la forma en cómo se comprendía el error en el aprendizaje de los estudiantes hace unos años atrás y cómo se trata en la actualidad, estos autores explican que es más significativo el enfoque actual que se le da al error porque éste promueve la reflexión en los estudiantes y docentes sobre aquello que no han hecho bien, el análisis de los factores subyacentes a los mismos para poder identificar posibles causas, actuar sobre ellas y obtener aprendizajes más significativos en los estudiantes, estos autores lo abordan del siguiente modo:

> El análisis del error representa un proceso, y como tal, es una fuente de aprendizaje de mediación cognitiva. (…) Es por ello que el error, además de favorecer la habilidad reflexiva y analítica, es una estrategia idónea para la enseñanza-aprendizaje de procedimientos. (p.22)

2.1.3.1 Razón del análisis de errores en la investigación. Las demandas de una sociedad son las que de una forma u otra marcan la pauta de la finalidad de la educación de una comunidad, considerando que siempre tras la educación impartida se marca un antes y un después de ésta, pues se evidencian cambios notables en los estudiantes. Al respecto Hernández (2016) analiza los efectos de la educación matemática desde la perspectiva docente al afirmar que:

> Dentro del quehacer pedagógico del docente se requiere que el estudiante pueda desatar las habilidades básicas del pensamiento que le permitan adquirir la capacidad de observar fenómenos de lo complejo a lo simple y de lo simple a lo complejo, e incrementar sus propias potencialidades en la conciencia misma de su saber matemático en torno a la

> resolución de problemas, con lo cual se construye sentido de vida, utilidad práctica y consolidación de saberes. (p.69)

En esta afirmación la investigadora explica que las actividades del pensamiento matemático giran en torno a la solución de problemas que es precisamente el momento en el que se manifiesta el dominio de éstas, siempre y cuando la respuesta final sea satisfactoria a las demandas, de lo contrario la presencia de errores solo serán indicador de dificultades que tiene el estudiante y otros factores que será necesario estudiar. Atendiendo a la teoría sobre error sustentada en la pedagogía constructivista, Astolfi (1999) explica que los errores que se presentan en el proceso de aprendizaje de las matemáticas pueden ser entendidos como indicadores de aquellos conocimientos y competencias matemáticas que los estudiantes no han logrado desarrollar, y propone el estudio de éstos como un medio para poder identificar y comprender las deficiencias existentes en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la asignatura de matemática:

> Hemos podido ver como con los modelos de aprendizaje constructivistas (que no son uniformes), el error adquiere el estatus de indicador de tareas intelectuales que los alumnos van resolviendo y de los obstáculos con que se enfrenta su pensamiento a la hora de resolverlas. (p.18)

En la investigación realizada por Mendoza et al. (2009), explican el análisis que hicieron en torno al error cometido por un estudiante en el marco del aprendizaje de la adición de números fraccionarios aritméticos positivos. Estos autores plantean que la formación matemática de los estudiantes debe incluir definitivamente la reflexión sobre los procedimientos que realizan al resolver un problema, pero ellos proponen además que ésto resulta más significativo si se realiza sobre los errores cometidos en el proceso. El argumento planteado se justifica en comprender que el error debería ser considerado una fuente de conocimiento de la que se aprende en cuanto éste aparece; de hecho afirman que el *análisis del error* “representa un proceso” (p.22), del que se obtiene información muy significativa para el docente en su enseñanza y para el aprendizaje de los estudiantes.

Gómez (1995) en su trabajo *Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo* recoge posturas de investigaciones realizadas por algunos expertos en educación matemática como Borasi y Confrey cuyo punto de vista respecto al error es que éste por excelencia está relacionado al “diagnóstico de las dificultades de aprendizaje y las sugerencias para remediarlas” (p.314) e incluso ven a este elemento como una herramienta con potencial para la investigación en el campo de las matemáticas.

Así, al tomar como punto de partida la variada literatura relacionada al aprendizaje de las matemáticas se ha propuesto la realización del estudio de errores cometidos en la solución de determinados ejercicios y problemas matemáticos en una institución de enseñanza universitaria en estudiantes del primer curso de matemática, a partir de la cual se podrá identificar qué errores aún prevalecen en jóvenes universitarios, para tomarlos estos como insumo de análisis y posterior reflexión en torno a los factores generadores de los mismos.

2.2 La matemática comprendida a la luz de los elementos del currículo de matemática

La presencia de errores en la solución de diversas situaciones problemáticas supone un *desfase* entre lo que debería ocurrir idealmente y lo que ocurre realmente, por esa razón es que previo al estudio de errores se realizará un análisis de la influencia de cada factor que está presente en la enseñanza – aprendizaje en la comisión de errores matemáticos en la solución de ejercicios y problemas. Rico (2013) explica la necesidad de la realización de un análisis didáctico de la asignatura de matemática de la siguiente forma:

> Las finalidades del análisis didáctico radican en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, tal y como los establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar. En esta reflexión, los procesos generales considerados se refieren, explícita o implícitamente, a la organización, trasmisión y adquisición de conocimientos estructurados mediante textos y documentos de matemáticas escolares. (p.19)

Precisamente el documento que alberga la planificación, la forma en la que se ejecutará la enseñanza y los contenidos de la asignatura de matemáticas, es el Currículo Escolar. En el siglo XX Stenhouse (2003) reconoce la importancia de la organización de la educación de una comunidad lo cual plasma en la definición que propone del currículo: "Es una tentativa para comunicar los principios y rasgos esenciales de un propósito educativo, de forma tal que permanezca abierto a discusión crítica y pueda ser trasladado efectivamente a la práctica" (p.29), ya en el siglo XXI Gómez (2002) describe con mayor precisión el rol que cumple el Currículo en un sistema educativo e incluso afirma que éste está constituido por cuatro dimensiones:

> El concepto de currículo pretende responder a una serie de cuestiones con respecto a la naturaleza del conocimiento que se va a enseñar, del aprendizaje, de la enseñanza y de la utilidad de ese conocimiento. Estas cuestiones dan lugar a cuatro dimensiones que permiten estructurar el análisis y el diseño del currículo: dimensión cultural/conceptual, dimensión cognitiva, dimensión ética/formativa, dimensión social. (p.255)

Aunque ambas referencias sobre el término "Currículo" son de distintos momentos tienen varios puntos de coincidencia, en primera instancia el hecho que el currículo funciona como un instrumento en el que se establecen pautas que orientan la práctica educativa con miras al logro de los propósitos idóneos para una determinada comunidad y el contexto en el que está inmersa; además, se incluyen los conocimientos que se desean transmitir, e incluso se contemplan los procesos cognitivos de los estudiantes cuando aprenden para tomarlos como referencia en la enseñanza de acuerdo a las características de ellos.

En el caso del Perú, en el Currículo Nacional de la Educación Básica (2017) se establecen los lineamientos que se aplicarán en el sistema educativo del país para la formación de los estudiantes en correspondencia a los fines y principios de la educación peruana, lo que es expresado de la siguiente forma:

> Este documento es el marco curricular nacional que contiene el Perfil de egreso de los estudiantes de la Educación Básica, los enfoques transversales, los conceptos clave y la progresión de los aprendizajes desde el inicio hasta el fin de la escolaridad. También presenta una organización curricular y planes de estudio por modalidad, así como orientaciones para la evaluación desde un enfoque formativo y orientaciones para la diversificación curricular, en el marco de las normas vigentes. (…) El Currículo Nacional de la Educación Básica orienta los aprendizajes que se deben garantizar como Estado y sociedad. Debe ser usado como fundamento de la práctica pedagógica en las diversas instituciones y programas educativos, sean públicas o privadas; rurales o urbanas; multigrado, polidocente o unidocente; modelos y formas de servicios educativos. Asimismo, promueve la innovación y experimentación de nuevas metodologías y prácticas de enseñanza en las instituciones y programas educativos que garanticen la calidad en los resultados de aprendizaje. (p.4)

En las líneas anteriores tomadas del Currículo Nacional de la Educación Básica (2017) peruana se exponen las metas del sistema educativo peruano y los medios idóneos de acuerdo al contexto para llegar a ellas; incluye el perfil de egreso que corresponde a los logros que deberán alcanzar los estudiantes, la organización de los aprendizajes de todas las áreas durante la escolaridad (en función de competencias, capacidades, estándares de aprendizaje y desempeños), la forma de evaluar los aprendizajes, orientaciones para la diversificaciones y adaptaciones de acuerdo a la realidad de cada lugar del país y de los estudiantes (Educación Básica Regular, Educación Básica Especial y Educación Básica Alternativa).

Lupiáñez (2009) en su investigación *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria* toma como referencia un trabajo previo suyo en colaboración con Rico en el que relaciona la noción del currículo con la matemática de la siguiente forma: "Un currículo es una propuesta de actuación educativa, que en el caso de las matemáticas, puede considerarse como un 'plan de formación en matemáticas para los niños, jóvenes y adultos que tiene lugar en el sistema educativo de un país" (p.26).

Lupiáñez (2009) propone la realización de un análisis didáctico en torno al currículo de la asignatura de matemática, el cual se puede abordar desde distintas perspectivas como son: el Análisis de Contenido (organización de conocimientos que se transmitirán en la enseñanza), el Análisis Cognitivo (muestra las expectativas y objetivos que debería lograr un estudiante tras la enseñanza), el Análisis de Instrucción (contempla el diseño de estrategias y recursos durante el proceso de enseñanza) y el Análisis de Actuación (evidencia el grado de logro de las expectativas y objetivos en el área tras la enseñanza) de los cuales para el desarrollo de este trabajo se tomará como referencia a tres de éstos, el primero de ellos es respecto al ‘Análisis de Contenido del currículo de la matemática’ debido a una razón planteada por Gómez (2002), “El contenido matemático es el eje central del análisis didáctico” (p.262), afirmación que se sustenta en el hecho de que toda la actividad educativa se organizará en torno a los insumos necesarios en la enseñanza-aprendizaje de la asignatura; el segundo es sobre ‘el Análisis Cognitivo’, el que según Lupiáñez (2009) cobra sentido en cuanto existe un análisis del contenido previo, debido a que se toma como referencia las expectativas y metas ideales que debieron lograr los estudiantes para compararlas con aquellos productos logrados realmente y con ello poder identificar aquellas falencias presentes en la construcción del conocimiento matemático, y, a partir de ello tomar las decisiones correspondientes:

> El análisis cognitivo, desde un planteamiento constructivista (Coll, 2002), capacita a los profesores para que, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre matemáticas escolares y sobre su aprendizaje, describan, analicen y organicen las expectativas de aprendizaje que tienen para los escolares de un nivel educativo concreto sobre ese tema matemático. Estas expectativas de aprendizaje se pueden estructurar en varios niveles, tal y como describiremos más adelante, pero un aspecto común a todos ellos es que el logro de esas expectativas se hace visible mediante la actuación de los escolares ante las tareas que el profesor les demanda. En el análisis cognitivo, los profesores también llevan a cabo un estudio de errores y dificultades, con el que analizan qué puede limitar el proceso de aprendizaje del tema que están planificando. Esas dificultades están asociadas a las expectativas que los escolares deben lograr y se hacen visibles en forma de errores cuándo éstos ponen en juego su conocimiento del tema para afrontar y resolver tareas. (pp.57-58)

Y el tercero, es el ‘Análisis de Actuación’ que está referido a los resultados reales y tangibles obtenidos por los estudiantes los cuales se comparan con las expectativas de aprendizaje que tuvo el docente inicialmente, para a partir de ello evaluar el nivel de logro obtenido, luego identificar situaciones específicas que el estudiante resolvió incorrectamente, los errores cometidos y los factores que pudieron causarlos.

2.2.1 *Análisis del contenido del currículo de la matemática*

El análisis del contenido constituye una herramienta necesaria para la práctica docente porque evidencia aquellos insumos que el estudiante deberá adquirir para lograr el aprendizaje de la matemática y que le serán transmitidos en la enseñanza escolar. Gómez (2007) señala: “El análisis de contenido es, por tanto, el procedimiento en virtud del cual el profesor puede identificar, organizar y seleccionar los significados de un concepto o estructura matemática dentro del contenido de las matemáticas escolares" (p.41). Este análisis se realizará desde tres aspectos: Sistemas de Representación, Estructuras Conceptuales y Fenomenología, los cuales se describirán a continuación para poder comprender a qué se refiere cada uno y las implicancias que tienen en el proceso de enseñanza del docente y aprendizaje en el estudiante.

2.2.1.1 Sistema de representación. Para empezar a desarrollar este apartado será necesario definir o describir el rol de los sistemas de representación en el contexto de la enseñanza – aprendizaje de la matemática, y para ello se tomará como referencia la explicación propuesta por Gómez (2002):

> Utilizamos los sistemas de representación para representar diferentes facetas de un concepto o estructura matemática y trabajamos con los sistemas de representación bajo el supuesto de que se ciñen a un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas, en general, y por el concepto matemático específico, en particular. (p.266)

Y además este mismo autor en la misma publicación del 2002, explica las siguientes tres razones por las que estos sistemas de representación son importantes en el contexto educativo:

> Los sistemas de representación organizan los símbolos mediante los que se hacen presentes los conceptos matemáticos; los distintos sistemas de representación aportan distintos significados para cada concepto; y, por lo tanto, un mismo concepto admite y necesita de varios sistemas de representación complementarios. (p.42)

Estas precisiones explicadas por este autor refieren que el rol de los sistemas de representación en la matemática es básicamente vincular y establecer relaciones entre los conceptos (que son una realidad abstracta) y las notaciones y formas a través de las que se expresen los conceptos (una realidad que se hace tangible en tanto exista un sistema de representación). En razón de la función que cumplen en la actividad de enseñanza-aprendizaje de la matemática escolar es que identifican dos elementos constituyentes los 'conceptos' y 'el lenguaje matemático' con el que se comuniquen.

a) Conceptos matemáticos

Esta perspectiva del aprendizaje de la matemática se centra en un insumo necesario además del dominio del lenguaje matemático los cuales son los conceptos matemáticos, a los que González (2005) cataloga como, "componentes clave de la estructura de la matemática; ellos tienen carácter abstracto y se refieren, generalmente, a realidades teóricas que son construidas a través de un proceso de matematización" (p. 38), por lo tanto, esto significa que es necesario conocer la forma en la que se adquieren en primera instancia, los conceptos en general; y con ello poder comprender la adquisición de conceptos matemáticos y cómo éstos se integran en estructuras mentales.

a.1 Presencia de conceptos y funciones en el aprendizaje

Para comprender la importancia de la presencia del concepto es necesario saber qué es y cuáles son las implicancias en el aprendizaje, por ello se tomará como punto de partida tres concepciones referentes a 'concepto', la primera de ellas propuesta por González (2005) quien afirma que un concepto "es la representación lingüística de una idea abstracta que capacita al que la posee para clasificar objetos o eventos y para decidir si dichos objetos son ejemplos o no ejemplos de la idea abstracta en cuestión" (p.39), la segunda planteada por Skemp (1993): "Un concepto es una forma de procesar datos que capacita al usuario para utilizar la experiencia pasada de manera provechosa al manejar la situación presente" (p.32). Y nuevamente González (2005) quien explica que todo concepto está constituido por tres aspectos: el extensivo, el intensivo y el nombre; cada uno de ellos cumple un rol específico y cuando estos se integran constituyen una unidad a la que se denomina: concepto.

> La extensión de una clase está constituida por todos los objetos que pueden ser incluidos en ella; la propiedad intensiva se refiere a los aspectos o propiedades comunes que representan todos los objetos incluidos en la clase, es decir; que definen las características o atributos de la clase; el nombre es alguna palabra, frase, señal o signo particular que sirve para denotar simbólicamente a la clase. (p.41)

Por lo anterior se entiende que los conceptos son herramientas abstractas que se van adquiriendo de diversas experiencias y que permiten la clasificación de eventos respecto a otros a partir de los aspectos de ellos, de hecho, éstos cumplen funciones específicas detalladas por González (2005): "identificar los objetos y eventos que nos rodean, reducir la necesidad de aprendizaje constante, orientar la actividad instrumental y ordenar y relacionar clases de eventos" (p.42).

a.2 Adquisición de conceptos

Skemp (1993) considera que los conceptos adquiridos son importantes en cuanto sean de utilidad para resolver problemas y asegura que, "El poder de los conceptos proviene también de su capacidad para combinar y relacionar muchas experiencias diferentes, y clases de experiencia. Cuanto más abstractos son los conceptos, mayor es su poder para hacer esto" (p.34), este autor sugiere además que hay dos tipos de conceptos y de acuerdo a esta tipología éstos se adquirirán de formas distintas, la primera de ellas es a partir de las experiencias personales del individuo con su contexto (conceptos primarios) las cuales al ser diversas, el protagonista las clasifica de acuerdo a diferentes criterios que luego serán catalogados como abstracciones. Por ejemplo, de la experiencia: "sentarse", el individuo reconoce que hay distintas situaciones que permiten realizar esta actividad, una silla, un sofá, una banca, etc. a partir de ello reconocer la funcionalidad de los objetos y las distintas formas en que la puede llevar a cabo significará hacerse de este concepto. La segunda forma de adquirirlos, es a partir de la abstracción de un concepto ya formado, esto significa que ya no tomará como punto de partida la experiencia sensible sino insumos preexistentes que son los conceptos ya formados, por lo que al derivarse de éstos se formarían los conceptos secundarios.

González (2005) toma ideas propuestas por Bruner, Goodnow y Austin, y propone que la experiencia es un recurso del que se puede extraer información para la adquisición de conceptos o conceptualización, lo que se logra mediante una serie de procesos cognitivos, entre los que resalta la generalización y abstracción.

> Se tiene entonces que la conceptualización implica una clasificación de estímulos que presentan características comunes (McDonald, 1959) y constituye un proceso mediante el cual cosas, objetos, acontecimientos, personas, etc., perceptualmente diferentes, son organizados en clases que permiten responder a los estímulos del medio como elementos de alguna de dichas clases y no en términos de su unicidad (Bruner, et. al., 1978). Esto significa que la conceptualización involucra la ejecución de las actividades mentales de discriminación, abstracción y generalización. (p.40)

De las propuestas sobre la adquisición de conceptos explicadas por Skemp y González se concluye que el punto de partida para la adquisición de un concepto ocurre tras la interacción y manipulación de ejemplos y/o atributos de un concepto (que pueden ser esenciales o secundarios), desde los que se deberá realizar procesos de generalización y abstracción que se manifiestan a través del reconocimiento de patrones y criterios para su posterior clasificación y establecimiento de relaciones con los otros conceptos que ya forman parte de la estructura cognitiva del usuario, lo cual es de suma importancia debido a que si el contenido del concepto que se desea integrar no se vincula o conecta con los ya existentes, el acceso a éste en un futuro será complicado y no será de ayuda para la solución de la actividad que lo requiera.

a.3 Adquisición de conceptos matemáticos

Skemp explica la adquisición de los conceptos matemáticos a partir de dos principios, el primero de ellos es: “Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos” (p.36), este primer principio refiere que hacerse de conceptos más abstractos (asociados a la matemática), no debería ser como usualmente se observa en textos escolares de matemática, en los que cuando se presenta un contenido matemático se realiza mediante una “definición” en la cual se emplea terminología específica para describirla; sino que la forma en la que deberían ser transmitidos y comunicados estos conceptos es a modo de ejemplos, características o propiedades que permitan evidenciar la forma en la que éste se manifiesta, de hecho, desde la experiencia docente se puede detectar que los estudiantes pueden comprender mejor un determinado concepto en tanto se muestre cómo éste se aplica y para qué sirve a través de la solución de una situación problemática que se les muestre, a diferencia de si se les presenta el concepto mediante una definición matemática establecida, por lo tanto, esto significaría que para procurar la adquisición de conceptos sería necesario que esta actividad se realice mediante la proposición de ejemplos, por supuesto unos muy bien pensados, que manifiesten las propiedades de éste para que exista una mayor probabilidad en la adquisición eficiente de éstos, porque de lo contrario podría desencadenarse en dos posibles escenarios: el rechazo y no adquisición del concepto o la adquisición de éste pero con errores muy bien asimilados.

El segundo principio para la adquisición de conceptos matemáticos propuesto por Skemp es el siguiente, "Puesto que en matemáticas estos ejemplos son invariablemente otros conceptos, es necesario en principio asegurarse de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende" (p. 36), esta idea se refiere que la adquisición de nuevos conceptos requiere que el estudiante disponga de conocimientos previos los cuales deberán estar relacionados a los que se asimilarán porque de este modo el estudiante "se hará de ellos" con mayor facilidad, por lo que se puede inferir una relación de dependencia entre los nuevos conceptos y los ya existentes, la cual en algunos casos podría ser contraproducente, pues de adquirir un concepto erróneo se generaría una cadena de errores futuros "en la construcción de abstracciones sucesivas, si un nivel dado se comprende imperfectamente, cualquier cosa derivada se encuentra en peligro" (Skemp, 1993, p.38).

Los dos principios expuestos implican la responsabilidad inherente del docente, quien según lo expuesto será el artífice y primer responsable de la adquisición de conceptos matemáticos de sus estudiantes; sobre él recae el deber de brindar las oportunidades en las que se contextualicen los conceptos y los hagan manipulables (a partir de los ámbitos de aplicación de los mismos), para que de esta forma haya una mayor garantía del cumplimiento del objetivo antes mencionado y el estudiante "se haga" de valiosos insumos que le faciliten la adquisición de conceptos futuros que estén vinculados a los ya existentes, sobre todo cuando nos referimos al área de matemática. Es importante agregar que, aunque se requiera del compromiso del maestro, en definitiva también es necesario el apoyo de los estudiantes porque factores como la motivación y disposición a aprender, serán cruciales e influirán en el aprovechamiento de estrategias que se trabajen para lograr los objetivos previstos, al respecto–Font (1994) afirma: "Una de las condiciones indispensables para que sea posible el aprendizaje significativo es que el alumno manifieste una disposición para aprender el nuevo contenido y que dicha disposición (…) se manifieste en una manera profunda de encarar la tarea" (p.10).

b) El lenguaje matemático

El lenguaje permite comunicar mensajes de cualquier tipo y para cualquier contexto, la Real Academia Española define al lenguaje como: "Facultad del ser humano de expresarse y comunicarse con los demás a través del sonido articulado o de otros sistemas de signos" (Real

Academia Española, 2020). Otro punto de vista es el propuesto por García (2014), mediante el cual manifiesta que el lenguaje permite comunicar e incluso que éste se puede entender como una conducta:

> el lenguaje es comunicación y el lenguaje es representación. El lenguaje aporta posibilidades nuevas a la conducta puesto que supera la necesidad de realizar la conducta directa para permitir niveles simbólicos y de representación, jugando un papel clave en toda la conducta cognitiva. (p.164)

Asimismo, explica que el lenguaje (matemático o cualquier otro) siempre debe ser entendido como una dualidad entre los códigos usados para comunicar el mensaje y la comprensión del mismo, por lo que de romperse este vínculo se desencadenarían escenarios poco alentadores en un estudiante que pretende resolver un problema. Afirmar que un estudiante comprende realmente el significado de un enunciado supone reconocer la existencia de procesos mentales rigurosos y probablemente complejos, a los que Hernández et al. (2016) se refieren de la siguiente forma, "reconocer el lenguaje propio de las matemáticas, usar las nociones y procesos matemáticos en la comunicación, reconocer sus significados, expresar, interpretar y evaluar ideas matemáticas, construir, interpretar y ligar representaciones, producir y presentar" (p.289), e incluso García (2014) explica que:

> La comprensión es la captación del significado de «todo» el mensaje, de «todo» el texto o párrafo o conversación. La comprensión implica interpretar el sentido, extraer conclusiones, sacar inferencias, anticiparse, identificar el tema principal, evaluar el producto y los procesos, proponer hipótesis. (p.50)

b.1 Características del lenguaje matemático

El área de matemática contempla el uso de un lenguaje que tiene peculiaridades debido al tipo de conocimientos que involucra, los cuales de una forma u otra influyen en la facilidad o dificultad con la que se logre la comprensión de éste en diferentes contextos, por ejemplo uno de las rasgos distintivos es que el lenguaje matemático utiliza terminología que tiene un significado en el contexto matemático y uno distinto al que emplea el estudiante en su vida diaria, respecto a ello Gavilán (2011) en su investigación *Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo?*, señala:

> Parte de los problemas se deben a problemas propios del uso y comprensión de nuestro lenguaje; dificultad que se agrava al emplear palabras que en el contexto matemático tienen diferente significado que en el lenguaje habitual, como raíz, potencia, primo, diferencia, matriz, (…) como hipotenusa, coeficiente, polinomio, isósceles, etc. (p.100)

Y el segundo rasgo se refiere a que el lenguaje matemático comunica información precisa, emplea un sistema complejo de símbolos y terminología específica, pues los conocimientos que constituyen la ciencia de la matemática son de naturaleza abstracta y formal, y por lo tanto demanda el uso de un lenguaje definido que permita diferenciarlo de otros códigos para transmitir mensajes exactos. Gómez (1989) sostiene que “el lenguaje matemático implica la abstracción de lo esencial de las relaciones matemáticas implicadas en cualquier situación, lo que permite el rigor que viene dado por la estricta significación de los términos” (p.6), y en este mismo sentido Alcalá (2002) refiere que:

> El universo matemático escolar se materializa en signos al tiempo que se construye gracias a ellos. Una clase de signos está formada por los términos específicos y las expresiones verbales adecuadas: número, decena, cuatro, igual a, plano, recta, decimal, etc. Otra clase de signos son las notaciones y expresiones simbólicas organizadas: 3, +, =, etc.. (p.8)

b.2 Implicancias del dominio del lenguaje matemático en el aprendizaje de la asignatura

> El aprendizaje del lenguaje es muy complejo y supone algo más que los sonidos, las palabras o las frases. No es un proceso unidimensional de combinación progresiva de los sonidos en palabras y de éstas en frases, el aprendizaje del lenguaje supone la adquisición de forma integrada de al menos tres tipos de componentes: forma; contenido, y uso. (García, 2014, p.173)

Lo expuesto por este autor refiere que el dominio del lenguaje en general es un proceso que ocurre gradualmente e involucra tres componentes: forma (modo de representación por la que se identificará al objeto), contenido (incluye los aspectos que definen a un objeto) y uso (uso del contenido y la forma para poder comunicar o interpretar un mensaje), por lo que la deficiente adquisición de cada uno de estos componentes generaría serios problemas en los estudiantes. García (2014). Análogamente sucede con la simbología y terminología del lenguaje matemático, es decir, se requeriría del dominio y conocimiento del objeto matemático al que se hará referencia, la forma de representación (haciendo uso de los sistemas de signos pertinentes) y el uso de acuerdo a la situación problemática que se presente; esta secuencia de actividades en la adquisición del lenguaje es compleja, y existen diversas razones que sustentarían esta premisa como las explicadas por Romberg citado desde Lacués (2014):

> El poder de la matemática reside realmente en que un pequeño número de símbolos y de afirmaciones simbólicas pueden ser utilizadas para representar un conjunto amplio de situaciones problema distintas. La identificación y la utilización de los símbolos puede organizarse en ámbitos como los enunciados simbólicos que caracterizan el ámbito, las tareas implicadas que deben llevarse a cabo, las reglas que deben seguirse para representar, transformar y realizar los procedimientos y el conjunto de situaciones que generalmente se han utilizado para crear los símbolos, las relaciones entre los mismos y las reglas significativas. (p.303)

b.3 ¿Cómo se adquiere el lenguaje matemático para lograr la comprensión de éste?

La adquisición del lenguaje matemático es un proceso gradual, que se inicia cuando el estudiante primero vincula la simbología específica en las situaciones matemáticas cotidianas con las que interactúa; en la medida que la maduración cognitiva del estudiante lo permite, éste podrá hacer uso de la terminología matemática independientemente si ésta está vinculada al entorno natural o a una realidad abstracta, Gómez (1989) sostiene que:

> El pensamiento matemático es esencialmente de carácter abstracto; los conceptos matemáticos como el número, por ejemplo, son entidades cognitivas que no poseen como referente un objeto real. Los postulados y teoremas de la matemática no se demuestran mediante la contrastación con lo real, sino a través de un riguroso método lógico deductivo de validación interna. (p.6)

Para la adquisición del lenguaje matemático es necesario indicar que existen dos momentos cruciales en este proceso, los cuales se explicarán a continuación:

- Primer momento en la adquisición del lenguaje matemático

Tomando como punto de partida que una de las características del lenguaje matemático es que tiene “un sistema complejo de símbolos y terminología específica”, resulta necesario conocer qué elementos constituyen el lenguaje matemático.

Para referirse al lenguaje matemático se debe contemplar aquellos elementos que forman parte de este sistema matemático, en otras palabras: los signos. El signo, es definido por Puig (2003) como: “un objeto que está en el lugar de otro para alguna mente” (p.2), este autor explica también la existencia de una realidad triádica, la que está constituida por tres circunstancias: Objeto (significado), Signo (significante) e interpretante (quien realiza la interpretación del mensaje) los cuales interactúan de la siguiente forma:

> Un signo o representamen es un Primero que está en una relación triádica genuina tal con un Segundo, llamado su Objeto, que es capaz de determinar un Tercero, llamado su Interpretante, para que asuma la misma relación triádica con su Objeto que aquella en la que se encuentra él mismo respecto del mismo Objeto. (Puig, 2003, p.3)

Por lo anterior se concluye que el lenguaje matemático tiene un vínculo innegable entre tres elementos que son el objeto (fondo), el signo (forma) y el interpretante (quien interactúa con el signo e interpreta el objeto).

Sanz (2001) también explica la necesidad de una vinculación inicial del contexto del estudiante con el lenguaje matemático:

> Es evidente que el Lenguaje natural contiene en su campo semántico significados matemáticos, junto con expresiones específicas para contar, medir o clasificar. A partir de estos elementos la instrucción escolar elabora nuevos conceptos y expresiones, en suma va desarrollando el registro matemático. (p.203)

Lo expuesto anteriormente sugiere la interacción entre aquello que se quiere representar, la forma en cómo hacerlo y el individuo que es quien realiza el proceso. Rosales (2009) toma ideas propuestas por Milaret sobre las etapas en las que el estudiante adquiere el lenguaje matemático,así, la primera de ellas ocurre cuando el estudiante (en etapa temprana) interactúa con su entorno, por lo que es necesario que el docente proponga actividades y material específico para promover un primer aprendizaje intuitivo. Al respecto Gómez (1989) manifiesta que:

> La construcción de símbolos matemáticos comporta una verdadera construcción conceptual que tiene su origen en contextos de interacción social en los que la necesidad de convención y comunicación obliga a un análisis más profundo de aquello que se desea transmitir, análisis que viene facilitado por el recurso a los códigos figurativos y al lenguaje natural. (pp.13-14)

Por esta razón Azcárate y Cardeñoso (1994) propone que cuando se pretenda trabajar estos primeros momentos en la adquisisón del lenguaje matemático, se requiere que se haga evidente la necesidad de la comunicación matemática para que los estudiantes puedan encontrarle sentido y se hagan de ellos con menor dificultad.

– Segundo momento en la adquisición del lenguaje matemático

Gómez (1989) explica cuál es la actividad que realizan los estudiantes en el marco de la adquisición del lenguaje matemático cuando superan la fase concreta para pasar a la *abstracta*; esta autora sostiene que "A través de este proceso los simbolismos adquiridos precozmente por los niños, pero con un bajo poder de generalización, van cobrando, a lo largo del desarrollo, significaciones cada vez más complejas y abstractas" (p.14), e incluso agrega que este carácter abstracto está relacionado estrechamente al lenguaje matemático.

El estudiante supera lo concreto para trabajar con entidades abstractas, en las que ya no requiere de la manipulación directa con material que facilite la situación problemática. Milaret citado desde Rosales (2009), propone que el próximo paso para la adquisición del lenguaje matemático que representa una realidad intangible, desde la interacción inicial establecida por el estudiante entre su contexto y el lenguaje matemático, es la *abstracción matemática*, la cual según Rosales ocurre cuando el estudiante: "es capaz de referirse a una realidad general, esquematizada como resultado de la captación de elementos comunes a diversas circunstancias específicas" (p.154), asimismo, Azcárate y Cardeñoso (1994) señala: "Todo conocimiento matemático necesita de ciertos signos o sistemas de símbolos que le permiten comprender y codificar el conocimiento elaborado; pero para dotarlos de significado es necesario un contexto adecuado de referencia" (p.82).

Pese a que este segundo momento en la adquisición del lenguaje matemático parece un proceso inmediato y automático, esto no es así; pues la mayoría de los estudiantes no logran superar la primera fase y muchos otros evidencian resistencia a abandonar ese vínculo inicial entre la simbología y la realidad inmediata. Gómez (1989) se refiere a un caso muy particular, según el cual considera que el aprendizaje del lenguaje matemático está directamente relacionado al álgebra, al respecto manifiesta que "es quizá la historia del álgebra una de las mejores muestras de la resistencia del pensamiento humano a abandonar 'el contenido objeto' expresado mediante lenguaje natural y sustituido por el 'símbolo' " (p.8). En otra parte de la investigación, la autora agrega que:

> Así pues la potencia del lenguaje formal radica en su autonomía de lo real, que le permite la manipulación de conceptos y variables dentro de un sistema que no requiere una continua atención al significado referencial de las expresiones intermedias que va generando. (…) la mayoría de los alumnos aprende a aplicar los símbolos del lenguaje matemático según ciertas reglas que no poseen ningún tipo de justificación referencial que las dote de sentido. (p.7)

En este segundo momento, se puede deducir la existencia de un vínculo del lenguaje matemático y el álgebra al que Socas et al. (1996) se refieren del siguiente modo:

> Bajo el término 'álgebra' consideramos el ágebra de los números y de las 'estructuras', entendiendo por ello todo lo concerniente al desarrollo de las habilidades y manipulación de las letras y otros símbolos que pueden representarse por objetos, incognitas, números generalizados o variables, y también a los estadios de las operaciones, expresiones o entidades abstractas construidas por relaciones bien definidas. (p.81)

Esto significa entonces que los símbolos y formas de representación de ideas matemáticas son elementos constitutivos del álgebra, por lo que hablar del lenguaje matemático conlleva necesariamente a referirse al álgebra, por esa razón es que a continuación se aborda la forma en cómo ocurre esa transición.

b.4 La generalización y su importancia en la adquisición del lenguaje matemático

La generalización[4] de relaciones matemáticas y la formación de sistemas de representación abstractos, requiere que primero el estudiante reconozca un objeto matemático y el significado que este representa, pero principalmente que sea capaz de decodificar mensajes en variados contextos en los que diversos símbolos se articulen y formen una unidad. Esto se puede evidenciar en la forma en la que Arcavi citado desde Aké (2013), explica las formas de cómo hacer que los estudiantes encuentren el sentido a los símbolos, se familiaricen con ellos, los manipulen, y finalmente puedan lograr el objetivo que es, comunicarse efectivamente en diversos contextos utilizando el lenguaje matemático:

---

[4] Godino et al. (2012): la generalización es un rasgo característico del razonamiento algebraico, así como los medios para simbolizar, tanto las situaciones de generalización, como las de indeterminación (uso de incógnitas y ecuaciones para modelizar situaciones). Asimismo, las nociones de relación, operación y estructura son propias del álgebra (p.488).

- 'Familiarizarse con los símbolos': El estudiante debe conocer el significado de cada símbolo y saber qué puede representar y en qué situaciones es de utilidad.
- 'Leer a través de expresiones simbólicas': El estudiante frente a una expresión matemática debe identificar el significado aislado de cada símbolo y también del significado global de ésta.
- 'Diseñar relaciones simbólicas': El estudiante debe ser capaz de expresar determinados mensajes utilizando la simbología que conoce.
- 'Seleccionar una posible representación simbólica': El estudiante elige un sistema de representación para comunicar una determinada información, evaluando si la forma en que lo hace le permite resolver la situación problemática a la que se enfrenta o no, y si no fuera así elija una distinta que le sea de utilidad.
- 'Conciencia de la necesidad de revisión de los significados de los símbolos': El estudiante revisa desde el planteamiento de la resolución del problema hasta que llegue a la respuesta final.
- 'Conciencia de los distintos roles que cumplen los símbolos en diversos contextos'. El estudiante sabe en qué contexto usar e identificar la función de un símbolo

2.2.1.2 Estructuras conceptuales. Este segundo componente del Análisis del Contenido matemático, tiene la finalidad de brindar al docente información respecto a la forma en la que los conceptos se organizan en las estructuras mentales del estudiante que está aprendiendo. Al respecto, Gómez (2002) refiere:

> La estructura conceptual, como herramienta para el análisis de las matemáticas escolares, es la descripción, a nivel de conceptos y relaciones entre ellos, de la estructura matemática en cuestión. Por lo tanto, la estructura conceptual no es solamente la enumeración de los conceptos que se encuentran involucrados en la estructura matemática. (p.263)

Las estructuras conceptuales, suponen la organización de conceptos en base a las relaciones que se pueden establecer entre ellos, de hecho, el grado en el que estas conexiones se concreten y la cantidad de éstas garantizarían la comprensión de un hecho matemático tal como lo describe Gairín (2001) "El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, un procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes" (p.145).

a) Importancia de los esquemas

Skemp (1993) manifiesta que cuando se adquieren diversos conceptos, éstos necesariamente se vinculan a otros formando estructuras mentales entre las que se establecen jerarquías, de hecho esta idea está presente en la definición propuesta por este autor, quien define a los esquemas como, "La organización de conocimiento existente más efectiva para resolver nuevos problemas y para adquirir nuevo conocimiento (y, por tanto, para resolver todavía más nuevos problemas en el futuro)" (p.48), estas estructuras también llamadas "Esquemas" cumplen dos importantes funciones: "Integra conocimiento existente y es un instrumento mental para la adquisición de nuevo conocimiento" (p.43).

En cuanto a la primera función de un esquema o estructura conceptual (en adelante llamado esquema) en el aprendizaje, este autor sostiene que: "Cuando reconocemos alguna cosa como ejemplo de un concepto, llegamos a ser conscientes de ello a dos niveles: como en sí misma y como miembro de esta clase" (p.43), lo que significa que de cada experiencia cotidiana se identifican los aspectos más resaltantes de ella, esto permite que se abra paso al reconocimiento de la relación de estos rasgos con alguno de los esquemas existentes (y con conceptos afines a éste), para que se integren a ellos y ocurra la llamada adaptación. Este proceso se repetirá con cada experiencia desequilibrante que viva la persona lo cual supone que se trataría de una actividad constante y cíclica, que enriquecerá los esquemas existentes y facilitará la construcción de otros nuevos. Esta cantidad y variedad de los esquemas formados permitirá que exista una mayor probabilidad de resolver diversos desafíos.

Respecto a la segunda función que cumplen los esquemas, explica que la adquisición de nuevos conceptos se facilita en tanto existan esquemas ya formados, de hecho describe al esquema como una red formada por estructuras mentales complejas y simples que dirigen las actividades "sensomotoras", que permiten integrar los conocimientos adquiridos y prepara el terreno para adquirir los nuevos, por lo que se podría establecer una relación de dependencia entre los esquemas formados y los conceptos ulteriores, es decir que para garantizar la adquisición de un concepto, deben existir esquemas mentales previos relacionados a ellos, por ejemplo, para comprender y aprender a realizar divisiones, el estudiante debe saber aplicar las multiplicaciones, sumas y restas. Este tipo de situaciones Skemp (1993) las describe así: "Cada cosa que aprendemos depende de cierto grado de conocer algo ya" (p.44).

Este autor considera los esquemas como "instrumento principal de adaptabilidad", porque si el estudiante relaciona el nuevo concepto con una estructura mental previa se va a producir una interacción entre ambos factores, la cual puede ocurrir de dos formas o por asimilación o por acomodación[5] (según la teoría constructivista propuesta por Piaget), y de la forma en que ocurra va a generar que la adaptación se lleve a cabo, o bien generando un cambio en los esquemas existentes para que el nuevo concepto se integre, o que el nuevo concepto sea el que se adapte de acuerdo a las estructuras mentales previas.

b) Influencia de los esquemas (estructuras) mentales en el aprendizaje

La presencia de los esquemas mentales supone que el rol que éstos cumplen en el aprendizaje del estudiante es fundamental, tanto si se les considera como facilitadores o posibles

[5] "La asimilación hace que una experiencia sea percibida bajo la luz de una "estructura mental" organizada con anterioridad. (...) La acomodación, por el contrario, involucra una modificación en la organización presente en respuesta a las exigencias del medio" (Saldarriaga et al., 2016, p. 135).

obstaculizadores del mismo. Precisamente respecto a esta influencia Skemp, explica que si bien estos esquemas facilitan muchísimo el aprendizaje del estudiante por las razones ya explicadas, también sugiere que estos instrumentos generan tendencia a la auto-perpetuación que puede detener el proceso de adquisición de nuevos conceptos y construcción de nuevos esquemas, de hecho, esta propensión a la permanencia de esquemas podría ejemplificarse con la utilización de dos sistemas numéricos: el de los naturales y el de los racionales, esta situación fue propuesta por Gairín (1998) en la que explica que el uso de estos últimos (racionales) en una situación desequilibrante, requiere que el estudiante 'amplíe su idea de número' para que efectúe los procedimientos correctos considerando las nuevas condiciones del contexto las cuales evidentemente serán diferentes y requerirán un tratamiento distinto del que se les daba a los números naturales, el no ampliar las estructuras cognitivas para dar respuesta a un nuevo problema junto a la inexistencia de una ruptura respecto al esquema inicial que tiene el escolar y las nuevas demandas cognitivas generará la aparición de errores matemáticos diversos, de hecho, describe esta situación de la siguiente forma:

> Parece que el origen de estos errores hay que situarlo en la inexistencia de una ruptura en la idea de número que tiene el escolar, pues traslada significados de los números naturales a los números racionales. Conviene, por tanto, presentar a los escolares situaciones en las que los números naturales se muestren ineficaces, situaciones que sugieran la necesidad de construir un nuevo sistema de representación; de este modo, los escolares asociarán los números naturales a los usos y características propias del contexto en el que aparecen y, en consecuencia, ampliarán su idea de número a otros contextos diferentes. (p.44)

Por lo tanto, la presencia de esquemas cognitivos en el aprendizaje es notable, tanto como si facilita o dificulta esta meta, pues, aunque resalta el potencial positivo de éstos también podrían convertirse en obstructores de nuevos aprendizajes, por ello es que estos podrían considerarse como "un arma de doble filo", a la que Gairín (1998) describe de la siguiente forma:

> Un esquema puede ser tan poderoso como obstaculizador, si llega a ser inadecuado (…) su propia fuerza aparece ahora como su ruina potencial, en tanto que emerge una fuerte tendencia a la auto-perpetuación de esquemas existentes. Si se encuentran entonces las situaciones para las cuales no se adecúan, esta estabilidad de los esquemas se transforma en un obstáculo para la adaptabilidad. (p.48)

Entonces, por lo anterior se infiere que existirían distintos escenarios de acuerdo al tipo de influencia que ejercen los esquemas en la adquisición de nuevos conceptos, primero; si los esquemas mentales existentes no se relacionan al nuevo concepto, éste simplemente no se integrará, es decir no se "aprenderá" o si se logra se hará 'temporalmente' y se olvidará con facilidad, un segundo escenario es que ante la presencia de un nuevo concepto, para adquirirlo, los esquemas mentales existentes se deben modificar y 'acomodar' para garantizar la integración de lo nuevo con los ya existentes, el tercero; que el esquema haga que el concepto nuevo se ‘asimile’, es decir, que éste encaje en los esquemas ya existentes y éstos no se modifiquen (con el riesgo de que el cambio generado sea el incorrecto y que genere pseudo aprendizajes), e incluso, aunque Skemp no lo aborda a profundidad, menciona que tener esquemas incorrectos dificulta la adquisición de aprendizajes futuros, “los esquemas inadecuados constituyen un obstáculo importante para nuestro aprendizaje futuro” (1993, p.47).

2.2.1.3 Fenomenología. Freudenthal citado desde Gómez (2007) se refiere a la fenomenología de la siguiente forma:

> La fenomenología de un concepto matemático, estructura o idea consiste en describirlo en relación con los fenómenos para los que fue creado y con aquellos a los que se extendió en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Cuando esta descripción tiene que ver con el proceso de aprendizaje de una generación joven, es entonces fenomenología didáctica: una manera de mostrarle al profesor aquellos lugares en los que los aprendices pueden involucrarse en el proceso de aprendizaje de la humanidad. (p.51)

A partir de esto, vincular a la fenomenología y el análisis fenomenológico es el tercer aspecto a estudiar en el análisis del contenido, el cual está enfocado en la funcionalidad tanto de los conceptos como de los esquemas en una situación real en la que se tenga que resolver una situación problemática, Lupiáñez (2009) explica que:

> En este enfoque, el significado de conceptos y procedimientos matemáticos se muestra mediante su conexión con el mundo real, con las situaciones en las que se localizan, con los contextos en los que tiene sentido ponerlos en juego y con los fenómenos de los que surgen o en cuyo tratamiento se implican tales conceptos. (p.48)

Finalmente, señalar que se han abordado los componentes que constituyen el análisis del contenido matemático que forma parte del currículo de la asignatura de Matemática, los cuales involucran tanto a los conceptos, las relaciones entre ellos y las estructuras que constituyen, el modo en el que éstos se representan y las situaciones problemáticas en las que se pone a prueba el dominio de lo anterior para poder resolverlas. Siguiendo con el estudio de los componentes del análisis didáctico, se desarrolla a continuación el análisis cognitivo.

2.2.2 *Análisis cognitivo del currículo de la matemática*

El análisis cognitivo explica la presencia de ‘las expectativas’ por parte del docente respecto a la forma en la que responderían los estudiantes tras un proceso de enseñanza de los contenidos contemplados en la asignatura (después de realizarse el análisis del contenido), estos planteamientos sobre hipotéticos escenarios incluyen posibles logros o fallos de los estudiantes, de hecho, esta concepción se acota con el aporte realizado por Lupiáñez (2009) respecto a la finalidad del análisis cognitivo para los docentes manifiesta que:

El análisis cognitivo, desde un planteamiento constructivista (Coll, 2002), capacita a los profesores para que, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre matemáticas escolares y sobre su aprendizaje, describan, analicen y organicen las expectativas de aprendizaje que tienen para los escolares de un nivel educativo concreto sobre ese tema matemático. Estas expectativas de aprendizaje se pueden estructurar en varios niveles, (…) pero un aspecto común a todos ellos es que el logro de esas expectativas se hace visible mediante la actuación de los escolares ante las tareas que el profesor les demanda. (pp.57-58)

Por otro lado, hay una finalidad relevante y alineada a los objetivos de la investigación que se realizará, la cual es planteada también en Lupiáñez (2009) desde la que postula que el análisis cognitivo es necesario porque permite al docente tener conocimiento y reflexionar respecto a las dificultades y errores que podría cometer el estudiante cuando afrontará una situación problemática en la que haga uso del contenido de matemática que le será transmitido en la enseñanza, lo cual se puede realizar en cuanto se haya efectuado un análisis previo del contenido.

En el análisis cognitivo, los profesores también llevan a cabo un estudio de errores y dificultades, con el que analizan qué puede limitar el proceso de aprendizaje del tema que están planificando. Esas dificultades están asociadas a las expectativas que los escolares deben lograr y se hacen visibles en forma de errores cuando éstos ponen en juego su conocimiento del tema para afrontar y resolver tareas. (p.58)

2.2.3 *Análisis de actuación del currículo de la matemática*

Gómez (2007) describe este análisis de la siguiente manera:

El análisis de actuación utiliza la información que surge de la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje para producir información que permita determinar la comprensión de los escolares en ese momento, los contenidos a tratar en el aula y los objetivos de aprendizaje que se deben buscar en el nuevo ciclo. (pp.93-94)

Este análisis de actuación involucra la acción reflexiva del docente pues se trata de que tras la enseñanza impartida a los estudiantes (catalogado como análisis *'a posteriori'*), éste obtenga información respecto al grado de logro obtenido para, a partir de ello identificar en primer lugar aquellas fortalezas y poder potenciarlas y en segundo, detectar las debilidades encontradas durante todo el proceso de enseñanza y de aprendizaje, para trabajar sobre ellas y superarlas. Precisamente el rol del docente en el marco de este análisis, según Gómez (2007) supone la realización de algunas actividades como las que se mencionan a continuación:

Revisar si las tareas indujeron a los escolares a ejecutar caminos de aprendizaje en los que el profesor preveía que ellos pudieran manifestar dificultades, si esas dificultades se manifestaron (los escolares incurrieron en errores al ejecutar esos caminos de aprendizaje) y si se logró algún progreso en la superación de dichas dificultades. (p.94)

Por lo anterior, se concluye que el análisis de actuación admite la parte reflexiva del docente sobre los objetivos conseguidos tras la enseñanza impartida principalmente cuando se detecta que muchos estudiantes no han logrado las metas esperadas y existe una comisión constante de errores matemáticos de diversos tipos, cuya presencia responde a la existencia de dificultades que tienen los estudiantes en al aprendizaje de la asignatura.

2.3 Análisis de errores

Después de realizar la revisión preliminar de los procedimientos realizados por los estudiantes para resolver ejercicios y problemas en los instrumentos aplicados desde donde se detectan errores, se concluye que el análisis de los mismos se sustenta en el Análisis Didáctico previamente explicado. Este análisis de errores propuesto, considera como punto de partida el Análisis Cognitivo y el de Actuación, porque desde ellos no solo se propone la comparación entre los objetivos y metas a lograr: 'ideales', sino también se prevé los potenciales errores que podrían manifestar los estudiantes cuando se encuentren en un contexto donde deban dar respuesta a una situación problemática, desde donde el docente puede detectar los aciertos y desaciertos del estudiante y los compararía con las expectativas iniciales que tenía. Por otro lado, también es necesaria la realización del Análisis del Contenido, porque permite evaluar el dominio de conocimientos y habilidades matemáticos *reales* que tienen los estudiantes sobre una determinada temática. Por lo tanto, la revisión del contenido abordado en cada instrumento con el que se recogió la información junto a los conocimientos y habilidades que debían manifestar los estudiantes corresponde al Análisis del Contenido; la anticipación sobre presuntos errores que podrían cometer corresponde al Análisis Cognitivo; y el análisis de errores realizado a partir de los procedimientos efectuados por los estudiantes cuando resolvieron las actividades propuestas en cada instrumento aplicado, corresponde al Análisis de Actuación. Precisamente, para que el análisis de errores matemáticos propuesto sea más exhaustivo se ha considerado enfocarlo desde una de las cinco tipologías de dificultades propuestas por Lupiáñez (2009)[6], la cual se refiere a Dificultades Asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, porque el objetivo de análisis también está relacionado al estudio de la forma en cómo influye el dominio de determinados contenidos y habilidades matemáticas en los aprendizajes de los estudiantes, de hecho, Lupiáñez (2009) explica:

> Las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos tienen que ver con la propia naturaleza de los conceptos matemáticos, con su naturaleza teórica y formal y al

---

[6] Clasificación de dificultades según su naturaleza propuesta por Socas, referenciada desde Lupiáñez (2009, p.101):

1. Asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
2. Asociadas a los procesos propios de la actividad matemáticas.
3. Asociadas a los procesos de enseñanza.
4. Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

> mismo tiempo práctica, capaz de resolver problemas (Onrubia, Rochera, y Barberá, 2001; Sfard, 1991). Estas dificultades también se relacionan con las formas de representar esos conceptos y con las relaciones que se establecen entre esas representaciones (Bagni, 2005; González, 1992; Hitt, 1998a). El propio lenguaje que se usa en las matemáticas y su relación con el lenguaje natural, también están en la base de este tipo de dificultades. (p.101)

Se ha revisado bibliografía respecto a tipologías de errores matemáticos estudiados, de las que se ha tomado algunas de las propuestas hechas por Radatz (1979) que a continuación se describen:

2.3.1 *Errores debidos a dificultades en el lenguaje*

Esta tipología fue catalogada de esa forma por Radatz (1979) quien asegura que la presencia de este error en el proceso de aprendizaje se manifiesta en situaciones en las que el estudiante debe realizar traducciones de un enunciado en lenguaje natural a uno matemático y cuando no logra completar la actividad o la hace mal, esto sería consecuencia de la presencia de una fuente generadora que vendría a ser la falta de comprensión de la semántica de la matemática. En definitiva cuando un estudiante interactúa con cualquier situación problemática del área de la matemática, lo primero que observará será la información comunicada mediante el código de la ciencia que de desconocerlo lo verá tan ininteligible que puede generar que desista y concluya con ‘que no es bueno en la matemática’. Por lo tanto, una de las primeras herramientas que debería dominar todo estudiante para poder moverse en este campo, es en primera instancia el lenguaje matemático con lo que estaría preparado para comunicar e interpretar problemas, lo cual supondría a su vez la activación de complejos procesos mentales de análisis para decodificarlos, lo que sin duda también contribuirá al desarrollo de habilidades matemáticas, como tal como lo explican Hernández et al (2016):

> Según los Principios y Estándares para la Matemática Escolar (…) la comunicación es una parte esencial de las matemáticas y la educación. El estándar de comunicación es primordial para todos los programas de enseñanza y en todas las etapas se debería formar a los estudiantes para organizar y consolidar el pensamiento matemático a través de la comunicación. (p.289)

Se concluye entonces que la comunicación matemática no solo tiene que ver con que el estudiante reconozca un símbolo aislado y sepa a qué hace referencia, es necesario que haya decodificación, interpretación y comunicación de objetos matemáticos en un contexto problemático, de hecho esta funcionalidad la explica Lacués (2014) de la siguiente forma:

> Entiende por signo no simplemente un símbolo, sino un conjunto de ellos, como pueden ser una gráfica, una definición o un algoritmo. Sostiene que los aprendices usan nuevos signos con dos finalidades: una, **comunicativa**, en la que el estudiante usa el signo para

interactuar con otros (pares, profesores) incluso aunque su comprensión del signo sea incompleta o inmadura; otra, **conceptualizadora,** en la que el signo sirve como un elemento con el que organiza sus ideas matemáticas, mediando, además, en un proceso de socialización al compartir significados del signo con otros actores, incluso con la comunidad matemática. (p.304)

Existen por lo tanto, situaciones diversas en torno al estudiante que hacen que éste presente dificultades que impiden la realización de actividades vinculadas al uso del lenguaje matemático, por ello a continuación se analizará y explicará dos factores que evidencian la existencia de dificultades vinculadas a errores que tienen que ver con el uso del lenguaje matemático.

2.3.1.1 Dificultades relacionadas a trastornos que generan problemas de aprendizaje del lenguaje matemático. En este tipo de dificultades se presentan dos casos Acalculia y Discalculia.

Acalculia: Novick y Arnold proponen la definición del término *acalculia* extraída desde García (2014) como "un trastorno relacionado con la aritmética adquirido tras una lesión cerebral sabiendo que las habilidades ya se habían consolidado y desarrollado" (p.226).

En relación a este transtorno, resulta oportuno presentar un diagrama de las regiones cerebrales y las capacidades relacionadas al cumplimiento de determinadas capacidades del estudiante, propuestas por Keller y Sutton, citados desde García (2014, p.228). De esta forma se puede hacer un seguimiento respecto a la zona acidentada y las actividades que el estudiante no puede realizar parcialmente o en su totalidad. En la Tabla 1 que se muestra se ha incluido a las regiones cerebrales y las capacidades de cada una de ellas.

Tabla 1

Áreas del cerebro y las aptitudes relacionadas a la competencia matemática

Región	Capacidad
Hemisferio derecho	Organización visuo-espacial
Hemisferio dominante en el lenguaje	Habilidades lingüísticas
Áreas de asociación del hemisferio dominante	Lectura y comprensión de problemas verbales, la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos
Lóbulos frontales	Cálculos mentales rápidos, conceptualización abstracta, habilidades de solución de problemas, ejecución oral y escrita
Lóbulos parietales	Funciones motóricas, uso de las sensaciones táctiles
Lóbulo parietal izquierdo	Habilidades de secuenciación
Lóbulos occipitales	Discriminación visual de símbolos matemáticos escritos
Lóbulos temporales	Percepción auditiva, memoria verbal a largo plazo
Lóbulo temporal dominante	Memoria de series, hechos matemáticos básicos, subvocalización durante la solución de problemas

Fuente: García (2014, p.228)

Es conveniente mencionar que este problema tiene un origen necesariamente externo y que escapa del control del estudiante; pues la 'acalculia' surge como consecuencia de alguna lesión cerebral (fruto de un accidente), por lo tanto, debido al origen externo de este problemas, es que no se realizará un análisis más exhaustivo.

Discalculia: Este término, hace referencia también a un transtorno cognitivo el que a diferencia de la acalculia, no depende de un factor externo al estudiante sino de un componente interno a éste, que está relacionado al grado de maduración del estudiante, García (2014) explica que:

> Haría referencia a un trastorno estructural de la maduración de las habilidades matemáticas, según Kocs —citado por Keller y Sutton (1991)—, referido sobre todo a niños y que se manifestaría por la comisión de errores variados en la comprensión de los números, habilidades de conteo, habilidades computacionales y solución de problemas verbales. (p.227)

Keller y Sutton citados desde García (2014), exponen que hay seis subtipos de discalculia[7], sin embargo, se mencionarán solo tres porque son los que están relacionados al uso del lenguaje matemático:

- La discalculia verbal con manifestaciones en dificultades en nombrar las cantidades matemáticas, los números, los términos, los símbolos y las relaciones.
- La discalculia lexical en relación con dificultades en la lectura de símbolos matemáticos.
- La discalculia grafical en relación con dificultades en la escritura de símbolos matemáticos (p.227).

2.3.1.2 Origen del problema. Hacia la generalización: transición de la aritmética al álgebra. Para comprender el origen de las dificultades en relación al aprendizaje de la matemática es necesario tomar como punto de partida el *carácter* de ésta, Holguín et al. (2016) refieren que el estudio de las matemáticas supone procesos cognitivos complejos, debido a que el objeto de estudio de esta ciencia es de carácter 'abstracto', sin embargo, para abordarlo de la forma idónea se requiere necesariamente que de la 'realidad objetiva' se identifiquen sus aspectos característicos y específicos relevantes para hacerse de ellas mentalmente y luego poder

---

[7] La discalculia verbal con manifestaciones en dificultades en nombrar las cantidades matemáticas, los números, los términos, los símbolos y las relaciones.
La discalculia practognóstica o dificultades para enumerar, comparar, manipular —reales o en imágenes— objetos matemáticamente.
La discalculia lexical en relación con dificultades en la lectura de símbolos matemáticos.
La discalculia grafical en relación con dificultades en la escritura de símbolos matemáticos.
La discalculia ideognóstica o dificultades en hacer operaciones mentales y en la comprensión de conceptos matemáticos.
La discalculia operacional en relación con dificultades en la ejecución de operaciones y cálculo numéricos.
Citado desde: García (2014, p. 227)

expresarlos mediante un constructo más general y abstracto lo cual se hace empleando el lenguaje matemático o algebraico como herramienta para la comunicación de mensajes específicos. Precisamente esta necesidad del estudiante de transmitir y decodificar determinados mensajes requiere del dominio de ciertos sistemas de representación menos concretos en los que se articulen diversos componentes de la matemática, Torres et al. (2002) consideran que “Entre estas dificultades sobresalen las experimentadas por los alumnos cuando se avanza a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto el poder del lenguaje simbólico como el grado de abstracción” (p.227). Así, en la comunicación matemática se requiere del uso del lenguaje y simbología específica que permita la representación de la información abstraída de la realidad, y se necesita en primer lugar del reconocimiento de la existencia de casos particulares (asociados a la aritmética) y su comprensión; para que posteriormente se dé lugar a la generalización de ideas matemáticas (asociadas al álgebra), lo que se refiere al uso de nomenclatura y convenciones matemáticas más universales que representen a estas realidades; respecto a ella Godino et al (2012) explican que:

> El álgebra es una forma de pensar y actuar en matemáticas caracterizada esencialmente por la dialéctica entre los procesos de generalización – particularización (…) El álgebra es más que un instrumento de modelización y más que un lenguaje simbólico; es una forma de pensar y actuar en matemáticas, una actitud a generalizar, y, por tanto, a simbolizar y operar con símbolos, que penetra todas sus ramas y las impulsa hacia nuevos niveles de creatividad. (p.507)

Esta concepción respecto al álgebra podría analogarse específicamente con el razonamiento inductivo debido a que toma como punto de partida situaciones particulares para luego generalizar y establecer conclusiones generales, al respecto Polya, citado desde Socas et. al (1996) afirman lo siguiente:

> La inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones. Se emplea en todas las ciencias, aún en las matemáticas. En cuanto a la inducción matemática no se emplea más que en matemáticas a fin de demostrar un cierto tipo de teoremas. Es bastante molesto que las dos expresiones estén ligadas, ya que entre los dos procedimientos existe un lazo lógico, extremadamente sutil. (p.151)

Aunque por otro lado también es oportuno considerar el razonamiento deductivo en el que la idea base es una conclusión generalizada a partir de la que, de acuerdo al contenido involucrado se pueda reconocer casos particulares (Dávila, 2006). En el mismo sentido Aké (2013) quien toma ideas de Kieran respecto al álgebra, explica que “El desarrollo histórico del álgebra se concibe como la rama de las matemáticas que trata sobre la simbolización de relaciones numéricas generales, de estructuras matemáticas, así como de las operaciones sobre esas estructuras" (p.24).

Según lo explicado, el paso de la aritmética al álgebra no es inmediato y en muchos casos esta transición es compleja, Godino et al (2012) sustentan esta afirmación señalando:

> Parece pertinente considerar que en el proceso de transición desde la aritmética hasta el álgebra cruza una zona transicional en la que se admite que las tareas matemáticas pueden exhibir objetos y procesos algebraicos con una presencia gradual, pero creciente. (p.491)

Estos autores mencionan que existe una 'transición' que va desde la aritmética cuando los estudiantes manipulan operaciones numéricas, hacia el álgebra cuando ya se requiere que utilicen un lenguaje generalizado para expresar y deducir mensajes específicos. Aké (2013), en el mismo sentido, también recogen aportes de diversos investigadores y concluyen que a los estudiantes se les hace más sencillo resolver problemas y ejercicios aritméticos, y resulta más dificultoso resolver problemas y ejercicios algebraicos, porque según refiere, para resolver estos últimos se requiere que estos sean "traducidos y escritos en representaciones formales" (p.25) antes de solucionarlos; Puig (2003) explica que: "El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones" (p.229).

Después de la literatura revisada se concluye que la presencia de este error se puede originar por la incomprensión de los mensajes comunicados cuando se hace uso de un lenguaje matemático, lo cual genera que el estudiante no pueda interpretar un mensaje expresado a través de un código específico y tampoco pueda comunicar determinada información haciendo uso de simbología que se ajuste al contexto.

2.3.2 *Errores debidos a la rigidez del pensamiento o asociaciones incorrectas*

Este tipo de error fue descrito por Radatz (1979), desde el que intenta explicar situaciones en las que el estudiante desarrolla operaciones cognitivas para resolver diversos escenarios problemáticos sin verificar si realmente las condiciones del problema permiten su aplicación, lo que responde a una razón a la que denomina como '*la poca flexibilidad del pensamiento del estudiante*, asociada a la *rigidez del pensamiento*'. En primera instancia, Llorente (2016) se refiere a la rigidez, como "una forma mayormente estable de conducta que se expresa en la repetición persistente y espontánea de determinado acto de conducta, cuando situaciones a las que se enfrenta el sujeto requieran objetivamente la interrupción o variación de la misma" (p.39), lo cual básicamente tiene que ver con una tendencia a la fijación de "procedimientos" que ya han manifestado su efectividad para la resolución de problemas y que el estudiante tiende a usar en repetidas ocasiones, debido a que esto representaría un cierto tipo de estabilidad. Por otro lado, en lo que corresponde a la flexibilidad del pensamiento, Hernández (2018) se refiere a esta condición usando ideas de Krutetskii:

> La flexibilidad de pensamiento como un componente importante de las habilidades matemáticas en los escolares. Esta flexibilidad se muestra, por ejemplo, en vencimiento de fijaciones o en el rompimiento de un método estereotipado de solución, encontrando diversos caminos para resolver un problema. El énfasis en esta habilidad se centra en el rompimiento de los estereotipos para mostrar la flexibilidad de pensamiento como una descripción de la habilidad matemática. (p.56)

Por lo tanto, después de la referencia hecha respecto a rigidez y flexibilidad del pensamiento, se puede inferir que la comisión de este tipo de errores está asociada o tiene mucho que ver con la apertura del estudiante respecto a la elección y uso de los procedimientos adecuados para resolver un problema con deteminadas características, por lo que se puede asumir que el logro de esta "flexibilidad" supone que el estudiante además de tener el dominio de determinado conocimiento, es capaz de evaluar hasta qué punto será de utilidad para poder resolver un determinado problema, e incluso, Hernández (2018) describe la forma de actuación de una persona de pensamiento flexible a partir de un estudio realizado por Menschinskaia;

> El sujeto de pensamiento flexible está libre de las suposiciones impuestas y de los métodos rutinarios para resolver problemas, sabe apreciar los cambios que exigen modificar el planteamiento de las preguntas, así como renunciar a las soluciones anteriores y tomar otras nuevas. (p.57)

2.3.2.1 Rigidez o falta de flexibilidad del pensamiento, ¿asociada a la presencia de obstáculos? Para poder dar respuesta al planteamiento propuesto es necesario evocar la definición a la que hace referencia el término obstáculo, de hecho Cid (2015) toma como referencia el trabajo realizado por Brousseau, quien explica, de la siguiente forma, que la figura del obstáculo y error están vinculados estrechamente:

> El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, tal como se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido. (p.7)

En el mismo sentido, Franchi y Hernández (2004) tomando como insumos los aportes de Brousseau, también se refieren al obstáculo como:

> Una concepción que ha sido, en principio, eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. (p.66)

Básicamente, la idea en torno a un obstáculo es que éste existe en tanto haya un conocimiento ya adquirido por el estudiante al que éste recurra constantemente para resolver diversos tipos de problemas, negándose a evaluar otras opciones para solucionarlos e incluso limitando su apertura para adquirir nuevos conocimientos que le permitan enriquecer su domimio en diversos campos del saber matemático. En este sentido, es conveniente mencionar el trabajo realizado por Cid (2015) desde donde explica, según la teoría didáctica, la forma en la que durante la enseñanza un estudiante adquiere *concepciones* respecto a una noción matemática las cuales funcionarían a corto plazo para resolver unas situaciones problemáticas específicas, pero que de modificarse los contextos o las situaciones didácticas, estas concepciones ya fijadas se volverían ineficaces y serían entonces *obstáculos* en el aprendizaje del estudiante. Esta autora menciona:

> Un alumno adquiere un conocimiento cuando, enfrentado a una situación-problema cuya solución exige ese conocimiento, es capaz de generarlo en forma de estrategia de resolución de la situación. (…) La consecuencia inmediata de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida resolviendo situaciones-problema en las que dicha noción está implicada. Ahora bien, en la enseñanza es imposible presentar para cada noción matemática el conjunto de todas las situaciones-problema en las que ésta interviene, lo que obliga a elegir unas pocas de entre ellas, un subconjunto de situaciones. Y esa elección puede dar lugar a que el alumno adquiera una concepción, es decir, un conjunto de conocimientos referentes a la noción matemática que funcionan con éxito en ese subconjunto de situaciones y para determinados valores de sus variables didácticas, pero que no son eficaces e, incluso, provocan errores al utilizarse en otro subconjunto de situaciones o al modificar las variables didácticas de la situaciones consideradas. Una concepción tiene, por tanto, un campo de problemas en el que funciona y otro campo de problemas en el que no permite resolver o, al menos, dificulta la resolución. De manera que la ampliación del campo de problemas va a obligar a la concepción a evolucionar, modificando alguno de sus aspectos, para adaptarse a las nuevas situaciones. (…) En estos casos, en los que la ampliación del campo de problemas exige la sustitución de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y, además, el sujeto que la posee se resiste a rechazarla y trata, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente, de hacerla evolucionar lo menos posible, diremos que la concepción es un obstáculo. Y esta ‘concepción obstáculo’ (en adelante, simplemente, ‘obstáculo’) se pondrá de manifiesto a través de los errores que produce, errores que no serán fugaces ni erráticos, sino reproductibles y persistentes. (pp. 10-11)

Por otro lado, Cortina et al. (2013) abordan específicamente el término *obstáculo didáctico* (referenciando la investigación de Brousseau) del que explican que tiene tres orígenes distintos, el primero de ellos es sobre el desarrollo cognitivo (origen ontogénico), el segundo es respecto a la propia disciplina matemática (origen epistemológico) y el tercero en relación a las estrategias usadas en la enseñanza (origen didáctico); sin embago, es precisamente el segundo origen, el epistemológico, el cual aborda al obstáculo como un conocimiento adquirido previamente y que obstruye la comprensión de conceptos futuros:

> Estos obstáculos se presentan cuando la comprensión de cierto concepto matemático interfiere con la comprensión de otro más complejo. Por ejemplo, en la literatura sobre fracciones, múltiples autores han considerado que el conocimiento que los estudiantes desarrollan de los números naturales interfiere con la comprensión de los números racionales. (p.9)

Por lo anterior, se concluye que un obstáculo está relacionado a la existencia de una concepción de un conocimiento que es limitada y que por lo tanto reduce el campo de aplicación en situaciones problemáticas, por otro lado, se puede inferir también que esa resistencia existente a modificar o ampliar estas concepciones, tiene su origen en la rigidez o falta de flexibilidad del pensamiento, considerando que esta habilidad está asociada a la manifestaciones de conductas como:

> Capacidad para liberarse de algoritmos y argumentos matemáticos comunes. Capacidad para dar varias interpretaciones a un dato numérico, estadístico o probabilístico en el contexto de las relaciones en una información numérica, estadística o probabilística. Capacidad para cambiar la estrategia de solución de un problema, cuando la que se sigue resulta insuficiente. Capacidad para dar más de una solución a un problema (encontrar la solución de varias maneras). (Hernández,2018, p.58)

Para dar respuesta a la pregunta sobre: Rigidez o falta de flexibilidad del pensamiento, ¿asociada a la presencia de obstáculos? planteada: se concluye entonces que la presencia de obstáculos en el aprendizaje supone la existencia de una deficiente flexibilidad y rigidez del pensamiento en el estudiante, lo que se manifiesta en diversas situaciones en el aprendizaje de la matemática, específicamente cuando deben transitar y superar un concepto para pasar a otro relacionado pero diferente. Por ejemplo, el estudiante se maneja con soltura en un sistema numérico porque conoce cómo desenvolverse en él, sin embargo, cuando debe trasladarse y aprender otro sistema numérico aparecen diversas complicaciones, así se puede tener que, en un primer momento el escolar empieza su formación matemática con los números naturales y es capaz de realizar operaciones en este sistema, pero en la medida que avanza a otro sistema numérico como podría ser el caso de los números racionales (que involucran operaciones con fracciones y números enteros) se empieza a manifestar y evidenciar el error asociado a la rigidez del pensamiento, y la razón es que el estudiante manifiesta una tendencia a resolver problemas con números racionales, como si se trataran de números naturales. Al respecto, Skemp (1993) explica:

> Se trata de otra cosa cuando se encuentran números fraccionarios. Estos constituyen un nuevo sistema numérico, y no una extensión de uno que ya es conocido. El sistema de numeración es diferente en sí mismo, y tiene nuevas características; por ejemplo, un número infinito de fracciones diferentes se utiliza para representar el mismo número. La multiplicación ya no puede comprenderse en términos de adición repetida. Antes de que puedan entenderse los números fraccionarios, se requiere una mayor acomodación del esquema numérico. (p.49)

2.3.3 *Errores debidos a las dificultades para obtener información espacial*

Esta tercera tipología también es propuesta por Radatz (1979), la cual hace referencia a un tipo de error que se manifiesta cuando el estudiante no puede obtener información a partir de imágenes u otras formas representativas, que según lo que detalla este autor podría ocurrir porque el estudiante no ha desarrollado habilidades espaciales o capacidad para la discriminación visual. Calvo (2008) menciona una serie de habilidades para desarrollar la comprensión matemática consideradas por el Ministerio de Educación Costarricense, una de ellas es la imaginación espacial a la que describe de la siguiente forma, “esta habilidad implica que los alumnos desarrollen procesos que les permitan ubicar los objetos en un plano determinado, interpretar figuras tridimensionales, estimar longitudes, áreas o volúmenes” (pp.130-131). Por otro lado, Suárez y León (2016) toman una investigación realizada por Hershkowitz desde la que explican que la *visualización* es un componente en el aprendizaje de la matemática y a la que describen como, “la habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual” (p.112), además estos dos mismos autores también referencian a Arcavi quien se refiere a la *visualización,* como:

> La capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información sobre el pensamiento y desarrollo de ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión. (p.112)

Considerando los planteamientos antes expuestos, es necesario incluir también el aporte realizado por Hitt (1995), quien explica que, “poner en práctica la *visualización matemática* o *imaginación espacial*” tiene diversas implicancias, es decir:

> Desde este punto de vista, no solo se espera que el individuo pueda crear una imagen mental de un concepto, sino que además procese interiormente (según transformaciones mentales) los conceptos matemáticos adquiridos, y pueda exteriorizar esa imagen mental del concepto de manera que sea observable, ya sea de manera verbal, sobre papel, pantalla, etc. La articulación de una representación a otra tiene que ver con el proceso de asociar

> mentalmente -preservando el significado- las diferentes representaciones de un concepto. (p.64)

Las consideraciones mencionadas permiten inferir que el logro del dominio de la visualización matemática, es una actividad de alta demanda cognitiva (Ramírez, 2012). Afirmación que se sustenta con el argumento expuesto por Skemp (1993) quien explica que el sistema visual tiene los siguientes rasgos; “Abstrae propiedades espaciales, tales como forma y posición. Más difícil de comunicar. Puede representar pensamiento más individual. Integrador, muestra estructura. Simultáneo e intuitivo” (p. 117), entonces al describir a la visualización matemática como una actividad que demanda de interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes o diagramas, podría suponer cierta complejidad para el estudiante cuando éste debe interpretar información expresada en esta modalidad, además Skemp (1993) logra identificar una serie de procesos involucrados en la interpretación de sistemas visuales, esto lo expresa de la siguiente forma:

> Cuando vemos algún objeto desde un punto de vista particular, en una ocasión determinada, esta experiencia evoca un recuerdo de todas nuestras anteriores sensaciones “de percibir” este objeto – no separadamente, sino como una abstracción de algo común a este tipo de experiencias–. Esto se experimenta como “reconocimiento” y dotamos al objeto, en la experiencia presente, con varias propiedades que no derivan de los datos sensoriales que “están accediendo”, sino del objeto-concepto que se evoca. (p.102)

Skemp (1993) también propone otra idea desde la que se puede entender un factor que genera dificultades en la interpretación de información comunicada a través de diagramas, en efecto, asegura que en el momento en el que un diagrama comunica visualmente todo lo que verbalmente puede comunicar no hay ningún inconveniente, sin embargo, no ocurre lo mismo cuando en un solo diagrama convergen más de una situación particular, vinculadas pero todas distintas entre sí, es decir, que cuando una imagen o diagrama está integrado por varias situaciones particulares, el estudiante no puede identificar con claridad toda la información: “Las dificultades empiezan a surgir cuando queremos hacer dos cosas más: dar una prueba lógica y dirigir la atención a partes del diagrama particulares” (p.109), precisamente esta idea coincide con la tesis propuesta por Planchart (2002), quien plantea que un factor que causaría esta dificultad es:

> Otra situación que conduce a respuestas incorrectas es cuando los estudiantes aprehenden el objeto localmente y no globalmente. Monk (1992) afirmó que algunos estudiantes no tienen problema para entender datos representados gráficamente de una manera “puntual”, presentan serias dificultades para el entendimiento global” (es el tipo de razonamiento que se requiere en cálculo). (p.44)

En el aprendizaje de la matemática existen diversas modalidades en las que se presenta una situación problemática, por ejemplo, ésta puede estar expresada mediante enunciados o bien, a través de gráficos que son los que comunican la información necesaria para resolverla; precisamente es en la segunda forma en la que el estudiante puede presentar inconvenientes para trabajar en un problema con estas características, pues se pone en evidencia la importancia del dominio de la imaginación espacial y la visualización matemática que requiere un estudiante que está aprendiendo los contenidos propuestos, lo cual requiere de la comprensión del contenido (como medio para el desarrollo de competencias) a través de una imagen mental que se forma a partir del significado de cada una de las partes que la constituyen y el significado como una unidad; todo lo cual demanda que el estudiante analice, reflexione e interprete para extraer información y así resolver el problema, y que además hace referencia a la actividad de la visualización matemática, la misma que de no desarrollarse puede generar la presencia de dificultades para resolver un determinado tipo de problema.

2.3.4 *Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos*

Radatz (1979) también propone la existencia de errores matemáticos originados por el ‘deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos’, los cuales según este autor incluyen aspectos como: “ignorancia de los algoritmos, el dominio inadecuado de los hechos básicos, los procedimientos incorrectos en la aplicación de cálculos matemáticos y el conocimiento poco inteligente de los conceptos y símbolos necesarios” (p.166).

Para entender el error anteriormente descrito, se aborda las implicancias de los aspectos a los que hace alusión Radatz, tomando como referencia investigaciones realizadas por otros autores. Calvo (2008), explica que el desarrollo de habilidades intelectuales en el aprendizaje de la matemática es indispensable para formar estudiantes competentes, lo que significa que habrá mayor predisposición a la comprensión de los contenidos y que los puedan relacionar con situaciones cotidianas para poder resolver problemas, además asegura que:

> Con el desarrollo de ciertas habilidades, se busca además incrementar la inteligencia lógica matemática en la población estudiantil, la cual consiste en la facilidad para identificar diversidad de figuras geométricas, resolver operaciones numéricas complejas con facilidad y gusto, utilizar el pensamiento abstracto y solucionar problemas que pueda relacionar con la vida cotidiana. (p.130)

Por otro lado, respecto al dominio de los hechos y conceptos matemáticos, Castro et al (2016), quienes toman como referencia una investigación de Baroody, Feil y Johnson, proponen que “el conocimiento conceptual se define como el conocimiento acerca de los hechos, generalizaciones y principios” (p.49), esto significaría que la comprensión de hechos matemáticos es evidencia del dominio del conocimiento conceptual de la asignatura que tiene el estudiante, el cual Calvo (2008) considera importante debido a que, “a todos les será necesario alcanzar cierto dominio en la utilización de conceptos básicos en matemática, pues resultan indispensables, tanto para su futura ocupación laboral como para su vida" (p.128), e incluso Castro et al (2016), con el siguiente argumento, sustentan esta idea, "El conocimiento de los conceptos se utiliza para generar y seleccionar los procedimientos necesarios para la resolución de problemas en un determinado dominio" (p.51), por lo que se puede inferir que el dominio de conceptos y hechos de la asignatura serían considerados como insumos necesarios y con los que deben contar los estudiantes que aprenderán la asignatura.

El hecho que se promueva "el dominio de habilidades, hechos y conceptos" en la matemática, es contemplado también en la Propuesta Educativa planteada por el Ministerio de Educación Peruano para los estudiantes en toda su formación escolar, y es que para ser exactos es en el Currículo Nacional de la Educación Básica (2017) donde se establecen no solo los aprendizajes que deberían lograr los estudiantes, sino también el perfil de egreso que deben tener cuando concluyan la Educación Básica, por tal motivo se proponen cuatro definiciones curriculares que permiten concretar este *perfil de egreso* las cuales son: las competencias, las capacidades, los estándares y los desempeños; pero son específicamente 'las capacidades', las cuales se enfocan en la importancia del dominio de los conocimientos, habilidades y actitudes que debe tener un estudiante para que sea competente en cualquier tipo de situación,

> Las capacidades son recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. (…) Los conocimientos son las teorías, conceptos y procedimientos legados por la humanidad en distintos campos del saber. La escuela trabaja con conocimientos construidos y validados por la sociedad global y por la sociedad en la que están insertos. De la misma forma, los estudiantes también construyen conocimientos. De ahí que el aprendizaje es un proceso vivo, alejado de la repetición mecánica y memorística de los conocimientos preestablecidos. (p.21)

Por lo tanto, se puede evidenciar que un componente necesario en el aprendizaje de la asignatura de matemática son, en primera instancia, las habilidades específicas las cuales de una forma u otra garantizan la operatividad y el desenvolvimiento del estudiante frente a situaciones problemáticas; y en segunda instancia, el conocimiento de hechos y conceptos de la materia, los cuales son los que están incluidos en la enseñanza escolar y es a través de las habilidades matemáticas que éstos se operativizan:

> El contenido matemático escolar expresa un marco general que se puede singularizar por temas; marca la experiencia adquirida por cada comunidad de educadores matemáticos, nacional o local. Se refiere al saber acumulado respecto a los significados de los temas del programa y establece un marco de referencia sobre el cual diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula. (Gómez, 2007, p.38)

Capítulo 3
Metodología de la investigación

3.1 Tipo de investigación

La presente investigación tiene alcance descriptivo, al respecto Hernández et al (2010) refiere: "Los **estudios descriptivos** buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (p.80), por lo tanto esta definición se ajusta a los objetivos del presente estudio, los cuales están orientados a la búsqueda específica y evaluación de la presencia de tipos de errores matemáticos que cometen los estudiantes de primer año de la Facultad de Ciencias de la Educación en la asignatura de Matemática Básica de la Universidad de Piura.

3.2 Diseño de investigación

La investigación es de diseño no experimental, debido a que solo se ha recogido información para un análisis posterior y además no se ha manipulado ninguna de las variables del presente estudio (Hernández et al, 2010). Los datos a evaluar se han recogido en un momento específico, el cual fue durante el desarrollo del curso, por lo tanto, de acuerdo al tiempo es de tipo transeccional. Esto va en concordancia a lo expuesto por Hernández et al (2010): "Los diseños de investigación transeccional o transversal recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado" (p.151).

El estudio realizado evaluó la presencia de errores matemáticos cometidos por los estudiantes en la asignatura de Matemática Básica y las razones de la presencia de cada uno de éstos. Por esta característica, el diseño es descriptivo, lo cual se corresponde con lo planteado por Hernández et al (2006): "Los estudios descriptivos únicamente pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren" (p.102).

3.3 Población y muestra

La población estuvo conformada por noventa (90) estudiantes matriculados en el semestre académico 2015-I y que cursaron la asignatura de Matemática Básica en la Universidad de Piura, Facultad de Ciencias de la Educación. La investigación se realizó con todos los estudiantes en dicha asignatura, es decir, no se seleccionó ninguna muestra.

3.4 Variable de investigación

La investigación medirá la variable: Frecuencia de errores matemáticos en la solución de ejercicios y problemas de conjuntos y sistemas numéricos que cometen estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura.

3.4.1 *Definición conceptual*

Variable: Errores matemáticos en la solución de ejercicios y problemas

La concepción de error matemático como tal, es descrita y explicada por De La Torre (2004) de la siguiente forma: “el ‘error’ es una variable concomitante al proceso educativo, porque no es posible avanzar en un largo y desconocido camino sin equivocarse” (p.33).

Básicamente esto se refiere que el error matemático es una constante en todo proceso de aprendizaje, y debe ser reconocido como tal para no pasarlo por alto y procurar que los estudiantes tengan aprendizajes más significativos.

3.4.2 *Definición operacional*

A continuación, en la Tabla 2 se ofrece la definición operacional de la variable en estudio, así como sus dimensiones. Todo ello, sistematizado en la matriz de operacionalización de la variable.

Tabla 2

Matriz de operacionalización

Variable	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores
Errores matemáticos	Los errores son una fuente de información para el profesor acerca de lo que han aprendido los estudiantes y cómo lo han aprendido (...). Es más, son el síntoma indicativo de alguna patología subyacente, un método falso que el estudiante cree correcto (Gómez, 1995, p.314).	Error 01: Errores debidos a dificultades en el lenguaje	Interpretar y traducir problemas
		Error 02: Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Reconocer procedimientos y conocimientos específicos
		Error 03: Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	Representar e interpretar información comunicada a través de gráficas y diagramas.
		Error 04: Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.	Aplicación de conceptos específicos para resolver ejercicios y problemas

Fuente: Elaboración propia

3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Los datos se recogieron a través de cuestionarios que ya habían sido propuestos por la docente responsable de la asignatura de Matemática Básica, por lo que respecto a ellos no se requirió de validación de jucio de expertos, sin embargo, para analizar la presencia de los errores matemáticos previstos en los cuatro instrumentos seleccionados, se requirió del diseño de una matriz de especificación del instrumento (Apéndice C), la cual incluyó 25 indicadores referidos a los cuatro errores matemáticos estudiados; y además se ha incluido un registro del conteo de errores por estudiante (Apéndice D).

3.5.1 *Validación*

Los cuestionarios que se aplicaron a los estudiantes no se validaron, debido a que para evaluar la presencia de errores se requerían circunstancias desde donde los estudiantes puedan resolver situaciones problemáticas y pongan a prueba el dominio de determinados contenidos; por ello es que con autorización de la docente responsable de la asignatura de Matemática Básica, se tomaron cuatro cuestionarios (evaluaciones) propuestos y diseñados por ella para evaluar a sus estudiantes matriculados en la asignatura y las respuestas a cada una de las preguntas planteadas en los instrumentos de recogida de información. Sin embargo, para garantizar la objetividad en el análisis de información respecto a la presencia de cada uno de los cuatro errores matemáticos que se abordaron en el presente estudio sí fue necesaria la realización de la validación mediante juicio de expertos de un listado de veinticinco indicadores para categorizar cada uno de los cuatro errores matemáticos; la validez de este instrumento se midió a partir de una Ficha de Validación adaptada con la que se buscaba certificar que los indicadores propuestos para el análisis de cada error sean los idóneos, la cual fue planteada tomando como referencia una propuesta de validación hecha por el Mgtr. Juan Carlos Zapata con la que se aprueban o no cuestionarios (o instrumentos de recogida de información). Para ello, se solicitó el apoyo profesional de tres especialistas: Uno en Investigación Educativa y dos en la asignatura de Matemática. Los resultados del juicio de expertos se presentan en los Anexos E, F y G.

El resultado se expone en la Tabla 3:

Tabla 3

Resultados de la validación del instrumento

Expertos	Experto 1	Experto 2	Experto 3	Promedio
Puntaje	1,0	0,9	0,96	0,95

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con los resultados, se determina que todos los expertos evaluaron de manera favorable el instrumento, considerando que tenía una excelente validez, esto significa que está diseñado para clasificar los errores cometidos por los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación en la asignatura de Matemática Básica para su posterior cuantificación.

3.5.2 *Descripción de los instrumentos de recogida y análisis de información*

Para la recolección de datos se utilizó cuestionarios aplicados a los estudiantes durante el desarrollo del curso de Matemática Básica, ésta es una de las asignaturas generales que deben cursar todos los estudiantes que ingresan al primer ciclo en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura. Desde la asignatura se propone contenidos matemáticos con los que el estudiante ya ha estado familiarizado desde su formación en la escolaridad; sin embargo, son abordados con un grado mayor de abstracción y complejidad para potenciar las habilidades cognitivas del estudiante. Esta asignatura fue evaluada mediante pruebas escritas (cuestionarios, los cuales no fueron validados mediante juicio de expertos): un Examen Parcial, un Examen Final, dos prácticas aplicadas antes del Examen Parcial (N°1 y N°2), dos prácticas aplicadas antes del Examen Final (N°3 y N°4) y controles (de los cuales se promediaron y se obtuvo una calificación); sin embargo, para la realización del estudio solo se tomó cuatro instrumentos: Las prácticas 1, 2 y 3; y el Examen Parcial. En la práctica N°1 se evaluó contenidos referentes a la temática de conjuntos, específicamente representar conjuntos por extensión y comprensión, identificar qué tipo de conjuntos eran los que se presentaban según el número de elementos, e identificar casos de pertenencia e inclusión. En la práctica N°2 se evaluaron algunos contenidos evaluados en la práctica N°1, pero se agregó preguntas en las que debían realizar representaciones gráficas y simbólicas de las operaciones entre conjuntos y se planteó un problema. En el Examen Parcial, se incluyeron contenidos de conjuntos y sistemas numéricos; respecto a este instrumento es necesario precisar que se decidió omitir del estudio de la pregunta 5 debido a que solo un estudiante la respondió correctamente y el resto no la respondieron o colocaron números que no tenían una lógica aparente (ver Anexo D). Finalmente, en la práctica N°3, se incluyó el contenido referido a sistemas numéricos, específicamente operaciones combinadas con fracciones y problemas en los que debían plantear ecuaciones; en este instrumento se determinó omitir la pregunta 1, debido a que lo que se solicitó en este instrumento fue: 'Elaborar un organizador visual sobre la clasificación de fracciones y decimales' lo cual más que resolver problemas de aplicación de contenidos se trataba de recordar teoría y organizarla; asimismo, en la pregunta 4d se decidió omitirla del estudio de errores debido a que todos los estudiantes o no la respondieron o solo la dejaron sin contestar o solo transcribieron algunos datos, pero no hubo procedimientos que reflejen intento de planteamiento y solución al mismo. Finalmente, respecto a la pregunta 4f, es importante aclarar que aunque la premisa exige dos actividades: Representar mediante una fracción que representa cada una de las cuatro figuras y Ordenar los números fraccionarios que se obtuvieron de la primera premisa, sólo se evaluó la segunda, debido a que en la primera todos los estudiantes la resolvieron correctamente y por defecto no hubo manifestación de errores, sin embargo, cuando los estudiantes debían consignar la posición de una fracción respecto a las demás se evidenciaron las dificultades que tenían, por eso es que esta premisa sí fue evaluada como escenario de errores. (Ver Anexo C)

En cada cuestionario se han incluido ejercicios y problemas de contenido matemático: conjuntos y sistemas numéricos, y respecto a las preguntas propuestas es importante mencionar que se contempló analizar no sólo la respuesta final que dieron los estudiantes, sino también evaluar los procedimientos que siguieron para poder resolver cada situación problemática planteada. Por ello, es que se han considerado dos escenarios desde donde se evaluaría la presencia del error matemático: desde las respuestas finales en base a lo que se solicitaba en cada pregunta y en los apartados de ella; y los procedimientos que ejecutaron los estudiantes al resolverla. (Apéndice E). Estos dos escenarios desde donde se evaluó la presencia de errores matemáticos cometidos por los estudiantes, serán llamados en adelante ítems.

Para analizar la presencia de errores matemáticos de acuerdo a las cuatro categorías propuestas por Radatz (1979) y abordadas desde el presente estudio, se requirió de un segundo instrumento (el cual fue validado mediante juicio de expertos) que contiene un listado de veinticinco indicadores, de los cuales 6 correspondían al Error 1, 6 fueron respecto al Error 2, 3 sobre el Error 3, y 10 indicadores respecto al Error 4, los mismos que fueron propuestos a partir de una exhaustiva revisión de bibliografía especializada que permitieron al investigador poder identificar, evaluar y categorizar cada uno de los errores que cometían los estudiantes, para posteriormente realizar el conteo de los mismos. Es importante añadir que la cantidad de indicadores propuestos para evaluar cada error no fue uniforme debido que éstos fueron planteados considerando el tipo de preguntas, contenido y procedimientos contemplados en cada uno de los cuatro cuestionarios, por ejemplo, el Error 3 solo fue abordado desde 13 ítems, sin embargo, el Error 4 desde 146 (ver Tabla 4).

En primera instancia, se ha realizado el conteo total de todos los escenarios de posibles errores matemáticos: ítems, y luego se han categorizado de acuerdo a la tipología propuesta por Radatz (1979), que es la que se abordará en el presente estudio. El detalle de lo descrito aparece en la Tabla 4.

Tabla 4

Cantidades de ítems que constituyen cada tipo de error

		Nº de ítems
E1:	Errores debidos a dificultades en el lenguaje	133
E2:	Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	78
E3:	Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	13
E4:	Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.	146
Total		370

Fuente: Elaboración propia

Debido a la notoria diferencia entre la cantidad de ítems por cada uno de los errores matemáticos y efectos de comparación entre las proporciones de errores cometidos en un tipo u otro se trabajaron con el porcentaje de errores cometidos en cada una de las cuatro categorías. Para ello en primer lugar se identificó las cantidades mínimas y máximas de la frecuencia en la comisión de errores matemáticos Apéndice F y luego se realizaron cálculos[8] para establecer los porcentajes mínimos y máximos de ítems en los que los estudiantes cometieron errores. Tabla 5.

Tabla 5

Porcentajes mínimos y máximos de ítems errados cometidos

	N	Mínimo	Máximo
E1: Errores debidos a dificultades en el lenguaje	90	1%	43%
E2: Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	90	0	54%
E3: Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	90	0	92%
E4: Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.	90	0	41%
N válido (por lista)	90		

Fuente: Elaboración propia

Por el exceso de valores diferentes en los tipos de error: E1, E2 y E4, para una mejor descripción se resumió en intervalos, considerando 5 intervalos, que es el mínimo recomendado (Córdova, 2003, p. 14). En el Error 3 (E3), no fue necesario hacer agrupamientos por intervalos, por lo que se realizó un conteo de estudiantes que cometían determinados números de errores que van desde un mínimo de 0 y un máximo de12.

Para los errores debidos a dificultades del lenguaje (E1), el porcentaje mínimo de error es de 1% y el más alto 43%, de la diferencia de estos dos valores se obtuvo el rango. A continuación, de acuerdo a la teoría se trabajará con 5 intervalos, que es el mínimo recomendado (Córdova, 2003), y finalmente el tamaño del intervalo de clase (T.I.C) o amplitud se obtendrá del cociente del rango y el número de clases. Luego, el rango y tamaño del intervalo de clase respectivamente, son:

$$rango = 43\% - 1\% = 42\%;\ T.I.C = \frac{42\%}{5} \cong 9\%$$

Para los errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento (E2), el porcentaje más bajo es cero y el más alto 54%. Por tanto, el rango y tamaño del intervalo de clase (T.I.C), respectivamente, son:

[8] Por ejemplo: Para trabajar el Error 1, éste tiene 133 ítems desde donde se evalúa su presencia, sin embargo, en los procedimientos realizados por los estudiantes se detectó que la cantidad mínima de veces en las que ellos cometieron este error fue 1 y la máxima fue 57. A partir de ello se realiza una regla de tres simple, para encontrar el porcentaje que representan las cantidades: 1 (1%) y 57 (43%). Con esta información obtenida, se entiende que el rango de errores oscila entre el 1% y 43%. De esta forma se trabajará con los otros 3 errores.

$$rango = 54\% - 0\% = 54\%;\ T.I.C = \frac{54\%}{5} \cong 11\%$$

Para los errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos (E4), el porcentaje más bajo es cero y el más alto 41%. En este caso es importante precisar que, aunque el cociente (8,2) entre el rango y número de clases en condiciones regulares no permita el redondeo, la teoría estadística explicada por Córdova (2003) enuncia que: "Si la división $A = \frac{R}{k}$ no es exacta en el número de decimales de los datos, entonces, el número A se aproxima por exceso de manera que se cubra todo el rango, esto es, de manera que $kA \geq R$" (p. 15). En consecuencia, el rango y tamaño del intervalo de clase (T.I.C), respectivamente, son:

$$rango = 41\% - 0\% = 41\%;\ T.I.C = \frac{41\%}{5} \cong 9\%$$

Además, se usará la opción de intervalos cerrados a la izquierda y abiertos a la derecha (Córdova, 2003, p. 15) y el último intervalo será cerrado. Esto es

[a; a + T.I.C⟩; [a + T.I.C; a + 2T.I.C ⟩; …; [a + (k – 1)T.I.C; a + kT.I.C]; a: mínimo valor.

En segunda instancia, se ha realizado el conteo total de ítems organizados de acuerdo al tipo de contenido que se ha analizado (Conjuntos y sistemas numéricos), ver Tabla 6.

Tabla 6

Cantidades de ítems que miden cada tipo de error según la temática evaluada

	Error 1	**Error 2**	**Error 3**	**Error 4**	**Total**
Conjuntos	74	43	13	17	147
Sistemas numéricos	59	35	0	129	223

Fuente: Elaboración propia

Al igual que para realizar el análisis global de la cantidad de errores, para la identificación de cada uno de los cuatro errores establecidos considerando los contenidos evaluados, también fue necesario detectar las cantidades mínimas y máximas de errores cometidos de acuerdo al tipo de contenido (Apéndice G), y luego se realizaron los cálculos pertinentes, siguiendo el mismo orden con el que se establecieron los porcentajes mínimos y máximos presentados en la tabla 5, pero ahora respecto al tipo de contenido matemático. De esta forma se establecieron los porcentajes mínimos y máximos de errores cometidos por los estudiantes, de acuerdo al tipo de contenido evaluado. Tabla 7.

Tabla 7

Porcentajes mínimos y máximos de ítems en los que se registraron errores, de acuerdo al tipo de error y al contenido matemático evaluado

	Contenidos matemáticos	N	Mínimo	Máximo
E1: Errores debidos a dificultades en el lenguaje	Conjuntos	90	1,4%	48,6%
	Sistemas numéricos		0	59,3%
E2: Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Conjuntos	90	0	55,8%
	Sistemas numéricos		0	77,1%
E3: Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	Conjuntos	90	0	92,3%
	Sistemas numéricos		No hubo ítems	
E4: Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.	Conjuntos	90	0	70,6%
	Sistemas numéricos		0	38,8%
N válido (por lista)		90		

Fuente: Elaboración propia

Al observar los datos presentados en la tabla de porcentajes máximos y mínimos se distingue que hay un exceso de valores diferentes en los tipos de error de acuerdo al contenido, por ejemplo, en el caso de los errores 1 y 2 (para ambos contenidos) y Error 4 (solo para el contenido de sistemas numéricos), por esta razón es que para una mejor descripción se resumirá en intervalos, considerando 5 clases, que es el mínimo recomendado (Córdova, 2003). En el caso del Error 3 (ambos contenidos) y en el Error 4 (solo para el contenido de conjuntos) no fue necesario agrupar en intervalos y solo se realizó el conteo.

Para los errores debidos a dificultades del lenguaje (E1), el porcentaje mínimo de la frecuencia de comisión de error es 1,4% y el más alto 48,6%, de la diferencia de estos dos valores se obtuvo el rango. A continuación, de acuerdo a la teoría se trabajará con 5 intervalos, que es el mínimo recomendado (Córdova, 2003), luego el tamaño del intervalo de clase (T.I.C) o amplitud se obtendrá del cociente del rango y el número de clases. En este caso es importante precisar que, aunque el cociente (9,44) entre el rango y número de clases en condiciones regulares no permita el redondeo, la teoría estadística explicada por Córdova (2003) permite establecer que el cociente sea 9,5 lo cual lo expresa de la siguiente forma: "Si los datos son enteros A es entero, si los datos tienen un decimal A tiene un decimal, etc. Por ejemplo, si los datos tienen dos decimales y si $\frac{R}{k} =$ 5,3416, se elige $A =$5,35. (no 5,34)" (p.15). En consecuencia, el rango y tamaño del intervalo de clase (T.I.C), respectivamente, son:

$$rango = 48{,}6\% - 1{,}4\% = 47{,}2\%;\ T.I.C = \frac{47{,}2\%}{5} \cong 9{,}44 \sim 9{,}5\%$$

Para los errores debidos a dificultades en el lenguaje (E1) respecto al *contenido de sistemas numéricos*, el porcentaje más pequeño es 0% y el más alto 59,3%. Luego, el rango y tamaño del intervalo de clase (T.I.C), respectivamente, son:

$$rango = 59{,}3\% - 0\% = 59{,}3\%;\ T.I.C = \frac{59{,}3\%}{5} \cong 11{,}9\%$$

Para los errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento (E2), respecto al *contenido de conjuntos* el porcentaje más pequeño es cero y el más alto 55,8%. Por tanto, el rango y tamaño del intervalo de clase (T.I.C), respectivamente, son:

$$rango = 55{,}8\% - 0\% = 55{,}8\%;\ T.I.C = \frac{55{,}8\%}{5} \cong 11{,}2\%$$

Para los errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento (E2), respecto al *contenido de sistemas numéricos* el porcentaje más pequeño es cero y el más alto 77,1%. Por tanto, el rango y tamaño del intervalo de clase (T.I.C), respectivamente, son:

$$rango = 77{,}1\% - 0\% = 77{,}1\%;\ T.I.C = \frac{77{,}1\%}{5} \cong 15{,}42 \sim 15{,}5\%$$

Para los errores debido al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos (E4), respecto al *contenido de sistemas numéricos* el porcentaje más pequeño es cero y el más alto 38,8%. En consecuencia, el rango y tamaño del intervalo de clase (T.I.C), respectivamente, son:

$$rango = 38{,}8\% - 0\% = 38{,}8\%;\ T.I.C = \frac{38{,}8\%}{5} \cong 7{,}8\%$$

También se usará la opción de intervalos cerrados a la izquierda y abiertos a la derecha (Córdova, 2003, p. 15) y el último intervalo será cerrado. Esto es:

[a; a + T.I.C⟩; [a + T.I.C; a + 2T.I.C ⟩; …; [a + (k – 1)T.I.C; a + kT.I.C]; a: mínimo valor.

3.6 Procedimiento de organización y análisis de datos

Para el procesamiento de los datos, y su posterior análisis, se utilizó el software estadístico IBM SPSS siguiendo el siguiente procedimiento:

3.6.1 *Codificación y análisis de respuestas*

Se estableció un sistema de códigos, que permitió valorar la presencia de errores en cada uno de los ítems de cada instrumento de evaluación aplicado a los estudiantes del curso de Matemática Básica, esta codificación fue numérica y se estableció de la siguiente forma:

- 2 = No hay error
- 1 = Sí hay error
- 0 = No respondida

3.6.2 *Planteamiento de indicadores para detección de errores matemáticos*

Se planteó un total de 25 indicadores los cuales permitieron evaluar la presencia de cada tipología de errores matemáticos que podrían cometer los estudiantes del curso de Matemática Básica.

3.6.2.1 Errores debidos a dificultades en el lenguaje. En el trabajo de investigación se identifica la presencia de este error, evaluando cada una de las preguntas de los instrumentos de evaluación aplicados a los estudiantes mediante el planteamiento de los siguientes indicadores.

- Indicador 01: Representa por extensión, los elementos de un conjunto expresado por comprensión, a través de lenguaje verbal.
- Indicador 02: Representa por extensión, los elementos de un conjunto expresado por comprensión, a través de lenguaje simbólico.
- Indicador 03: Reconoce la pertenencia y no pertenencia de los elementos de un conjunto, a partir de la simbología empleada en el ítem.
- Indicador 05: Reconoce las características que definen la inclusión entre un conjunto y otro, a partir de la simbología empleada en el ítem.
- Indicador 11: Representa simbólicamente relaciones entre elementos de varios conjuntos, mediante el uso de las operaciones (unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica, complemento) entre éstos.
- Indicador 14: Representa simbólicamente y/o verbalmente la información comunicada en modo verbal en el problema.

3.6.2.2 Errores debidos a la rigidez del pensamiento o asociaciones incorrectas. En el trabajo de investigación se identifica la presencia de este error, evaluando cada una de las preguntas de los instrumentos de evaluación aplicados a los estudiantes mediante el planteamiento de los siguientes indicadores:

- Indicador 07: Reconoce las características que definen la inclusión entre conjuntos, para poder diferenciarla de la pertenencia.
- Indicador 08: Reconoce e identifica las características que definen a cada operación entre conjuntos, de acuerdo al contexto en el que aparecen.
- Indicador 13: Efectúa la conversión de decimales periódicos mixtos a fracciones, para poder resolver operaciones combinadas.
- Indicador 15: Reconoce y aplica la teoría sobre operaciones con fracciones (adición, sustracción, producto y cociente)
- Indicador 18: Efectúa la conversión de números decimales exactos a fracciones, para resolver operaciones combinadas.
- Indicador 20: Convierte decimales periódicos puros a fracciones, para poder resolver operaciones combinadas.

3.6.2.3 Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. En el trabajo de investigación se identifica la presencia de este error, evaluando cada una de las preguntas de los instrumentos de evaluación aplicados a los estudiantes mediante el planteamiento de los siguientes indicadores:

- Indicador 09: Representa gráficamente las relaciones de pertenencia entre los elementos de varios conjuntos.
- Indicador 10: Representa gráficamente las relaciones de inclusión entre conjuntos.
- Indicador 12: Representa gráficamente (empleando diagramas de Venn) relaciones entre varios conjuntos utilizando las operaciones (unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica, complemento) entre éstos.

3.6.2.4 Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos. En el trabajo de investigación se identifica la presencia de este error, evaluando cada una de las preguntas de los instrumentos de evaluación aplicados a los estudiantes mediante el planteamiento de los siguientes indicadores.

- Indicador 04: Reconoce e identifica las características que definen a un conjunto, de acuerdo al contexto en el que aparece.
- Indicador 06: Clasifica conjuntos según el número de elementos, a partir de conjuntos expresados por comprensión.
- Indicador 16 (1): Efectúa la división del m.c.m. por el denominador de la fracción.
- Indicador 16 (2): Efectúa el producto, del cociente con el numerador de la fracción.
- Indicador 16 (3): Efectúa la adición y/o sustracción de los numeradores de la fracción.
- Indicador 17: Ejecuta procedimientos para resolver operaciones entre números enteros y fracciones.
- Indicador 19: Convierte números mixtos a fracciones, para poder resolver operaciones combinadas.
- Indicador 21: Aplica las leyes de exponentes para expresar un número en bases que permitan resolver ejercicios con mayor rapidez.
- Indicador 22: Aplica la ley de exponentes, producto de potencias de una base común.
- Indicador 23: Aplica la ley de exponentes, cociente de potencias de una base común.
- Indicador 24: Ejecuta procedimientos para resolver ecuaciones.
- Indicador 25: Extrae el m.c.m. para resolver adición y sustracción de fracciones heterogéneas.

3.6.3 *Elaboración de base datos*

Se diseñó una tabla de conteo que incluyó el total de errores, considerando la clasificación de cuatro errores usada en la investigación. En esta tabla se incluyeron los cuatro cuestionarios y se disgregó en los ítems y procedimientos en cada pregunta, además se consideró una vista de datos para registrar las respuestas registradas en la tabla. Las respuestas registradas permitieron generar nuevas variables según los objetivos de la investigación, Figura 1.

3.6.4 *Elaboración de tablas*

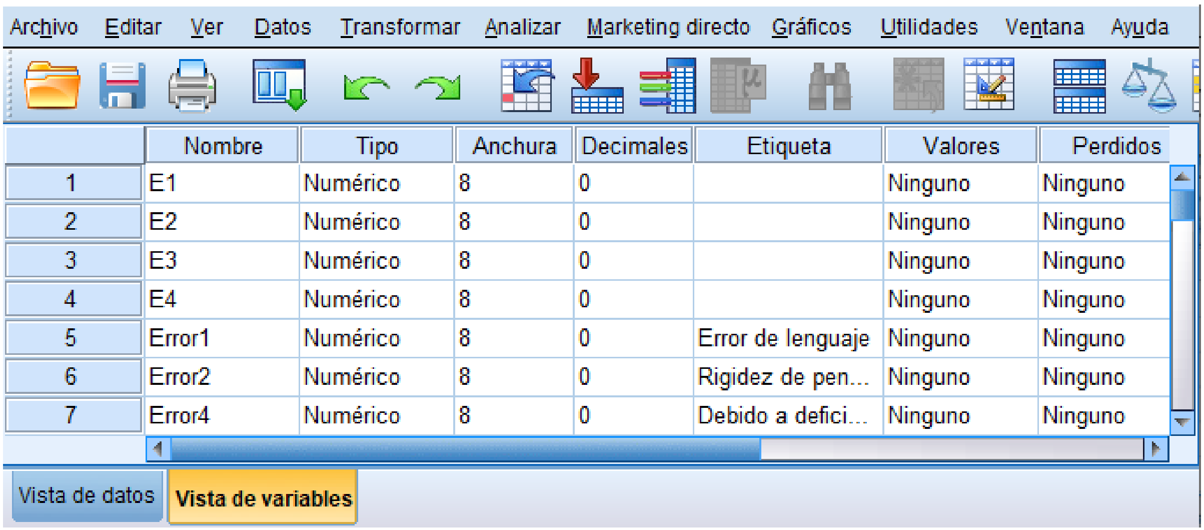
Las respuestas recogidas se organizaron en tablas simples considerando los cuatro grupos de errores matemáticos y los tipos de contenido de la asignatura desde los que se evaluó su presencia.

3.6.5 *Elaboración de gráficas*

Se elaboraron gráficos a partir de las tablas de recuento que incluían los porcentajes mínimos y máximos en los que los estudiantes de la asignatura de Matemática Básica cometieron errores.

Figura 1

Vista de variables de la base de datos



	Nombre	Tipo	Anchura	Decimales	Etiqueta	Valores	Perdidos
1	E1	Numérico	8	0		Ninguno	Ninguno
2	E2	Numérico	8	0		Ninguno	Ninguno
3	E3	Numérico	8	0		Ninguno	Ninguno
4	E4	Numérico	8	0		Ninguno	Ninguno
5	Error1	Numérico	8	0	Error de lenguaje	Ninguno	Ninguno
6	Error2	Numérico	8	0	Rigidez de pen...	Ninguno	Ninguno
7	Error4	Numérico	8	0	Debido a defici...	Ninguno	Ninguno

Fuente: Elaboración propia

3.6.6 *Descripción e interpretación de resultados*

Se describieron los resultados procesados más relevantes de las tablas y gráficos, de acuerdo a los hallazgos según cada objetivo propuesto. Se interpretaron los porcentajes mínimos y máximos en cada error matemático y también de acuerdo a la temática abordada, se intenta abordar las causas de la existencia de los mismos.

Capítulo 4
Análisis e interpretación de resultados

En este capítulo se presenta de forma sistematizada la información recogida y organizada a partir de los cuestionarios aplicados a los estudiantes matriculados en la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura.

Los resultados de la investigación, serán presentados a través de tablas de distribución de porcentajes de frecuencia absoluta e histogramas en los que se muestra el conteo total de errores cometidos de acuerdo al contenido (Teoría de conjuntos y Sistemas numéricos) y a cada una de las cuatro categorías de errores de acuerdo a la propuesta hecha por Radatz (1979), e incluso dentro del estudio de cada error se ha hecho un sub estudio, con el que se ha analizado la presencia de cada error de acuerdo a cada uno de los dos contenidos abordados en la asignatura. Con estos resultados se busca dar respuesta al objetivo general del estudio: Identificar los errores matemáticos en la solución de ejercicios y problemas de conjuntos y sistemas numéricos que cometen estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, lo cual se muestra en la parte final cuando se presenta el balance general de resultados. Finalmente se presenta la discusión de resultados obtenidos en esta investigación, comparándolos con resultados obtenidos en los estudios de los antecedentes y marco teórico.

4.1 Resultados de investigación

La investigación busca dar respuesta a un objetivo general y cinco objetivos específicos propuestos para orientar el curso de la misma. En cuanto al objetivo general, con los resultados se definirá en qué contenido matemático hay mayor presencia de errores (O bien teoría de conjuntos o sistemas numéricos) y respecto a los cinco objetivos específicos planteados; el primero de ellos es sobre la definición de la clasificación de errores que se eligió para la realización del análisis del presente estudio (el cual es abordado en el capítulo 2), y los otros cuatro que permiten identificar y medir la frecuencia con que los estudiantes cometen errores matemáticos: debidos a dificultades con el lenguaje, debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento, debidos a dificultades para obtener información espacial y debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos; y finalmente se muestra un balance general para poder comparar todos los errores y determinar cuál es el más frecuente.

4.1.1 *Errores matemáticos en relación a la teoría de conjuntos y sistemas numéricos*

El objetivo general busca identificar con qué frecuencia cometen errores matemáticos en la solución de ejercicios y problemas de conjuntos y sistemas numéricos los estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura. La identificación de estos tipos de errores se ha realizado para cada uno de los temas y se medirán en porcentajes dado que la cantidad de ítems de cada tipo es diferente, tabla 6 (Ver en capítulo 3).

4.1.1.1 Errores cometidos por los estudiantes en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos. El porcentaje promedio de errores cometidos por los participantes de la investigación en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos fue de 21,6% y la desviación estándar es de 10,3%; asimismo el 50% de los estudiantes incurrió en error en el 21,1% de ítems o menos que miden el desarrollo de problemas de teoría de conjuntos y el otro 50% se equivocó en el 21,1% o más ítems de este tipo de problemas matemáticos. También, el porcentaje de ítems más frecuente donde los estudiantes cometieron errores en problemas sobre teoría de conjuntos, es 20,4%, siendo el porcentaje mínimo de ítems con error en esta temática de 2% y el máximo porcentaje 52,4%, tal como se muestra en la Tabla 8.

Tabla 8

Medidas descriptivas de los errores en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos

Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Moda	Desviación estándar
2%	52,4%	21,6%	21,1 %	20,4%	10,3%

Fuente: Elaboración propia

De todos los participantes de la investigación, 18 de ellos (20%) cometieron error en menos del 12,1% de ítems en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos, un bajo número de participantes, 2 estudiantes (2.2%) cometieron error en el 42,4% de ítems o más; 31 estudiantes (34,4%) cometieron el 12,1% de errores o más pero menos del 22,2% errores; 25 estudiantes (27,8%) cometieron error desde 22,2% o más ítems y, menos del 32,3%, y solo hubo un 15,6% de estudiantes que cometió entre 32,3% y 43,4% de errores (ver Tabla 9).

Tabla 9

Distribución de frecuencias de los porcentajes de errores en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos.

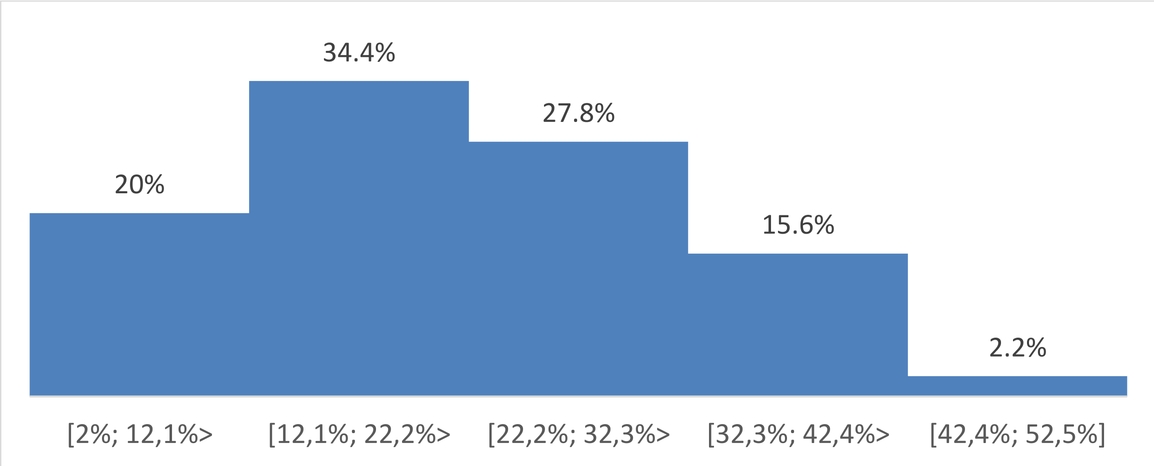
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[2%; 12,1%⟩	18	20	20
[12,1%; 22,2%⟩	31	34,4	54,4
[22,2%; 32,3%⟩	25	27,8	82,2
[32,3%; 42,4%⟩	14	15,6	97,8
[42,4%; 52,5%]	2	2,2	100,0
Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 82,2% de estudiantes que participaron de la investigación incurrieron en error en menos del 32,3% de ítems que corresponden a ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, de los cuales el 62,2% de estudiantes se equivocaron desde el 12,1% de ítems hasta menos del 32,3% de ítems Figura 2.

Figura 2

Histograma de frecuencias de los porcentajes de errores en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos



Fuente: Elaboración propia

4.1.1.2 Errores cometidos por los estudiantes en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos. El porcentaje promedio de errores cometidos por los participantes de la investigación en la solución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, fue de 14,2% y la desviación estándar es de 9,37%; asimismo el 50% de los estudiantes cometió error en el 12,3% de ítems o menos de los ítems correspondientes al desarrollo de problemas de sistemas numéricos y el otro 50% cometió el 12,3% o más errores de este tipo. Asimismo, se encontró que el porcentaje de errores en los ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos más frecuente cometido por los estudiantes fue 9,4%, siendo el porcentaje mínimo de errores en esta temática 0,9% y el máximo 43,5%, tal como se muestra en la Tabla 10.

Tabla 10

Medidas descriptivas de los errores en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos

Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Moda	Desviación estándar
0,9%	43,5%	14,2%	12,3%	9,4%	9,37%

Fuente: Elaboración propia

Del total de participantes en la investigación, 37 de ellos (41,1%) cometió error en menos del 9,5% de ítems en la solución de ejercicios y problemas relacionados a los sistemas numéricos, 28 estudiantes cometieron desde 9,5% hasta menos del 18,1% de errores un participante (1,1%) cometió 35,3% o más errores de este tipo, mientras que 10 estudiantes (11,1%) cometieron error desde 26,7% hasta menos de 35,3% ítems, y finalmente el 15,6% de estudiantes cometen desde 18,1% hasta 26,7% en la solución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, tal como se muestra en la Tabla 11.

Tabla 11

Distribución de frecuencias de los porcentajes de error en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos

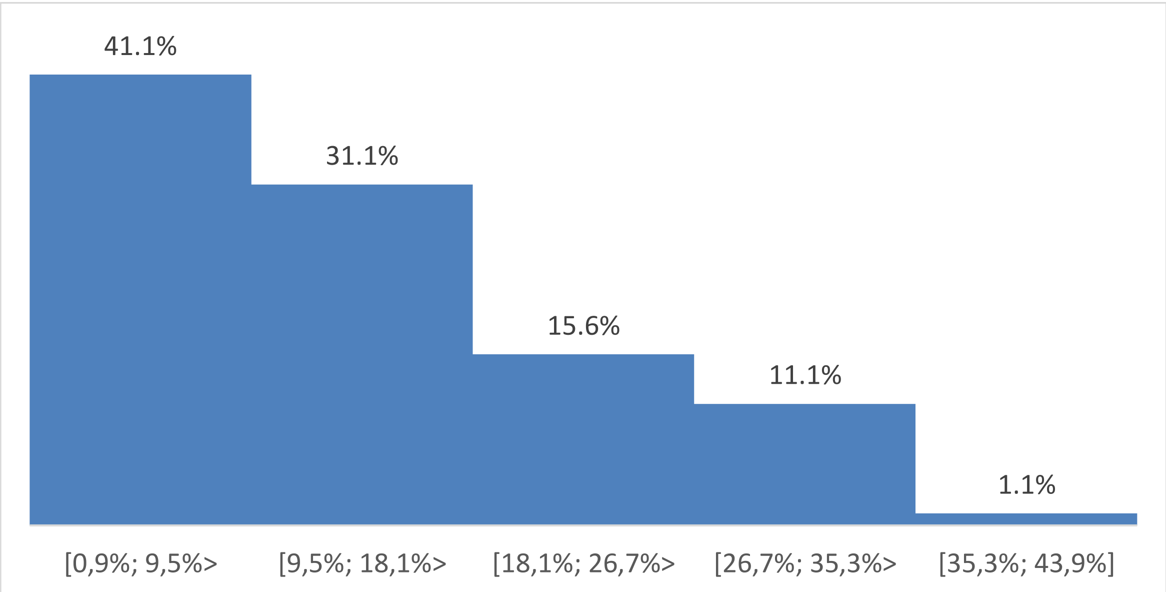
	Frecuencia	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
[0,9%; 9,5%⟩	37	41,1	41,1
[9,5%; 18,1%⟩	28	31,1	72,2
[18,1%; 26,7%⟩	14	15,6	87,8
[26,7%; 35,3%⟩	10	11,1	98,9
[35,3%; 43,9%]	1	1,1	100,0
Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 72,2% de los estudiantes cometió error en menos del 18,1% de ítems que miden el error cometido en la solución de ejercicios y problemas relacionados a la temática de sistemas numéricos, concentrándose el más alto porcentaje de estudiantes (41,1%) con un bajo porcentaje de ítems errados, menos del 9,5%, Figura 3.

Figura 3

Histograma de los porcentajes de errores cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos



Fuente: Elaboración propia

4.1.2 *Errores debidos a dificultades con el lenguaje*

El objetivo específico 2 busca identificar con qué frecuencia los estudiantes cometen errores matemáticos asociados a dificultades con el lenguaje. La ciencia de la matemática emplea un lenguaje específico para comunicar diversa información, por esta razón es que cuando un estudiante requiere interpretar y/o comunicar información correspondiente a este contexto matemático es necesario que haya dominio de los sistemas de códigos del área, de lo contrario, no se podrá comprender lo que se presente y tampoco expresar mensajes exactos. Debido a la presencia constante del factor: Lenguaje Matemático, es que diversos autores realizaron investigaciones sobre la influencia del dominio de este campo en los logros de los estudiantes que aprenden los contenidos y desarrollan competencias desde la asignatura.

Radatz (1979) propone diversas clasificaciones para la evaluación de errores matemáticos, una de ellas es la relacionada al deficiente dominio del lenguaje matemático el cual se puede manifestar de formas diversas como cuando el estudiante no interpreta correctamente los mensajes comunicados en la teoría y los problemas matemáticos lo cual implica la incomprensión, desconocimiento o distorsión de los significados de la terminología en un mensaje. Existen dos formas de abordar los errores asociados a las dificultades con el lenguaje, la primera de ellas es desde el punto de vista médico, pues este problema se genera por trastornos y problemas neurológicos (acalculia y discalculia) los cuales se debe tratar con especialistas en problemas de este tipo; y que ninguno de los estudiantes presentó un diagnóstico médico que sustente la presencia de alguno de los trastornos mencionados; y por otro lado, se pueden abordar desde el punto de vista pedagógico, desde donde se considera que un factor que desencadena problemas relacionados al dominio del lenguaje matemático, es porque el estudiante no ha realizado un proceso de "transición" de la aritmética al álgebra, donde se deben adquirir habilidades como la generalización. En particular respecto al *error debido a dificultades con el lenguaje*, se plantearon indicadores que manifestaban lo previamente manifestado por Torres et al (2002), "Entre estas dificultades sobresalen las experimentadas por los alumnos cuando se avanza a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto el poder del lenguaje simbólico como el grado de abstracción" (p.227).

Por las razones expuestas en el párrafo anterior, en torno a los errores asociados a dificultades del lenguaje, es que se plantearon seis indicadores que incluyeron acciones que debían realizar los estudiantes cuando encontraban mensajes o problemas expresados en lenguaje matemático (simbología) o cuando eran ellos los que debían expresar matemáticamente situaciones que así lo requerían. Este tipo de error se evidenció no solamente en ejercicios y problemas matemáticos que evaluaban teoría de conjuntos, sino también la teoría de sistemas numéricos.

La Tabla 12 muestra los porcentajes de ítems con error que los estudiantes cometieron en este tipo, en función al número de clases establecido.

Participaron del estudio 90 estudiantes, de los cuales 9 estudiantes (10%) cometieron menos del 9% de errores debidos a dificultades en el lenguaje; 26 estudiantes (28,9%) cometieron 9% de errores o más, pero menos de 18% de errores; 38 estudiantes (42,2%) cometieron desde 18% hasta menos de 27% de errores; 13 estudiantes (14,4%) cometió 27% de errores pero menos de 36%; y 4 estudiantes (4,4%) cometieron 36% o más de errores debidos a dificultades en el lenguaje en sus evaluaciones de matemática (Tabla 12).

Tabla 12

Distribución de frecuencias de los porcentajes de errores debidos a dificultades en el lenguaje

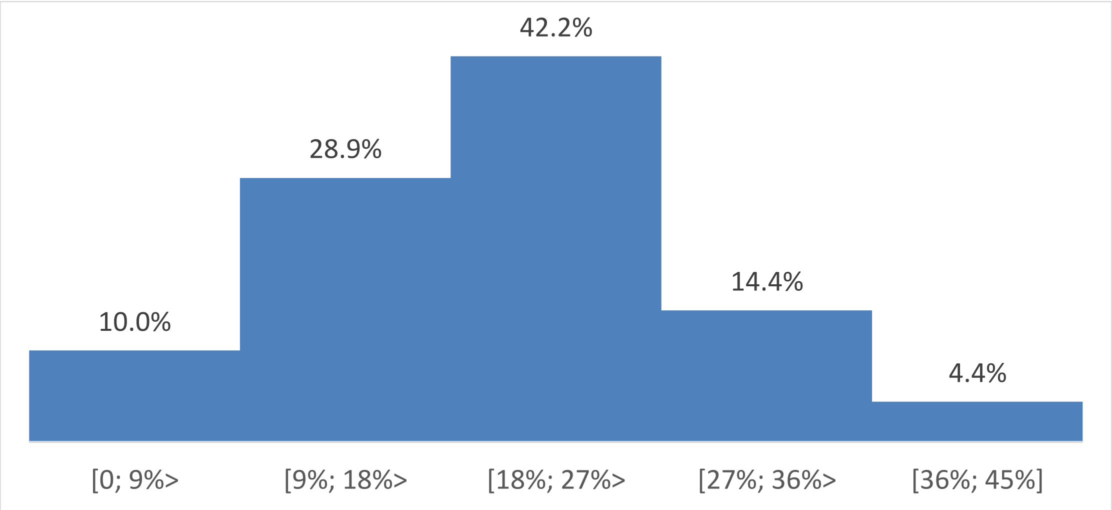
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válido	[0; 9%⟩	9	10,0	10,0
	[9%; 18%⟩	26	28,9	38,9
	[18%; 27%⟩	38	42,2	81,1
	[27%; 36%⟩	13	14,4	95,6
	[36%; 45%]	4	4,4	100,0
	Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

La frecuencia de error debido de dificultades en el lenguaje se concentra desde 9% hasta menos de 27%, siendo la mayor tasa de error (42,2%) cometido desde 18% hasta menos de 27% del total de ítems que miden este error, Figura 4.

Figura 4

Histograma de los porcentajes de errores debidos a dificultades en el lenguaje



Fuente: Elaboración propia

La proporción promedio de errores debidos a dificultades en el lenguaje, cometidos por los estudiantes es de 20,33% y la desviación estándar es de 8,9%; asimismo el 50% de los estudiantes se equivocó en 19,92% o menos ítems que miden los errores debidos a dificultades en el lenguaje y el otro 50% se equivocó en el 19,92% de ítems o más, y además se encontró que el porcentaje de errores más frecuente cometido por los estudiantes fue de 15% y 22%, Tabla 13.

Tabla 13

Medidas descriptivas de los porcentajes de errores debidos a dificultades en el lenguaje

	Media	Mediana	Modas	Desviación estándar
Error 1	20,33%	19,92%	15% y 22%	8,9%

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo al objetivo general propuesto en la investigación, se realizó el análisis de este error en función al tipo de contenido matemático que se evaluó, y que se presenta a continuación:

4.1.2.1 Errores debidos a dificultades en el lenguaje en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos. El promedio de ítems con error, de los ítems utilizados para medir el error debido a dificultades en el lenguaje en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, cometidos por los estudiantes fue de 18,9% y la desviación estándar de 9,7%; asimismo el 50% de los estudiantes cometió el 17,6% de errores de este tipo o menos en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos y el otro 50% cometió 17,6% o más de este tipo de error. Además, los porcentajes de errores más frecuentes en esta tipología de error (respecto a ejercicios y problemas planteados sobre teoría de conjuntos) fueron 9,5%, 14,9%, 17,6% y 18,9%; siendo el menor porcentaje de errores cometidos de este tipo 1,4% y el máximo 48,6%, Tabla 14.

Tabla 14

Medidas descriptivas de los porcentajes de errores debidos a dificultades en el lenguaje sobre ejercicios y problemas de teoría de conjuntos

	Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Modas	Desviación estándar
Error 1	1,4%	48,6%	18,9%	17,6%	9,5%; 14,9%; 17,6%; 18,9%	9,7%

Fuente: Elaboración propia

De todos los estudiantes que participaron en la investigación, 39 de ellos (43,3%) cometió desde 10,9% hasta menos de 20,4% de errores debidos a dificultades en el lenguaje en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos; un bajo número de participantes, 3 estudiantes (3,3%) cometieron de un 39,4% a un 48,9% errores de este tipo, mientras que 21 estudiantes

(23,3%) cometieron menos del 10,9% de errores de esta categoría en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, Tabla 15.

Tabla 15

Distribución de frecuencias de los porcentajes de errores debidos a dificultades en el lenguaje en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos

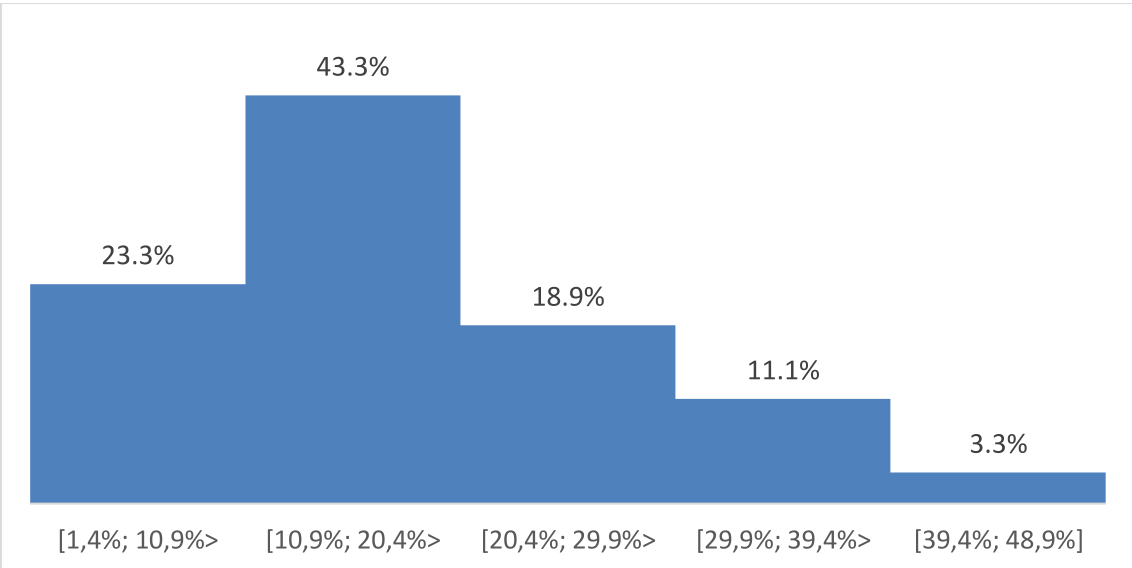
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[1,4%; 10,9%〉	21	23,3	23,3
[10,9%; 20,4%〉	39	43,3	66,7
[20,4%; 29,9%〉	17	18,9	85,6
[29,9%; 39,4%〉	10	11,1	96,7
[39,4%; 48,9%]	3	3,3	100,0
Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 66,6% de los estudiantes incurrió en error en menos del 20,4% de ítems que miden el error debido a dificultades en el lenguaje en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, con un alto porcentaje (43,3%) de estudiantes que se equivocaron desde el 10,9% de ítems hasta menos del 20,4% de ítems, Figura 5.

Figura 5

Histograma de frecuencias de los porcentajes de errores debidos a dificultades en el lenguaje en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos



Fuente: Elaboración propia

4.1.2.2 Errores debidos a dificultades en el lenguaje en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos. El porcentaje promedio de errores matemáticos debidos a dificultades en el lenguaje cometidos por los estudiantes, en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos, fue de 22,1% con desviación estándar de 12,6% errores; asimismo el 50% de los estudiantes cometieron el 20,3% de errores de este tipo o menos en el desarrollo de ejercicios y problemas relacionados a sistemas numéricos y el otro 50% cometieron el 20,3% o más de este tipo de error. También, el porcentaje de errores de esta categoría que es más frecuente, cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, fue 8,5%; siendo cero el menor número de errores cometidos de este tipo y el máximo porcentaje 59,3%, Tabla 16.

Tabla 16

Medidas descriptivas de los errores debidos a dificultades en el lenguaje en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos

	Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Moda	Desviación estándar
Error 1	0%	59,3%	22,1%	20,3%	8,5%	12,6%

Fuente: Elaboración propia

Del total de estudiantes que participaron en la investigación, 20 estudiantes (22,2%) cometieron menos del 11,9% de errores, 34 de ellos (37,8%) cometieron error desde el 11,9% hasta menos del 23,8% ítems que miden errores de este tipo en la solución de ejercicios y problemas de sistemas numéricos, 5 estudiantes (5,6%) desde 35,7% hasta 47,6% y también 5 estudiante (5,6%) incurrieron en este error desde 47,6% y menos 59,5%, mientras que 25 estudiantes (28,9%) cometieron entre 23,8% y menos del 35,7% en esta categoría en la solución de ejercicios y problemas relacionados a sistemas numéricos, Tabla 17.

Tabla 17

Distribución de frecuencias de los errores debidos a dificultades en el lenguaje en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos

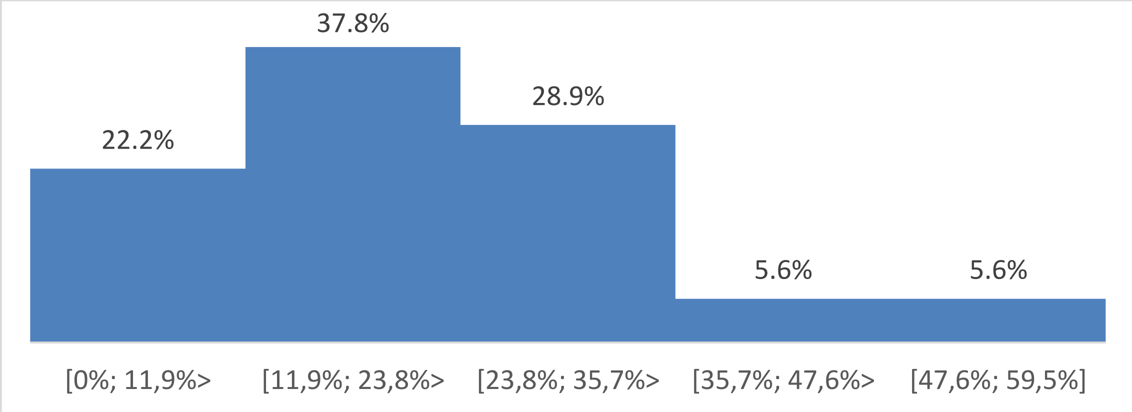
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0%; 11,9%⟩	20	22,2	22,2
[11,9%; 23,8%⟩	34	37,8	60,0
[23,8%; 35,7%⟩	25	28,9	88,9
[35,7%; 47,6%⟩	5	5,6	94,4
[47,6%; 59,5%]	5	5,6	100,0
Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 88,9% de los estudiantes cometió error en menos del 35,7% de ítems que miden el error de este tipo en la solución de ejercicios y problemas relacionados a los sistemas numéricos, ubicándose la mayor cantidad de estudiantes (37,8%) en el intervalo que va desde el 11,9% hasta menos del 23,8% de ítems en los que cometieron errores de este tipo, Figura 6.

Figura 6

Histograma de los porcentajes de errores debidos a dificultades en el lenguaje cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos



Fuente: Elaboración propia

4.1.3 *Errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento.*

El objetivo específico 3 busca identificar con qué frecuencia los estudiantes cometen errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento. Esta tipología de error también fue propuesta por Radatz (1979) desde la que pretende explicar las razones por las que los estudiantes proponen y ejecutan procedimientos para resolver una determinada situación problemática, sin la verificación de las condiciones que tiene el problema para aplicarlas, es decir, en la mayoría de casos, muchos son los estudiantes que tienden a fijar un procedimiento que ya les fue útil en anteriores oportunidades y que pretenden extenderlo a otros contextos que son diferentes y cuyas condiciones para la aplicabilidad no se corresponden. Esta situación, Llorente (2016) la define como *rigidez del pensamiento* a la que se refiere como, "una forma mayormente estable de conducta que se expresa en la repetición persistente y espontánea de determinado acto de conducta, cuando situaciones a las que se enfrenta el sujeto requieran objetivamente la interrupción o variación de la misma" (p. 39), la presencia de esta condición del pensamiento del estudiante presupone que éste carecería de flexibilidad del mismo, lo cual Hernández (2017) desde Menschinskaia aborda de la siguiente manera, "El sujeto de pensamiento flexible (...) sabe apreciar los cambios que exigen modificar el planteamiento de las preguntas, así como renunciar a las soluciones anteriores y tomar otras nuevas" (p. 57). A partir de las situaciones previamente mencionadas se concluye también que la poca flexibilidad y rigidez en el pensamiento del estudiante, evidencian la presencia de obstáculos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, debido a que éstos actúan como una barrera que no permite e interfiere en el proceso de adquisición de conocimientos y el logro de los aprendizajes propuestos, al respecto también Cortina et al. (2013) manifiesta que, "Estos obstáculos se presentan cuando la comprensión de cierto concepto matemático interfiere con la comprensión de otro más complejo" (p. 9).

Finalmente, se concluye que debido a los factores mencionados y que explican la presencia de este error matemático es que en la investigación realizada se ha considerado que la existencia de este error se evaluó a partir de seis indicadores, los cuales evidencian la ejecución de procedimientos para resolver situaciones problemáticas de temática tanto de Conjuntos como de Sistemas numéricos. Asimismo, se puede evidenciar que estos indicadores fueron planteados tomando en cuenta que la realización del procedimiento indicado supone que el estudiante realice actividades previas como análisis e identificación de las características particulares de cada situación problemática para a partir ello elegir procedimientos específicos e idóneos para la resolución del mismo.

La Tabla 18 muestra los porcentajes de ítems en los que los estudiantes cometieron error, en función al número de clases establecido.

De los participantes del estudio, 17 estudiantes (18,9%) cometieron menos del 11% de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento; 36 estudiantes (40%) cometieron 11% de errores o más, pero menos de 22% de errores; 18 estudiantes (20%) cometieron 22% de errores o más, pero menos de 33% de errores; 16 estudiantes (17,8%) cometieron 33% de errores o más, pero menos de 44% de errores y 3 estudiantes (3,3%) cometieron 44% o más, pero menos de 55% errores matemáticos debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento, Tabla 18.

Tabla 18

Distribución de frecuencias de los porcentajes de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento

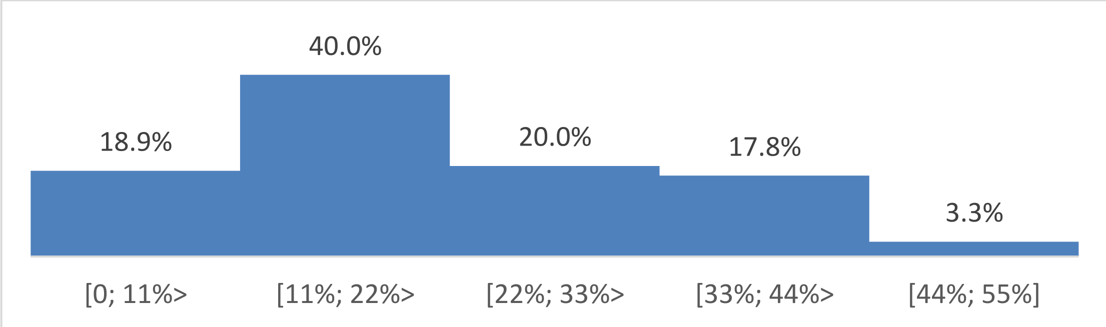
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válido	[0; 11%⟩	17	18,9	18,9
	[11%; 22%⟩	36	40,0	58,9
	[22%; 33%⟩	18	20,0	78,9
	[33%; 44%⟩	16	17,8	96,7
	[44%; 55%]	3	3,3	100,0
	Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

La frecuencia de los errores debido a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento se concentra en la parte izquierda, inferior al 44%, alcanzándose la mayor proporción de errores (40%) cometido desde 11% hasta menos de 22% del total de ítems que miden este error, Figura 7.

Figura 7

Histograma de los porcentajes de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento



Fuente: Elaboración propia

El porcentaje promedio de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento cometidos por los estudiantes es de 21,94% y la desviación estándar es de 12,45% de errores; asimismo el 50% de los estudiantes se equivocó en el 21,15% o menos de ítems relacionados a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento y el otro 50% incurrió en el 21,15% o más ítems de este tipo de error. Para este tipo de error matemático cometido por los estudiantes el valor más frecuente es de 22% ítems que fueron contestados erróneamente, Tabla 19.

Tabla 19

Medidas descriptivas de los errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento

	Media	Mediana	Moda	Desviación estándar
Error 2	21,94%	21,15%	22%	12,45%

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo al objetivo general propuesto en la investigación, se realizó el análisis de este error matemático originado por las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en función del tipo de contenido matemático, y se obtuvo lo siguiente:

4.1.3.1 Errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos. El promedio de porcentaje de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento cometidos por los participantes, en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, fue 21,9% y la desviación estándar de 13,08%; asimismo el 50% de los estudiantes cometieron el 20,9% de errores de este tipo o menos en ejercicios y problemas de teoría de conjuntos y el otro 50% cometió 20,9% o más de este tipo de error. El porcentaje de errores de esta categoría, en los ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos más frecuentes cometidos por los estudiantes fue 14%; siendo cero el menor porcentaje de errores cometidos de este tipo y el máximo 55,8%, Tabla 20.

Tabla 20

Medidas descriptivas de los porcentajes de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos

	Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Moda	Desviación estándar
Error 2	0%	55,8%	21,9%	20,9%	14%	13,08%

Fuente: Elaboración propia

Del total de estudiantes que participaron en la investigación, 19 de ellos (21,1%) cometió menos de1 11,2% de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos, 28 participantes (31,1%) cometió desde 11,2% hasta menos de 22,4% de este tipo de error y otros 26 estudiantes (28,9%) cometieron desde 22,4% hasta menos de 33,6% de errores de este tipo, 14 estudiantes (15,6%) cometieron 33,6% hasta menos del 44,8% de esta categoría de errores y tres participantes (3,3%) cometió 44,8% o más errores de este tipo en la resolución de problemas sobre teoría de conjuntos, Tabla 21.

Tabla 21

Distribución de frecuencias de los porcentajes de errores debido a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos

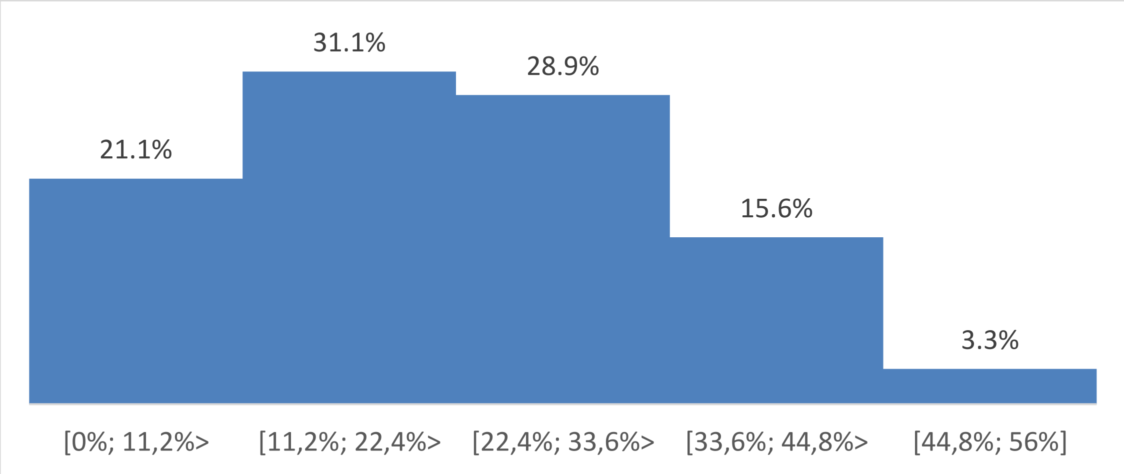
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0%; 11,2%⟩	19	21,1	21,1
[11,2%; 22,4%⟩	28	31,1	52,2
[22,4%; 33,6%⟩	26	28,9	81,1
[33,6%; 44,8%⟩	14	15,6	96,7
[44,8%; 56%]	3	3,3	100,0
Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 81,1% de los estudiantes incurrió en error en menos del 33,6% de ítems que miden el error de este tipo en los ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, con un alto porcentaje (60%) de estudiantes que se equivocaron desde el 11,2% de ítems hasta menos del 33,6% de ítems, Figura 8.

Figura 8

Histograma de los porcentajes de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento



Fuente: Elaboración propia

4.1.3.2 Errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos. El porcentaje promedio de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento cometidos por los estudiantes en la solución de ejercicios y problemas de sistemas numéricos, fue 22% con desviación estándar de 19,97% errores; además el 50% de los estudiantes cometieron errores en el 15,7% o menos ítems correspondientes al error de este tipo y el otro 50% de estudiantes cometió este error en el 15,7% o más de este tipo de ítems. Sin embargo, el porcentaje de errores más frecuente de esta categoría, que los participantes cometieron en la resolución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, fue cero y el máximo porcentaje de errores de este tipo fue 77,1%, Tabla 22.

Tabla 22

Medidas descriptivas de los errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos

	Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Moda	Desviación estándar
Error 2	0%	77,1%	22%	15,7%	0%	19,97%

Fuente: Elaboración propia

De todos los estudiantes que participaron en la investigación, se destaca que 45 de ellos (50%) cometió menos del 15,5% errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en la solución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, 17 estudiantes (18,9%) cometieron error en el 15,5% o más ítems, pero en menos del 31%, 14 estudiantes (15,6%) manifestaron errores desde el 31% hasta 46,5%, frente a una baja cantidad de participantes, 9 estudiantes (10%) han registrado desde 46,5% hasta menos del 62% y finalmente

5 estudiantes (5,6%) cometieron 62% o más errores de este tipo que evaluaron los errores de esta tipología en la solución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, Tabla 23.

Tabla 23

Distribución de frecuencias de los errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos

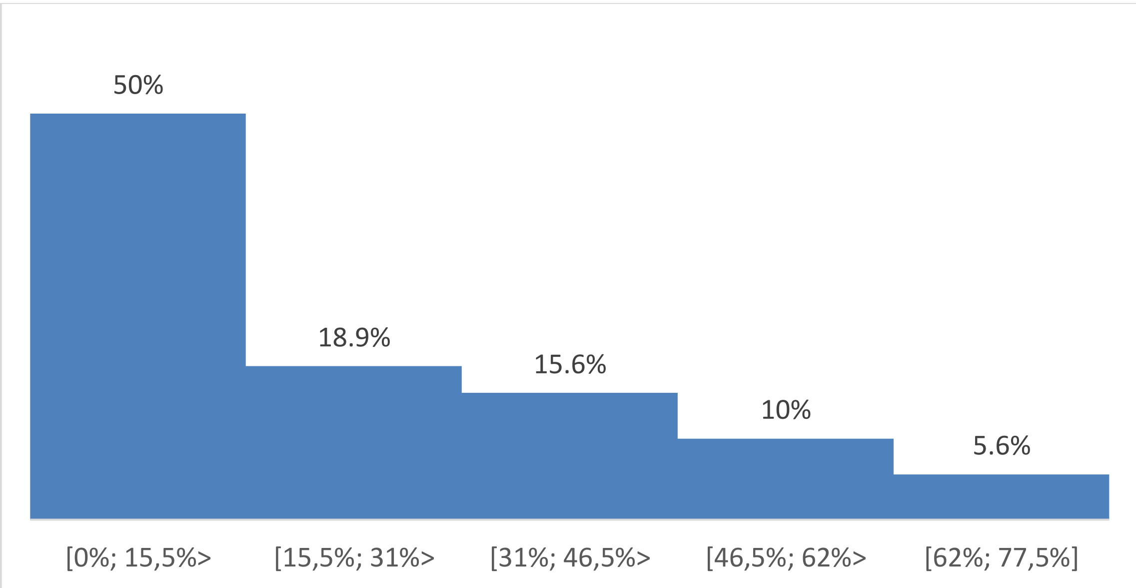
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0%; 15,5%⟩	45	50,0	50,0
[15,5%; 31%⟩	17	18,9	68,9
[31%; 46,5%⟩	14	15,6	84,4
[46,5%; 62%⟩	9	10,0	94,4
[62%; 77,5%]	5	5,6	100,0
Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 68,9% de los estudiantes cometieron error en menos del 31% de ítems que miden los errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento en la solución de ejercicios y problemas relacionados a los sistemas numéricos, ubicándose la mayor cantidad de estudiantes (50%) en el intervalo inferior al 15,5% de ítems errados de este tipo, Figura 9.

Figura 9

Histograma de los porcentajes de errores debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos



Fuente: Elaboración propia

4.1.4 *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial*

Las dificultades que tienen muchos estudiantes para obtener información espacial matemática, constituyen también una fuente importante y generadora de errores matemáticos; en este sentido Radatz (1979) propone esta tipología tomando como punto de partida que la información matemática no solo se comunica a través de enunciados, sino también de diagramas, imágenes u otras formas representativas; es en este contexto donde los estudiantes deberán poner en práctica imaginación espacial y de visualización matemática, sin embargo, en gran parte de los estudiantes se puede evidenciar la complejidad que estas actividades representan y por lo que se evidencia la presencia de este error. El dominio de habilidades espaciales, se le puede catalogar como una actividad de "alta demanda cognitiva" considerando implicancias como la explicada por Hitt (1995):

> No solo se espera que el individuo pueda crear una imagen mental de un concepto, sino que además procese interiormente (según transformaciones mentales) los conceptos matemáticos adquiridos, y pueda exteriorizar esa imagen mental del concepto de manera que sea observable. (p. 64)

A partir de la idea planteada anteriormente, se infiere que cuando la información está comunicada mediante diagramas y figuras el estudiante debe efectuar procedimientos cognitivos que resultan más complejos, incluso Skemp (1993) a partir de ideas propuestas por Piaget, explica que la interpretación de sistemas visuales implica actividades complejas y que tienen una secuencia, que explica de la siguiente forma:

> Cuando vemos algún objeto desde un punto de vista particular, en una ocasión determinada, esta experiencia evoca un recuerdo de todas nuestras anteriores sensaciones "de percibir" este objeto – no separadamente, sino como una abstracción de algo común a este tipo de experiencias–. Esto se experimenta como "reconocimiento" y dotamos al objeto, en la experiencia presente, con varias propiedades que no derivan de los datos sensoriales que "están accediendo", sino del objeto-concepto que se evoca. (p. 102)

Por otro lado, Skemp (1993) también logra vislumbrar una potencial fuente de dificultades asociadas a la interpretación de sistemas visuales, las que según su investigación se presentan cuando el estudiante encuentra que en un mismo diagrama hay diversa información integrada en una unidad, lo cual generaría que muchos estudiantes no puedan identificar aisladamente todos los datos expresados en el problema y menos interpretar la situación a modo global para poder resolverla.

Un problema que comunica información a través de una imagen o diagrama, requiere que el estudiante identifique todas las partes que la constituyen, de esa forma extraerá los datos por separado que necesita para luego poder unificarlos y lograr la interpretación con los datos del problema a un nivel global. Sin embargo, cuando algunos estudiantes se encuentran frente a un problema con estas características, muchas veces sucede que ellos no logran una comprensión global del problema, y ocurre la situación que describe Planchart (2002) a partir del estudio realizado por Monk, "algunos estudiantes no tienen problema para entender datos representados gráficamente de una manera "puntual", presentan serias dificultades para el entendimiento global" (p. 44), e incluso desde la propia experiencia docente se ha escuchado que los estudiantes manifiestan que, frente a una situación problemática de este tipo ellos se sienten abrumados por toda la información que converge en un solo lugar y no saben por qué parte empezar, lo cual genera que o bien desistan de intentar resolver el problema o que la interpreten erróneamente. En este caso, para la detección del error generado por dificultades para obtener información espacial, se formularon tres indicadores, los cuales permitieron evidenciar situaciones en las que los estudiantes debieron integrar diversas operaciones en un mismo problema para poder representarlas gráficamente y dar respuesta a las preguntas planteadas.

La Tabla 24 muestra los resultados del porcentaje de ítems en los que los estudiantes cometieron errores debidos a dificultades para obtener información espacial, donde el porcentaje de ítems con errores más frecuente es 8%, que ha sido cometido por 22 estudiantes el 24,4% de los participantes de la investigación. De los estudiantes participantes del estudio, 10 estudiantes (11,1%) cometieron 23% de errores debidos a dificultades para obtener información espacial y 15 estudiantes (16,7%) cometieron el 69% errores de este tipo, Tabla 24.

Tabla 24

Distribución de frecuencias de los porcentajes de errores debidos a dificultades para obtener información espacial

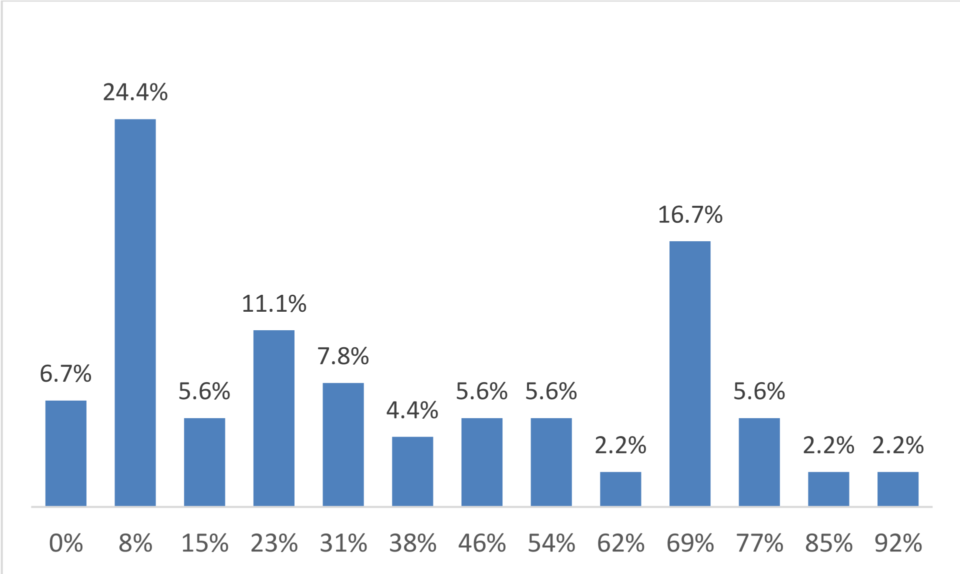
		Frecuencia	**Porcentaje**	**Porcentaje acumulado**
Válido	0%	6	6,7	6,7
	8%	22	24,4	31,1
	15%	5	5,6	36,7
	23%	10	11,1	47,8
	31%	7	7,8	55,6
	38%	4	4,4	60,0
	46%	5	5,6	65,6
	54%	5	5,6	71,1
	62%	2	2,2	73,3
	69%	15	16,7	90,0
	77%	5	5,6	95,6
	85%	2	2,2	97,8
	92%	2	2,2	100,0
	Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 24,4% de estudiantes incurrió en este error en el 8% de ítems propuestos para medir los errores debidos a dificultades para obtener información espacial y el 16,7% de los participantes de la investigación incurrió en error en el 69% de ítems propuestos, Figura 10.

Figura 10

Porcentajes de errores debidos a dificultades para obtener información espacial



Fuente: Elaboración propia

El porcentaje promedio de errores matemáticos debidos a dificultades para obtener información espacial, cometidos por los estudiantes es de 36,07% y la desviación estándar es de 27,81%; asimismo el 50% de los estudiantes cometió error en el 30,77% o menos ítems debido a dificultades para obtener información espacial y el otro 50% cometió error en el 30,77% o más ítems de este tipo. Para este tipo de error matemático cometido por los estudiantes el valor más frecuente es de 8% ítems que fueron contestados erróneamente, Tabla 25.

Tabla 25

*Medidas descriptivas de los errores debidos a dificultades para obtener información espacia*l

	Media	**Mediana**	**Moda**	**Desviación estándar**
Error 3	36,07%	30,77%	8%	27,81%

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo al objetivo general propuesto en la investigación, se realizó el análisis de los errores debidos a dificultades para obtener información espacial en función al tipo de contenido matemático, y se obtuvo lo siguiente:

4.1.4.1 Errores debidos a dificultades para obtener información espacial cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos. El porcentaje promedio de errores debidos a dificultades para obtener información espacial cometidos por los participantes, en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, fue de 36,1% y la desviación estándar de 27,81%; asimismo el 50% de los estudiantes cometió el 30,8% de errores de este tipo o menos en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos y el otro 50% cometió 30,8% o más de este tipo de error. El porcentaje de errores de esta categoría, presentes en los procedimientos para resolver ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, más frecuentes cometidos por los estudiantes fue 7,7%; siendo cero el menor porcentaje de errores cometidos de este tipo y el máximo 92,3%, Tabla 26.

Tabla 26

Medidas descriptivas de los errores debidos a dificultades para obtener información espacial en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos

	Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Moda	Desviación estándar
Error 3	0%	92,3%	36,1%	30,8%	7,7%	27,81%

Fuente: Elaboración propia

De todos los estudiantes que participaron en la investigación, 6 de ellos (6,7%) no cometieron errores matemáticos debido a dificultades para obtener información espacial en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos, 22 participantes (24,4%) cometieron 7,7% de errores de este tipo y 2 estudiantes (2,2%) cometió el máximo número de errores de este tipo, 92,3%, Tabla 27.

Tabla 27

Distribución de frecuencias de los errores debidos a dificultades para obtener información espacial en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos

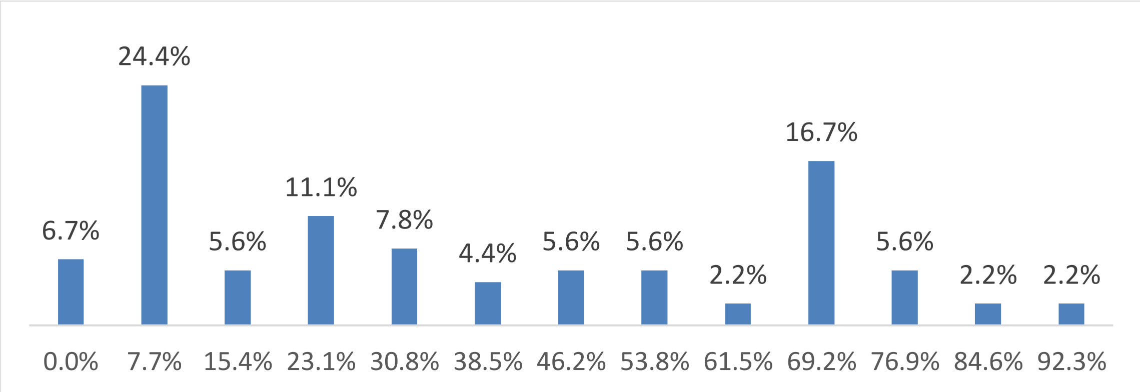
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0%	6	6,7	6,7
7,7%	22	24,4	31,1
15,4%	5	5,6	36,7
23,1%	10	11,1	47,8
30,8%	7	7,8	55,6
38,5%	4	4,4	60,0
46,2%	5	5,6	65,6
53,8%	5	5,6	71,1
61,5%	2	2,2	73,3
69,2%	15	16,7	90,0
76,9%	5	5,6	95,6
84,6%	2	2,2	97,8
92,3%	2	2,2	100,0
Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 24,4% de los estudiantes incurrió en error en el 7,7% de ítems que miden los errores debidos a dificultades para obtener información espacial en los ejercicios y problemas de teoría de conjuntos, el 16,7% de estudiantes se equivocaron en el 69,2% de ítems y 10% incurrió en este tipo de error en el 76,9% o más ítems, Figura 11.

Figura 11

Porcentajes de errores debidos a dificultades para obtener información espacial en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos



Fuente: Elaboración propia

4.1.4.2 Errores debidos a dificultades para obtener información espacial cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos. Este error originado por dificultades para obtener información espacial, no se pudo evaluar en el contenido de sistemas numéricas, debido que en los instrumentos no se encontraron ítems que se relacionen con obtención de información espacial.

4.1.5 *Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos*

El objetivo específico 5 fue planteado para poder identificar la frecuencia en la que los estudiantes cometen errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos. Así como para la preparación de un proyecto se requiere de la disponibilidad de los insumos e instrumentos necesarios, o como cuando para presentar un número artístico frente a un público se requiere que las personas que participan en la actividad ensayen con anticipación y constancia; una situación parecida ocurre con los insumos o recursos que necesita un estudiante para poder comprender los contenidos de la asignatura de matemática con los que debe trabajar, de hecho Radatz (1979) considera que cuando se presentan determinadas circunstancias como: "ignorancia de los algoritmos, el dominio inadecuado de los hechos básicos, los procedimientos incorrectos en la aplicación de cálculos matemáticos y el conocimiento poco inteligente de los conceptos y símbolos necesarios" (p. 166), los estudiantes cometerán errores en los procedimientos que realizan para intentar resolver ejercicios y problemas de diversos tipos.

Skemp (1993) explica por ejemplo que cuando una persona se encuentra frente a un problema matemático, lo primero que realizará es un proceso de "abstracción" lo que se supone será la representación de ese problema físico en un modelo matemático (haciendo uso del lenguaje y simbología matemáticos). Tras esta acción, según lo expuesto por este autor, el siguiente paso será la manipulación del modelo matemático planteado precisamente desde donde se lleva a cabo toda la puesta en práctica y utilización de recursos necesarios para poder dar respuesta al problema, es en este momento donde se pone a prueba el dominio de habilidades, hechos y conceptos matemáticos del estudiante, al respecto también Castro et al. (2016) manifiesta que algunos factores son estrictamente necesarios, “El conocimiento de los conceptos se utiliza para generar y seleccionar los procedimientos necesarios para la resolución de problemas en un determinado dominio” (p.51).

Para el análisis de este tipo de error en el estudio realizado, se formularon 10 indicadores que estaban vinculados con preguntas que ponían en evidencia la necesidad del dominio de determinadas habilidades, hechos y conceptos matemáticos, para la resolución de los mismos. La Tabla 28 muestra los resultados.

Tabla 28

Distribución de frecuencias de los errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0; 9%⟩	43	47,8	47,8
[9%; 18%⟩	37	41,1	88,9
[18%; 27%⟩	6	6,7	95,6
[27%; 36%⟩	3	3,3	98,9
[36%; 45%]	1	1,1	100,0
Total	90	100,0	

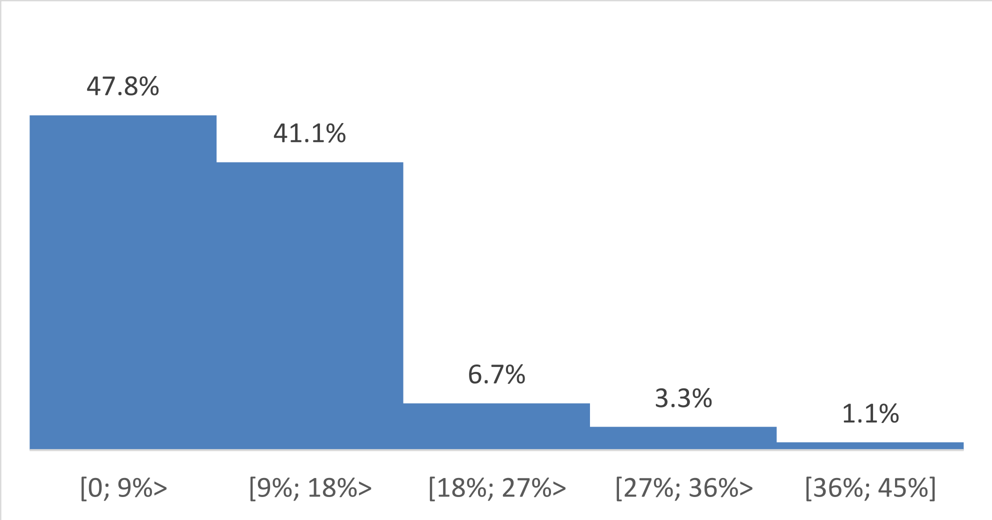
Fuente: Elaboración propia

De los 90 estudiantes participantes del estudio, 43 estudiantes (47,8%) cometieron menos del 9% errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos; 37 estudiantes (41,1%) cometieron el 9% de errores o más, pero menos de1 18% de errores; 6 estudiantes (6,7%) cometieron desde 18% hasta menos del 27% de errores; 3 estudiantes (3,3%) cometieron desde 27% de errores hasta menos del 36% y, un estudiante (1,1%) cometió el 36% o más de errores matemáticos relacionados al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.

Los porcentajes más altos de estudiantes que cometieron errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos se concentra por debajo del 18% de ítems aplicados para medir este tipo de error, cometiendo error en menos del 9% de ítems el 47,8% de los participantes de la investigación, Figura 12.

Figura 12

Histograma de los porcentajes de errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos



Fuente: Elaboración propia

El porcentaje promedio de errores relacionados al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos, cometidos por los estudiantes es de 9,97% y la desviación estándar es de 8,032%; asimismo el 50% de los estudiantes incurrió en el 8,9% o menos ítems que miden estos errores matemáticos y el otro 50% de estudiantes incurrió en el 8,9% ítems o más. Para este tipo de error matemático cometido por los estudiantes el valor más frecuente es de 3% ítems que fueron contestados erróneamente, Tabla 29.

Tabla 29

Medidas descriptivas de los errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos

	Media	**Mediana**	**Moda**	**Desviación estándar**
Error 4	9,97%	8,9%	3%	8,032%

Fuente: Elaboración propia

4.1.5.1 Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos. En promedio, el porcentaje de errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos cometidos por los participantes, cuando resuelven ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, fue de 21,6% y la desviación estándar de 17,81% de errores; asimismo el 50% de los estudiantes cometió el 20,6% de errores de este tipo o menos en el desarrollo de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos y el otro 50% cometió 20,6% o más de este tipo de error. El porcentaje de errores de esta categoría, en los ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, más frecuentes cometidos por los estudiantes fue cero; siendo el máximo 70,6%, Tabla 30.

Tabla 30

Medidas descriptivas de los errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos

	Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Moda	Desviación estándar
Error 4	0%	70,6%	21,6%	20,6%	0%	17,81%

Fuente: Elaboración propia

Del total de estudiantes que participaron en la investigación, 37 de ellos (41,1%) cometieron el 11,8% de errores o menos, de–errores matemáticos relacionados al dominio de habilidades, hechos y conceptos, en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos, un bajo número de participantes, 2 estudiantes (2,2%) cometieron entre el 64,7% y 70,6% mientras que 14 estudiantes (15,6%) cometieron el 23,5% de errores de esta categoría en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, Tabla 31.

Tabla 31

Distribución de frecuencias de los errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos

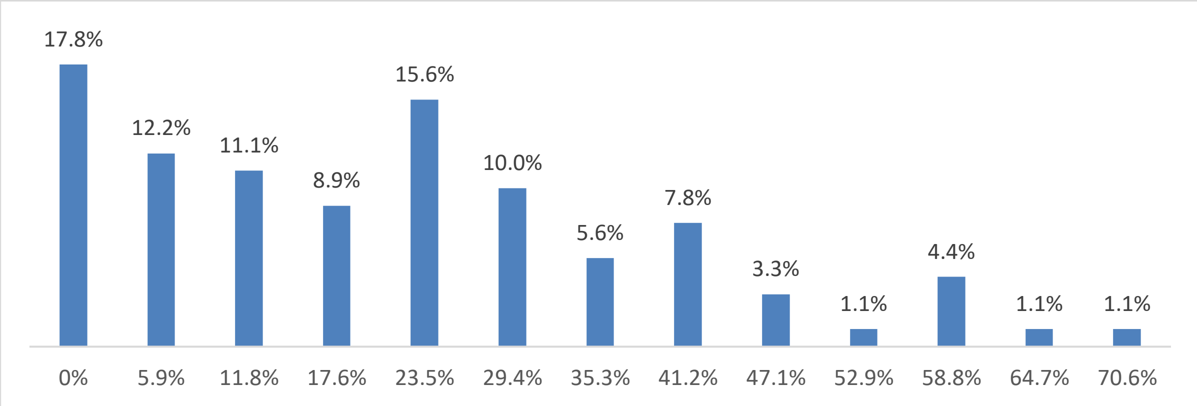
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
,0%	16	17,8	17,8
5,9%	11	12,2	30,0
11,8%	10	11,1	41,1
17,6%	8	8,9	50,0
23,5%	14	15,6	65,6
29,4%	9	10,0	75,6
35,3%	5	5,6	81,1
41,2%	7	7,8	88,9
47,1%	3	3,3	92,2
52,9%	1	1,1	93,3
58,8%	4	4,4	97,8
64,7%	1	1,1	98,9
70,6%	1	1,1	100,0
Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 65,6% de los estudiantes cometió error en menos del 23,5% de ítems que miden errores relacionados al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, con un bajo porcentaje (6,6%) de estudiantes que se equivocaron en el 58,8% de ítems o más, Figura 13.

Figura 13

Porcentajes de errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas de teoría de conjuntos



Fuente: Elaboración propia

4.1.5.2 Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos. El porcentaje promedio de errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos cometidos por los estudiantes, en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos, fue de 8,4% con desviación estándar de 8,3%; asimismo el 50% de los estudiantes cometió error en 6,9% o menos ítems que miden este tipo de error y el otro 50% cometió error en 6,9% ítems o más de este tipo de error al resolver ejercicios y problemas de sistemas numéricos. Además, se encontró que el porcentaje más frecuente de errores en esta categoría cuando los estudiantes resolvían ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, fue cero; siendo el mayor porcentaje de errores cometidos de este tipo 38,8%, Tabla 32.

Tabla 32

Medidas descriptivas de los errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos

	Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Moda	Desviación estándar
Error 4	0%	38,8%	8,4%	6,9%	0%	8,3%

Fuente: Elaboración propia

De todos estudiantes que participaron en la investigación, 52 de ellos (57,8%) cometieron menos de 7,8% de errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas de sistemas numéricos, 22 estudiantes (24,4%) incurrieron en error en el 7,8% hasta menos de 15,6% de ítems, un participante cometió el 31,2% de errores o más de este tipo de error y 15 estudiantes (16,7%%) cometieron desde 15,6% hasta menos del 31,2% de errores de este tipo cuando resolvían ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, Tabla 33.

Tabla 33

Distribución de frecuencias de los errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos

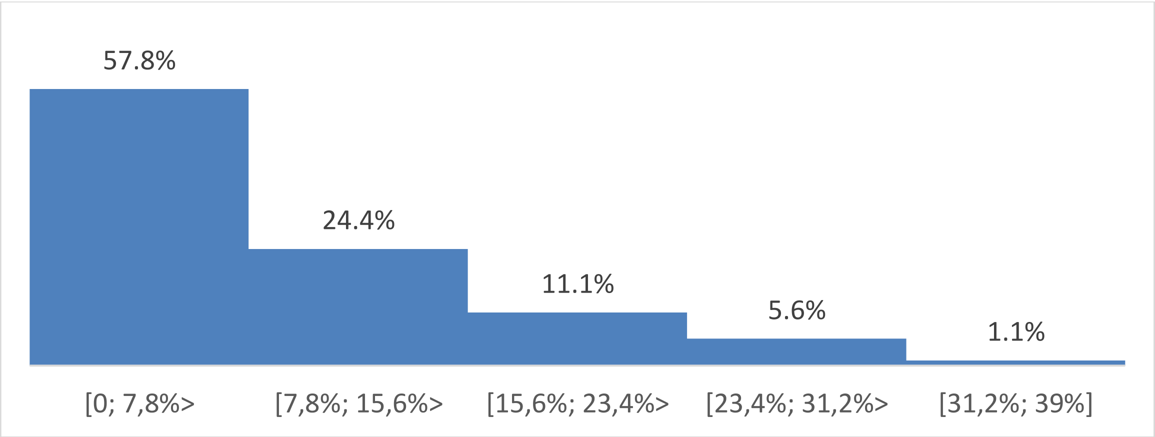
	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
[0; 7,8%〉	52	57,8	57,8
[7,8%; 15,6%〉	22	24,4	82,2
[15,6%; 23,4%〉	10	11,1	93,3
[23,4%; 31,2%〉	5	5,6	98,9
[31,2%; 39%]	1	1,1	100,0
Total	90	100,0	

Fuente: Elaboración propia

El 93,3% de los estudiantes cometió error en menos de la cuarta parte (23,4%) de los ítems que miden errores matemáticos relacionados al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos en la solución de ejercicios y problemas relacionados a los sistemas numéricos, situándose la mayor cantidad de estudiantes (57,8%) en el intervalo de ítems con error inferior al 7,8%, Figura 14.

Figura 14

Histograma de los porcentajes de errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos, cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de sistemas numéricos



Fuente: Elaboración propia

4.2 Discusión de resultados

Los reportes difundidos por la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) del Ministerio de Educación y la Prueba PISA de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico

(OCDE) muestra que gran parte de los estudiantes tienen un “nivel de rendimiento relativamente bajo” en la asignatura de matemática, por lo que se les ubica en la categoría de “Alumnos tipo C”, lo cual significa que los estudiantes pueden resolver preguntas de baja demanda cognitiva (Ministerio de Educación, 2020). Esta situación se proyecta hasta la educación universitaria, donde los estudiantes se enfrentan a mayores niveles de exigencia de aprendizaje matemático y que les cuesta superar porque la debilidad de sus prerrequisitos hace que cometan errores matemáticos. Se distingue que los estudiantes utilizan procedimientos imperfectos y poseen concepciones inadecuadas, a veces inventan sus propios procedimientos (Rico, 1998).

En la práctica docente se pueden notar diversos errores que según Del Puerto et al. (2004), “son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje” (p.3). En particular en el área de matemática se pueden evidenciar diversos errores como aquellos debidos a dificultades con el lenguaje, debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento, o a dificultades para obtener información espacial e incluso al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.

El error visto como parte del proceso de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, se puede entender como señal de la presencia de varias posibles causas como por ejemplo las mencionadas por Brousseau, Davis y Werner, citados por García (2010), entre las que considera: la no comprensión del tema sobre el que se pregunta, la confusión de contenidos y de procedimientos en la aplicación de estos y el invento de procedimientos.

La discusión que a continuación se desarrolla se ha realizado teniendo en cuenta el objetivo general y los objetivos específicos propuestos para el desarrollo de la presente investigación.

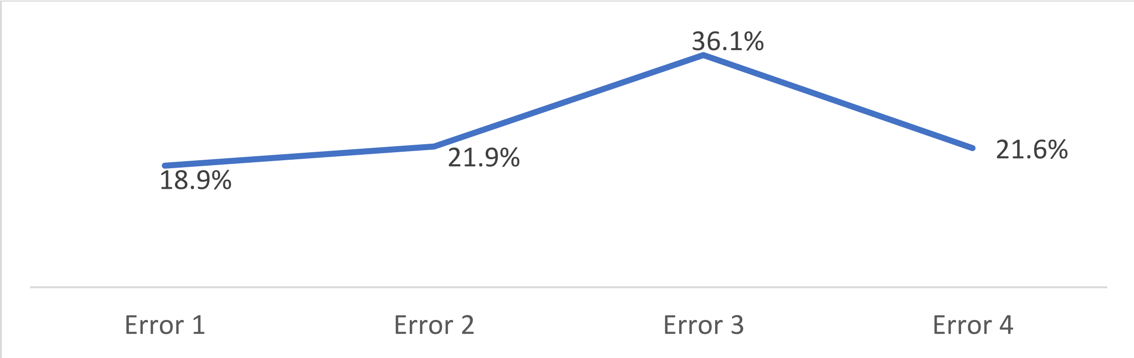
4.2.1 *Relación entre los cuatro tipos de errores evaluados de acuerdo al tipo de contenido matemático*

En el objetivo general de la investigación se propone la realización de un análisis de errores matemáticos teniendo en cuenta el contenido que se evaluó, es decir: Conjuntos y Sistemas Numéricos. Por esta razón es que a continuación se presentarán los resultados obtenidos en las evaluaciones aplicadas considerando el tipo de contenido matemático incluido en los instrumentos que fueron aplicados a los estudiantes y cuál es el comportamiento respecto a cada uno de los cuatro errores estudiados.

4.2.1.1 Relación entre los tipos de errores cometidos por los estudiantes en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos. De los porcentajes promedios descritos en cada uno de los tipos de error que constituyen los errores en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, se puede apreciar que los estudiantes, en promedio cometieron más errores en el tipo 3 (Errores debidos a las dificultades para obtener información espacial) y cometieron una menor cantidad de errores, en promedio, en el tipo 1 (Errores debidos a dificultades del lenguaje). Es decir, el tipo de error 3 es el que más aporta en el porcentaje promedio del total de errores cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos, Figura 15.

Figura 15

Medias de los porcentajes de los diversos tipos de errores cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos

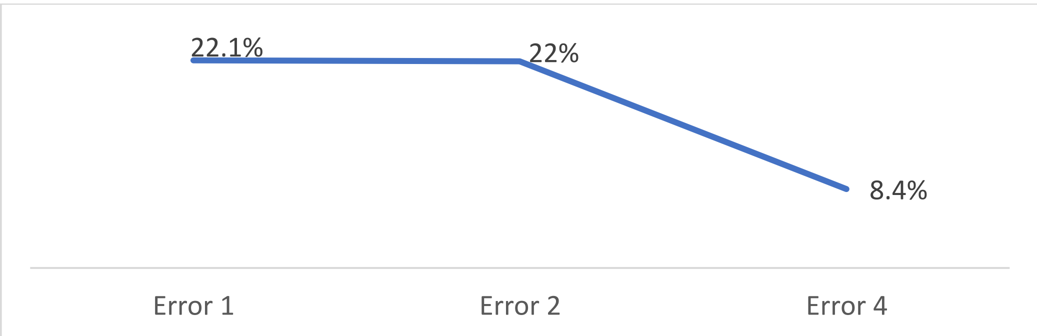


Fuente: Elaboración propia

4.2.1.2 Relación entre los tipos de error cometidos por los estudiantes en la solución de ejercicios y problemas de sistemas numéricos. De los promedios porcentuales descritos en cada uno de los tipos de error que constituyen los errores cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, se observa que los estudiantes, en promedio cometieron más errores en los tipos 1 (Errores debidos a dificultades del lenguaje) y 2 (Errores debidos a la rigidez del pensamiento o asociaciones incorrectas), y cometieron menos cantidad de errores, en promedio, en el tipo 4 (Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos). Es decir, los tipos de error 1 y 2 aportaron más en el promedio del total de errores cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos, Figura 16.

Figura 16

Porcentajes medios de los diversos tipos de error cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre sistemas numéricos

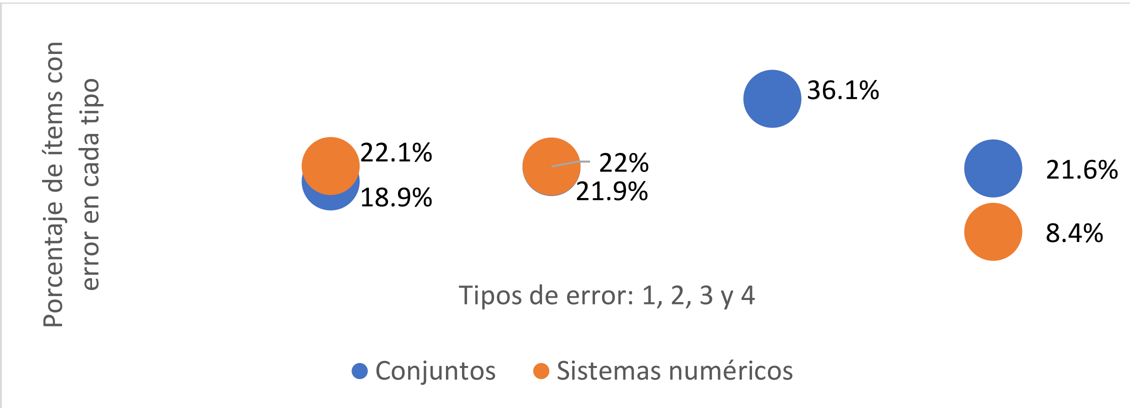


Fuente: Elaboración propia

4.2.1.3 Relación entre los tipos de error cometidos por los estudiantes en la solución de ejercicios y problemas sobre teoría de conjuntos y sistemas numéricos. De los promedios porcentuales descritos en cada uno de los tipos de error cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre conjuntos y sistemas numéricos, se observa que los estudiantes, cometieron error en mayor proporción en teoría de conjuntos en el tipo 4 (errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos) respecto al promedio de este tipo en sistemas numéricos, con una diferencia del 13,2%. Para el error tipo 1 (errores debidos a dificultades en el lenguaje) en promedio cometieron más errores en sistemas numéricos respecto a teoría de conjuntos, con una ligera diferencia del 3,2%. En el caso del error tipo 2 (Errores debidos a la rigidez del pensamiento), en ambos temas matemáticos la proporción promedio de error cometido es aproximadamente la misma y para el error tipo 2 no es posible la comparación dado que éste no se midió en sistemas numéricos. Por tanto, de lo estudiado, los estudiantes cometieron más error en los ítems que corresponden a teoría de conjuntos, siendo la más alta tasa para el error tipo 3 (errores debidos a las dificultades para obtener información espacial), por lo que se deben tomar más acciones en los errores tipo 3 y 4 referidos a contenidos de Teoría de conjuntos para reducir la tasa de ítems en los que se incurre en error, Figura 17.

Figura 17

Porcentajes medios de los diversos tipos de error cometidos en la solución de ejercicios y problemas sobre conjuntos y sistemas numéricos



Fuente: Elaboración propia

4.2.2 *Promedio de los tipos de error matemático de acuerdo a las tipologías analizadas*

4.2.2.1 Errores debidos a dificultades en el lenguaje. Radatz (1979) indica que los errores debidos a dificultades en el lenguaje se manifiestan en dos momentos, uno de ellos ocurre cuando el estudiante debe interpretar información comunicada mediante enunciados que contienen simbología y terminología matemática para a partir de ella inferir información y resolver el problema, y el otro, cuando el estudiante debe comunicar y transmitir mensajes utilizando elementos necesarios para brindar información exacta. Estas dos manifestaciones del uso del lenguaje matemático, suponen que el estudiante no solo "relacione" un símbolo con su significado, sino que también decodifique e interprete para que pueda lograr la comunicación matemática esperada. Las dificultades que puede encontrar en el camino pueden derivarse de diversos orígenes tales como las asociadas a trastornos cognitivos, que por lo general son casos aislados y que en el grupo de los noventa estudiantes con quienes se trabajó, no se ha tenido evidencia o un diagnóstico de un especialista que asegure que alguno de ellos presentaba alguno de estos tipos de trastornos (acalculia y discalculia). Por otro lado, es importante mencionar que "la transición de la aritmética al álgebra" sí representa uno de los mayores obstáculos, debido a que es en el álgebra donde se involucran constructos generales y abstractos usando determinados sistemas de representación haciendo uso del lenguaje matemático, lo que sin duda para muchos estudiantes de la asignatura representa una barrera significativa en su proceso de aprendizaje de la misma, y que se detalla a continuación.

En el estudio realizado, al establecerse cinco intervalos en los que oscilan los porcentajes de errores de esta categoría cometidos por los estudiantes, se encontró que el menor número de estudiantes que cometieron errores fueron 4, quienes representan el 4,4% del total de participantes los cuales se han concentrado en el nivel más alto en la comisión de errores comprendidos entre el 36% y el 45%. Por otro lado, también se ha podido observar que la mayoría de los estudiantes representada por el 81,1% cometen errores matemáticos asociados a dificultades con el lenguaje pero con menor frecuencia, por ejemplo, entre 0% y 9% de incidencia de errores solo hubo 9 estudiantes que cometieron errores (10%), en el intervalo comprendido por más del 9% pero menos que el 18% de errores se concentraron 26 estudiantes (28,9%) y en el intervalo central comprendido desde el 18% hasta menos del 27% de errores hubo un total de 38 estudiantes (42,2%) que lo cometieron, Tabla 12. El significado de estos datos obtenidos es que, aunque en los niveles más altos con los que se midió la presencia de este error (asociado a dificultades con el lenguaje) se concentre solo una minoría de los estudiantes, esto no exime que este error no sea relevante para estudios sobre la influencia del dominio de la comunicación matemática en el aprendizaje de la mencionada asignatura, de hecho, los estudiantes de la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura han evidenciado que aunque la mayoría de los estudiantes presente pocas dificultades en la comunicación matemática, hay una minoría que requiere de estrategias para trabajar sobre los factores que condicionan la aparición de este tipo de dificultades.

Los resultados encontrados son similares a los obtenidos por Fernández (2013) en su investigación "Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas en ESO y bachillerato. Análisis de un caso práctico". Este autor, concluye que, entre las dificultades relacionadas al contenido de la asignatura de matemática, están las asociadas a los conceptuales, procedimentales, actitudinales, planteamiento y resolución de problemas, y otros (que el autor no especifica). Este autor considera que una de las grandes fuentes generadoras de errores matemáticos son precisamente las dificultades relacionadas al planteamiento y resolución de problemas las que están vinculadas directamente a la comunicación matemática y la que tiene que ver con los *errores matemáticos debidos a dificultades en el lenguaje*, y que según lo que manifiesta este autor, este error se manifiesta con bastante frecuencia en los aprendizajes de los estudiantes, debido dos grandes particularidades de la matemática: "por un lado, su papel de modelización y representación de la realidad y la necesidad de traducir constantemente del lenguaje simbólico matemático al lenguaje natural, y por otro, su doble naturaleza concepto-proceso" (pp. 37-38), por lo tanto, a partir de los datos obtenidos, se observó que este error está presente y que se debe trabajar con estrategias con los estudiantes para que en unos casos puedan desarrollar sus capacidades en comunicación matemática y por otro lado (también el otro grupo de estudiantes) puedan fortalecer las que ya tienen.

En el estudio realizado se encontró que los estudiantes evidenciaron la presencia de errores debidos a dificultades en el lenguaje en situaciones en concreto como las que se mencionan a continuación:

- Cuando los estudiantes debían interpretar la información comunicada a través del lenguaje algebraico (por ejemplo: denotar conjuntos por extensión) y a su vez comunicar la información utilizando la simbología apropiada (por ejemplo: denotar conjuntos por comprensión).
- Cuando los estudiantes tenían que reconocer el significado de simbología matemática para poder comprender la premisa de un problema y con ello dar respuesta a lo que se solicita en cada pregunta (por ejemplo: reconocer la pertenencia o inclusión de elementos, o incluso las operaciones con conjuntos).
- Cuando los estudiantes tenían que responder a preguntas planteadas. Esto se consideró importante porque se pudo detectar que algunos estudiantes realizaban correctamente sus procedimientos, sin embargo, tenían dificultades para detectar cuál debía ser la respuesta que requería el problema.

4.2.2.2 Errores debidos a la rigidez del pensamiento o asociaciones incorrectas. Cometer errores matemáticos debido a la rigidez del pensamiento o asociaciones incorrectas denota la poca flexibilidad en el pensamiento del estudiante, la cual se puede manifestar cuando éste no evidencia apertura al cambio, es decir se rehúsa (en la mayoría de casos, involuntariamente) a realizar modificaciones a un determinado esquema que ya forma parte de su estructura mental (debido a que en su momento le fue de utilidad para resolver determinadas situaciones problemáticas), por lo que cuando se enfrenta a una nueva situación desequilibrante no realiza modificaciones necesarias para adaptarse y enriquecer las redes mentales preexistentes. Por lo anterior se puede establecer una relación entre "rigidez del pensamiento" y "poca flexibilidad" y vincularlas a la presencia de "Obstáculos en el aprendizaje", la razón de ello es que cuando un estudiante ya tiene un conocimiento que forma parte de alguna de las estructuras mentales que ya posee, existe una tendencia a la "perpetuidad", es decir, a recurrir a este conocimiento del que ya tiene dominio y que además, ha comprobado su eficacia en reiteradas ocasiones, lo que genera la presencia de obstáculos, es decir elementos ya existentes actúan como barreras en la adquisición de conocimientos nuevos que formen nuevas estructuras cognoscitivas o enriquezcan las ya existentes.

Para el análisis de los *errores matemáticos debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento* también se establecieron 5 intervalos entre los que oscilan las frecuencias porcentuales respecto a los índices de errores de este tipo, a partir de ello se pudo identificar que, en esta tipología de error, menos de la mitad del total de los estudiantes cometen este error, esto es, se encontró que solo 16 estudiantes (17,8%) cometieron desde 33% hasta menos de 44% de errores asociados a la rigidez del pensamiento, y solo 3 estudiantes (3,3%) se encontraron en el nivel más alto de comisión de errores, esto es, entre más del 44% hasta menos del 55%. Asimismo, se pudo observar también que hay una mayor cantidad de estudiantes que aunque cometieron errores de esta categoría, la frecuencia de la presencia de éstos cuando resolvían los ejercicios y problemas propuestos fue menor, así tenemos por ejemplo que 17 estudiantes (18,9%) cometieron errores comprendidos entre 0% y 11%; 36 estudiantes (40%) cometieron desde 11% hasta menos de 22% de errores y 18 estudiantes (20%) se ubicaron en el rango de comisión de errores desde 22% hasta menos del 33%. Esto evidencia que los estudiantes realizan mejores asociaciones en la solución de ejercicios y problemas de conjuntos y sistemas numéricos en el curso de Matemática Básica, tabla 18.

Esta menor cantidad de errores matemáticos asociados a la rigidez del pensamiento cometidos por los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, se corresponde con los resultados obtenidos en la investigación desarrollada por Del Puerto et al. (2004) titulada*, Análisis de errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas*, desde donde se encontró que también en estudiantes que están iniciando su formación universitaria más de la mitad de ellos no evidencia la comisión de este tipo de error, pero aún con ello se registra la presencia de este error, como en el presente estudio.

En el estudio realizado se encontró que los estudiantes evidenciaron la presencia de errores debidos a la rigidez del pensamiento o asociaciones incorrectas en situaciones en concreto como las que se mencionan a continuación:

- Cuando los estudiantes debían reconocer casos de pertenencia e inclusión, para lo cual se hace necesario que el estudiante conozca las características de cada caso y que con ello pueda diferenciarlas. Una situación parecida ocurre con los casos de las operaciones que se realizan entre conjuntos.

- Cuando los estudiantes debían realizar conversiones desde fracciones a números decimales exactos y periódicos, para posteriormente efectuar operaciones combinadas.

4.2.2.3 Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Cometer errores en la obtención de información espacial supone la existencia de dificultades que se evidencian cuando es el estudiante quien debe inferir y obtener información que se le presenta a modo de gráficas o diagramas para poder comprender el problema y resolverlo. La presencia de esta dificultad está vinculada a la forma en la que el estudiante ha desarrollado o no, la *visualización matemática* o *imaginación espacial*, la cual es una actividad de alta demanda cognitiva debido a que involucra procesos mentales tales como análisis, reflexión e interpretación de información que se manifiesta a través de gráficos y diagramas, lo cual para los estudiantes resulta complejo debido a que deben reconocer cada una de las partes que constituyen estos diagramas e identificar el significado que transmiten individual y globalmente.

Los datos obtenidos en la investigación respecto a los errores originados por dificultades para obtener información espacial que cometieron los estudiantes, no se organizaron por intervalos debido a que la cantidad de ítems (13) para evaluar este error fue menor que con las otras categorías de error. Así de los resultados se obtuvo que el 60% de los estudiantes cometen hasta el 38% de errores de este tipo, y, por otro lado, el otro 40 % de estudiantes cometen desde 46% hasta el 92% de errores, Tabla 24. Es importante señalar también que en el grupo del 40% de estudiantes previamente mencionados se encontró que, aunque las frecuencias de comisión de errores de este tipo son por lo general baja (con solo 2,2 % y 5,6% de estudiantes que cometen entre 7, 8, 10, 11 y 12 errores), se encontró un pico bastante "significativo" que ascendió hasta 16,7% (15 estudiantes) que cometieron este tipo de error en 9 ítems. Este porcentaje encontrado es notoriamente más alto (16,7%) comparado con los otros (2,2 % y 5,6%) que están comprendidos en este rango de comisión de 6 a 12 errores, y la razón de este hecho es que hubo un total de 8 ítems que tienen un mismo tipo de pregunta, y se encuentran en el apartado 4 de la Práctica N°2 (ver figura 5), y que se encontró que un total de 15 estudiantes no habían resuelto correctamente estos 8 ítems y uno adicional (distinto a ellos), por lo que se justifica la presencia de este pico en la frecuencia de comisión de este tipo de error. Figura 18.

Figura 18

Pregunta 4 de la Práctica N°2

4. Sean A, B, C conjuntos no vacíos, demuestre gráficamente la falsedad o verdad de las expresiones siguientes: **(4 p.)**

   a) $(A - B) \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap B)$

   b) $A - (A - B) = A \cap B$

   c) $(A - C) \cap (B - C) = A \cup B$

   d) $(A - B) \cap (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

   e) $(A - B) \cap (B - C) = A \cup B$

   f) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cap C)$

   g) $A \cap (B - A) = \varnothing$

   h) $(A - B) \cap (B - C) = (A \Delta B) \cap C'$

Fuente: Datos tomados de práctica de la docente a cargo de la asignatura.

Es importante detallar que este error generado por dificultades para obtener información espacial, al compararlo con los demás es visiblemente el que se ha cometido con mayor frecuencia, aun cuando la cantidad de ítems con la que se evaluó el mismo ha sido significativamente menor (13 errores de este tipo) respecto a las otras tres categorías de errores[9]. Por lo tanto, es necesario acotar que incluso en esta minoría de preguntas se ha obtenido información significativa que permite concluir que los estudiantes de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, presentan muchas dificultades las cuales están relacionadas a la interpretación y extracción de información a partir de gráficas y diagramas, o cuando son los estudiantes quienes deben comunicarla a través de esta modalidad.

Los resultados encontrados respecto a la cantidad de errores cometidos por los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura en cuanto a la obtención de información espacial, son en cierto modo algo parecidos a los que encontraron Abrate et al. (2006) cuando realizaron su investigación titulada *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*, en la que encontraron que este error asociado a la obtención de información espacial ocupa el segundo lugar en las más altas frecuencias de comisión del mismo, representada por un 24,28% y que solo lo separa un 3,15% del error más frecuente que según los resultados fueron los errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas. Es importante mencionar que en el estudio realizado por este grupo de investigadores enfocaron este error en función de contenidos geométricos (figuras en el plano y propiedades de los triángulos), contenidos que a diferencia de la presente investigación no se abortaron en los ítems de las prácticas 1, 2, 3 y el examen parcial.

---

9 El Error 1 se estudia con 133 ítems, el Error 2 con 78 ítems y el Error 4 con 146 ítems

En el estudio realizado se encontró que los estudiantes evidenciaron la presencia de errores debidos a dificultades para obtener información espacial en situaciones específicas, como, por ejemplo: cuando los estudiantes debían realizar representaciones gráficas en base a una premisa propuesta en un problema de la temática de Conjuntos.

4.2.2.4 Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos. Radatz (1979) de modo enfático señala directamente tres posibles causas que generan errores matemáticos en los estudiantes, éstas son: deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos; la razón de ello es que todos los procedimientos matemáticos que se requieran para resolver un problema, deben ser conocidos por quien debe resolverlo, es decir, el estudiante debe contar con insumos o herramientas y saber cómo y cuándo usarlas, o de lo contrario se queda sin resolver la situación o la resuelve equivocadamente. Para comprender la funcionalidad de estos tres componentes, se deben analizar desde lo que representan desde la globalidad debido a que, en primera instancia, las habilidades matemáticas están relacionadas con el hacer matemático y con las piezas fundamentales, las cuales están representadas por los conceptos o ideas matemáticas, así, González (1993) explica este proceso tomando ideas de Ausubel: "Todo quehacer racional se funda en el conocimiento y uso de estas especies de 'partículas básicas del conocer' que son las ideas o conceptos. Ellas son las que nos permiten elaborar conocimiento organizado y comunicarlo" (p.50), por lo tanto, si el estudiante no cuenta con estas herramientas necesarias, su experiencia de aprendizaje en la asignatura de Matemática Básica no será significativa ni productiva.

En este sentido, fue relevante analizar la frecuencia de este error en el estudio realizado, el mismo que ha permitido identificar que de los estudiantes inscritos en el curso de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, el 95,6% de los estudiantes han cometido menos del 27% de errores relacionados al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos. Esto significa que, de acuerdo a los resultados, los estudiantes presentan poca dificultad en cuanto al dominio de habilidades, hechos y conceptos matemáticos, asimismo, existe un 4,4% del total de estudiantes que comete desde el 27% hasta el 45% de errores de esta categoría, Tabla 28.

Al comparar los resultados obtenidos por Del Puerto et al. (2004) con los de la presente investigación, sobre incurrir en errores matemáticos debido al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos por parte de los estudiantes, se observa que en el caso de estas investigadoras argentinas, ellas encuentran que este tipo de error es cometido frecuentemente por estudiantes que han iniciado su formación universitaria (95%), sin embargo, se puede observar que estos resultados comparados con los obtenidos en la presente investigación difieren entre sí notablemente, pues en este caso de observa que los estudiantes en general presentan menos de la mitad de errores (de un total 146 de ítems desde los que se evaluó la presencia de errores).

En el estudio realizado se encontró que los estudiantes evidenciaron la presencia de Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos cuando los estudiantes debían realizar actividades como clasificaciones de acuerdo a las características del problema y ejecución de procedimientos matemáticos para dar respuesta a la pregunta planteada.

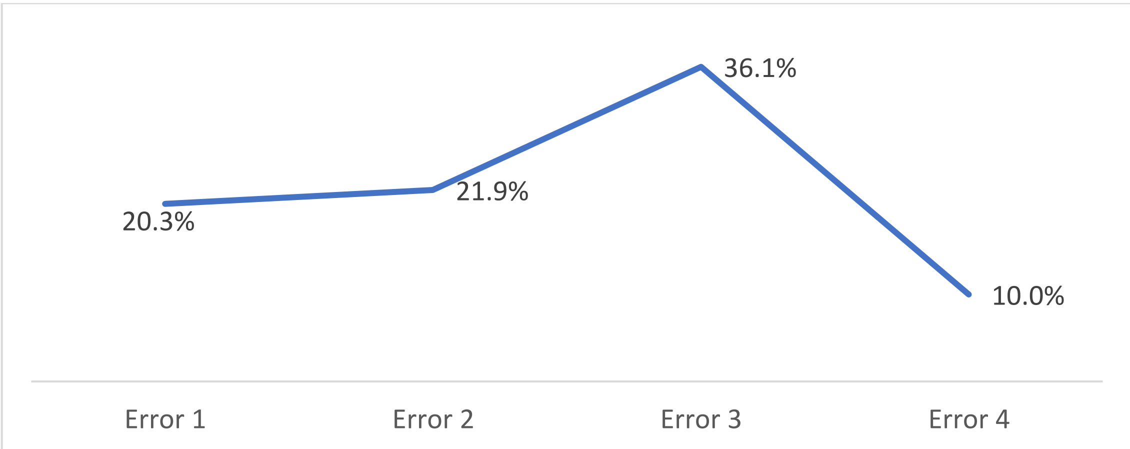
4.2.3 *Promedio de los porcentajes de los tipos de errores matemáticos y balance de los errores matemáticos analizados*

La investigación ha permitido determinar que los estudiantes que han cursado la asignatura de Matemática Básica incurrieron en error con el mayor porcentaje promedio (36,1%) en los ítems que miden los errores debidos a las dificultades para obtener información espacial (error 3), el segundo promedio más alto (21,9%) corresponde a los ítems que miden el error referido a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento (error 2), en tercera ubicación se encuentra el promedio (20,3%) de los ítems que miden las dificultades en el lenguaje (E1) y el menor porcentaje promedio (10%) corresponde a los ítems que miden los errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos (error 4), Figura 19.

De acuerdo a los porcentajes promedios de errores que se muestran en la Figura 19 se debe tomar acciones para superar las dificultades para obtener información espacial (error 3) de tal manera que los estudiantes mejoren en la obtención de información espacial y como consecuencia incurran en menos errores de este tipo. Para el caso de los ítems que miden el error 1 y error 2, los porcentajes promedios de ítems en los que se cometió errores son muy próximos y, se debe considerar implementar estrategias que ayuden a reducir el número de ítems errados. Para el caso del Error 4, donde los estudiantes presentan menos ocurrencias de error, se debe mantener el porcentaje de errores o reducirlo, Figura 19.

Figura 19

Medias de los porcentajes de errores cometidos en cada una de las cuatro categorías analizadas



Fuente: Elaboración propia

Dado que en la universidad, a pesar de las barreras de ingreso, aún se evidencia una elevada tasa de estudiantes que cometen errores matemáticos, se debe buscar acciones que permitan reducir dichas tasas de errores, en particular en los que se originan debido a las dificultades para obtener información espacial (ver **Figura 19**). Se puede afirmar, finalmente, que los estudiantes aún en la etapa universitaria tienen dificultades de diversa índole en contenidos matemáticos, por lo tanto, al construir conocimiento en matemática también es posible cometer errores y los resultados obtenidos así lo evidenciaron.

Conclusiones

a) Los ítems que permitieron recoger información sobre errores en los cuestionarios propuestos (práctica 1, práctica 2, práctica 3 y examen parcial) y en los que la temática abordada fue: solución de ejercicios y problemas sobre conjuntos y sistemas numéricos, permitieron detectar que los errores que se han encontrado en estas circunstancias fueron los siguientes: Errores debidos a dificultades en el lenguaje, errores debidos a asociaciones incorrectas o a la rigidez del pensamiento, errores debidos a dificultades para obtener información espacial y errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos matemáticos, los mismos que constituyen una clasificación ya propuesta por Radatz (1979).

b) Los contenidos abordados en las cuatro evaluaciones aplicadas, a los estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, fueron sobre temática de conjuntos y de sistemas numéricos y a partir de estos se evaluó la presencia de los errores matemáticos. De los resultados se obtuvo que, en la temática donde los estudiantes evidencian una mayor frecuencia en la comisión de errores es en la teoría de conjuntos siendo la más alta tasa para el error tipo 3 (errores debidos a las dificultades para obtener información espacial), lo cual significa que los estudiantes tienen mucha dificultad en actividades donde tienen que representar e interpretar diagramas sobre notación y operaciones de conjuntos. Figura 17.

c) En general se puede afirmar que los estudiantes, aún en la universidad, cometen errores matemáticos de diversa índole. En el estudio realizado se encontró que el error matemático que es cometido con más frecuencia en los estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica son los debidos a dificultades para obtener información espacial y el referido a la rigidez del pensamiento o asociaciones incorrectas, lo cual significaría que aun cuando ya se trata de estudiantes recientemente egresados de la EBR, no han desarrollado bien capacidades como: "Traduce, representa y modela" por lo que la presencia de dificultades vinculadas a éste, genera muchos impedimentos en el progreso y la obtención de aprendizajes significativos en la asignatura. (**Figura 19**).

d) En el estudio realizado se encontró que el segundo error matemático cometido con mayor frecuencia por los estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica es el referido a la rigidez del pensamiento o asociaciones incorrectas. Los estudiantes que han iniciado su formación universitaria, de acuerdo a su edad según Piaget, estarían en el estadio de desarrollo intelectual de operaciones formales, el cual se caracteriza porque los estudiantes manifestarían un pensamiento formal reversible, interno y organizado, (Saldarriaga et al., 2016), sin embargo, con los resultados obtenidos se concluye que un 21,9% de los estudiantes no están en este estadio, lo cual se corresponde con lo que también explicó Piaget y que Saldarriaga et. al, (2016) describen de la siguiente forma:

> Cada estadio según la teoría de Piaget sufre límites de edad que pueden variar en los distintos grupos poblacionales, de acuerdo al contexto en que se desarrolle su formación, la cultura que tengan, etc. Las adquisiciones cognitivas en cada estadio no son productos intelectuales aislados, sino que guardan una estrecha relación, formando lo que suele denominarse una estructura de conjunto (p. 131).

e) El tercer error matemático que los estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica comenten con mayor frecuencia son los errores debidos a dificultades en el lenguaje. Además, se observó que este tipo de error solo difiere en 1,6% respecto a los errores debidos a la rigidez del pensamiento o asociaciones incorrectas (figura 19). El lenguaje matemático es una constante en la asignatura, y se observó que, aunque los estudiantes presenten dificultades en el lenguaje, este no es un factor del todo obstructor de aprendizajes en la asignatura, significa que los estudiantes pueden interpretar y comunicar información matemática de una forma regular, aunque se puede diseñar estrategias desde las que se promueva el fortalecimiento de las capacidades asociadas a la comunicación matemática.

f) El error matemático cometido con menor frecuencia por los estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica es el asociado al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos; desde lo que se puede inferir que la mayor parte de los estudiantes tienen los insumos para trabajar los contenidos propuestos de la asignatura, sin embargo, es también necesario proponer estrategias desde las que los estudiantes puedan hacer uso de estas herramientas en distintos contextos, lo cual a su vez garantice un mejor desarrollo en las habilidades matemáticas. (Figura19).

g) Los ítems que permitieron evaluar el dominio de habilidades, hechos y conceptos matemáticos; tuvieron mucha presencia en todos los instrumentos (al igual que los errores vinculados al lenguaje matemático), a pesar de ello, se pudo detectar que la frecuencia de aparición de éstos no es alta, solo un 10% de estudiantes concentra baja frecuencia en la comisión de este tipo de error. (Figura19).

h) En promedio, al evaluar la presencia de errores matemáticos en los estudiantes de la asignatura de Matemática Básica, se ha podido encontrar en primera instancia que la mayoría de ítems permite evaluar la presencia de dos tipos de errores: los asociados a dificultades con el lenguaje y los originados por el deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos matemáticos, en los cuales se puede identificar que estos dos tipos de errores son los que menos cometen los estudiantes, lo cual significa que cuando los estudiantes no logran los objetivos esperados en la asignatura, no es porque no comprenden del todo la información comunicada, ni porque no conocen conceptos del área, sino porque de todas maneras hay algunas falencias en estos factores causales de error y porque hay otros espacios que sí generan muchas dificultades. Por otro lado, aunque hay menor presencia de ítems que permiten evaluar errores debidos a dificultades para obtener información espacial, se ha podido detectar que hay una alta presencia de este tipo de errores en los estudiantes que participaron de la investigación., por lo tanto se hace necesario que se propongan actividades y estrategias que les permitan desarrollar y/o potenciar habilidades referidas a la visualización matemática de los estudiantes y así tengan mayor apertura para la adquisición de aprendizajes y competencias futuras. (**Figura 19** y Tabla 4).

Recomendaciones

a) Implementar y formular instrumentos de recogida de información para el análisis de la presencia de errores, con una igualdad de ítems para poder evaluar a todos los errores con los mismos rangos y obtener resultados más certeros y específicos, principalmente cuando los estudiantes llegan a las aulas universitarias para así evaluar qué tipo de errores traen desde su formación escolar.

b) Implementar asesoramientos y/o talleres en la asignatura de matemática de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación, en temas de comunicación matemática para que esto no afecte su rendimiento académico.

Lista de referencias

Abrate, R., Pochulu, M., y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Universidad Nacional de Villa María. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Aké, L. (2013). Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros es formación. *(Tesis de doctorado).* Universidad de Granada, Granada.

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático.* Barcelona: GRAÓ.

Astolfi, J. (1999). *El "error", un medio para enseñar.* Sevilla: Díada.

Astolfi, J. (2004). *El "error", un medio para enseñar.* México: Díada.

Azcárate, P., y Cardeñoso, P. (1994). La naturaleza de la matemática escolar: problema fundamental de la didáctica de la matemática. *Investigación en la escuela, 24*, 79-88.

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Educación, 32*, 123-138.

Castro, A., Gorgorió, N., y Prat, M. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación, 374*, 43-68.

Cid, E. (2015). Obstáculos espistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *(Tesis doctoral).* Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Córdova, M. (2003). *Estadística Descriptiva e Inferencial.* Lima: Moshera.

Cortina, J., Visnovska, J., y Zúñiga, C. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática, 25*, 7-29.

Dávila, G. (2006). El razonamiento inductivo y deductivo dentro del proceso investigativo en ciencias experimentales y sociales. *Laurus*, 180-205.

De La Torre, S. (2004). *Aprender de los errores: El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación.* Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

De la Torre, S. (2013). Aprender de los errores en la enseñanza y en la vida. *Complejidad, 17*, 5-19.

Del Puerto, S., Minnaard, C., y Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 38*, 1-12.

Del Puerto, S., Seminara, S., y Minnaard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*, 1-8.

Escudero, R. (2007). Uso de los errores matemáticos como dispositivo didáctico para generar aprendizaje de la racionalización de radicales de tercer orden. *Zona Próxima, 8*, 12-25.

Fernández, Á. (2013). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas en ESO y Bachillerato. Análisis de un caso práctico. *(Tesis de maestría).* Universidad Internacional de La Rioja, Madrid.

Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en Matemáticas. *Suma*, 10-16.

Franchi, L., y Hernández, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*(24), 63-71.

Gairín, J. (1998). Números racionales positivos: Reflexiones sobre la instrucción. *Aula, 10*, 41-64.

Gairín, J. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. *Contextos Educativos, 4*, 137-159.

Gallardo, A., y Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1*, 1-20.

Gamboa, R., Castillo, M., y Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación, 19*, 1-31.

García, A., y Jacinto, C. (2010). Equidad y educación superior en América Latina: el papel de las carreras terciarias y universitarias. *Revista Iberoamericana de Educación Superior, 1*, 58-75.

García, J. (2010). Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura. *(Tesis de maestría).* Universidad de Granada, Granada.

García, J. (2014). *Manual de dificultades de aprendizaje. Lenguaje, Lecto-Escritura y Matemáticas.* Madrid: Narcea.

Garriga, J. (2011). El lenguaje algebraico: Un estudio con alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. *(Tesis de doctorado).* Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Gavilán, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el aprendizaje cooperativo? *Investigación en la escuela, 73*, 95-108.

Gil, D., y De Guzmán, M. (2001). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e Innovaciones.* Madrid: Popular.

Giordan, A. (1985). Interés didáctico de los errores de los alumnos. *Enseñanza de las Ciencias, 3*, 11-17.

Godino, J. (1991). *Hacia una teoría de la didáctica de la matemática.* Madrid: Síntesis.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En J. Godino, *Didáctica de las matemáticas para maestros* (págs. 11-122). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática, 26*, 483-511.

Gómez, B. (1995). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias, 13*, 313-325.

Gómez, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 3*, 5-16.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA, 7*, 251-292.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimeinto didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *(Tesis de doctorado).* Universidad de Granada, Granada.

González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en Humanidades, 11*, 37-80.

González, H. (1993). Un Criterio para Clasificar Habilidades Matemáticas. *Educación Matemática, 5*, 46-56.

Hernández, C., Prada, R., y Gamboa, S. (2016). Conocimiento y uso del lenguaje matemático en la formación inicial de docentes en matemáticas. *Revista de investigación, desarrollo e innovación, 7*, 287-299.

Hernández, J. (2018). Flexibilidad de pensamiento y aprendizaje cooperativo en estadística. *Investigación e Innovación Educativa, 3*, 52-63.

Hernández, R. (2016). Errores matemáticos en el conocimiento procedimental al resolver problemas de superficies cuadráticas. *Revista Logos, Ciencia y Tecnología, 8*, 67-76.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación* (Quinta edición ed.). México D.F.: McGraw-Hill.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (Cuarta Edición ed.). México, D.F.: McGraw-Hill.

Hidalgo, S., Maroto, A., y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de Educación, 334*, 75-95.

Hitt, F. (1995). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Educación Matemática, 7*, 63-75.

Holguín, A., Barcia, F., y Arteaga, R. (2016). Fundamentos teóricos acerca del saber de la matemática. *Dominio de las ciencias, 2*, 284-295.

Jaramillo, L., y Puga, L. (2016). El pensamiento Lógico-Abstracto como sustento para potenciar los procesos cognitivos en la educación. *Sophia, 2*, 32-55.

Lacués, E. (2014). Aprendizaje de sistemas matemáticos de símbolos en álgebra lineal y cálculo. *Bolema, 28*, 299-318.

Llorente, Y. (2016). La estimulación de la flexibilidad como cualidad de las potencialidades creadoras de los estudiantes mediante elprocesos enseñanza-aprendizaje de la matemática. *(Tesis de doctorado).* Universidad de Holguín, Holguín.

Lupiáñez, J. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria. *(Tesis de doctorado).* Universidad de Granada, Granada.

MedlinePlus. (04 de 11 de 2019). Obtenido de MedlinePlus: https://medlineplus.gov/spanish/walkingproblems.html

Mendoza, J., Páez, A., y Salamanca, E. (2009). Uso del error como mediador cognitivo para el aprendizaje de la adición de fraccionarios aritméticos positivos. *(Tesis de maestría).* Universidad del Norte, Barranquilla.

Mera, D., y Peña, P. (2011). Efectos de la aplicación de estrategias metacognitivas en el rendimiento de los estudiantes de 5to grado al realizar operaciones con números racionales. *Revista de Investigación, 35*, 311-330.

Ministerio de Educación. (2017). *Currículo Nacional de la Educación Básica.* Lima: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación. (01 de diciembre de 2020). *Ministerio de Educación*. Obtenido de Ministerio de Educación: http://umc.minedu.gob.pe/resultadospisa2018/

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2000). *Sistema Educativo Español.* Madrid: Secretaría General Técnica.

Otero, A., y Corica, A. (2017). Jóvenes y educación superior en Argentina. Evolución y tendencias. *Revista Interamericana de Educación de Adultos, 39*, 11-28.

Palarea, M., y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *SUMA, 16*, 91-98.

Planchart, O. (2002). La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función. *(Tesis de doctorado).* Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca.

Puig, L. (2003). Sistemas, textos y sistemas matemáticos de signos. *Matemática Educativa: aspecto de la investigación actual, 1*, 1-12.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for research in Mathematics Education, 10*, 163-172.

Ramírez, R. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. *(Tesis de doctorado).* Universidad de Granada, Granada.

Real Academia Española. (03 de 03 de 2020). Obtenido de Real Academia Española: https://dle.rae.es/lenguaje

Rebollo, M., y Rodríguez, A. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista de Neurología, 42*, 135-138.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrik, P. Gómez, y L. Rico, *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (págs. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoameriana de Educación matemática, 33*, 11-27.

Rosales, C. (2009). El lenguaje matemático en los textos escolares. *Enseñanza y Teaching, 2*, 153-162.

Saldarriaga, P., Bravo, G., y Loor, M. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Revista científica Dominio de las ciencias, 2*, 127-137.

Sanz, I. (2001). Construcción del lenguaje matemático: cuadros y tablas. *Endoxa, 1*, 199-226.

Skemp, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Morata.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática, 1*, 19-52.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra.* Madrid: SINTESIS.

Stenhouse, L. (2003). *Investigación y desarrollo del curriculum.* Madrid: Morata.

Suárez, W., y León, O. (2016). El aprendizaje de la visualización espacial en niños y en niñas. *Revista Horizontes Pedagógicos, 18*, 110-119.

Torres, L., Valoyes, E., y Malagón, R. (2002). Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar. *EMA, 7*, 227-246.

Apéndices

Apéndice A. Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Variables	Metodología
Problema general: ¿Cuáles son los errores matemáticos manifestados en la solución de ejercicios y problemas sobre conjuntos y sistemas numéricos, cometidos por los estudiantes de la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura?	**Objetivo General** Identificar los errores matemáticos más comunes en la solución de ejercicios y problemas sobre conjuntos y sistemas numéricos que cometen estudiantes universitarios del curso de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura. **Objetivos Específicos** a) Definir la clasificación de errores a estudiar en las evaluaciones que se aplicaron a los estudiantes, teniendo en cuenta las categorizaciones propuestas por Radatz (1979), Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) y Socas (1996). b) Medir la frecuencia e identificar las características de los errores matemáticos que cometen los estudiantes debidos a dificultades en el lenguaje. c) Medir la frecuencia e identificar las características de los errores matemáticos que cometen los estudiantes debidos a las asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento. d) Medir la frecuencia e identificar las características de los errores matemáticos que cometen los estudiantes debidos a dificultades para obtener información espacial. e) Medir la frecuencia e identificar las características de los errores matemáticos debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.	**Variable independiente** Error matemático El error matemático es un indicador que brinda valiosa información respecto aquellos factores que influyen negativamente en los aprendizajes de los estudiantes en la asignatura de matemática.	**Paradigma de investigación** Cuantitativo **Nivel de investigación** Descriptivo La consigna del trabajo es identificar los errores matemáticos más frecuentes cometidos por los estudiantes, utilizando porcentajes. **Población y muestra** Los estudiantes de la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura **Técnicas e instrumentos de recolección de datos** Los errores matemáticos cometidos por los estudiantes se analizaron desde cuatro evaluaciones propuestas en la asignatura, y usando una matriz de indicadores. A partir de los procedimientos que realizaron los estudiantes para resolver ejercicios y problemas propuestos en las evaluaciones, se va a evaluar la presencia de errores de acuerdo a los indicadores propuestos.

Apéndice B. Matriz de operacionalización de la variable

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores
Errores matemáticos	El “error” es una variable concomitante al proceso educativo, porque no es posible avanzar en un largo y desconocido camino sin equivocarse (De la Torre, 2004, p. 33).	Los errores son una fuente de información para el profesor acerca de lo que han aprendido los estudiantes y cómo lo han aprendido (…). Es más, son el síntoma indicativo de alguna patología subyacente, un método falso que el estudiante cree correcto (Gómez, 1995, p.314).	Error 01: Errores debidos a dificultades en el lenguaje	Interpretar y traducir problemas
			Error 02: Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Reconocer procedimientos y conocimientos específicos
			Error 03: Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	Representar e interpretar información comunicada a través de gráficas y diagramas.
			Error 04: Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.	Aplicación de conceptos específicos para resolver ejercicios y problemas

Apéndice C. Matriz de especificación del instrumento

Dimensiones	Contenido matemático	Indicador	Variable del indicador: 0 (No responde)	1 (Hay error)	2 (No hay error)
Error 01: Errores debidos a dificultades en el lenguaje	Conjuntos	- Representa por extensión, los elementos de un conjunto expresado por comprensión, a través de lenguaje verbal.	-	-	-
		- Representa por extensión, los elementos de un conjunto expresado por comprensión, a través de lenguaje simbólico.	-	-	-
		- Reconoce la pertenencia y no pertenencia de los elementos de un conjunto, a partir de la simbología empleada en el ítem.	-	-	-
		- Reconoce las características que definen la inclusión entre un conjunto y otro, a partir de la simbología empleada en el ítem.	-	-	-
		- Representa simbólicamente relaciones entre elementos de varios conjuntos, mediante el uso de las operaciones (unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica, complemento) entre éstos.	-	-	-
	Sistemas Numéricos	- Representa simbólicamente y/o verbalmente la información comunicada en modo verbal en el problema.	-	-	-
Error 02: Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Conjuntos	- Reconoce las características que definen la inclusión entre conjuntos, para poder diferenciarla de la pertenencia.	-	-	-
		- Reconoce las características que definen a cada operación entre conjuntos, para dar respuesta a las situaciones problemáticas propuestas.	-	-	-
	Sistemas Numéricos	- Efectúa la conversión de decimales periódicos mixtos a fracciones, para poder resolver operaciones combinadas.	-	-	-
		- Reconoce y aplica la teoría sobre operaciones con fracciones (adición, sustracción, producto y cociente)	-	-	-
		- Efectúa la conversión de números decimales exactos a fracciones, para resolver operaciones combinadas.	-	-	-
		- Convierte decimales periódicos puros a fracciones, para poder resolver operaciones combinadas.	-	-	-
Error 03: Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	Conjuntos	- Representa gráficamente las relaciones de pertenencia entre los elementos de varios conjuntos.	-	-	-
		- Representa gráficamente las relaciones de inclusión entre conjuntos.	-	-	-
		- Representa gráficamente (empleando diagramas de Venn) relaciones entre varios conjuntos utilizando las operaciones (unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica, complemento) entre estos.	-	-	-
Error 04: Errores debidos al deficiente dominio de habilidades,	Conjuntos	- Reconoce e identifica las características que definen a un conjunto, de acuerdo al contexto en el que aparece.	-	-	-
		- Clasifica conjuntos según el número de elementos, a partir de conjuntos expresados por comprensión.	-	-	-

Dimensiones	Contenido matemático	Indicador	Variable del indicador		
			0 (No responde)	1 (Hay error)	2 (No hay error)
hechos y conceptos.	Sistemas Numéricos	- Ejecuta procedimientos para resolver operaciones entre números enteros y fracciones.	-	-	-
		- Convierte números mixtos a fracciones, para poder resolver operaciones combinadas.	-	-	-
		- Aplica las leyes de exponentes para expresar un número en bases que permitan resolver ejercicios con mayor rapidez.	-	-	-
		- Aplica la ley de exponentes, producto de potencias de una base común.	-	-	-
		- Aplica la ley de exponentes, cociente de potencias de una base común.	-	-	-
		- Ejecuta procedimientos para resolver ecuaciones.	-	-	-
		- Extrae el m.c.m. para resolver adición y sustracción de fracciones heterogéneas	-	-	-
		- Efectúa la división del mcm. por el denominador de la fracción.	-	-	-
		- Efectúa el producto, del cociente con el numerador de la fracción	-	-	-
		- Efectúa la adición y/o sustracción de los numeradores de la fracción.	-	-	-

Apéndice D. Registro del conteo de errores por estudiante

Estudiante	Error 1	Error 2	Error 3	Error 4
1	31	6	2	14
2	18	9	1	7
3	24	24	9	18
4	11	7	2	7
5	48	16	9	5
6	6	4	0	8
7	1	1	0	3
8	16	10	1	8
9	20	14	1	20
10	35	17	9	13
11	34	32	9	12
12	17	10	5	7
13	54	31	12	16
14	22	17	7	8
15	46	31	11	8
16	26	24	10	14
17	42	26	10	37
18	32	29	9	16
19	15	1	1	7
20	39	17	9	23
21	6	13	8	0
22	20	9	1	13
23	16	31	10	43
24	46	23	7	3
25	35	10	4	3
26	21	18	0	1
27	8	5	4	2
28	32	21	4	14
29	43	21	3	24
30	14	5	3	9
31	54	26	6	60
32	11	12	1	2
33	20	23	9	3
34	13	3	1	5
35	34	15	2	5
36	20	17	4	0
37	28	22	1	25
38	30	17	3	14
39	38	17	5	12
40	18	14	1	3
41	20	13	9	1
42	13	9	1	11
43	34	16	1	40
44	24	10	1	17
45	19	6	1	13
46	33	27	8	21
47	23	9	5	13
48	29	21	9	11
49	36	42	9	20
50	29	25	4	26

Estudiante	Error 1	Error 2	Error 3	Error 4
51	26	18	9	15
52	40	7	1	19
53	29	11	3	2
54	22	16	6	15
55	25	16	4	3
56	24	8	1	8
57	18	17	6	6
58	8	3	2	1
59	24	3	3	2
60	30	10	4	18
61	45	19	3	36
62	27	11	3	13
63	35	19	1	17
64	11	1	0	0
65	29	27	1	22
66	20	12	3	12
67	35	39	9	29
68	30	22	9	21
69	39	28	10	22
70	29	25	10	22
71	16	10	0	5
72	57	33	11	22
73	26	24	6	24
74	25	28	3	31
75	35	31	9	51
76	29	14	6	23
77	11	15	7	16
78	47	42	7	20
79	34	17	12	5
80	12	0	1	4
81	16	7	1	7
82	31	26	3	17
83	47	34	1	35
84	17	10	0	5
85	24	19	2	35
86	31	24	9	5
87	44	29	7	11
88	19	7	1	10
89	33	16	1	18
90	30	16	5	18

Apéndice E. Tabla de recuento de preguntas planteada, ítems y procedimientos

Instrumento aplicado	N° de pregunta	Cantidad de Ítems	Cantidad de procedimientos	
Práctica 1	1	6	0	
	2	5	1	
	3	7	2	
	4	6	1	
	5	4	4	
	6	7	0	
	7	6	6	
	8	4	1	
Práctica 2	1	6	6	
	2	12	20	
	3	2	1	
	4	8	8	
	5	3	3	
	6	6	3	
Práctica 3	1	0	0	
	2	3	1	
	3a	1	20	
	3b	1	13	
	3c	1	8	
	3d	1	22	
	3e	1	21	
	3f	1	5	
	4a	1	6	
	4b	1	13	
	4c	1	11	
	4d	0	0	
	4e	1	54	
	4f	4	0	
Examen Parcial	1	6	6	
	2	2	1	
	3	1	2	
	4	4	0	
	5	0	0	
	6	4	0	
	7	4	0	
	8	3	8	
Total		123	247	370

Apéndice F. Cantidades mínimas y máximas de errores cometidos

	N	Mínimo	Máximo
E1: Errores debidos a dificultades en el lenguaje	90	1	57
E2: Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	90	0	42
E3: Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	90	0	12
E4: Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.	90	0	60
N válido (por lista)	90		

Apéndice G. Cantidades mínimas y máximas de errores cometidos de acuerdo al tipo de contenido matemático

	Contenidos Matemáticos	N	Mínimo	Máximo
E1: Errores debidos a dificultades en el lenguaje	Conjuntos	90	1	36
	Sistemas numéricos		0	35
E2: Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Conjuntos	90	0	24
	Sistemas numéricos		0	27
E3: Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	Conjuntos	90	0	12
	Sistemas numéricos		No hubo ítems	
E4: Errores debidos al deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos.	Conjuntos	90	0	12
	Sistemas numéricos		0	50
N válido (por lista)		90		

Anexos

Anexo A. Práctica N° 1

UNIVERSIDAD DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MATEMÁTICA BÁSICA
PRÁCTICA Nº 1

Nombre: ....
Fecha: 23 de marzo de 2015

Nota Importante: Lea cuidadosamente las indicaciones de cada pregunta. Resuelva en el cuadernillo de respuestas con lapicero azul, de lo contrario no se corregirá la pregunta, y tampoco tiene opción a presentar ningún reclamo. Justifique sus respuestas cuando se le solicite. Indique el procedimiento seguido en cada pregunta.

1. Dados los conjuntos A = { x/x es una biblioteca de Piura} y B = {x/x es un libro de Matemática}. Si "a" representa un libro de Matemática y "b" representa la Biblioteca de la Udep. Indique si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas: **(2 p.)**

   $a \in A$ ( ) $a \in B$ ( ) $a \notin A$ ( ) $a \in B$ ( )

   $b \in A$ ( ) $b \in B$ ( ) $b \notin A$ ( ) $b \in B$ ( )

2. Sea I = {x/x es un número impar comprendido entre 3 y 40}. Denote por extensión y por comprensión el conjunto dado. Luego subraye las afirmaciones <u>incorrectas</u>: **(1 p.)**

   $6 \notin C$ $33 \in C$ $3 \in C$ $18 \notin C$ $41 \in C$

3. Indique cuál(es) de los siguientes conjuntos están bien definidos y cuáles no. Justifique su respuesta en cada caso. **(4 p.)**

   A = { las mejores piezas musicales}

   B = { los departamentos grandes del Perú}

   C = { los ríos del Perú que desembocan en el Océano Pacífico}

   $D = \{ x / x \in N,\ 5 < x < 10 \}$

   E = { los números naturales pequeños}

   F = { elefantes que vuelan}

   G = { los números naturales pequeños}

   H = { los habitantes de la Región Piura}

4. Sea D = { x / x ∈ N ∧ x < 10 }. Marque con un aspa las relaciones <u>incorrectas</u>. **(3 p.)**

$5 \notin D$	$\{6,8,10,12\} \notin D$
$10 \notin D$	$\{x/x \in N, \wedge\ x = 2n\} = D$
$\{8,10\} \in D$	$\{1,3,5\} \in D$

5. Clasifica los siguientes conjuntos según el número de elementos: **(2 p.)**

A = { x/x ∈ N, divisor de 100}

B = { x/x ∈ N, 5 < x < 7 }

C = { x/x ∈ N, múltiplo de 15}

D = { x/x ∈ N , 101< x < 102 }

6. Si A = { 1, 2, 3, 4, 5 }, B = { 2, 3, 4 }, C = { 2, 4, 5} y D = { 2, 4}. Encierra en un círculo las proposiciones verdaderas. **(2 p.)**

a) $A \subset D$	b) $A \subset B$	c) $B \subset A$	d) $C \subset A$
e) $B \subset C$	f) $D \subset B$	g) $A \subset A$	h) $B \neq C$

7. Coloque verdadero (V) o falso (F) en relación con el conjunto A={a, {b, c}, d} **(2 p.)**

a) $\{b, c\} \subset A$ ( )

b) $\{\{b, c\}\} \subset A$ ( )

c) $\{c\} \in A$ ( )

d) $\{b, c\} \in A$ ( )

e) $c \in A$ ( )

f) $\{c\} \subset A$ ( )

8. Sean $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 5, 7\}$, $D = \{2, 4\}$ y $E = \{1, 3\}$. Indique en cada caso cuál de estos conjuntos puede ser el conjunto X: **(4 p.)**

a) $X \subset A$ y $X \subset B$

b) $X \not\subset B$ y $X \not\subset E$

c) $X \not\subset C$ y $X \subset D$

d) $X \not\subset A$ y $X \subset E$

Fuente: Elaboración de la docente a cargo de la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Educación de la Universidad de Piura.

Anexo B. Práctica N° 2

UNIVERSIDAD DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MATEMÁTICA BÁSICA
PRÁCTICA N° 1

Nombre: ....
Fecha: 6 de abril de 2015

Nota Importante: Lea cuidadosamente las indicaciones de cada pregunta. Resuelva en el cuadernillo de respuestas con lapicero azul, de lo contrario no se corregirá la pregunta, y tampoco tiene opción a presentar ningún reclamo. Justifique sus respuestas cuando se le solicite. Indique el procedimiento seguido en cada pregunta.

1. Escriba los siguientes conjuntos por extensión y comprensión, clasifíquelos siguiendo los dos criterios estudiados en clase: **(5 p.)**

   A = { $x \in N$ / x es par}; B = { $x \in N$ / x es impar}; C = { $x \in Z$ / x es menor que 1};

   D = { $x \in Z$ / x es mayor que 1}; E = { $x \in Z$ / $-1 < x < 1$}; F = { $x \in Z$ / $0 < x < 1$}

2. Dados los conjuntos A = {e, d, f}; B = {{a, b}, c, d}. Grafique y responda verdadero (V) o falso (F) según corresponda: **(3 p.)**

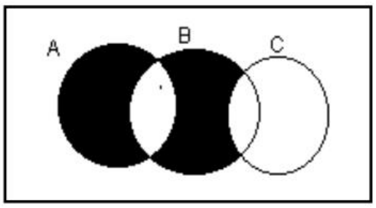
   a) $\{a, b\} \subset B$ ( ) b) $\{e, d\} \subset A$ ( ) c) $\{d\} \in A$ ( )

   d) $\{a, b\} \in B$ ( ) e) $a \in B$ ( ) f) $c \in (B - A)$ ( )

   g) $d \in B$ ( ) h) $d \in (A \cap B)$ ( ) i) $e \in (A - B)$ ( )

   j) $f \in B'$ ( ) k) $\{a, b\} \in (B - A)$ ( ) l) $\{a, b\} \in A'$ ( )

3. Si el conjunto A = {1, 2, 3 }; B = {3, 4, 5, 6}; C = { 6, 7 } Analice el gráfico e indique cuáles son los elementos que se encuentran en la parte sombreada y con qué operación entre conjuntos se puede expresar el resultado. **(2 p.)**



4. Sean A, B, C conjuntos no vacíos, demuestre gráficamente la falsedad o verdad de las expresiones siguientes: **(4 p.)**

   a) $(A - B) \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap B)$

   b) $A - (A - B) = A \cap B$

   c) $(A - C) \cap (B - C) = A \cup B$

   d) $(A - B) \cap (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

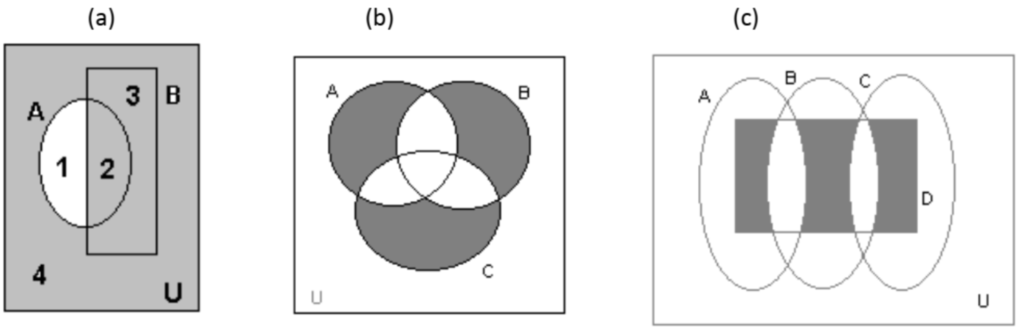
   e) $(A - B) \cap (B - C) = A \cup B$

   f) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cap C)$

   g) $A \cap (B - A) = \varnothing$

   h) $(A - B) \cap (B - C) = (A \Delta B) \cap C'$

5. Indique mediante operaciones entre conjuntos cuál es el área sombreada: **(3 p.)**



6. Un colegio necesita de 29 docentes en el área de CTA; 13 profesores de química, 13 profesores de física y 15 de biología. Para cubrir los cargos se requiere que: 6 dicten química y física, 4 dicten física y biología y 5 profesores dicten química y biología. Determinar: **(3 p.)**

   a) ¿Cuántos profesores se requiere que dicten las 3 áreas?
   b) ¿Cuántos profesores se requiere para dictar química únicamente?
   c) ¿Cuántos profesores se requiere para dictar física únicamente?
   d) ¿Cuántos profesores se requiere para dictar biología únicamente?
   e) ¿Cuántos profesores se requiere para dictar química y biología pero no física?
   f) ¿Cuántos profesores se requiere para dictar química y física pero no biología?

Fuente: Elaboración de la docente a cargo de la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Educación de la Universidad de Piura.

Anexo C. Práctica N° 3

UNIVERSIDAD DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MATEMÁTICA BÁSICA
PRÁCTICA N° 3

Nombre: ....
Fecha: 25 de mayo de 2015

1. Elabore un organizador gráfico completo donde se observe la clasificación de las fracciones y de los decimales (Dé un ejemplo de cada caso). **(5p)**

b) $\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} + \left(3 \times \frac{4}{9} \div \frac{1}{5}\right)$

c) $\frac{(0{,}0008)^5}{(0{,}02)^3}$

d) $4{,}2 \div \frac{2}{3} + 4{,}6 \times \frac{3}{8} \div \frac{2}{7} - \frac{5}{6} \div \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

e) $0{,}3666\ldots \div \frac{4}{5} + \frac{5}{12} \times 0{,}666\ldots - \frac{3}{4} + 2{,}666\ldots$

f) $\left(-\frac{7}{5}\right)^{17}\left(\frac{-2}{3}\right)^{13}\left(\frac{5}{-6}\right)^{17}\left(\frac{-6}{7}\right)^{17}\left(\frac{3}{-2}\right)^{13}$

4. Resuelva los siguientes problemas, indicando todo el procedimiento. **(6p)**

a) Compré un vestido por 30 soles y lo vendo ganando los 3/10 del precio de costo. Determine el precio de venta del vestido.

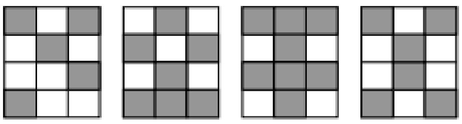
b) Si Andrés vende una moto por los 3/8 de los 5/9 de s/. 7200 y una bicicleta por ½ de 1/3 de ¼ de s/. 2400. ¿Cuánto recibe Andrés por la venta de los dos productos?

c) Una persona debe recibir los 7/20 de s/. 2 000. Si cobra ½ de ¼ de s/.2000. ¿Cuánto le deben aún?

d) Carmen tiene una caja con caramelos de color blanco, azul y rojo. Los caramelos rojos corresponden a la mitad de los azules y éstos a los 2/5 de los caramelos blancos. Desea regalar a su amiga todos los caramelos blancos. ¿Cuántos caramelos regaló?

e) Sumar a ¼ la tercera parte de 6 ¾; restar de esta suma la tercera parte de 5/8; dividir esta diferencia por el resultado de sumar a 1/5 los 7/6 de 2/3 y el cociente resultante multiplicarlo por el resultado de sumar a 2/5 las dos novenas partes de 3/5. ¿Cuál es el resultado final?

f) Indique para cada figura la fracción que representa y luego ordene de mayor a menor los números fraccionarios que representan las regiones sombreadas.



Fuente: Elaboración de la docente a cargo de la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Educación de la Universidad de Piura.

Anexo D. Examen Parcial

UNIVERSIDAD DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MATEMÁTICA BÁSICA
EXAMEN PARCIAL

Nombre: ....
Fecha: 27 de abril de 2015

Importante: Lea cuidadosamente las indicaciones de cada pregunta. Resuelva con lapicero, de lo contrario no se corregirá la pregunta, y tampoco tiene opción a presentar ningún reclamo. Indique todo el procedimiento seguido en cada pregunta.

1. Coloque verdadero (V) o falso (F) en relación con el conjunto A=$\{x, \{y, z\}, w\}$ **(2 p.)**
   a) $\{y, z\} \subset A$ ( )
   b) $\{\{y, z\}\} \subset A$ ( )
   c) $\{z\} \in A$ ( )
   d) $\{y, z\} \in A$ ( )
   e) $z \in A$ ( )
   f) $\{z\} \subset A$ ( )

2. Sean los conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 9 \}$, $B = \{2, 4 ,6, 8 \}$, $C = \{3, 5, 7 \}$, $D = \{2, 4 \}$ y $E = \{1, 3\}$. Indique en cada caso cuál de estos conjuntos puede ser el conjunto X: **(2 p.)**
   a) $X \not\subset B$ y $X \not\subset E$

   b) $X \not\subset A$ y $X \subset E$

3. De un grupo de estudiantes que desean cursar asignaturas electivas se tiene que 9 se matriculan en Teatro, 12 en Guitarra y 15 en Coro. Si 5 estudiantes se matriculan exactamente en dos de las 3 asignaturas y todos los demás se matriculan solamente en una asignatura, ¿cuántos estudiantes están formando este grupo? **(2 p.)**

4. Escriba los números y luego ordénelos en forma descendente: **(2 p.)**
   a) 72 centenas, 94 unidades, 105 milésimas
   b) 7 unidades de millar, 3 centenas, 3 décimas
   c) 729 decenas, 40 décimas, 26 milésimas
   d) 7 unidades de millar, 294 unidades, 16 milésimas

5. Complete las casillas en blanco del siguiente cuadro (las sombreadas quedan libres), de modo que se obtengan los resultados que se indican: **(2 p.)**

	x		–		= 9
:		+		–	
	+		:		= 3
+		–		+	
	x		:		= 6
= 7		= 4		= 9	

6. ¿Qué sucede con el divisor de una división exacta si: **(2 p.)**
   a) El dividendo ha permanecido igual y el cociente se ha reducido a su quinta parte.

   b) El dividendo ha permanecido igual y el cociente se ha cuatriplicado.

   c) El dividendo se ha duplicado y el cociente se ha reducido a su mitad.

   d) El dividendo y el cociente se han reducido a su tercera parte.

7. El número $15 \cdot 10^3$ es equivalente a: **(2 p.)**
   a) .... Unidades de millar
   b) .... Millones
   c) .... Decenas de millar
   d) .... Decenas

8. Resuelva los siguientes problemas: **(6 p.)**
   a) Si a la suma de dos números se agrega su diferencia, se obtiene 102 ¿cuánto vale el número mayor?

b) Un agricultor sembró 35 hileras de cacao, con 20 huecos en cada hilera y 5 semillas en cada hueco. Si sólo germina la cuarta parte de las semillas sembradas, ¿cuántas plantas de cacao obtiene?

c) Determinar un número que pertenece al conjunto de los números naturales y que está formado por cuatro dígitos menores que cinco; tales que, considerados de izquierda a derecha, se cumple que el cuarto es el doble del primero, el segundo es tres unidades menor que el tercero; y la suma del primero y el cuarto es el doble del tercero.

Fuente: Elaboración de la docente a cargo de la asignatura de Matemática Básica de la Facultad de Educación de la Universidad de Piura.

Anexo E. Experto 1

UNIVERSIDAD DE PIURA
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador : **Dr. Marcos Augusto Zapata Esteves**
1.2 Cargo e institución donde labora : **Docente Universidad de Piura**
1.3 Nombre del instrumento evaluado : **Listado de indicadores para evaluar errores matemáticos**
1.4 Autor del instrumento : **Rosa María Benites Calle**

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Instrumento Adaptado

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones
Criterios	**Indicadores**	**D**	**R**	**B**	**Sugerencias**
• PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	☐	☐	X	
• COHERENCIA	Los ítems responden a lo que se debe medir en la variable y sus dimensiones.	☐	☐	X	
• CONGRUENCIA	Los ítems son congruentes entre sí y con el concepto que mide.	☐	☐	X	
• SUFICIENCIA	Los ítems son suficientes en cantidad para medir la variable.	☐	☐	X	
• OBJETIVIDAD	Los ítems se expresan en comportamientos y acciones observables.	☐	☐	X	
• CONSISTENCIA	Los ítems se han formulado en concordancia a los fundamentos teóricos de la variable.	☐	☐	X	
• ORGANIZACIÓN	Los ítems están secuenciados y distribuidos de acuerdo a dimensiones e indicadores.	☐	☐	X	
• CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	☐	☐	X	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)					
		C	**B**	**A**	**Total**

Coeficiente de validez : $\frac{A + B + C}{24}$ = **1**

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena

Piura, 23 de marzo de 2020

Anexo F. Experto 2

UNIVERSIDAD DE PIURA
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN DE INSTRUMENTO

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador : **Mgtr. Willian Alfredo Reyes Cortes**

1.2 Cargo e institución donde labora : **Docente Universidad de Piura**

1.3 Nombre del instrumento evaluado : **Listado de indicadores para evaluar errores matemáticos**

1.4 Autor del instrumento : **Rosa María Benites Calle**

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los indicadores propuestos en el instrumento para evaluar la presencia de errores y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que se asigna en cada criterio de validación.

1. Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Instrumento Adaptado

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones
Criterios	**Indicadores**	**D**	**R**	**B**	**Sugerencias**
• PERTINENCIA	Los indicadores permiten evaluar la presencia de cada uno de los cuatro errores abordados en la investigación	☐	☐	☒	
• COHERENCIA	Los indicadores responden a lo que se debe medir en la variable y sus dimensiones.	☐	☐	☒	
• CONGRUENCIA	Los indicadores son congruentes entre sí y con el concepto que mide.	☐	☐	☒	
• SUFICIENCIA	Los indicadores son suficientes en cantidad para medir la variable.	☐	☒	☐	
• OBJETIVIDAD	Los indicadores se expresan en procedimientos y respuestas observables.	☐	☐	☒	
• CONSISTENCIA	Los indicadores se han formulado en concordancia a los fundamentos teóricos de la variable.	☐	☐	☒	
• ORGANIZACIÓN	Los indicadores están secuenciados y distribuidos de acuerdo a las dimensiones y tipo de contenido.	☐	☒	☐	
• CLARIDAD	Los indicadores están redactados en un lenguaje entendible para quien evaluará la presencia de errores en cada uno de los cuestionarios aplicados.	☐	☐	☒	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)			4	18	
		C	**B**	**A**	**Total**

Coeficiente de validez : $\frac{A + B + C}{24}$ = **0,9**

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena

Piura, 23 de marzo de 2020.

Mgtr. Willian Alfredo Reyes Cortes

Anexo G. Experto 3

UNIVERSIDAD DE PIURA
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador : **Mgtr. Emma Lizelly Carreño Peña**

1.2 Cargo e institución donde labora : **Docente Universidad de Piura**

1.3 Nombre del instrumento evaluado : **Listado de indicadores para evaluar la presencia de errores**

1.4 Autor del instrumento : **Rosa María Benites Calle**

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los indicadores propuestos en el instrumento para evaluar la presencia de errores y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que se asigna en cada criterio de validación.

1. Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Instrumento Adaptado

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones
Criterios	**Indicadores**	**D**	**R**	**B**	**Sugerencias**
• Pertinencia	Los indicadores permiten evaluar la presencia de cada uno de los cuatro errores abordados en la investigación	☐	☐	X	
• Coherencia	Los indicadores responden a lo que se debe medir en la variable y sus dimensiones.	☐	☐	X	
• Congruencia	Los indicadores son congruentes entre sí y con el concepto que mide.	☐	☐	X	
• Suficiencia	Los indicadores son suficientes en cantidad para medir la variable.	☐	X	☐	La cantidad de indicadores puede resulta excesivo, sin embargo, es probable que en aras de la exhaustividad, no convenga omitir alguno.
• Objetividad	Los indicadores se expresan en procedimientos y respuestas observables.	☐	☐	X	
• Consistencia	Los indicadores se han formulado en concordancia a los fundamentos teóricos de la variable.	☐	☐	X	
• Organización	Los indicadores están secuenciados y distribuidos de acuerdo a las dimensiones y tipo de contenido.	☐	☐	X	
• Claridad	Los indicadores están redactados en un lenguaje entendible para quien evaluará la presencia de errores en cada uno de los cuestionarios aplicados.	☐	☐	X	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)		**C**	**B**	**A**	**Total**

Coeficiente de validez : $\frac{A + B + C}{24}$ = **0,96**

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena