FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Diagnóstico de los errores que cometen los estudiantes del segundo grado de secundaria, de una institución educativa pública en el inicio del aprendizaje del álgebra escolar

Tesis para optar el Título de
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria, especialidad Matemática y Física

Cinthia Yeraldine Pulache Panta

Asesora:
Mgtr. Flor Manuela Hau Yon Palomino

Piura, diciembre de 2021

Agradecimientos

Mi gratitud infinita a mi asesora Flor Hau Yon por el tiempo brindado en cada una de las revisiones y por sus valiosas recomendaciones en este trabajo de investigación.

Dedicatoria

A mis padres, quienes siempre están animándome con sus consejos.

A Jasiel y María José, la fuerza motora en cada paso que doy.

A mi esposo, por su apoyo en cada uno de mis proyectos.

Resumen

Con el objetivo de diagnosticar los errores algebraicos más frecuentes que presentan los estudiantes del segundo grado de secundaria de una institución educativa pública rural, en el aprendizaje del álgebra escolar, se realizó esta investigación y se optó por la metodología cualitativa basada en un análisis descriptivo de los errores y las posibles dificultades que los causan. Se ha tomado en cuenta las definiciones de diversos autores acerca de los errores en el aprendizaje del álgebra y la importancia del diagnóstico y reflexión de éstos para su posible tratamiento. Se elaboró un cuestionario cuyas preguntas fueron seleccionadas de uno de los instrumentos de medida de la investigación de la doctora Mercedes Palarea (Palarea, 1998) y adaptadas según las capacidades que involucran el desarrollo de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, propuesta en el Currículo Nacional (2016). La muestra corresponde a los 38 estudiantes del segundo grado de educación secundaria cuyas edades oscilan entre 13 - 15 años de edad. Los errores cometidos por estos informantes fueron clasificados según la tipología encontrada en las investigaciones de Palarea (1998) y Socas (1989)**.** Los resultados del cuestionario permitieron reflexionar acerca de los aprendizajes logrados en los estudiantes, así como identificar las dificultades que se presentan y que constituyen factores que impiden el desarrollo de las capacidades de la competencia Resuelve problemas de Regularidad, equivalencia y cambio propuesta en el Currículo Nacional.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

En los últimos años la enseñanza de las matemáticas supone grandes desafíos, pues ésta tiene que responder a las demandas de la sociedad del conocimiento y la globalización. Así lo plantea el Ministerio de Educación en el Currículo Nacional (2016) “el estudiante tiene que interpretar la realidad y tomar decisiones a partir de conocimientos matemáticos que aporten a su contexto” (p.15), aspecto importante del perfil de egreso del estudiante de Educación Básica Regular. Al respecto la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) resalta la importancia del aprendizaje del álgebra y lo incluye en uno de los cinco bloques de contenido, que se deben tomar en cuenta a partir de los primeros años de la educación primaria destacando las representaciones como herramientas que ayudan a modelar e interpretar fenómenos de naturaleza matemática, los patrones, las relaciones y funciones, aspectos relacionados también con el pensamiento algebraico.

Es necesario que el estudiante traduzca datos y condiciones, matematice situaciones estableciendo modelos y para ello necesita desarrollar una serie de capacidades relacionadas al conocimiento algebraico, que lo harán una persona crítica-reflexiva, por eso es importante que el docente reflexione acerca de lo que están haciendo los estudiantes, como lo están haciendo y por qué lo hacen de una u otra manera. Por esta razón el interés en esta investigación, es conocer en qué están fallando los estudiantes, cuáles serían las causas de sus errores, cuáles son las dificultades que presentan al resolver ciertas situaciones.

Es común que muchos estudiantes no se sientan atraídos por las matemáticas, sobre todo por el álgebra, pero si se reflexiona sobre la cantidad de fracasos escolares que se deben a esta materia, y las actitudes negativas que se generan en la mayoría de ellos, quizá se encontraría muchas respuestas; incluso si se analizan sus errores, quizá se encontraría la razón a muchos comportamientos frente a esta asignatura, o la razón por la cual algunos estudiantes no se sienten capaces de matematizar situaciones de la vida cotidiana, o resolver situaciones que requieren del conocimiento algebraico. Por esta razón, en este estudio se pretende realizar un diagnóstico de los errores que presentan los estudiantes para abordarlos atendiendo a sus necesidades de aprendizaje.

Para recoger información se adaptó un cuestionario tomado de la investigación realizada por Palarea (1998), *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*, que presenta objetivos similares con este estudio; se realizaron adaptaciones, y fue validado por personas involucradas y con amplia experiencia en la enseñanza de las matemáticas. Además, el cuestionario considera las capacidades propuestas en el Currículo Nacional 2016 y se aplicó a estudiantes del segundo grado de secundaria de una institución educativa pública con Jornada Escolar Completa (JEC) del centro poblado de Tejedores –Tambo grande (zona rural). Este modelo de servicio educativo “Jornada Escolar Completa” para las Instituciones Educativas públicas del nivel de educación secundaria fue creado el 30 de setiembre de 2014, con RM N° 451-

2014-MINEDU. Estas instituciones públicas representan un modelo de servicio educativo que busca mejorar la calidad ampliando las oportunidades de aprendizaje de los y las estudiantes.

El trabajo presenta la siguiente estructura; en el primer capítulo se aborda la descripción de la problemática, se enuncian el objetivo general y los objetivos específicos y además se presenta la justificación y los antecedentes del trabajo. En el segundo capítulo que corresponde al marco teórico, se presentan los fundamentos que han sido los referentes en esta investigación. En el tercer capítulo se aborda la metodología de la investigación y se describe el cuestionario aplicado según las capacidades de la competencia 24 que plantea el Currículo Nacional. En el cuarto capítulo se presenta el análisis de los resultados, considerando las capacidades mencionadas y la tipología de errores encontrada en las investigaciones de Mercedes Palarea y Martín Socas.

Finalmente, se espera que este trabajo sea utilizado para beneficio del aprendizaje de los estudiantes, así como analizado y mejorado por otros compañeros.

Capítulo 1: Planteamiento del estudio

Según Palarea (1998) conocer los errores básicos en el aprendizaje del álgebra es importante para el profesor porque le informa acerca de cómo los estudiantes interpretan los problemas, cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos, le sugiere formas de ayudar a los alumnos a corregir dichos errores y le señala las posibles causas de las dificultades de los estudiantes para aprender álgebra.

Además, a partir de ello, se podrá conocer las dificultades para visualizar el nivel de desarrollo de una de las competencias que plantea el Ministerio de Educación en el Currículo Nacional en la Educación Básica (CNEB): Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Por lo mencionado, la importancia de este estudio radica en conocer las dificultades que tienen los alumnos al aprender álgebra para comprender los errores que cometen y abordarlos atendiendo a sus necesidades.

1.1. Descripción y formulación del problema

Socas (1996) refiere que muchos estudiantes tienen concepciones acerca del álgebra como una parte tediosa y complicada de las matemáticas, piensan que es necesario conocer o memorizar fórmulas o expresiones que a la larga el estudiante no comprende cómo aplicarlas cuando se enfrenta a un problema. Esta actitud negativa tiene, sin lugar a dudas, diversidad de fuentes, y, esta situación es desestimada por muchos docentes, quienes en lugar de utilizar los errores en los que los estudiantes incurren y buscar la causa de las dificultades para trabajar actividades que los reduzcan, tienen una visión peyorativa del error en el aprendizaje.

Zapata (2014) en su estudio *Las prácticas de enseñanza, Formación inicial del profesorado de Matemáticas,* señala que los errores de los alumnos no se tienen en cuenta por los estudiantes para profesores (EPP), esto produce una falta de entendimiento del contenido matemático, así mismo no utilizan los errores que cometen los alumnos para ser tratados mediante la creación de situaciones de enseñanza, además no les piden que expliquen el proceso que siguen cuando resuelven los problemas y ejercicios. Es por ello que la mayor de las dificultades observadas en los EPP es que no saben identificar cuáles son las causas de los errores que cometen los alumnos.

Butto y Rojano (2010) afirman que "… la mayoría de las dificultades que enfrentan los estudiantes al iniciarse en el estudio del álgebra se deben a que, por mucho tiempo, ésta ha sido vista como una mera extensión del cálculo numérico al cálculo literal" (p.56). También señalan que usualmente se toma como base el dominio numérico (simbolización), dejando de lado otros como el geométrico. Asimismo, refieren que el desarrollo del pensamiento algebraico es un proceso largo, que puede presentarse con muchas dificultades y es necesario conocerlas, de allí la importancia de realizar investigación para conocer los procesos cognitivos que los estudiantes desarrollan cuando se enfrentan con contextos familiares y no familiares, las estrategias de solución de problemas que desarrollan, conocer la relación que existe entre los contenidos matemáticos que logran aprender en la escuela y los que no logran entender.

Los estudios de Palarea (1998), señalan que la mayor parte de los estudiantes al iniciarse en el estudio del álgebra suelen usar métodos aritméticos en lugar de los algebraicos para resolver problemas de enunciados y presentan dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra (incógnita, número general y variable), así como para comprender que las operaciones en álgebra pueden no llevar a un resultado numérico y que, a la larga pueden quedar como operaciones suspendidas. Socas (1996) advierte que son muy importantes tanto los aspectos del lenguaje algebraico, como ciertos aspectos del conocimiento numérico que son base para la aritmética generalizada, es decir que son estos los conocimientos que facilitan la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico. En consecuencia, es importante que primero el estudiante tenga muy claro todo lo que concierne al conocimiento aritmético, las propiedades y el significado de los signos y símbolos para que pueda ser menos complicada la adquisición de los conocimientos algebraicos.

Todas las situaciones mencionadas anteriormente se ven reflejadas en los estudiantes del segundo grado de secundaria de una institución educativa pública rural, quienes presentan dificultades en el aprendizaje del álgebra. Cabe resaltar que estos estudiantes en su mayoría concluyeron la primaria en escuelas rurales unidocente - multigrado. Estos alumnos provienen de lugares alejados a la institución y poco accesibles a la tecnología, de familias con nivel de pobreza considerable en donde el único intermediario para el aprendizaje es el docente.

En el área de Matemática los estudiantes presentan diversas dificultades en el aprendizaje del álgebra que se ven reflejados en los resultados de las evaluaciones respectivas, además es notoria la aversión que muestran estos estudiantes frente a temas relacionados con el álgebra. Por ello preocupados por esta situación se busca identificar dónde está la causa de sus errores, para trabajar sobre estos y así atender a sus necesidades de aprendizaje.

De este modo surge la interrogante: ¿Cuáles son los errores más frecuentes que presentan los estudiantes del segundo grado del nivel secundario de una institución educativa pública respecto del desarrollo de la competencia: “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”?

1.2. Objetivos de la investigación

1.2.1. Objetivo general

- Diagnosticar los errores algebraicos más frecuentes que presentan los estudiantes del segundo grado de secundaria que están relacionados con la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, de una institución educativa pública rural.

1.2.2. Objetivos específicos

- Conocer la tipología sobre los errores más frecuentes que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra.
- Diseñar un cuestionario en base a las capacidades del Currículo Nacional referidas al logro de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
- Aplicar el cuestionario para diagnosticar los diversos errores que cometen los estudiantes.

1.3. Justificación de la investigación

Los estudiantes de la I.E pública donde se realizó la investigación muestran diversas dificultades en el área de matemática, singularmente en el aprendizaje del álgebra que es una parte fundamental para la construcción del modelo en la resolución de problemas y para la expresión de ideas matemáticas. Asimismo, las dificultades que presentan los estudiantes no les permiten avanzar hacia el logro de otros aprendizajes, lo cual es preocupante para el docente. Estas dificultades, según Palarea (1998) son inevitables y forman parte del proceso de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar el aprendizaje. Si se quedan implícitas es muy difícil incorporar otro saber nuevo. “La enseñanza-aprendizaje en el álgebra escolar genera muchas dificultades de naturaleza diversa, tanto a los docentes como a los estudiantes y muchas de estas dificultades se concretan en el ámbito escolar” (Palarea, 1998, p. 04).

Es por ello imprescindible conocer los errores cometidos por los estudiantes para poder interpretar como piensan, reflexionar sobre sus causas y así atender las necesidades cognitivas que surgen en el aprendizaje de los conocimientos algebraicos, lo cual es fundamental si se busca que el estudiante interprete la realidad (utilizando lenguaje matemático) y tome decisiones a partir de conocimientos matemáticos que aporten a su contexto (perfil de egreso en el CNEB). También se puede conocer el nivel de desarrollo en que se encuentran los estudiantes en la competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio que propone el Currículo Nacional.

Fernández (2016) menciona que el conocimiento didáctico sobre los errores y dificultades permitirá intervenir con fundamento para poder abordarlos desde la planificación, así como el planteamiento de medidas para superar ambas deficiencias. Sin embargo, muchos docentes quienes debiendo utilizar los errores para abordarlos significativamente, solo los cuantifican. Por el contrario, este autor plantea que el profesor debería adoptar un planteamiento no punitivo del error, alegando que no se le puede atribuir connotaciones morales, ni tampoco asumir un comportamiento penalizable ya que éste es una vía de acceso al conocimiento que conviene valorar positivamente y que puede ser considerado como origen de nuevas situaciones matemáticas. “Tan importante como la detección de errores es la indagación de las causas que los provocan y que demandan al profesor medidas para su diagnóstico y subsanación, es decir, las dificultades asociadas.” (Fernández, 2016, p.195).

Probablemente necesitemos enseñar menos directamente y dedicar más tiempo a conocer lo que piensan los alumnos, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas. (Palarea, 1998, p.78).

El error en la investigación ha sido visto como un factor constructivo que permite la reflexión y no peyorativo. Aunque existen algunos planteamientos epistemológicos (Socas,1989; Socas, 1997; Socas, 2007; Palarea,1998; Rico,1994; García, Segovia y Lupiañez, 2012; Mayorga, 2018; De La Torre,2004; entre otros) que revalorizan el papel de los errores en la adquisición del conocimiento y la construcción del saber, el docente no debe pensar que los errores de los estudiantes son una traba en el proceso de aprendizaje, ni constituyen el camino hacia el fracaso; sino más bien son parte del aprendizaje y que se debe partir de ellos para propiciar estrategias, que permitan la mejora del desempeño de los estudiantes en el área de matemática. En este sentido, la presente investigación es relevante ya que se diagnosticarán los errores que presentan los estudiantes del segundo grado de secundaria de la institución educativa para conocer las dificultades y el nivel de desarrollo de la competencia mencionada.

1.4. Antecedentes de la investigación

A lo largo de muchos años diversos investigadores se han preocupado por investigar los errores de los estudiantes para mejorar la comprensión del pensamiento matemático. Dentro de estas investigaciones se detallan a continuación tanto las del ámbito internacional como nacional.

1.4.1. Antecedentes Internacionales

La investigación doctoral de Palarea (1998) titulada, “La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años”, tuvo como objetivo determinar las dificultades, obstáculos y errores que presentaban los alumnos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O) para mejorar la comprensión del pensamiento algebraico y elaborar una propuesta curricular adecuada para el lenguaje algebraico. Se rescata de este trabajo la importancia de tener elementos para analizar los errores, determinar su naturaleza y entender al estudiante descubriendo sus conocimientos subyacentes que permitirá diseñar tareas que apoyen la construcción del pensamiento algebraico. Para lograr el objetivo de la investigación de carácter descriptivo se administraron cuestionarios a diferentes poblaciones. Algunas de las conclusiones más importantes a las que llegaron en este estudio son:

- Muchos de los errores que presentaron los estudiantes se debe a la ausencia de sentido (notaciones y convenciones del lenguaje formal algebraico) lo cual les genera confusiones.

- Las habilidades operacionales suscitan mayor conflictividad en las operaciones aditivas.
- Los estudiantes manifiestan una escasa habilidad operativa aditiva, por ejemplo, aun sabiendo que los términos no son semejantes, no se pueden operar, situación muy frecuente en la enseñanza, donde los alumnos parecen poseer el conocimiento conceptual, pero son incapaces de transformarlo en una habilidad operacional.
- Que las reglas fijas predominan sobre el conocimiento conceptual. A pesar de haber incorporado conocimiento conceptual del nuevo registro, las habilidades operacionales subyacentes (Sistema de Representación Formal Aritmético) les hace producir errores por falta de significado en el nuevo registro.

Esta investigación aporta al presente estudio ya que se toma como referencia el marco teórico y el cuestionario utilizado para detectar los errores, dificultades y obstáculos en alumnos en etapa escolar.

El artículo que presenta el estudio de Butto y Rojano (2004) "Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría", tuvo como objetivo principal investigar la factibilidad de la iniciación temprana al álgebra a partir de contenidos matemáticos como el razonamiento proporcional, la variación funcional y los procesos de generalización, en el que se apuesta por una introducción temprana al pensamiento algebraico ya que supone que el desarrollo es un proceso largo, pues los niños enfrentan dificultades tanto en la aritmética como en el álgebra. El aporte de esta investigación radica en la necesidad de diagnosticar los errores para conocer los procesos cognitivos que los estudiantes desarrollan frente a ciertas situaciones, las estrategias de solución de problemas que desarrollan y sus razones; qué relación existe entre los contenidos matemáticos que logran aprender y lo que no logran entender, por lo que resulta una fuente teórica importante.

La investigación de Ruano, Socas y Palarea (2003) titulada "Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra", tuvo como objetivo diagnosticar y clasificar los errores cometidos por un grupo de alumnos de secundaria en los procesos mencionados. En este estudio se considera la clasificación de errores propuesta por Socas (1996) en donde se plantean tres ejes que permitirán analizar el origen del error: obstáculo, ausencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales; siendo considerado el obstáculo un conocimiento adquirido y aplicado en un contexto inadecuado. Por otro lado, los errores que se originan en ausencia de sentido y que pueden tener su origen en la aritmética o en los procedimientos (uso inapropiado de fórmulas o reglas) y los errores de álgebra que se deben a las características propias del lenguaje algebraico. También se rescata que pueden presentarse errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales y que pueden deberse a la falta de concentración, bloqueos, olvidos, etc.

El aporte de esta investigación se constituye en la clasificación que realizan los autores y es la que se toma en cuenta para analizar los resultados obtenidos.

La ponencia de Martín Socas (2007), "Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico", tuvo como objetivo presentar los resultados de algunas investigaciones relevantes realizadas en torno a las dificultades y errores de los alumnos en álgebra. El autor enfatiza que incluso "la mayoría de los alumnos que tienen una actuación aparentemente satisfactoria en matemáticas ocultan probablemente serios errores, operacionales, estructurales y procesuales que dificultarán el aprendizaje subsiguiente" (p.20). Por ello se rescata la idea de que es necesario diagnosticar los errores de los estudiantes porque permitirá a los docentes arbitrar procedimientos y remedios efectivos para ayudar a los estudiantes en la corrección de dichos errores. Con referencia a este trabajo el autor señala varias cuestiones importantes como por ejemplo la categorización de los errores fundamentándose, exclusivamente en el conocimiento matemático; también resalta que es posible predecir algunos patrones comunes de los errores, es decir que las interpretaciones que toman como base teórica algunos principios del procesamiento de la información ofrecen versiones más completas de las clasificaciones de los errores, por último que a partir de estas investigaciones sobre la clasificación de los errores y su frecuencia, desafortunadamente no se puede explicar su origen y en consecuencia no se puede aportar un trato sistémico a los mismos. El autor también reconoce la necesidad de conocer las posibles causas de los errores que cometen los alumnos y tener una explicación general o particular del error para cada alumno, de manera que se pueda actuar sobre él a nivel de grupo o a nivel individual, reflexionando sobre las dificultades, variables que interaccionan en el proceso educativo. Este planteamiento constituye la fundamentación a la presente investigación ya que interesa saber el origen de los mismos para trabajar sobre ellos y lograr el aprendizaje de los conocimientos algebraicos.

El estudio de José García, Isidoro Segovia y José Lupiañez (2012) denominado: "Antecedentes y Fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas", tuvo como objetivo indagar las posibles fuentes de errores en el aprendizaje del álgebra. Entre los resultados que llama la atención fue el rendimiento deficiente en la resolución de distintas tareas algebraicas sobre todo aquellas relacionadas con expresiones algebraicas. El aporte para este trabajo radica en la necesidad que expresan los autores de diseñar un instrumento (cuestionario, test, etc.) que permita evaluar lo que saben los estudiantes y que de alguna manera ponga de manifiesto las habilidades cognitivas, para luego con los resultados del instrumento de evaluación realizar la caracterización de los errores que se pongan de manifiesto y poder analizar el origen de estos.

1.4.2. Antecedentes nacionales

La investigación para optar el grado de maestría realizada por Ana Delgado (2011) titulada: "Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios" muestra una clasificación de los errores que cometen los estudiantes en una institución educativa pública peruana y el análisis de las posibles causas que los originan. Esta investigación estuvo centrada básicamente en las preguntas: ¿Qué tipo de errores cometen con frecuencia los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios? ¿Cuáles son las posibles causas de estos errores? Para responder a estas interrogantes se utilizó una metodología de tipo cualitativo, ya que lo que se pretendía era comprender y describir los errores, considerando la postura constructivista de Rico (1995) donde afirma que los errores son elementos que aparecen en la construcción del conocimiento matemático y que pueden contribuir positivamente en el proceso de enseñanza aprendizaje, pues surgen de un marco conceptual que se basa en un conocimiento adquirido anteriormente, por ello es necesario que se modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes y por el contrario se debe tener en cuenta su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el pensamiento crítico. De esta investigación se ha tomado la idea de que es importante más que cuantificar los errores, valorarlos y tomarlos en cuenta en la planificación para ser abordados.

El estudio para magister de Luz Azañero (2013) titulado: "Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales", tuvo como objeto identificar las dificultades y errores que presentan los estudiantes del primer grado de una institución educativa parroquial, al resolver problemas con ecuaciones lineales. Los resultados indicaron que los estudiantes presentan dificultades en el registro algebraico, conversión del registro verbal al algebraico, y del registro algebraico al verbal. De este estudio se rescata la importancia de las conversiones del registro verbal al algebraico y viceversa, que sirvieron de base para considerar en el cuestionario preguntas que incluyan actividades sobre conversiones, dado que es importante según Azañero (2013) tener en cuenta el desarrollo de los registros de representación en los estudiantes para lograr la comprensión de los objetos matemáticos.

Cabe señalar que todos estos investigadores y muchos otros a través de sus estudios ponen de manifiesto la necesidad imperante de diagnosticar los errores de los estudiantes para conocer y abordarlos sistemáticamente en el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Capítulo 2: Marco teórico

En este capítulo se revisarán los fundamentos teóricos que constituyen la base de esta investigación. En primer lugar, se muestra la importancia del aprendizaje del álgebra escolar, luego se desarrollan otros aspectos tales como el aprendizaje del álgebra en el Currículo Nacional: competencia, capacidades, estándares y desempeños de aprendizaje; visión del error en la construcción del conocimiento y en el aprendizaje de las matemáticas, errores y dificultades en el aprendizaje del álgebra; y finalmente se abordará la tipología de errores.

2.1. Importancia del aprendizaje y el desarrollo razonamiento algebraico

Es común que muchos estudiantes se pregunten ¿para qué sirve aprender álgebra? La respuesta quizá se encuentre en la utilidad de este lenguaje capaz de describir cualquier fenómeno y hacer de la matemática algo comprensible.

De Faria (2013) refiere que aprender álgebra es útil para generalizar y representar patrones que pueden ser reconocidos, extendidos y generalizados, y además pueden observarse en algunas situaciones reales, ser modelados matemáticamente, como las funciones que podrían modelar muchos fenómenos físicos, químicos, económicos y sociales.

Agudelo (2007) refiere la importancia de aprender álgebra ya que implica desarrollar capacidades para identificar las estructuras matemáticas que gobiernan las relaciones en las situaciones de contexto, siendo el álgebra el lenguaje a través del cual se comunican las matemáticas, importante para el análisis de la vida real y la toma de decisiones que cada ciudadano necesita para participar activamente como miembro de una sociedad democrática.

Es evidente que más allá de impartir un curso de álgebra a los estudiantes, se trata de ayudarles a desarrollar el razonamiento algebraico, puesto que en el álgebra escolar no solo deben incluirse las funciones y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos (planteamiento de ecuaciones en la resolución de problemas), sino además es importante el estudio de los patrones numéricos y la determinación de reglas generales y el reconocimiento de estructuras isomorfas (Godino, Batanero y Font, 2003).

En el aprendizaje del álgebra es importante desarrollar el razonamiento algebraico que implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo (las ecuaciones, las variables y las funciones) (Godino y Font, 2003). Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas, ya que los procesos de formalización y generalización son procesos imprescindibles del álgebra que permiten avanzar en el aprendizaje de las matemáticas (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014).

Godino et al. (2012) señalan que el razonamiento algebraico tiene lugar cuando una persona se enfrenta a situaciones problemáticas, donde intervienen elementos de naturaleza diversa, en particular, expresiones algebraicas, conceptos, procedimientos, proposiciones y justificaciones. Por ello observar a los estudiantes cuando abordan los problemas o tareas es mirar cómo están pensando o construyendo el conocimiento matemático, es decir cómo están desarrollando el razonamiento y cómo van progresando respecto de los objetivos que se plantean los docentes.

El razonamiento algebraico se inicia con el desarrollo del proceso de generalización; de una magnitud concreta se pasa al símbolo que representa una magnitud cualquiera (número de personas, caramelos, etc.). Así, un nivel más avanzado de pensamiento algebraico se pone de manifiesto en las actividades que involucran relaciones binarias y correspondencias (funciones), primero entre cantidades y luego entre símbolos estructurados. Comprender por ejemplo la igualdad, como relación de equivalencia entre números (y como indicación del resultado de una acción-operación), es objeto de la práctica matemática que caracteriza al razonamiento algebraico (Godino et al. 2012).

Kaput (citado en De la Fuente, 2016) distingue cinco formas de razonamiento algebraico:

- El álgebra como generalización y formación de patrones: se destaca que generalizar y formalizar son actividades intrínsecas del pensamiento matemático.
- La manipulación guiada sintácticamente: para ser capaz de conectar el conocimiento de los procedimientos y técnicas (sintaxis) con el conocimiento de los conceptos.
- El estudio de estructuras, cálculo y relaciones: teniendo a la geometría como contexto se puede dar un significado al lenguaje algebraico.
- El estudio de funciones: teniendo como recursos las gráficas y tablas de valores son recursos importantes para trabajar estos conceptos.
- El lenguaje de la modelización: donde el objetivo es estudiar un fenómeno para lograr matematizarlo.

Godino et al. (2014) también destaca la importancia del álgebra como instrumento de modelización matemática, aclarando que en la escuela existe una visión tradicional de la misma como "aritmética generalizada" y que las diferencias entre ambas partes de la matemática está en la generalidad de las afirmaciones: por un lado la aritmética trata con números específicos expresados mediante los números habituales; por el otro, el álgebra trata con números no especificados (incógnitas, variables) representados por letras, o expresiones con variables; sin embargo es necesario que los maestros tengan una visión más amplia de lo que significa el aprendizaje del álgebra escolar. La parte esencial es la actividad que se hace con estos instrumentos, la modelización algebraica que proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar su alcance.

Al respecto cabe mencionar que algunos investigadores proponen diversas estrategias para el desarrollo del pensamiento algebraico. Así, se tiene a Álvarez (2017) quien apuesta por las actividades lúdicas con el fin de lograr un aprendizaje más significativo del álgebra; Lacasta et al. (2009) propone la transposición didáctica para facilitar el paso del pensamiento preoperatorio al operatorio, y lograr que se movilicen los conocimientos y se pueda llegar a la formalización.

De la Fuente (2016) destaca que para desarrollar el pensamiento algebraico se debe partir haciendo un análisis de las relaciones entre cantidades, percibir estructuras, generalizar, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir a partir de actividades que permitan introducir significativamente el lenguaje algebraico.

En términos amplios Sadovsky (2005) plantea las situaciones didácticas para desarrollar el pensamiento y producir conocimientos matemáticos, Brousseau (1986) manifiesta que para que haya conocimiento debe haber dos tipos de interacciones, la interacción del alumno con una problemática que ofrece resistencias y que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego, y, la interacción del docente con el estudiante a partir de la interacción del alumno con la problemática matemática. El estudiante aprende adaptándose a un medio que es producto de contradicción de dificultades, de desequilibrios. Ese saber fruto de la adaptación son prueba de su aprendizaje. Por ello para Sadovsky (2015) las interacciones didácticas constituyen un modelo para concebir la enseñanza de las matemáticas, en el marco de las situaciones didácticas.

Cabe mencionar también a Malaspina (2017) quien destaca la importancia del desarrollo del pensamiento matemático en los niños teniendo en cuenta que existen formas de aprender matemáticas que ocurren antes de la escuela, recurriendo en gran medida a la observación y la imitación. Estos aprendizajes, llamados informales son importantes para el adecuado aprendizaje formal de la matemática, que debe desarrollarse en base a ellos y teniendo en cuenta las emociones de los niños.

Como se observa estos investigadores proporcionan valiosos aportes sobre las consideraciones y los aspectos que se deben tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas para desarrollar el razonamiento algebraico, por ende, el pensamiento matemático.

2.2. El álgebra en el Currículo Nacional

Se espera que desde el inicio de la escolaridad y de manera progresiva se vayan desarrollando todas las competencias que plantea el Ministerio de Educación en el Currículo Nacional. Así al final de la educación básica los estudiantes peruanos deberían "ser competentes", que significa el haber logrado las características que se expresan en el perfil de egreso. Una de las características que el perfil de egreso de la educación básica considera es: "El estudiante interpreta la realidad y toma decisiones a partir de conocimientos matemáticos que aporten a su contexto" (CNEB, 2016, p.17).

Lo que significa que:

> El estudiante busca, sistematiza y analiza información para entender el mundo que lo rodea, resolver problemas y tomar decisiones relacionadas con el entorno. Usa de forma flexible estrategias y conocimientos matemáticos en diversas situaciones a partir de los cuales elabora

argumentos y comunica sus ideas mediante lenguaje matemático, así como diversas representaciones y recursos. (CNEB, 2016, p.17).

Como se visualiza en la cita, para el logro del perfil de egreso, el lenguaje matemático es indispensable para que el estudiante comunique sus ideas y elabore argumentos. Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas se necesita representarlas de algún modo, esto requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (Hierbert y Carpenter, citados en Rico, 2009). Para ello el estudiante debe utilizar los diferentes sistemas de representación, los mismos que se utilizan para la construcción del conocimiento matemático. Al respecto Font (2000) menciona que desde el punto de vista cognitivo se entiende la comprensión de los estudiantes en términos de representaciones internas, relacionadas con la construcción interna del conocimiento, las cuales producen en los alumnos los sistemas de representación externa que les permiten resolver las tareas escolares, comunicar lo que comprenden, justificar argumentos, constituyendo las representaciones semióticas.

En matemática se encuentran distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, diagramas de torta, etc. Cada una de las actividades anteriores constituye una representación semiótica diferente. (Oviedo y Kanashiro, 2012).

Las representaciones semióticas son todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento (Tamayo, 2006).

Duval (citado en Azañero, 2013) señala que las representaciones semióticas no solo son necesarias para comunicar, sino que además son importantes para el desarrollo de la actividad matemática misma. En esa misma línea Oviedo y Kanashiro, (2012) plantean que las representaciones semióticas son importantes tanto para los fines de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática ya que el tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado.

La teoría de Duval plantea que la diversidad de representaciones semióticas hace posible que se desarrollen las capacidades cognitivas de las personas y por ende las representaciones mentales (Azañero, 2013). En ese sentido las representaciones juegan un papel importante en el proceso de aprendizaje de los conocimientos matemáticos, debido a que, según Rico (2009) se presentan en la comunicación de los conceptos y procedimientos, con los cuales los sujetos abordan el conocimiento matemático, es decir, mediante ellas registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas.

Al respecto, Radford (citado en Rico 2009) sostiene que a través de las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico.

Asimismo, Font (2000) menciona que representar es crear y que esta acción consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para verlo de otro modo.

Según Oviedo y Kanashiro (2012) el trabajo con distintos registros semióticos y diferentes representaciones es indispensable para el aprendizaje de la matemática, pero no es una tarea natural para los alumnos; y, es precisamente en este proceso donde se presentan las mayores dificultades.

El aprendizaje de las matemáticas implica aprender y utilizar el “lenguaje matemático” cuando se resuelven problemas en el aula y fuera de ella. Por ello, en el aprendizaje del álgebra es necesario considerar el uso paralelo del lenguaje común y del lenguaje algebraico, esto ayudará en los procesos de simbolización, comprensión, análisis y resolución de ejercicios (Puga, Rodríguez y Toledo, 2016).

Al respecto Godino et al (2012) señalan que el álgebra es más que un instrumento de modelización y más que un lenguaje simbólico; es una forma de pensar y actuar en matemáticas, una actitud a generalizar, y, por tanto, a simbolizar y operar con símbolos.

2.2.1. Competencia y capacidades relacionadas con el aprendizaje del álgebra.

Una de las competencias que plantea el Currículo Nacional (2016) para el logro del perfil de egreso y que tiene que ver con el aprendizaje del álgebra es la competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, que señala que:

> Consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos. (CNEB, 2016, p.136)

Esta competencia implica, por parte de los estudiantes, la combinación de las siguientes capacidades, según el CNEB:

- **Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas:** Es transformar los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica (modelo), evaluar el resultado o la expresión formulada; y formular preguntas o problemas a partir de una situación o una expresión.
- **Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas:** significa expresar su comprensión de la noción, concepto o propiedades de los patrones, funciones, ecuaciones e inecuaciones usando lenguaje algebraico, así también interpretar información de contenido algebraico.

- **Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales:** el estudiante debe seleccionar, adaptar, combinar o crear, procedimientos, estrategias y propiedades para simplificar o transformar ecuaciones, inecuaciones y expresiones simbólicas que le permitan resolver ecuaciones, determinar dominios y rangos, representar rectas, parábolas, y diversas funciones.
- **Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia:** el estudiante debe ser capaz de elaborar afirmaciones sobre variables, reglas algebraicas y propiedades algebraicas, razonando de manera inductiva para generalizar una regla y de manera deductiva probando y comprobando propiedades y nuevas relaciones.

2.2.2. Estándares y desempeños de aprendizaje

Según el CNEB (2016) los estándares de aprendizaje son los únicos referentes para la evaluación, y por tanto definen el nivel que se espera puedan alcanzar todos los estudiantes al finalizar los ciclos de la Educación Básica. Estos sirven para identificar cuán cerca o lejos se encuentra el estudiante en relación con lo que se espera logre al final de cada ciclo, respecto de una determinada competencia. Son descripciones del desarrollo de la competencia en niveles de creciente complejidad, desde el inicio hasta el fin de la Educación Básica. Además, son holísticos debido a que hacen referencia de manera articulada a las capacidades que se ponen en acción al resolver o enfrentar situaciones auténticas.

El estándar de aprendizaje de la competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, que constituye el referente esperado en la evaluación aplicada a los estudiantes del segundo grado de la institución educativa pública donde se realizó esta investigación es:

> Resuelve problemas referidos a interpretar cambios constantes o regularidades entre magnitudes, valores o entre expresiones; traduciéndolas a patrones numéricos y gráficos, progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y afín, y relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Comprueba si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. Expresa su comprensión de: la relación entre función lineal y proporcionalidad directa, las diferencias entre una ecuación e inecuación lineal y sus propiedades; la variable como un valor que cambia; el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una inecuación; las usa para interpretar enunciados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, y evaluar funciones lineales. Plantea afirmaciones sobre propiedades de las progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones; así como de una función lineal, lineal afín con base a

sus experiencias, y las justifica mediante ejemplos y propiedades matemáticas; encuentra errores o vacíos en las argumentaciones propias y las de otros y las corrige (Currículo Nacional, 2016, p.139).

Por otro lado, los desempeños de aprendizaje son descripciones específicas de lo que hacen los estudiantes respecto a los niveles de desarrollo de las competencias (estándares de aprendizaje) en una diversidad de situaciones o contextos. Ilustran algunas actuaciones que los estudiantes demuestran cuando están en proceso de alcanzar el nivel esperado de la competencia o cuando han logrado este nivel (Currículo Nacional, 2016).

2.3. Visión del error en la construcción del conocimiento

"Todo proceso de construcción de conocimiento trae consigo el riesgo de una disonancia cognitiva, generando en el sujeto nociones o conceptos falsos; los cuales, le impiden llegar a una solución correcta de cualquier problema o aplicación coherente a una situación de la vida diaria" (Mayorga, 2018, p. 12).

Briceño (2009) señala que el error se incluye en la praxis como un nodo de conflicto que muchas veces no es considerado como herramienta de enseñanza para la construcción del conocimiento.

Piaget (como se citó en Mayorga, 2018) menciona dos principios básicos que llama funciones invariables los cuales rigen el desarrollo intelectual del niño. El primero es la organización que de acuerdo con el autor es una predisposición innata, conforme el niño va madurando es capaz de integrar los esquemas mentales a sistemas más complejos. El segundo principio es la adaptación pues todos los organismos nacen con la capacidad de ajustar sus estructuras mentales. Piaget utilizó los términos *asimilación* y *acomodación* para describir cómo se adapta el niño al entorno. Mediante el proceso de asimilación moldea la información nueva para que encaje en sus esquemas ya que no es un proceso pasivo, si no que a menudo requiere modificar o transformar la información nueva para incorporarla a la ya existente. Cuando es compatible con lo que ya se conoce se alcanza un estado de equilibrio. Cuando no es así habrá que hacer algo para adaptarla. El proceso de modificar los esquemas se llama acomodación.

Mayorga (Ob. cit.) considera que hay toda una construcción progresiva de estructuras lógicas que luego serán incorporadas a nuevas estructuras. En efecto, tras la adquisición de nuevos conceptos, éste también se enfrenta a diversos cambios, es decir, se encuentra ante una nueva forma de lenguaje que no es el cotidiano, sino un lenguaje científico o formal que está regido por reglas, notaciones precisas, abstractas. Frente a este escenario, se hace necesario tener una estructura epistémica del error como visión conceptual centrada en la construcción del conocimiento desde el aprendizaje de la matemática; a fin de conocer los vínculos que emergen entre el error y la construcción del conocimiento. Entendiendo por estructura epistémica a través de una distribución racional de los elementos que conforman el corpus de conocimientos que condicionan las formas de entender e interpretar el error como base para el aprendizaje de la matemática.

2.3.1. Estructura epistémica del error en el aprendizaje de las matemáticas

Mayorga (Ob. cit.) aborda el error en su investigación tomando en cuenta las concepciones de Descartes y Spinoza. “Con respecto a la concepción cartesiana, el error es un acto de nuestra libre voluntad: si el alma (espíritu) y la facultad de conocer (el entendimiento) nos han sido dadas por Dios para la verdad, el error no puede provenir de ahí; desde la perspectiva Spinoziana, el error no es un acto libre, sino algo inherente en las ideas inadecuadas y confusas” (p.33).

De estas perspectivas, Descartes destaca que el error depende del juicio y de la voluntad propia, y que este proviene de una desproporción que existe entre el entendimiento y la voluntad. Por otro lado, desde la postura de Spinoza el error aparece como algo inherente a los conocimientos, pero controlable y tratable matemáticamente (Mayorga, Ob.cit.).

El problema de la naturaleza epistemológica del error matemático está vinculado con la verdad y la falsedad de las proposiciones, donde la filosofía ha tratado de dar respuesta a las interrogantes planteadas por los investigadores del tema acerca de la veracidad o inconsistencia de un conocimiento. Mientras el error epistémicamente significa desviación de la verdad, la forma extrema del error es la falsedad, según la misma autora; quien manifiesta que el error no solo debe ser visto desde la filosofía, y en el ámbito del aprendizaje es necesario considerar la mirada constructivista, donde el estudiante es capaz de construir su propio conocimiento al integrar nueva información en los esquemas conceptuales persistentes influenciado por el medio que lo rodea (docente, familia y sociedad).

2.3.2. Visión del error en el aprendizaje de las matemáticas

Rico (1994), señala que los errores son datos objetivos que encontramos en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y que podrían significar fracaso ya que la connotación peyorativa del error ha significado grandes limitaciones, aunque existen algunos planteamientos epistemológicos que revalorizan el papel de los errores en la adquisición del conocimiento y la construcción del saber. Señala también que la búsqueda crítica del error es una necesidad epistemológica ineludible que puede contribuir positivamente al proceso de aprendizaje; y que es necesario que cualquier teoría de instrucción modifique la tendencia a culpabilizar a los estudiantes por los errores cometidos, y la reemplace por la prevención y la reflexión de los mismos y su consideración en el proceso de aprendizaje.

Del mismo modo Briceño (2009) refiere que entre el pensamiento y la acción convive el error, ya que está presente en los ambientes de aprendizaje, convive con el estudiante, es espontáneo, inevitable, singular y relativo, un desafío para el docente, y que constituye una herramienta para un proceso reflexivo, metacognitivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Godino, Batanero y Font (2003) manifiestan que el error aparece cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la matemática escolar y que muchas veces no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras, en las que aplica indebidamente.

El error es una vía de acceso al conocimiento que conviene valorar positivamente y que además invita a la autorreflexión, reorganización, enriquecimiento, y ajuste del conocimiento en situaciones conflictivas que lo requieran (Fernández, 2016). De La Torre (2004) destaca que, "si damos categoría pedagógica al error, no es debido a la naturaleza del mismo, sino por servirnos de contraseña y señuelo de un modo de pensar y hacer diferencias" (p.08). En este sentido De La Torre (2004) manifiesta que el error acompaña a todo proceso de mejora, como un elemento constructivo e innovador.

Es evidente que los errores acompañan el proceso de aprendizaje y es necesario abordarlos desde lo cognitivo y pedagógico, puesto que en los ambientes de aprendizaje se presentan discrepancias, concepciones que generan conflictos, que de alguna manera dificultan el aprendizaje de los nuevos conocimientos.

2.4. Errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas

Moreira (2005) plantea que para que se realice el aprendizaje significativo tiene que haber interacción entre el nuevo conocimiento y el conocimiento previo y que es ésta la variable que más influye en el aprendizaje, pues según Ausubel, menciona este autor, solo se puede aprender de aquello que ya se conoce. Si se quiere promover un aprendizaje significativo hay que reflexionar sobre los conocimientos previos. Asimismo, uno de los principios que plantea Moreira (2005) para facilitar el aprendizaje significativo es el principio del aprendizaje por el error, en el cual precisa que no es lo mismo el aprendizaje por el error que el aprendizaje por ensayo y error (cuyo significado es peyorativo). Aclara que en la medida en que el conocimiento previo es el factor determinante del aprendizaje significativo, automáticamente deja de ser el proceso errático que caracteriza el aprendizaje por ensayo y error. Menciona además que errar es algo característico de la naturaleza humana, y que cuando se comprende algo (se es capaz de describir, explicar) es porque se construye un modelo mental de ese "algo", pero ese modelo mental tiene como característica la capacidad de autocorrección que resulta justamente del error. Sin embargo, muchos docentes ignoran el error como mecanismo para construir conocimiento. Sistematizar el error es pensar críticamente, es aprender a aprender, encarando el error como algo natural y aprendiendo a través de su superación, atendiendo las dificultades que los originan.

Por otro lado, hablar de los errores, conlleva también analizar las dificultades que los propician. Al respecto Fernández (2016) menciona que las dificultades pueden repercutir en el aprendizaje, dando lugar a conocimientos deficientes generando razonamientos inadecuados o incoherentes, respuestas falsas que considera errores del aprendizaje. Errores y dificultades están estrechamente relacionadas y su conocimiento previo juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas escolares pues constituyen limitaciones para el aprendizaje si no son valorados positivamente.

Godino et al. (2003) afirma que el termino dificultad refiere al mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado, se dice que la dificultad es alta, mientras que, si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

Según Fernández (Ob. cit.) la dificultad es la causa o situación que da origen al error, y éstas pueden deberse a:

- **La complejidad de los objetos matemáticos:** relacionadas con la estructura conceptual, sistemas de representación o modos de uso de los conceptos involucrados, las peculiaridades del lenguaje matemático e influencia del uso coloquial de términos específicos, las concepciones erróneas o incompletas de los estudiantes; por ejemplo, una incorrecta interpretación del papel de las variables.
- **La complejidad de los procedimientos matemáticos:** relacionadas con la sobre generalización de modelos matemáticos habituales y propiedades específicas de un modo particular; por ejemplo, el uso inadecuado de una determinada propiedad.
- **Los procesos de enseñanza:** relacionadas con la adaptación del lenguaje empleado a las capacidades de los estudiantes, no considerar los ritmos de aprendizaje o el empleo de representaciones inadecuadas.
- **Desarrollo cognitivo de los alumnos:** se dan cuando no hay adaptación de los objetivos específicos a las características cognitivas del alumnado de una edad determinada.
- **Actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas:** relacionadas con la ansiedad, bloqueo, miedo o aversión hacia las matemáticas.

Godino et al. (2003) identifica algunas de las causas de errores y dificultades, que guardan cierto grado de similitud con las antes mencionadas:

- **Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos**: pueden surgir por la abstracción y generalización de las matemáticas, ya que el significado de los objetos matemáticos podría presentarse con cierto grado de dificultad.
- **Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas**: cuando el profesor no estructura adecuadamente los contenidos, los materiales no son los adecuados, la presentación que hace el profesor no es clara, ni organizada, no se entiende cuando habla, habla despacio o rápido, no utiliza adecuadamente la pizarra, no enfatiza en los conceptos, etc.

- **Dificultades que se originan en la organización del centro:** cuando las condiciones no son las adecuadas (el horario, gran número de estudiantes, no se dispone de materiales o recursos didácticos)
- **Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado**: cuando las actividades propuestas por el docente son significativas y la metodología es adecuada pero los estudiantes no están motivados.
- **Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos**: cuando los alumnos no han superado la etapa de las operaciones concretas y se les pide que realicen operaciones formales.
- **Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores**: cuando el estudiante a pesar de tener un nivel evolutivo adecuado no tenga los conocimientos previos necesarios para poder aprender el nuevo contenido.

Siguiendo las consideraciones anteriores, se puede afirmar que en el ámbito de la educación matemática, los errores aparecen permanentemente en las producciones de los estudiantes, y se deben a las dificultades de distinta naturaleza que se generan en el proceso de aprendizaje, además éstas se conectan y refuerzan en redes complejas que obstaculizan el aprendizaje, y estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas (Socas, citado en Rodríguez y Torrealba, 2016).

En la educación matemática también es una preocupación los obstáculos que junto con las dificultades y errores se presentan en el proceso de aprendizaje. Según Plaza, González y Vasyunkina (2020) conocer los obstáculos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es importante porque permitirá diseñar estrategias, para desarrollar habilidades y destrezas, así como potenciar el pensamiento lógico frente al conocimiento matemático.

Los obstáculos pueden considerarse la barrera que impide seguir adelante, o la situación física o mental que no permite el desarrollo de la ruta que se desea seguir (Plaza, Gonzáles y Vasyunkina, 2020).

2.4.1. Dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra

Numerosas investigaciones acreditan las dificultades con las que se enfrentan los alumnos cuando son acercados a las primeras herramientas algebraicas, ya sea para utilizar dichas herramientas en la resolución de problemas o para comprender algoritmos (Papini, 2003).

Según Olmedo et al (2015) los estudiantes tienen concepciones inadecuadas sobre los objetos matemáticos que, a veces, los conducen a usar procedimientos equivocados lo que dificulta el aprendizaje del álgebra, por ello menciona que inferir las concepciones erróneas que subyacen bajo los errores atendiendo a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos de pensamiento y de enseñanza y aprendizaje será relevante para ayudar a los docentes a organizar mejor su enseñanza y para lograr alumnos competentes.

Palarea (1998) menciona que el aprendizaje del álgebra genera en los estudiantes muchas dificultades de diversa naturaleza, y se relaciona con las dificultades que a continuación se presentan:

2.4.4.1. Dificultades y errores en el proceso de Generalización en el aprendizaje del álgebra. La generalización es un proceso mediante el cual se establece una conclusión universal o ley a partir del análisis de hechos, datos u objetos particulares, que se cumple bajo ciertas condiciones, para un conjunto de elementos dados. Supone un esfuerzo por comprender los hechos o fenómenos a partir de la analogía con otros, por visualización de reglas de formación, verificándose en nuevos casos particulares, se hacen conjeturas y se llega a reglas generales (Pérez, 2005).

Según Alonso et al. (1993) la actividad de encontrar términos generales y llegar a su expresión simbólica puede resultar difícil para muchos, así podríamos encontrar estudiantes que presenten generalización abusiva, y otros estudiantes podrían confundir el concepto de variable debido a que generalizar supone un proceso de abstracción de orden elevado, de cierta dificultad, una gran actividad intelectual.

Alonso (ob. cit.) explica que la generalización abusiva es un error que está relacionado con los intentos de adaptar reglas o propiedades a una situación distinta a aquella en la que se usa habitualmente, pues los estudiantes al trabajar con expresiones algebraicas desarrollan razonamientos de transferencia, mediante los cuales podría considerarse que lo que es válido para un caso particular lo es también para el otro. Se podrían encontrar estudiantes que generalicen una misma regla para situaciones diferentes. Otra dificultad que conlleve a un error en la generalización está relacionada con el concepto de variable pues al intentar hallar el término general en una sucesión de figuras o números pueden interpretarlo el valor de alguna variable.

2.4.1.1. Dificultades y errores en el proceso de Simbolización en el aprendizaje del álgebra. Es importante que en el aprendizaje del álgebra se desarrolle un adecuado proceso de simbolización el cual incluye la incorporación de símbolos algebraicos a las situaciones que los requieran: expresión de reglas, escritura de fórmulas, representación de expresiones, resolución de problemas, etc. (Alonso, et al., 1993).

El proceso para simbolizar una situación requiere un camino en el que el primer paso es entender la situación y el último expresarla por escrito con los símbolos apropiados; así Boyer (como se citó en Alonso et al., 1993) sugiere la siguiente secuencia:

- Entender
- Expresar
- Expresar por escrito
- Expresar por escrito con símbolos

- Expresar por escrito con los símbolos adecuados.

Los estudiantes podrían presentar diversas dificultades para utilizar los símbolos adecuados o para traducir sus ideas al lenguaje del álgebra (Palarea, 1998). Al respecto se pueden considerar dos tipos de dificultades que aparecen a menudo: traducir una expresión, con símbolos algebraicos, las relaciones cuantitativas que se dan en el problema y, por otro lado, interpretar la situación en términos de una igualdad (escribir la ecuación correspondiente). De esta manera estas dificultades se podrían concretar en errores diversos ya sea por los convenios de notación (por ejemplo, el carácter y/o significado del signo igual), la utilización de los paréntesis, etc. (Alonso, ob. cit.).

Al mencionar el uso de símbolos es necesario tener en cuenta las notaciones simbólicas como sistemas de representación ya que pueden ser de gran complejidad para los estudiantes (Castro y Castro, 1997).

Según Castro, Rico y Romero (1997) las representaciones matemáticas son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las cuales se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes.

Como se ha visto, las dificultades pueden abordarse desde varias perspectivas según se ponga énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los educandos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza. (Rodríguez y Torrealba, 2016).

2.5. Tipología de errores en el aprendizaje del álgebra

Las investigaciones acerca de los errores que cometen los estudiantes han permitido realizar diversas clasificaciones. Seguidamente, se muestran algunas de ellas:

2.5.1. Según Martín Socas Robayna

En 1989 presenta la siguiente clasificación:

- **Errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética**:

  El álgebra no está separada de la aritmética por lo que puede considerarse con la perspectiva de aritmética generalizada. Así, para entender la generalización de relaciones y procesos, se requiere que éstos sean antes asimilados dentro del contexto aritmético. Por eso a veces las dificultades que los estudiantes presentan al estudiar álgebra no radican en esta rama de la matemática, sino en problemas que se quedan sin corregir en la aritmética; dentro de estos se distinguen: errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, errores relativos al uso de recíprocos, errores de cancelación, en el uso de paréntesis, potencias, etc.

- **Errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico:**

  Son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética (operaciones, estructuras y procesos). Ejemplos de este tipo de error son el sentido bidireccional del signo igual “= “en álgebra y la sustitución formal.

Con respecto al signo igual cabe mencionar también a Molina (2006) quien, en su investigación de tesis doctoral sobre el desarrollo del pensamiento relacional, hace referencia a los diversos significados que los estudiantes pueden llegar a atribuir a este signo y que permiten identificar las dificultades que se presentan, las cuales son causa de errores y están relacionadas con la comprensión del mismo.

Socas (1997) movido por el interés en la investigación acerca de los errores realizó otra clasificación profundizando más en el origen y la causa, caracterizando los errores en tres grupos: errores que tienen su origen en un obstáculo, errores que tienen su origen en una ausencia de significado y errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

- **Errores que tienen su origen en un obstáculo:**

  Estos errores estarían relacionados con las dificultades relacionadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático. El obstáculo puede ser epistemológico, didáctico y/o cognitivo.

  Se considera el obstáculo como un conocimiento adquirido, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos, pero cuando el estudiante utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas. (Bachelard y Brousseau, citados en Socas, 1997).

  Socas (1997) plantea que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos, así como a la observación de conceptos análogos en los estudiantes.

  Según Plaza, González y Vasyunkina (2020) los obstáculos cognitivos son conocimientos que han sido utilizados en cierto tipo de problemas, pero resultan ser inapropiados para la solución de otros, están más relacionados con la resistencia de esas concepciones por las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar.

  Los obstáculos didácticos según Andrade (citado en Plaza, González y Vasyunkina, 2020) se originan en la instrucción y son los que impiden ver las cosas de nuevo, y no permiten superar los obstáculos epistemológicos pues constituyen además la resistencia al aprendizaje matemático.

- **Errores que tienen su origen en una ausencia de significado:**

  Los errores que tienen su origen en ausencia de sentido pueden ser considerados como:

  - Errores de álgebra que tienen su origen en la aritmética.
  - Errores de procedimiento: los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento.
  - Errores de álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico.

- **Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales:**

  Estos errores tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

2.5.2. Según Mercedes Palarea

Esta investigadora en 1998 menciona que "Muchos investigadores se han preocupado por tratar de identificar los tipos de errores que cometen los estudiantes comúnmente. El proyecto SESM (Strategies and errores in Secondary Mathematics) realizado en el Reino Unido entre 1980 y 1983 centró más el interés en analizar la naturaleza de los errores cometidos" (p.81)

De esta investigación se concluyó que los errores comunes podían ser atribuidos a aspectos tales como:

a) La naturaleza y significado de los símbolos y las letras;
b) El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra;
c) La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes, y
d) El uso inapropiado de fórmulas o procedimientos.

a) La naturaleza y significado de los símbolos y las letras

- **Los símbolos:** Alonso (O b. cit.) precisa que los símbolos son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones, por ello el reconocimiento de la naturaleza y significado de estos es muy importante para que el alumno comprenda cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados (para pasar del conocimiento aritmético al conocimiento algebraico). Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no logra comprender la ventaja que supone la utilización de símbolos, esto ocurre porque no comprenden la relación con lo que representan. Para que el estudiante comprenda el sentido de los símbolos tiene que interiorizar la doble relación entre las situaciones concretas y las expresiones algebraicas. Sucede también que los estudiantes suelen confundir los símbolos que utilizan en álgebra porque los habían utilizado antes en aritmética con su propio significado produciéndose un conflicto con el nuevo aprendizaje:

> "la mayoría de los símbolos que se utilizan en álgebra se habían utilizado antes en aritmética. Por eso para los alumnos ya tenían un significado que, con frecuencia, puede entrar en conflicto con el que se les atribuye ahora. Cualquier estrategia de enseñanza para incorporar el nuevo significado de los símbolos debe distinguir y ampliar el que ya tenían" (Alonso, et al., 1993, p.15).

- **Las Letras.** El significado de las letras constituye otra de las mayores dificultades en el aprendizaje del álgebra: "el nivel de comprensión del álgebra está muy relacionado con la progresión que se sigue en la utilización de las letras" (Alonso, et al., 1993, p.15).

El mayor cambio conceptual en el aprendizaje del álgebra es el significado de los símbolos e interpretaciones de las letras. Al respecto Palarea (1998) refiere que es necesario, además de cambiar los símbolos, que se produzca un cambio en su significado, es decir, que no se haga solamente una sustitución de los números por letras, sino que se realice el paso de números a variables y para ello se debe realizar no sólo un cambio de símbolos sino también un cambio de significado, pues muchas veces el cambio se produce únicamente en los símbolos y solo se realiza el paso de números a letras. Esto es lo que confunde al estudiante y hace difícil el aprendizaje del álgebra ya que el nivel de comprensión del álgebra está muy relacionado con la progresión que se sigue en la utilización de las letras.

Los diversos significados que puede tomar una letra resultan complejos para los estudiantes, especialmente cuando éstos intentan identificarlas y utilizarlas en diferentes contextos (García, Segovia y Lupiañez, 2014).

Kuchemann (citado en García, Segovia y Lupiañez, 2014) señala que las consideraciones acerca de la comprensión del álgebra implican el desarrollo de las habilidades de interpretar y manipular las letras y hace una clasificación de las distintas interpretaciones dadas por los estudiantes:

- **Letra evaluada**: cuando el estudiante asigna desde el principio un valor numérico a la letra. El estudiante rechaza la letra porque desea eliminar la incertidumbre que le produce trabajar con algo desconocido y le asigna a la letra un valor que elige de forma personal. Por ejemplo, al trabajar con la siguiente expresión algebraica: $a + b = 8$, el estudiante inmediatamente puede asignar $a = 4$ y $b = 4$.

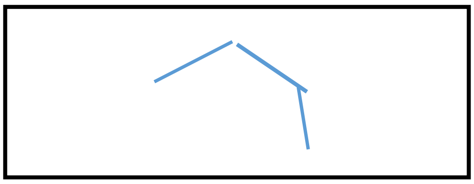
- **Letra no utilizada o ignorada**: los estudiantes se dan cuenta que es una letra, reconocen su existencia pero no le atribuyen significado, es decir, no la interpretan. Por ejemplo, al trabajar la expresión: $3n + 5 + 2n$, el estudiante puede responder incorrectamente 10. Cuando el estudiante manifiesta este tipo de errores, inicia un proceso de incomprensión del álgebra elemental pues no encuentra sentido a las propiedades que debe utilizar.

- **Letra como objeto**: el estudiante considera a la letra como un objeto determinado. Por ejemplo $7m$, se puede interpretar que m es la inicial de la palabra mesa y que ésta expresión representa 7 mesas. También en la expresión $6m + 2p$, pueden interpretar 6 manzanas más 2 peras; o 6 “emes” más 2 “pes”. Este tipo de errores reduce el significado abstracto del álgebra por algo más concreto y real.

- **Letra como incógnita**: sucede cuando los estudiantes consideran las letras como un número desconocido pero específico, y se puede operar con el directamente. Por ejemplo, en la pregunta planteada:

Figura 1*:*

¿Cuál será el perímetro de un polígono de n lados, cuya figura se ve parcialmente, si todos miden 2cm de longitud?



Nota. La figura ha sido extraída de la investigación de la doctora Mercedes Palarea (1998), p. 50 (anexos).

El estudiante en lugar de decir $2n$ dice 6, porque solo toma en cuenta los lados visibles.

- **Letra como número generalizado**: el estudiante ve la letra como una representación, no concibe que la letra puede tomar distintos valores en vez de uno solo. Puede resultar difícil para el estudiante pasar de la interpretación de un único valor a la interpretación de varios valores posibles. Por ejemplo, en el siguiente ejercicio: ¿Qué valores podría tomar n, en la siguiente expresión: $m + n = 12$ Si m es menor que n? Para dar la respuesta correcta es necesario tener en cuenta que para n existen varias posibilidades; sin embargo, puede haber estudiantes que consideren solo un único valor; no dan todos los valores posibles, sino que eligen un único que consideran como la respuesta.

  Estos estudiantes no han llegado a superar la concepción del "valor único" de la letra en favor de la concepción del "valor múltiple".

- **Letra como variable**: el uso de las variables se confunde con el uso de las x, las y..., o de otras letras, manejándolas sin comprender su concepto, ni los múltiples significados y usos que pueden tener las letras para los alumnos. Schoenfeld (como se citó en Palarea, 1998) plantea que para la enseñanza y aprendizaje del álgebra es importante que el estudiante adquiera el concepto de variable, el cual según Palarea (Ob. cit.) supone la conjunción de dos procesos, la generalización, que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas, y, la simbolización, que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones. Para que se pongan en práctica estos dos procesos hace falta planificar estrategias de enseñanza, y abordar cada uno de ellos de forma diferente.

La idea de "variable" para el alumno puede resultarle difícil, ya que los símbolos que ha usado en Aritmética - signos de operaciones, paréntesis y números - son de significación unívoca y está acostumbrado a poder interpretar, de manera única, cada símbolo que encuentra. Cuando las letras vienen a sustituir a un número, son aceptadas como letras desconocidas que se podrán calcular, como letras "incógnitas". Lo que resulta mucho más difícil, para el alumno, es imaginar que para una misma letra existen distintas posibilidades; aceptar la idea de la letra como “variable” (Palarea, 1998).

b) El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra

Si bien es cierto el objetivo en aritmética es hallar soluciones numéricas concretas, esto no sucede en álgebra ya que lo que se pide es hallar relaciones, expresiones generales simplificadas. Muchos estudiantes suponen que en cuestiones algebraicas hay una solución única y numérica, así por ejemplo pueden dar como respuesta $8x$ a la expresión $5x + 3$. Collis (como se citó en Alonso et al, 1993) menciona que este problema puede suscitarse por que los estudiantes tienen dificultad cognitiva para aceptar la falta de clausura o también tratarse de una situación derivada de la aritmética, relacionada con lo que se supone debe ser una “respuesta bien dada”.

c) La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes

En gran medida podemos decir que el álgebra es aritmética generalizada, es por esto que para entender la generalización de relaciones y procesos algebraicos se requiere que estos sean asimilados dentro del contexto aritmético. Estas situaciones pueden aparecer por ejemplo cuando los alumnos no dominan las operaciones con fracciones, el signo menos “–“ delante de un paréntesis, el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos también da lugar a errores de este tipo, debido al uso inadecuado, por parte de los alumnos, de una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto y la usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva.

Se considera que las respuestas erróneas pueden deberse a que los estudiantes o no asumen el Álgebra como Aritmética generalizada, ya que en algunos casos ignoran las letras o las usan en vez de otros caracteres alfabéticos o valores, o bien las tratan como objetos. Además, se tiene en cuenta que los niños pueden estar operando según sus propios métodos intuitivos y no según los métodos que la enseñanza propone y esto puede contribuir a que se den los errores observados (Palarea, 1998, p. 81).

d) El uso inapropiado de fórmulas o procedimientos

La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números y se deben a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que utilizan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva. Aquí podemos encontrar cinco grupos de errores:

- **Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva**

Se presentan por una aplicación incorrecta de la misma, por ejemplo, estudiantes que operan de la siguiente manera:

$$a.(b + c) = a.b + c$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$
$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

- **Errores relativos al mal uso de los recíprocos**

  Resultan como consecuencia de los errores en aritmética, al sumar fracciones algebraicas, dan resultados como estos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a.b}$$

- **Errores de cancelación**

  Estos errores aparecen por que los estudiantes generalizan procedimientos que se verifican en determinadas condiciones. Así, por ejemplo:

$$\frac{2x+5}{5} = 2x$$
$$\frac{3x-2}{3} = x-2$$

- **Errores debidos a falsas generalizaciones sobre números**

  Estos errores surgen por la necesidad de generalizar, pues les resulta fácil aplicar una regla general en un problema con cierta similitud, por ejemplo:

$$(x-7)(x-5) = 0 \quad \rightarrow \quad x-7=0 \text{ ó } \quad x-5=0$$

  Los estudiantes podrían generalizar y operar como se muestra:

$$(x-7)(x-5) = 4 \quad \rightarrow \quad x-7=4 \text{ ó } \quad x-5=4$$

- **El uso de métodos informales por parte de los estudiantes**

  Los estudiantes a menudo tienen sus propios métodos informales que les han dado resultados con éxito en algunas cuestiones sencillas pero que no pueden aplicarse a otras situaciones.

Capítulo 3: Metodología de la investigación

Siendo el objetivo fundamental en la presente investigación, diagnosticar los errores algebraicos que presentan los alumnos del segundo grado de secundaria de una institución educativa pública, que están relacionados con la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; la metodología a utilizar se detalla a continuación.

3.1. Paradigma, tipo y diseño de la investigación

El presente trabajo de investigación se encuentra enmarcado dentro del paradigma cualitativo, ya que se intenta comprender la realidad dentro de un contexto dado, por tanto, no podremos fragmentar en variables dependientes o independientes, por ello, se optó por la metodología cualitativa basada en un análisis descriptivo de los errores y las dificultades que presentan los estudiantes. Hernández, Fernández y Baptista (2010) definen el paradigma cualitativo como un conjunto de prácticas interpretativas que buscan transformar y convertir en representaciones las anotaciones, documentos, etc. Por ello, se ha empleado predominantemente procedimientos cualitativos y algunos cuantitativos orientados al logro del objetivo principal de esta investigación. Se ha tomado en cuenta las definiciones de diversos autores acerca de la importancia del aprendizaje del álgebra escolar y del diagnóstico de los errores para su posible tratamiento. Por esta razón buscando la mejora en el desarrollo de la competencia: "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio" el trabajo se encuentra orientado a una investigación de enfoque cualitativo ya que se han analizado los errores de los alumnos. Los resultados que se obtendrán en el cuestionario constituyen la base del presente trabajo para identificar los errores y las dificultades que presentan los estudiantes teniendo en cuenta que ésta es la metodología más adecuada para este tipo de investigación.

A continuación, se presenta el procedimiento seguido:

Tabla 1:

Procedimiento metodológico desarrollado en la investigación

Procedimiento	Descripción
1. Determinación del problema	Se identificaron varios problemas que presentan los estudiantes de una institución educativa pública rural, entre ellos el bajo rendimiento en el área de matemática específicamente en temas relacionados con el desarrollo de la competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
2. Planteamiento de los objetivos	Se plantearon varios objetivos relacionados con el desarrollo de la competencia 24. Sin embargo, se decidió enfocarse en el diagnóstico de errores para visualizar el nivel de desarrollo de esta competencia y orientar los procesos de enseñanza en esta área.

Procedimiento	Descripción
3. Selección de la información que sustenta la investigación	Se revisó la información acerca de las capacidades y estándares de la competencia 24 que plantea el Currículo Nacional 2016 y también la revisión de los antecedentes de estudio y material bibliográfico que sustentan el marco teórico.
4. Diseño del cuestionario	Las preguntas del cuestionario que se aplicaron en esta investigación fueron seleccionadas y adaptadas de la investigación de Palarea “La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*”* debido a que los objetivos que se pretenden conseguir son similares a algunos de los planteados en la investigación**.** Las preguntas del cuestionario fueron adaptadas según las capacidades que están planteadas en el Currículo Nacional para el desarrollo de la competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
5. Validación del cuestionario	El cuestionario fue presentado ante docentes expertos en el área de matemática, los cuales revisaron e hicieron las observaciones necesarias para su corrección respectiva, quedando validado para su aplicación.
6. Selección de la muestra	La muestra fue constituida por los 38 estudiantes del segundo grado de secundaria de una institución educativa pública rural JEC y esta selección se realizó en base a que este grado finaliza el ciclo VI en el nivel secundaria.
7. Aplicación del cuestionario	Se aplicó el cuestionario a los 38 estudiantes durante 3 horas pedagógicas (135 minutos)
8. Análisis de los resultados	Se realizó el análisis respectivo de los resultados de cada una de las preguntas teniendo en cuenta los referentes (capacidades y la tipología de errores vista en Socas y Palarea). Luego a través de tablas y gráficos se organizaron los resultados para una mejor interpretación y comprensión de los mismos.
9. Elaboración de conclusiones	Luego de analizar los resultados se elaboraron las conclusiones tomando en cuenta los objetivos de la investigación.
10. Realización del informe	El informe de la investigación está organizado en cinco capítulos: I. Planteamiento del problema II. Marco teórico

Procedimiento	Descripción	
	III.	Metodología de la investigación
	IV.	Análisis e interpretación de resultados
	V.	Conclusiones y limitaciones de la investigación.

3.2. Técnicas e instrumentos de investigación

Tomando en cuenta el objetivo de esta investigación, se elaboró un cuestionario cuyas preguntas fueron seleccionadas de uno de los instrumentos de medida de la investigación de la doctora Mercedes Palarea titulada, “La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años”, que tuvo como objetivo determinar las dificultades, obstáculos y errores que presentaban los alumnos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O) para mejorar la comprensión del pensamiento algebraico y elaborar una propuesta curricular adecuada para el lenguaje algebraico.

Las preguntas del cuestionario fueron contextualizadas y adaptadas a los objetivos planteados, según las capacidades descritas en el Currículo Nacional de la Educación Básica Regular (2016) para el desarrollo de la competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

3.2.1. Elaboración del cuestionario

Con la elaboración y aplicación del cuestionario se pretende realizar un diagnóstico para conocer los errores algebraicos, reflexionar sobre ellos y las dificultades que los causan.

Las preguntas del cuestionario fueron adaptadas según las capacidades planteadas en el Currículo Nacional para el desarrollo de la competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Estas capacidades son:

- Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas
- Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas
- Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales
- Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia

Capacidades de la competencia 24 planteada en el Currículo Nacional (2016)

- **Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas:** es transformar los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica (modelo). Implica también evaluar el resultado o la expresión formulada con respecto a las condiciones de la situación; y formular preguntas o problemas a partir de una situación o una expresión.

- **Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas:** significa expresar su comprensión de la noción, concepto o propiedades de los patrones, funciones, ecuaciones e inecuaciones estableciendo relaciones entre estas. Así como interpretar información que presente contenido algebraico.
- **Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales:** es seleccionar, adaptar, combinar o crear, procedimientos, estrategias y algunas propiedades para simplificar o transformar ecuaciones, inecuaciones y expresiones simbólicas que le permitan resolver ecuaciones, determinar dominios y rangos, representar rectas, parábolas, y diversas funciones.
- **Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia:** significa elaborar afirmaciones sobre variables, reglas algebraicas y propiedades algebraicas, razonando de manera inductiva para generalizar una regla y de manera deductiva probando y comprobando propiedades y nuevas relaciones.

Estándar de aprendizaje de la competencia 24 (ciclo VI)

Resuelve problemas referidos a interpretar cambios constantes o regularidades entre magnitudes, valores o entre expresiones; traduciéndolas a patrones numéricos y gráficos, progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y afín, y relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Comprueba si la expresión algebraica usada expresó y proporcionalidad directa; las diferencias entre una ecuación e inecuación lineal y sus propiedades; la variable como un valor que cambia; el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una inecuación; las usa para interpretar enunciados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar el valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, y evaluar funciones lineales. Plantea afirmaciones sobre propiedades de las progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones, así como de una función lineal, lineal afín con base a sus experiencias, y las justifica mediante ejemplos y propiedades matemáticas; encuentra errores o vacíos en las argumentaciones propias y las de otros y las corrige (Currículo Nacional, 2017, p. 139).

3.2.2. El cuestionario y su relación con las capacidades de la competencia 24

En la tabla 2 se presentan las capacidades de la competencia 24, y los ítems respectivos para cada una de ellas, luego en la tabla 3 se presentan, detalladamente, cada uno de los ítems planteados en el cuestionario y su relación con las capacidades, las cuales fueron codificadas según se observa (C1, C2, C3, C4).

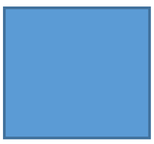
Tabla 2:

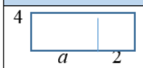
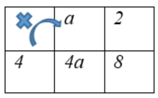
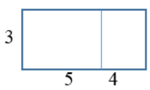
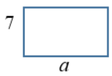
Capacidades de la competencia 24 y los ítems relacionados

Capacidades de la competencia 24	Ítems relacionados
C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas	1,2,3,4,5,9,11,12
C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas	2,4,6,8,9,11,12,13
C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales	1,2,3,4,7,8, 11,12,13
C4: Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia	9, 10

Tabla 3:

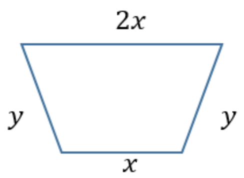
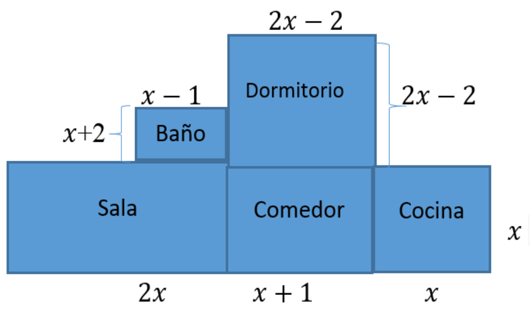
Ítems del cuestionario según las capacidades a identificar de la competencia 24 planteada en el Currículo Nacional

Ítem	Pregunta	Capacidades a identificar
1	Si al doble de mi edad le sumo 1 año resulta 9 años ¿Cuál es mi edad?	C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales
2	Cierto conductor hizo ***"n"*** viajes en un día, transportando 50 trabajadores de una fábrica en cada viaje. ¿Cómo expresarías el número total de trabajadores que transportó ese día?	C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales
3	La edad de Pepito más cuatro años es la edad de su hermano mayor. Si el hermano mayor de Pepito tiene 18 años. ¿Cuál es la edad de Pepito?	C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales
4	El siguiente cuadrado representa un terreno de cultivo de lado $(\boldsymbol{b}+\mathbf{3})$ ¿Cómo podrías expresar el área del terreno? 	C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Pregunta</th><th>Capacidades a identificar</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales</td></tr>
<tr><td>5</td><td>¿Cómo escribirías con símbolos o letras las siguientes expresiones?
a) Un número cualquiera:
b) La suma de dos números:
c) La suma de dos números consecutivos:
d) El quíntuple de un número menos:
e) La mitad de un número más 12:</td><td>C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Complete las siguientes igualdades colocando el número correcto en el rectángulo:
a) $\boxed{} - 8 = 10$ c) $\boxed{}(5) = 150$
b) $\boxed{} - 25 = 41$ d) $\boxed{} + 7 = \boxed{} + \boxed{}$</td><td>C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas</td></tr>
<tr><td>7</td><td>En el siguiente ejemplo se muestran distintas situaciones del área de un rectángulo mediante el modelo geométrico y la expresión algebraica que lo representa. Observa el ejemplo y completa los recuadros que falten.
<table>
<tr><th>Modelo geométrico</th><th>Visualización simplificada</th><th>Expresión algebraica</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$4(a+2) = 4a + 8$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Resuelva las siguientes ecuaciones indicando el procedimiento seguido:</td><td>C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Ítem</th><th>Pregunta</th><th>Capacidades a identificar</th></tr>
<tr><td></td><td>✓ $\frac{x+5}{4} = \frac{x-2}{3}$
✓ $10 + 4x = 30 - x$
✓ $-3x + 7 = 2 + 0.5x$</td><td>C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Completa el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene el doble de edad que Sergio, Marta tiene 8 años más que Pedro, y Antoni tiene 12 años menos que la suma de las edades de Marta y Sergio. Explique sus procedimientos.
<table><tr><td>Datos</td><td>Pedro</td><td>Antoni</td><td>Marta</td><td>Sergio</td></tr><tr><td>Edad actual</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Edad dentro de diez años</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td>C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas
C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas
C4: Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia</td></tr>
<tr><td>10</td><td>En la columna de la izquierda, se presentan 3 situaciones (No trates de resolverlas). Cada una se resuelve utilizando una de las ecuaciones que aparecen en la columna de la derecha. Relaciona cada una con la ecuación que representa cada situación. Fundamente sus respuestas en cada caso:
<table><tr><td>¿Cuál es la edad de María, si hace 10 años tenía 40 años?</td><td>$x = 10(40)$</td></tr><tr><td>Un obrero trabajó 10 horas a la semana, si en total ganó 40 soles. ¿Cuánto gana por hora?</td><td>$x = \frac{40}{10}$</td></tr><tr><td>1 hectárea de cultivo se abona con 40 kg de fertilizante. ¿Cuántos kg se necesitan para abonar 10 hectáreas?</td><td>$x - 10 = 40$</td></tr></table></td><td>C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas
C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas

C4: Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Carlos visita la tienda agrícola. Encuentra que tres veces el valor de un fungicida sistémico disminuido en S/ 150 no puede ser más de S/1000.
a) ¿Cuál es el precio máximo que puede tener el fungicida?</td><td>C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas
C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas</td></tr>
</table>

Ítem	Pregunta	Capacidades a identificar
	b) ¿Qué inecuación modela la situación? ¿Cuál es el conjunto solución? c) Representa gráficamente el conjunto solución. Explica detalladamente el procedimiento seguido en cada pregunta.	C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales
12	Para evitar la pérdida de ganado lanar de la comunidad de Tejedores, los pobladores se han propuesto construir corrales de la forma como se muestra en la figura. Si deciden realizar triple cercado con alambre ¿Qué cantidad total de alambre necesitará un poblador para cercar un corral? Detalle el procedimiento seguido. 	C1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales
13	Se tiene el croquis de una casa ¿cuál sería la expresión algebraica de su perímetro? Explique el proceso seguido. 	C2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas C3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales

3.3. Caracterización de la muestra

La muestra corresponde a los 38 estudiantes del segundo grado de educación secundaria cuyas edades oscilan entre 13 - 15 años de edad, de una Institución Educativa Pública JEC (Jornada Escolar Completa), distribuidos en la siguiente tabla:

Tabla 4:

Estudiantes a los que se aplicó el cuestionario de la investigación

Número de varones del segundo grado del nivel secundaria	21
Número de mujeres del segundo grado del nivel secundaria	17

Nota: Datos tomados de la nómina de matrícula del segundo grado de secundaria de la I.E.

La Institución Educativa mencionada pertenece a la UGEL Tambo grande y se ubica en la zona rural del Centro poblado Tejedores. Estos estudiantes reciben 6 horas de matemática semanalmente y el horario escolar fluctúa entre las 8:00 de la mañana hasta las 3:30 pm y la gran mayoría provienen de centros educativos unidocentes - multigrado, poco accesibles a la tecnología y de familias dedicadas a la agricultura. La mayoría de estas familias no cuentan con recursos básicos: agua y desagüe, pues utilizan el agua de cierto canal de regadío para el aseo personal y la cocción de sus alimentos.

Los estudiantes muestran grandes dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en aquellas situaciones que están relacionadas con el aprendizaje del álgebra. Estas dificultades poco les permiten avanzar en el logro de las competencias que plantea el Currículo Nacional.

3.4. Diseño de análisis y discusión de los resultados

Para lograr el objetivo de este trabajo, en el análisis y discusión de los resultados obtenidos, se ha seguido el procedimiento que a continuación se detalla en la siguiente tabla:

Tabla 5:

Procesamiento de los resultados obtenidos para el análisis y discusión de los mismos

Procedimiento seguido en el Análisis y discusión de los resultados	1. Se presentan los resultados obtenidos	Se presentan detalladamente en tablas (desde la tabla 6 hasta la tabla 17) los tipos de errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes y su relación con las capacidades del currículo. Se presentan los resultados obtenidos en cada una de las preguntas del cuestionario en tablas, mostrando los errores (y su codificación respectiva). Cabe señalar que las respuestas de los estudiantes se han codificado, de modo que al estudiante 1 se le ha denominado A1 y así sucesivamente.
		Se presentan los resultados porcentuales obtenidos en un gráfico estadístico (gráfico circular) que brinda un panorama sobre la incidencia de los errores en los que incurren los estudiantes.
	2. Se analizan y discuten los resultados obtenidos	Se realiza un análisis minucioso de los errores encontrados, reflexionando acerca de las posibles causas y/o dificultades que los producen según el marco teórico de esta investigación. Se incluyen algunos gráficos que muestran los procedimientos seguidos por los estudiantes.
	3. Se presentan los resultados en resumen	Finalmente se muestra a modo de resumen la tabla 18 donde se indican los porcentajes de incidencia de errores que presentan los estudiantes, según la tipología que desarrollan Socas y Palarea; y las capacidades de la competencia 24 que plantea el Currículo Nacional. Asimismo, se brindan algunas orientaciones para abordar los errores más frecuentes encontrados.

Para una mejor visualización de los errores encontrados en los procedimientos seguidos por los estudiantes, se ha codificado estos atendiendo a la tipología vista según Mercedes Palarea y Martín Socas.

Así tenemos a continuación la codificación de los errores en la tabla 6:

- ES: Errores encontrados, según Martin Socas
- EP: Errores encontrados, según Mercedes Palarea

Tabla 6:

Codificación de errores (según Tipología de Mercedes Palarea y Martín Socas)

ES: Errores según Martín Socas Robayna	ESA: Errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética: ESA1: Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva. ESA2: Errores relativos al uso de recíprocos. ESA3: Errores de cancelación. ESA4: Error en el uso de paréntesis.	ESL: Errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico: ESL1: Error en el sentido del signo = en álgebra. ESL2: Error de sustitución formal.	ESO: Errores que tienen su origen en un obstáculo: ESO1: Debidos a la complejidad de los objetos matemáticos ESO2: Debidos a los procesos de pensamiento matemático.	ESS: Errores que tienen su origen en una ausencia de significado: ESS1: Errores de procedimiento.	
EP: Errores según Mercedes Palarea (Centra su interés en la naturale-za de los errores	EPS: Errores debidos al significado de los símbolos y las letras: EPS1: Error en el uso de los símbolos. EPS2: Error en el uso de las letras:	EPN: Errores debidos al objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra. Por ejemplo, cuando los estudiantes presentan dificultad cognitiva para	EPA: Errores debidos a la comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes: EPA1: Error por falta de dominio en las operaciones (con fracciones, el signo "-" delante de un paréntesis, el uso	EPF: Errores debidos al uso inapropiado de fórmulas o procedimientos: EPF1: Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.	EPGS: Errores en el proceso de generalización y/o simbolización en el aprendizaje del álgebra:

cometi-dos)	- Letra evaluada - Letra no utilizada o ignorada - Letra como objeto - Letra como incógnita - Letra como número generalizado - Letra como variable	aceptar la falta de clausura.	inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento)	EPF2: errores relativos al mal uso de los recíprocos. EPF3: errores de cancelación. EPF4: errores debidos a falsas generalizacio-nes sobre números. EPF5: el uso de métodos informales por parte de los estudiantes.	EPGA: La generalización abusiva. EPSA: Errores en el proceso de simbolización en el aprendizaje del álgebra.

Nota: Esta tabla muestra la codificación de los errores elaborada para la discusión y el análisis de los resultados, la misma que se ha construido tomando en cuenta las clasificaciones de Martin Socas y Mercedes Palarea.

Capítulo 4: Análisis y discusión de los resultados

En este capítulo se presenta el análisis realizado, así como la discusión de los resultados obtenidos en la investigación. En la primera parte se ha revisado cada una de las respuestas de los estudiantes del segundo grado de educación secundaria al cuestionario aplicado, específicamente se han analizado los errores en los que incurren los estudiantes. Se presentan los resultados obtenidos en cada una de las preguntas del cuestionario en tablas, mostrando los errores (y su codificación respectiva) que se observan en los procedimientos de los estudiantes. Se muestra además un gráfico circular que brinda un panorama del porcentaje de incidencia de estos. Luego se realiza el análisis respectivo de los errores según las causas o dificultades que los producen y su relación con las capacidades de la competencia 24 que plantea el Currículo Nacional. Cabe señalar que las respuestas de los estudiantes se han codificado, de modo que al estudiante 1 se le ha denominado A1 y así sucesivamente. En la segunda parte se presenta una tabla que muestra la incidencia de los errores según la tipología vista y las capacidades de la competencia mencionada.

Los errores fueron clasificados según la tipología encontrada en las investigaciones de Mercedes Palarea y Martín Socas, que respaldan este trabajo y que constituyen el marco teórico de esta investigación**.** Los resultados del cuestionario y el análisis del procedimiento seguido por los estudiantes, permitieron reflexionar acerca de los aprendizajes logrados en los estudiantes, así como identificar las dificultades que presentan; y, en base a ello brindar algunas orientaciones que puedan ayudar a los docentes en el proceso de enseñanza del álgebra y así mejorar el aprendizaje de sus estudiantes.

4.1. Análisis de los resultados obtenidos en la investigación

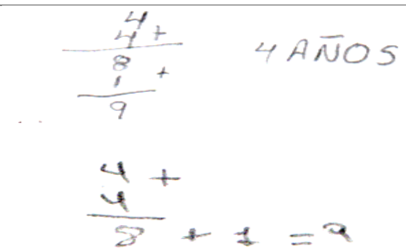
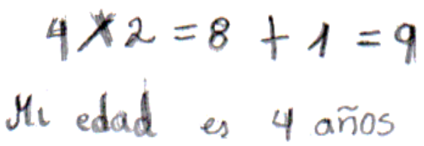
A continuación, se presentan tablas (desde la tabla 6 hasta la tabla 17) donde se visualizan los tipos de errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en cada una de las preguntas planteadas, y su relación con las capacidades del currículo. Se presenta el porcentaje de incidencia y se realiza el análisis de los mismos como se ha mencionado anteriormente.

Pregunta N° 01

Si al doble de mi edad le sumo 1 año resulta 9 ¿Cuál es mi edad?

Tabla 7:

Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 01 y su incidencia porcentual

Capacidades relacionadas de la competencia 24: C1 y C3			
Procedimientos	**Errores**	**Número de estudiantes**	**Porcentaje**
	ESS1: Errores de procedimiento EPF5: Uso de métodos informales por parte de los estudiantes	30	78,9%
	ESL1: Error en el sentido del signo igual EPS1: Error en el uso de los símbolos	5	13,2 %
Estudiantes que no respondieron la pregunta 01		03	7,9%
Total de estudiantes		38	100%

Gráficamente, se presentan los resultados en la siguiente figura:

Figura *2:*

Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 1

En esta pregunta se observa que el 78,9 % de estudiantes presentan errores de procedimiento según la clasificación de Socas (1989) y podrían tener su origen en una ausencia de significado, específicamente podrían guardar relación con el aprendizaje del sistema de representación. Con respecto a esto Castro y Castro (1997) mencionan que las notaciones simbólicas en el sistema de representación pueden resultar complejas para los estudiantes debido a los signos, las gráficas, figuras o iconos.

Se observa en la figura 3 que los estudiantes usan inadecuadamente procedimientos de resolución. Al respecto, Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1996) mencionan que estos errores son comunes en el aprendizaje del álgebra escolar debido a que la matemática tiene una notación que le es propia y que hace posible la aplicación formal de las reglas de la aritmética o del álgebra.

Según Palarea (1998) este tipo de error está relacionado también con el uso de métodos informales por parte de los estudiantes y se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números y se deben a que los estudiantes usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que utilizan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva.

Figura 3:

Respuesta a la pregunta 1, realizada por A5

Por otro lado, el 13,2% de estudiantes presenta errores en el uso de los símbolos, específicamente en el uso del signo igual. Según la clasificación de Palarea (1998) y como se observa en las figuras 4 y 5, estos estudiantes han realizado operaciones de adición con el resultado de una multiplicación, lo que evidencia que no tienen claro el significado de la igualdad.

Figura 4:

Respuesta a la pregunta 1, realizada por A6

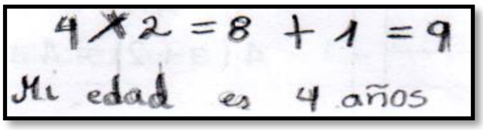
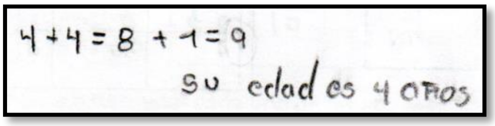


Figura 5:

Respuesta a la pregunta 1, realizada por A10



García (como se citó en Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1996) considera la igualdad como una relación que se expresa con el signo " = " , pero la limita al ámbito del álgebra y la aritmética al definirla como una expresión de equivalencia, que podría originar dificultades en el aprendizaje del álgebra ya que muchos de los estudiantes manejan el signo igual como un mandato operacional pues se les hace difícil aceptar el nuevo significado de la igualdad como un equilibrio que se mantiene para ambos miembros.

Según Socas (1989) estos errores se deben a las características propias del lenguaje algebraico y Palarea (1998) enfatiza que en las notaciones algebraicas y aritméticas el uso del signo igual tiene significados diferentes. En aritmética se utiliza con carácter unidireccional, a la izquierda se indica la operación y a la derecha se coloca el resultado; asimismo se suele utilizar para conectar el problema con el resultado numérico o para relacionar procesos que dan el mismo resultado. Sin embargo, en álgebra el signo igual tiene un carácter bidireccional (lo del primer miembro es igual al segundo).

Por otro lado Alonso et al. (1993) afirma que para que los estudiantes utilicen adecuadamente el signo igual es importante lograr antes el cambio conceptual manteniendo al mismo tiempo el que tenía en aritmética, ya que la notación utilizada en ambos casos es la misma.

Behr (citado en Alonso et al, 1993) sostiene que:

> "Existe una fuerte tendencia entre los niños a considerar que el signo "=" es solo aceptable en una expresión cuando le precede uno o más signos operativos (+, -, etc.). En efecto, algunos niños nos dicen que las respuestas deben ir detrás del "=". Observando en los niños una extrema rigidez en la escritura de expresiones numéricas, una insistencia en escribirlas en determinada forma y una tendencia a representar acciones (por ejemplo, añadir) más que a reflexionar, hacer juicios e inferir significados" (p.22).

Según la Competencia 24: "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio" (Currículo Nacional, 2016, p. 136) y sus capacidades: "Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas" y "Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales", los alumnos deben evidenciar el desarrollo de las mismas. Sin embargo, se observa en el desarrollo de esta pregunta que los estudiantes no evidencian las capacidades mencionadas, es decir no son capaces de establecer relaciones entre los datos y condiciones de situaciones, y transformarlos en expresiones numéricas que describan igualdades.

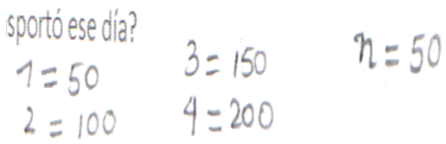
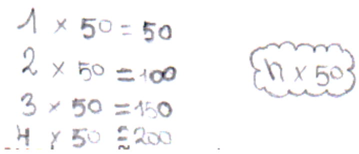
Pregunta N°02

Cierto conductor hizo "n" viajes en un día, transportando 50 trabajadores de una fábrica en cada viaje. ¿Cómo expresarías el número total de trabajadores que transportó ese día?

Tabla 8:

Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 02 y su incidencia porcentual

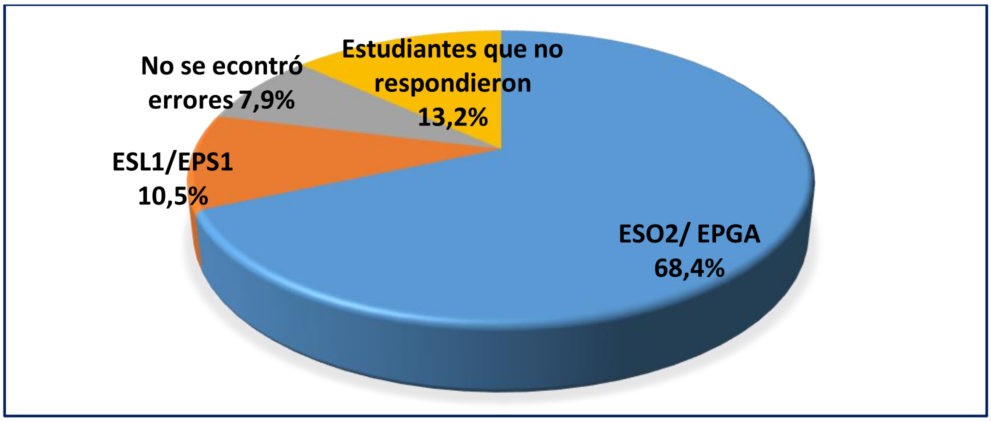
Capacidad relacionada de la competencia 24: C1, C2 y C3			
Procedimientos	**Errores encontrados**	**Número de estudiantes**	**%**
1x50=50 2x50=100 4x50=200 5x50 N=50	ESO2: Errores debido a los procesos de pensamiento matemático	26	68,4 %

	EPGA: Generalización abusiva		
	ESL1: Error en el sentido del signo igual en álgebra EPS1: Error en el uso de los símbolos (signo igual)	4	10,5 %
No se encontró errores 		3	7,9%
Estudiantes que no respondieron la pregunta		5	13,2%
Total de estudiantes		38	100%

Gráficamente, se presentan los resultados en la figura:

Figura 6:

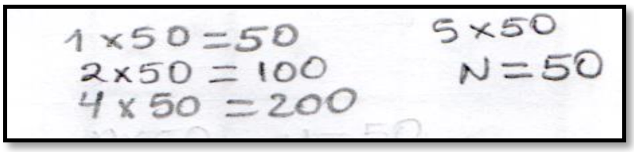
Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 2



Se observa que el 68,4% de los estudiantes presentan errores en el proceso de generalización, según la clasificación de Palarea (1998). Se observa en la figura 07 que los estudiantes siguen, en principio, un proceso adecuado, pero finalmente no generalizan la situación propuesta, generando confusión que se concreta en una respuesta errónea, específicamente en una generalización abusiva como se aprecia en el desarrollo realizado por el estudiante A35:

Figura 7:

Respuesta de la pregunta 2, realizada por A35.



Se observa que los estudiantes confunden la variable con un dato del problema. Al respecto Palarea (1998) menciona que la "generalización abusiva", se presenta cuando los estudiantes al intentar encontrar el término general lo identifican con un dato del problema, lo que produce interferencia de alguna situación que hayan visto anteriormente.

La generalización está fuertemente ligada al proceso de abstracción y de ahí se desprenden algunas de sus dificultades. Según Pérez (2005) este proceso conlleva al registro de relaciones y expresiones en el lenguaje algebraico, el cual puede generar ambigüedades debido a las abstracciones o formulaciones que las personas pueden hacer de un fenómeno determinado, además de expresar simbólicamente lo general, pues afirma que lo que proporciona en muchos casos mayor potencia al lenguaje algebraico con respecto al natural es precisamente, la posibilidad de expresar lo general utilizando los símbolos.

Socas (1996) menciona que, para entender la generalización de relaciones y procesos, se requiere que los conceptos sean asimilados con anterioridad dentro del contexto aritmético para evitar estos problemas que muchas veces se quedan sin corregir en la aritmética y que de alguna manera repercuten en el aprendizaje del álgebra concretándose en diversos errores como en esta situación.

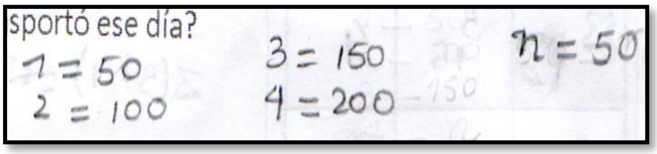
Al respecto Collis (citado en Alonso et al, 1993) plantea que los estudiantes antes de llegar a generalizar (al pensamiento formal) trabajan determinados niveles, e identifica tres: los de nivel más bajo tienden a sustituir un número concreto por una letra, como se evidencia en estos estudiantes que asignaron el valor de 50 a la variable "n". En el segundo nivel se encuentran los que intentan con varios números utilizando un método de ensayo y error y por último los estudiantes que ya han obtenido el concepto de número generalizado se encontrarían en el tercer nivel. Según los resultados se observa que el 7,9% de los estudiantes logra generalizar correctamente. Por otro lado, Kucheman (citado en Alonso et al, 1993) sostiene que cuando el estudiante rechaza la letra es porque desea eliminar la incertidumbre que le produce trabajar con algo desconocido y le asigna a la letra un valor que elige de forma personal, dándole la utilidad de letra evaluada, lo cual representa una dificultad al momento de realizar la correcta interpretación de las letras.

Por otro lado, según la clasificación de Socas (1989) este tipo de errores puede deberse a los procesos de pensamiento matemático y su relación con la complejidad de los objetos matemáticos, como se puede observar en la figura 07 donde se evidencia que los estudiantes no han asimilado el concepto de variable. Al respecto Socas (1996) menciona que el uso del concepto de variables en matemáticas es una práctica común; sin embargo, los alumnos más aptos son capaces de cometer el mayor de los errores. Estas dificultades están relacionadas con la comprensión del concepto de variable en los procesos de pensamiento matemático, pues intentar hallar el término general en una sucesión de figuras o números constituye una manera de abordarla.

Por otro lado, el 10,5% de los estudiantes, presenta errores en el sentido del signo igual en álgebra (según la clasificación de Socas), lo que también se concreta en un error en el uso de los símbolos (según la clasificación de Palarea), como se mencionó anteriormente los estudiantes manejan el signo igual como un mandato operacional pues se les hace difícil aceptar el nuevo significado de la igualdad como un equilibrio que se mantiene para ambos miembros, tal como se aprecia en la fugura 08:

Figura 8:

Respuesta de la pregunta 2, realizada por A16.



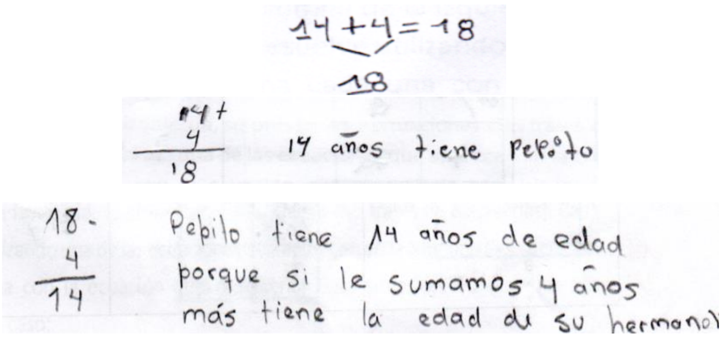
Observando estos procedimientos se puede afirmar que la capacidad 1, 2 y 3 de la competencia 24 planteada en el Currículo Nacional, no se evidencian en el desarrollo de la situación planteada, ya que los estudiantes no son capaces de seleccionar, adaptar, combinar o crear procedimientos, estrategias para determinar expresiones (generalizar) que puedan representar ciertas situaciones, no interpretan regularidades, no traducen a patrones numéricos, lo que les impide expresar lo que comprenden sobre las relaciones algebraicas, por ende no pueden plantear estrategias, específicamente sobre las propiedades que sustentan la igualdad.

Pregunta N° 03

La edad de Pepito más cuatro años es la edad de su hermano mayor. Si el hermano mayor de Pepito tiene 18 años. ¿Cuál es la edad de Pepito?

Tabla 9:

Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 03 y su incidencia porcentual

Capacidades relacionadas de la competencia 24: C1 y C3			
Procedimientos	**Errores encontrados**	**Número de estudiantes**	**%**
	No se observan errores. Se destaca que los estudiantes resolvieron por tanteo.	36	94,7%
Estudiantes que no respondieron la pregunta		2	5,3%
Total de estudiantes		38	100%

Gráficamente, se presentan los resultados en la figura:

Figura 9:

Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 3

En el desarrollo de esta pregunta se observa que el 94,7% de los estudiantes resolvieron la situación por tanteo, es decir no ha utilizado variables y tampoco han planteado ecuaciones. Estos alumnos han brindado una respuesta correcta realizando operaciones de adición y sustracción, tal como se observa en las figuras 10 y 11.

Figura 10:

Respuesta de la pregunta 3, realizada por A14

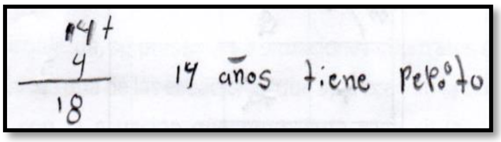
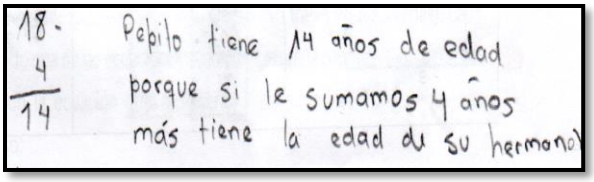


Figura 11:

Respuesta de la pregunta 3, realizada por A7



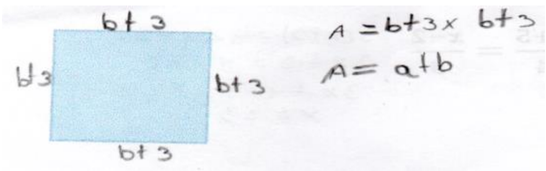
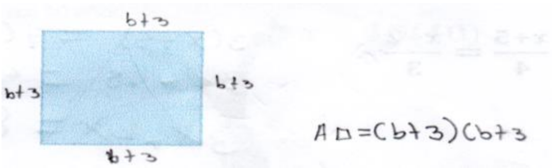
Se observa que no son capaces de utilizar expresiones algebraicas a partir de los datos proporcionados; por lo tanto, no se evidencia en los estudiantes las capacidades 1 y 3. Se esperaba que los estudiantes resolvieran el problema e interpretaran cambios constantes o regularidades entre magnitudes, valores o entre expresiones; traduciéndolos a patrones numéricos, seleccionen, empleen y combinen recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones, que son desempeños de la competencia 24 que plantea el Currículo Nacional.

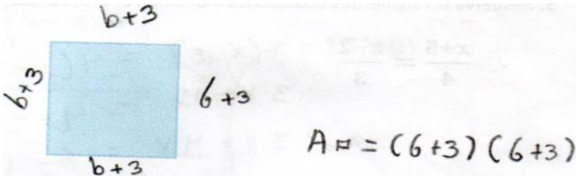
Pregunta N° 04

El siguiente cuadrado representa un terreno de cultivo de lado b ¿Cómo podrías expresar el área del terreno?

Tabla 10:

Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 04 y su incidencia porcentual

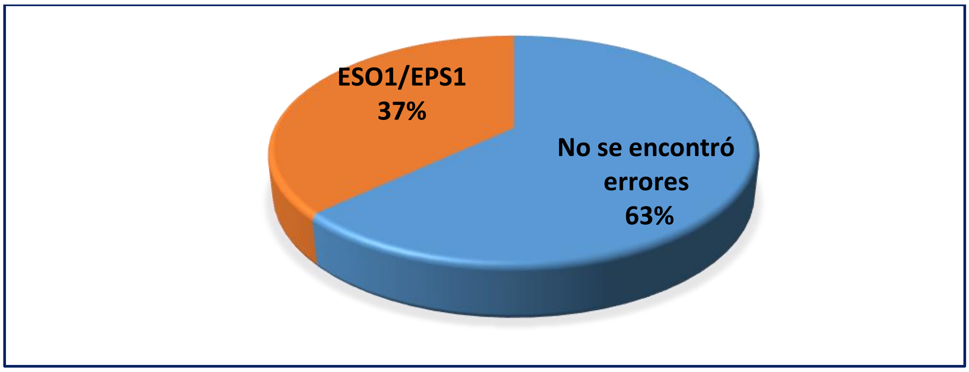
Capacidades relacionadas de la competencia 24: C1, C2 y C3			
Procedimientos	**Errores encontrados**	**Número de estudiantes**	**%**
 	ESO1: Errores debidos a la complejidad de los objetos matemáticos EPS1: Error en el uso de los símbolos	14	37%

No se encontró errores	24	63%
		
Total de estudiantes	38	100%

Gráficamente, se presentan los resultados en la figura:

Figura 12:

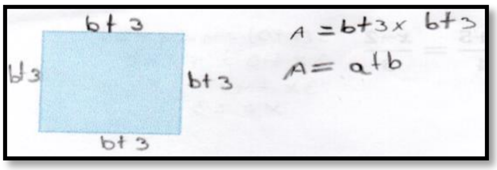
Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 4



Se aprecia que el 37% de los estudiantes presenta errores debidos a los procesos de pensamiento matemático, según la clasificación de Socas (1989), como se aprecia en la respuesta dada por un estudiante a esta pregunta:

Figura 13:

Respuesta de la pregunta 4, realizada por A20



En la figura 13 se observa que el estudiante está trabajando con la variable b, relaciona el lado del cuadrado adecuadamente con $b + 3$, pero luego expresa que el área es igual a: $a + b$, confundiendo las operaciones y generando error en sus respuestas. Según Socas (1989) estos errores tienen su origen en un obstáculo que podría ser epistemológico, cognitivo o didáctico.

Respecto a la complejidad de los objetos matemáticos, las dificultades encuentran dos estatus: operacional y conceptual, el primero de carácter dinámico donde los objetos son vistos como un proceso, y en el segundo de carácter estático donde los objetos son vistos como entidad conceptual (Castellanos y Obando, 2009), tal como se evidencia en la figura 13 donde los estudiantes presentan dificultades para trabajar operaciones que involucran variables, porque quizá desconocen el papel que desempeñan estas en la situación planteada.

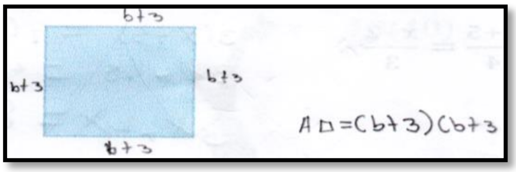
Según la clasificación de Palarea (1998) estos errores también podrían deberse al significado de los símbolos y las letras, ya que los estudiantes suelen confundir los símbolos que utilizan en álgebra porque los habían utilizado antes en aritmética con su propio significado produciéndose un conflicto.

Al respecto Castellanos y Obando (2009) mencionan que hay que tener en cuenta que las letras también aparecen en aritmética, pero de forma diferente, por ejemplo, las letras "m" y "g" pueden usarse en aritmética para representar metros y gramos, respectivamente; más que para representar el número de metros o el número de gramos. Posiblemente según Rodríguez y Torrealba (2017) también podría presentarse al estudiante este tipo de errores debidos a ciertos conflictos, dándose el caso de que si el estudiante ya ha utilizado letras en la aritmética para representar unidades de medida y aplicar fórmulas, entonces los diversos significados como variables, como incógnitas que tienen la letra en el ámbito algebraico, no se comprenden de forma natural ya que dicha comprensión es obstaculizada por los conocimientos aritméticos previos.

Se observa también que estos estudiantes presentan errores en el uso de paréntesis como se observa en la figura 14. Estos según Socas (1989) tienen su origen en la aritmética como errores que no fueron abordados y que se trasladan luego en el aprendizaje del álgebra escolar.

Figura 14:

Respuesta de la pregunta 4, realizada por A1

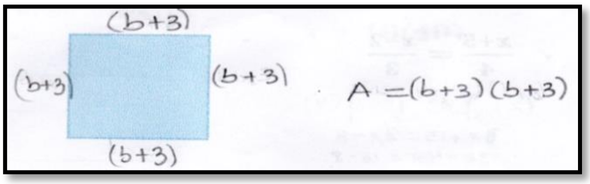


Para Palarea (1998) estos errores constituyen errores debido al significado de los símbolos; los estudiantes presentan diversas dificultades para utilizar los símbolos adecuados, y que aparecen a menudo: traducir una expresión con símbolos algebraicos, expresar las relaciones cuantitativas que se dan en el problema y, por otro lado, interpretar la situación. Si no se superan estas dificultades se podrían concretar en errores como se observa, sea por los convenios de notación (por ejemplo, el carácter y/o significado del signo igual) o la utilización de los paréntesis, etc.

Se aprecia que el 63% de los estudiantes saben calcular el área de un cuadrado y son capaces de utilizar la variable para modelar la situación con el gráfico correspondiente, lo cual constituye un logro esperado en el desarrollo de la competencia "Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas” que significa transformar los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica (p. 136). Tal como se observa en la figura 15.

Figura 15:

Respuesta de la pregunta 4, realizada por A18



Finalmente, según los resultados observados se evidencia que el 37% de los estudiantes no lograron traducir expresiones a patrones numéricos y gráficos, lo cual impide que expresen y usen estrategias sobre lo que comprenden acerca de las relaciones y propiedades algebraicas, capacidades necesarias para el desarrollo de la competencia 24 que plantea el Currículo Nacional.

Pregunta N°05

¿Cómo escribirías con símbolos o letras las siguientes expresiones?

a) Un número cualquiera:

b) La suma de dos números:

c) La suma de dos números consecutivos:

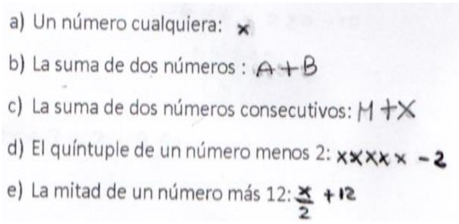
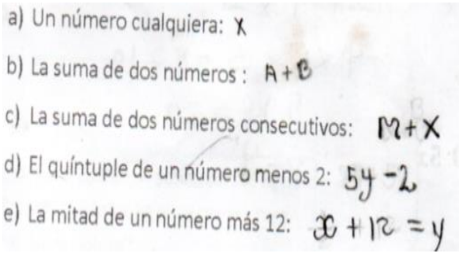
d) El quíntuple de un número menos 2:

e) La mitad de un número más 12:

Tabla 11:

Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 05 y su incidencia porcentual

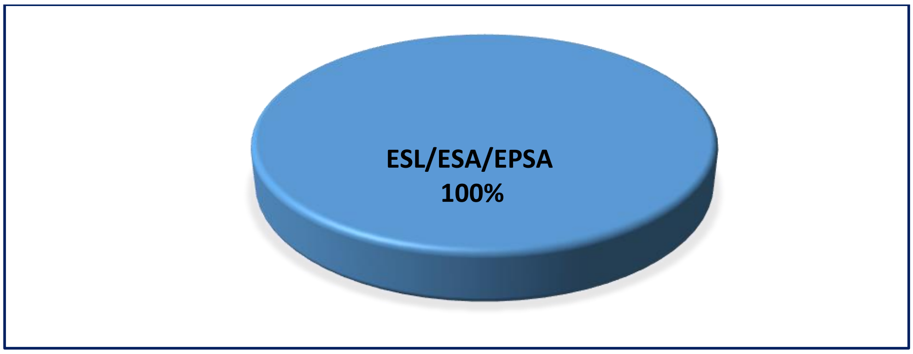
Capacidad relacionada de la competencia 24: C1			
Procedimientos	**Errores encontrados**	**Número de estudiantes**	**%**

		38	100 %
 a) Un número cualquiera: x b) La suma de dos números : A+B c) La suma de dos números consecutivos: M+X d) El quíntuple de un número menos 2: xxxxx -2 e) La mitad de un número más 12: x/2 +12  a) Un número cualquiera: X b) La suma de dos números : A+B c) La suma de dos números consecutivos: M+X d) El quíntuple de un número menos 2: 5y -2 e) La mitad de un número más 12: x + 12 = y	ESL: Errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico ESA: Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética EPSA: Errores en el proceso de simbolización		

Gráficamente, se presentan los resultados en la figura:

Figura 16:

Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 5



En esa pregunta se observa que los estudiantes son capaces de representar algebraicamente algunas expresiones que pueden resultarles “sencillas”, es decir utilizan variables para representar expresiones como un *número cualquiera, la suma de dos números*. Sin embargo, no son capaces de representar *la suma de dos números consecutivos*, el quíntuple de un número menos 2, la mitad de un número más 12. Es decir, expresiones “un poco más complejas”, que implican una condición más y que requieren ser “más pensadas”. Generalmente estos errores podrían deberse a las características propias del lenguaje algebraico; según Socas (1989) éstos se manifiestan cuando los estudiantes tienen dificultades para interpretar los enunciados a expresiones propias del álgebra. Alonso et al. (1993) menciona también que estas dificultades podrían deberse a la estructura y a la interpretación de las propias expresiones algebraicas; trasladar el significado del enunciado al nuevo lenguaje (algebraico) es una tarea distinta que requiere entrenamiento específico.

Por otro lado, si se observan las figuras 17 (ítem d y e), 18 (ítem e) y 19 (ítem e) se aprecia que los estudiantes presentan una incorrecta interpretación de “el quíntuple de un número” y la “mitad de un número”. Estos errores se presentan durante el estudio del álgebra, evidentemente se derivan de la aritmética, es decir estos conceptos matemáticos no fueron comprendidos previamente.

Palarea (1998) menciona también que estos errores se presentan en el proceso de simbolización en álgebra y que se deben a las características propias del lenguaje algebraico. Sugiere que es conveniente plantear ejercicios que hagan pasar de un registro a otro, de una representación a otra, con el fin de estimular la actividad del alumno. Esto aumentará sus capacidades para abordar dificultades que puedan presentarse con la interpretación de las expresiones, que no sean simples ejercicios de aplicación, sino auténticas actividades, en el mejor y más amplio sentido de la palabra.

Figura 17

Respuesta de la pregunta 5, realizada por A2

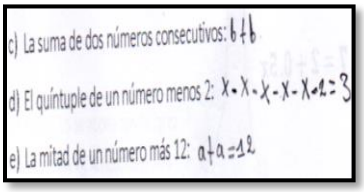


Figura 18

Respuesta de la pregunta 5, realizada por A15

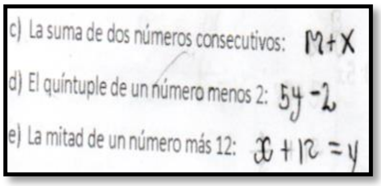
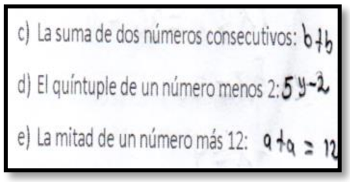


Figura 19

Respuesta de la pregunta 5, realizada por A1



Cáceres et al. (2015) refiere que las tareas o actividades auténticas tienen una alta conexión con la realidad y son importantes para introducir un tema o evaluar los conocimientos adquiridos, es decir ayudan a los estudiantes a movilizar su conocimiento sobre un tema determinado, ya que implica que el estudiante ponga en juego su conocimiento sobre conceptos y procedimientos matemáticos, activando sus competencias, provocando de esta forma la reflexión sobre el uso de las matemáticas.

La representación con expresiones algebraicas constituye el proceso de simbolización en el aprendizaje del álgebra y a menudo resulta difícil para los estudiantes ya que muchas veces no se comprende el significado de los símbolos porque no se conectan con las ideas y objetos que representan. Alonso et al. (1993) menciona que para que los símbolos lleguen a tener significado es importante que las letras tengan un referente concreto, que sean abstracciones de algo que se pueda saber qué es, refiriendo que el proceso para simbolizar una situación requiere seguir un camino en el que el primer paso es entender la situación y el último, expresarla por escrito con los símbolos apropiados. Al respecto Alonso et al. (1993) sugiere unos pasos a tener en cuenta en el aprendizaje de la utilización de los símbolos algebraicos:

- Entender
- Expresar
- Expresar por escrito

- Expresar por escrito con símbolos
- Expresar por escrito con los símbolos adecuados

Para que todos estos pasos propuestos en el aprendizaje de la utilización de los símbolos algebraicos se lleguen a dar hay que incluir durante el proceso de aprendizaje discusiones verbales y actividades con materiales concretos. Los símbolos escritos se deben introducir como ayuda para comprender mejor las relaciones; y la escritura con símbolos se debe justificar como una forma más clara y simplificada de escribir y calcular (Palarea, 1998).

Haciendo referencia a la competencia 24 “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” y a su capacidad: “Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas”, ésta no se evidencia en el desarrollo ya que los estudiantes no son capaces de transformar los datos a expresiones utilizando lenguaje algebraico.

Pregunta N° 06

Complete las siguientes igualdades colocando el número correcto en el rectángulo:

a) $\boxed{} - 8 = 10$ **c)** $\boxed{}(5) = 150$

b) $\boxed{} - 25 = 41$ **d)** $\boxed{} + 7 = \boxed{} + \boxed{}$

Tabla 12:

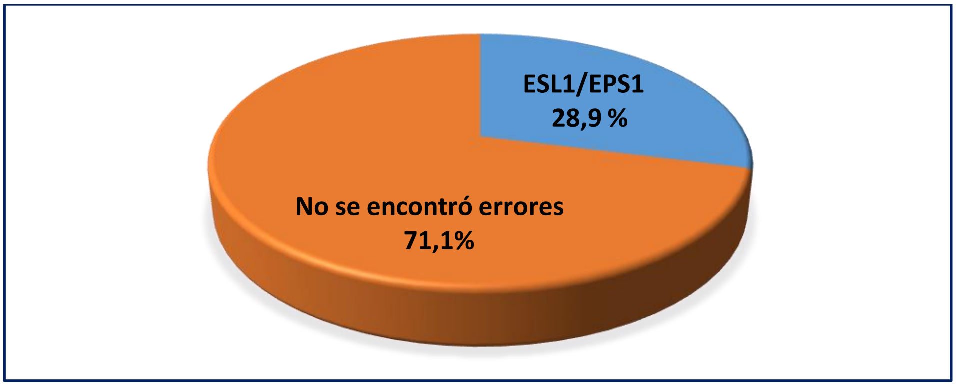
Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 06 y su incidencia porcentual

Capacidad relacionada de la competencia 24: C2			
Procedimientos	**Errores encontrados**	**Número de estudiantes**	**%**
d) $\boxed{8} + 7 = \boxed{15} + \boxed{10}$ d) $\boxed{5} + 7 = \boxed{12} + \boxed{3}$	ESL1: Error en el sentido del signo igual en álgebra EPS1: Error en el uso de los símbolos (signo igual)	11	28,9%
No se encontró errores		27	71,1%
Total		38	100%

Gráficamente, se presentan los resultados en la figura:

Figura 20:

Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 6



El 28,9% de los estudiantes tuvo dificultades al verificar las equivalencias, evidenciando errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico, especificamente en el sentido del signo igual. Se observa que los estudiantes colocan valores que no satisfacen la igualdad, como se aprecia en las figuras 21 y 22:

Figura 21

Respuesta de la pregunta 6, realizada por A2

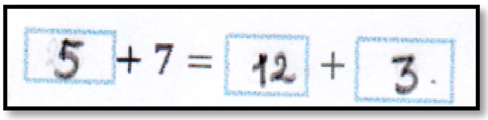
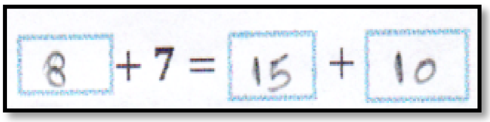


Figura 22

Respuesta de la pregunta 6, realizada por A9



Como se observa en la pregunta 1 del cuestionario, los estudiantes arrastran este mismo error en el desarrollo de estas igualdades porque no tienen claro el significado del signo igual, tal como se evidenció anteriormente. La principal causa radica en el desconocimiento del significado del signo igual. Con respecto a esta situacion cabe mencionar que Palarea (1998) considera que estos errores son debidos al significado que el estudiante atribuye a los símbolos, y enfatiza que esta percepción puede deberse a la incapacidad de los alumnos para mantener operaciones indicadas ya que necesitan que dos números que están conectados mediante una operación se reemplacen inmediatamente por el mismo resultado. Los alumnos no pueden mantener operaciones sin realizar, esto ocurre cuando ven expresiones como proposiciones que son, de alguna manera incompletas. Para superar esto hace falta que se relacione el significado de las operaciones con las acciones realizadas sobre las cantidades ya que los alumnos no tienen claro estas relaciones y por eso es necesario practicar con ellos la conexión que existe entre una operación y la acción que se realiza sobre ellos.

.

Finalmente se concluye que el 28,9% de los estudiantes no evidencia la capacidad: “Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas” que es considerada para el desarrollo de la competencia 24 planteada en el Currículo Nacional 2016.

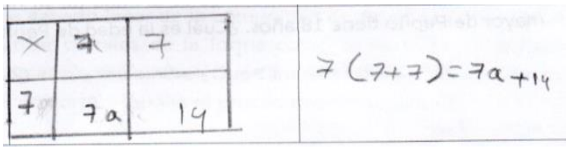
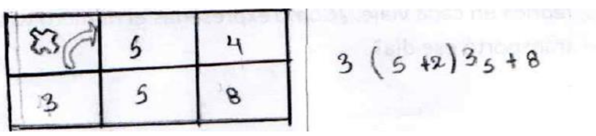
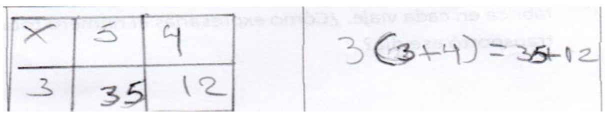
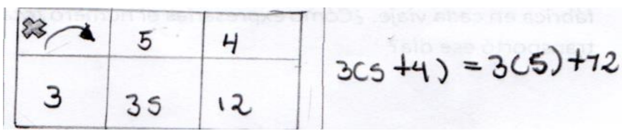
Pregunta N° 07

En el siguiente ejemplo se muestran distintas situaciones del área de un rectángulo mediante el modelo geométrico y la expresión algebraica que lo representa. Observa el ejemplo y completa los recuadros que falten.

Modelo geométrico	Visualización simplificada	Expresión algebraica
4; a, 2	× | a | 2 ; 4 | $4a$ | 8	$4\ (a\ +2)\ =4\ a+8$
3; 5, 4		
7; a		

Tabla 13:

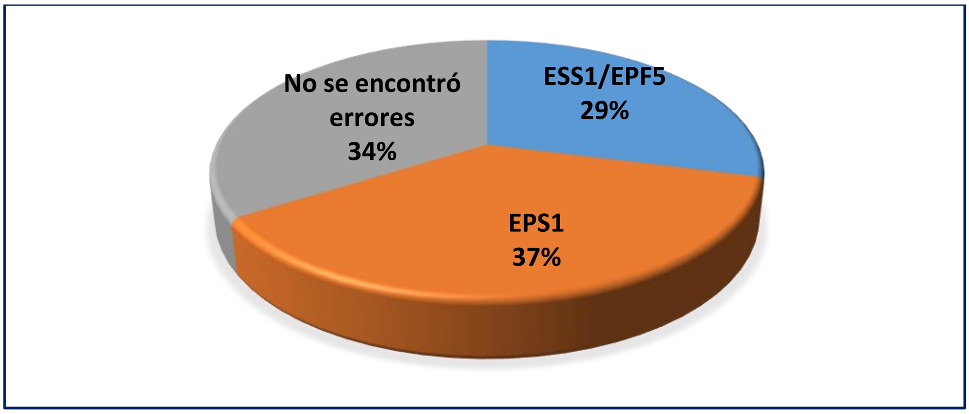
Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 07 y su incidencia porcentual

Capacidad relacionada de la competencia 24: C3			
Procedimientos	**Errores encontrados**	**Número de estudiantes**	**%**
	ESS1: Errores de procedimiento	11	29%
  	EPF5: Errores debidos al uso de métodos informales por partes de los estudiantes. EPS1: Error en el uso de los símbolos	14	37%
No se encontró errores		13	34
Total de estudiantes		38	100%

Gráficamente, se presentan los resultados en la figura:

Figura 23: *Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 7*

Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 7



En esta situación se esperaba que los estudiantes observando el modelo geométrico fueran capaces de visualizarlos simplificadamente y poder así formular la expresión algebraica que represente el área de la figura. Sin embargo, el 29% de los estudiantes presenta errores de procedimiento como se observa en las figuras 24, 25 y 26:

Figura 24

Respuesta de la pregunta 7, realizada por A3

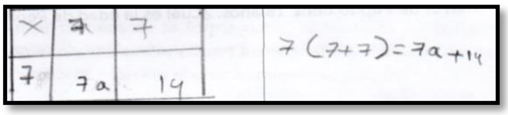


Figura 25

Respuesta de la pregunta 7, realizada por A1

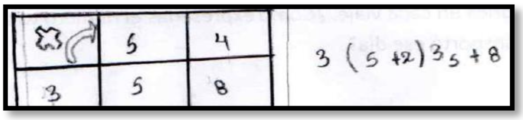


Figura 26

Respuesta de la pregunta 7, realizada por A18

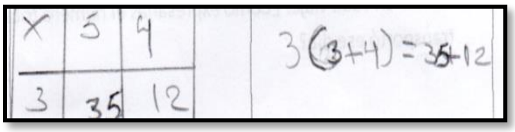
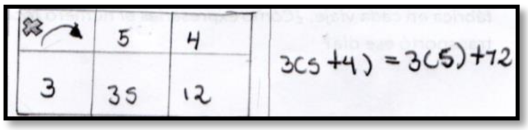


Figura 27

Respuesta de la pregunta 7, realizada por A15



Según Socas (1989) los errores de procedimiento tienen su origen en ausencia de significado y están relacionados con las distintas etapas de aprendizaje de un sistema de representación: semiótica, estructural y autónoma. Se observa por ejemplo que en la figura 26 los estudiantes confunden el producto de 3 y 5 con el número 35, lo que puede interpretarse también según Palarea (1998) como un error de notación, o de concatenación de dos números (en aritmética la yuxtaposición de dos números significa suma, en álgebra significa multiplicación).

Al respecto Palarea (1998) menciona que estos errores podrían deberse al siguiente obstáculo cognitivo:

- Necesidad de una referencia numérica: representar operaciones aritméticas puede ser una tarea complicada ya que el estudiante no reconoce las letras como representación de números, pues no concibe que se puedan trabajar las letras en operaciones aritméticas. Estas dificultades finalmente conllevan también a errores de notación como además se observa en las figuras 25, 26 y 27.

Por otro lado, se observa que los estudiantes no comprenden el modelo geométrico porque desconocen el área del rectángulo. Butto y Rojano (2004) plantean que la introducción al álgebra través de la geometría constituye una alternativa didáctica que bien podría fortalecer el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico ya que el uso de otros sistemas de representación como el gráfico permite visualizar ciertos procesos de solución de problemas que involucran ecuaciones. También resalta que el conocimiento algebraico es esencial por su aporte a la comunicación y expresión de la matemática, a la construcción de modelos y a la estructuración de formas de razonamiento.

Pregunta N° 08

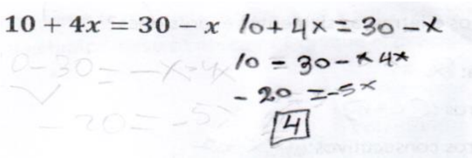
Resuelva las siguientes ecuaciones indicando el procedimiento seguido:

- ✓ $\frac{x+5}{4} = \frac{x-2}{3}$
- ✓ $10 + 4x = 30 - x$
- ✓ $-3x + 7 = 2 + 0.5x$

Tabla 14:

Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 08 y su incidencia porcentual

Capacidades relacionadas de la competencia 24: C2 y C3			
Procedimientos	**Errores encontrados**	**Número de estudiantes**	**%**
$\frac{x+5}{4} = \frac{x-2}{3}$ $3(x+5) = 4(x-2)$ $3x+15 = 4x-8$ $3x-4x = -8-15$ $x = -23$ $3(x+5) = 4(x-2)$ $3x+15 = 4x-8$ $3x-2x = 8+15$ $x = 23$	EPS1: Errores en el uso de los símbolos	30	79%



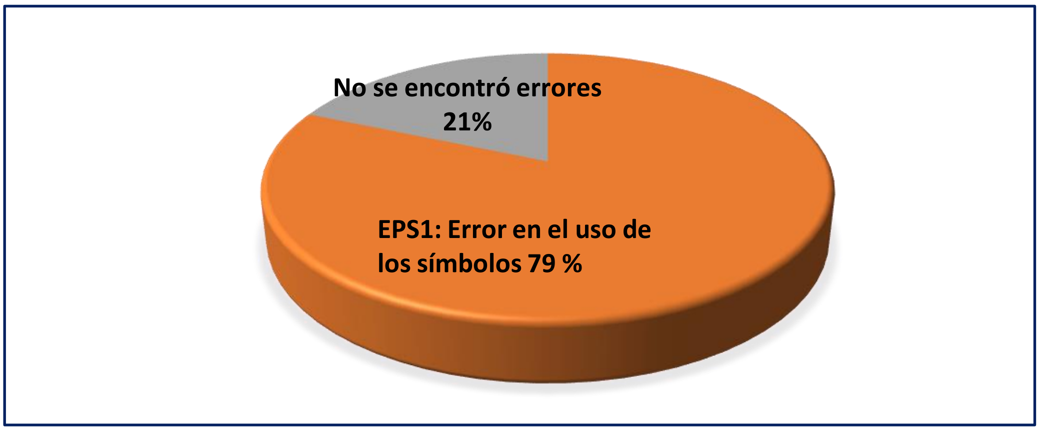
No se encontró errores	8	21%
Total de estudiantes	38	100%

En esta pregunta se visualiza que el 73,7% de los estudiantes presentan errores en el uso de los signos, específicamente en los signos “ + ” y “ - ”, y otros presentan errores en el signo igual Respecto a la primera situación, Socas (1996) señala que muchos estudiantes utilizan con frecuencia métodos informales propios con los signos, y éstos generan dificultades en la resolución de ecuaciones, como se aprecia en las figuras 29 y 30. Estas situaciones pueden aparecer por ejemplo cuando los estudiantes no dominan las operaciones con fracciones, el signo “ – “ delante de un paréntesis, el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento. Este tipo de errores podrían tener su origen en la aritmética, es decir es probable que los estudiantes no sepan operar con números enteros, por ello se afirma que estos errores se deben a dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores (Godino et al., 2003).

Gráficamente se presentan los resultados en la siguiente figura:

Figura 28:

Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 8



Socas (1996) resalta que el objetivo no es hacer escribir a los estudiantes la fórmula o regla de procedimiento adecuada, es importante hacerlos enfrentarse con la contradicción y eliminar sus falsos conceptos de forma que estos no vuelvan a aparecer. Los errores que presentan estos estudiantes son ejemplos que ponen de manifiesto las dificultades que presentan en el uso de los signos (“+”, “–” e “=”), en el concepto de ecuación y solución, como en el proceso de resolución.

Cid y Bolea (2010), manifiestan que para un mejor manejo de los números negativos en un entorno algebraico, se deben relacionar contenidos aritméticos y geométricos en la construcción de un pensamiento algebraico, sugiriendo que las posiciones en la recta y los desplazamientos a derecha e izquierda, afianza el uso de los signos. Una vez que los escolares se han familiarizado con el uso de los signos, se podría iniciar el estudio del álgebra.

Figura 29

Respuesta de la pregunta 8, realizada por A8

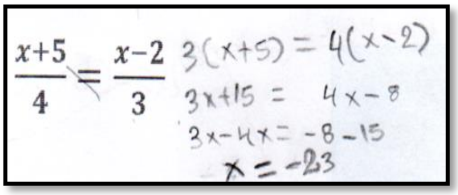
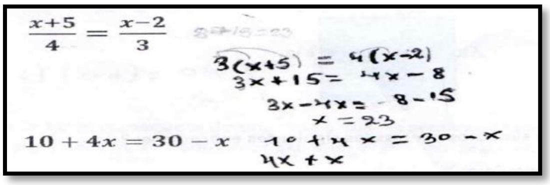


Figura 30

Respuesta de la pregunta 8, realizada por A11



Se observa también que hay estudiantes que presentan errores en el uso del signo igual. Estos estudiantes no asimilan la situación de equilibrio que representa el signo y según Socas (1996) este problema pone de manifiesto la distinción entre la estructura sistémica que tienen que ver con las operaciones y relaciones de las expresiones algebraicas que hay en ambos lados de la igualdad. Al respecto Godino y Font (2003) manifiestan que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes en el uso de las variables en la resolución de las ecuaciones provienen de las interpretaciones que hacen de la igualdad y que además suelen realizar diversas interpretaciones del signo = y de las ecuaciones. Por ejemplo, los alumnos piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta; la igualdad, 2 + 3 = 5, se interpreta como "2 más 3 da como resultado 5", no como la equivalencia entre las expresiones "2+3" y "5".

Según Olmedo et al. (2015) los errores que provienen de la utilización del signo igual se suelen presentar porque los estudiantes resuelven las ecuaciones sin tener en cuenta el significado de equivalencia y en consecuencia descuidan la relación de simetría entre los miembros de la igualdad, pues consideran a los objetos matemáticos como las operaciones, las letras de manera aritmetizada. También menciona que en las ecuaciones los estudiantes suelen presentar dificultades para comprender el método de resolución por cambio de variable, no concibe que expresiones con varios términos puedan ser expresados como uno solo, no conciben que la estructura superficial es la misma.

Según los resultados, se evidencia que los estudiantes no están desarrollando la competencia 24, ya que no evidencian las capacidades “Comunica su relación sobre las relaciones algebraicas” y “Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales”.

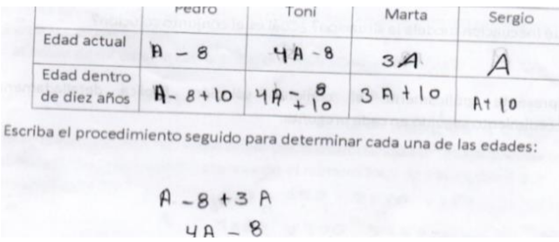
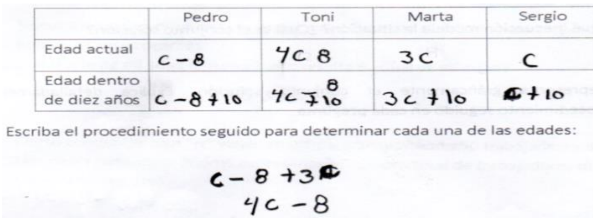
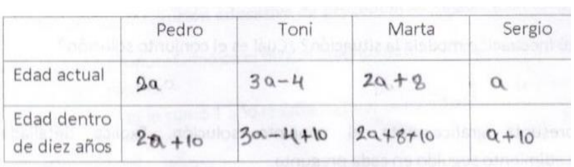
Pregunta N° 09

Completa el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene el doble de edad que Sergio, Marta tiene 8 años más que Pedro, y Antoni tiene 12 años menos que la suma de las edades de Marta y Sergio. Escriba el procedimiento seguido para determinar cada una de las edades.

Datos	Pedro	Antoni	Marta	Sergio
Edad actual				
Edad dentro de diez años				

Tabla 15:

Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 09 y su incidencia porcentual

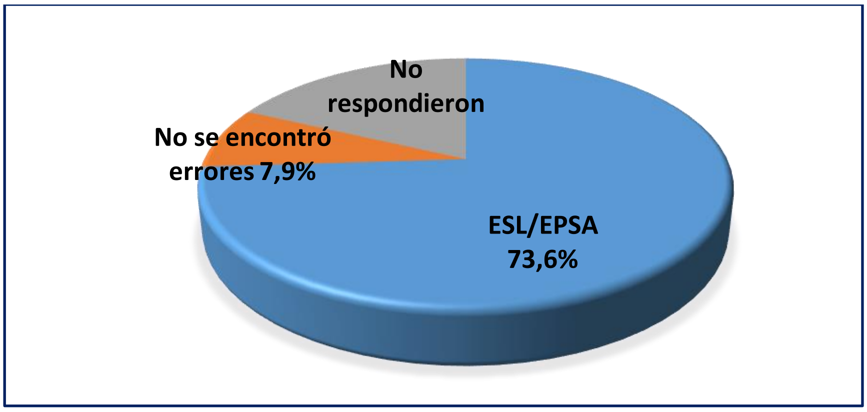
<table>
<tr><th colspan="4">Capacidades relacionadas de la competencia 24: C1, C2 y C4</th></tr>
<tr><th>Procedimientos</th><th>Errores encontrados</th><th>Número de estudiantes</th><th>%</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th></th><th>Pedro</th><th>Toni</th><th>Marta</th><th>Sergio</th></tr>
<tr><td>Edad actual</td><td>A − 8</td><td>4A − 8</td><td>3A</td><td>A</td></tr>
<tr><td>Edad dentro de diez años</td><td>A − 8 + 10</td><td>4A − 8 + 10</td><td>3A + 10</td><td>A + 10</td></tr>
</table>
Escriba el procedimiento seguido para determinar cada una de las edades:
A − 8 + 3 A
4A − 8

<table>
<tr><th></th><th>Pedro</th><th>Toni</th><th>Marta</th><th>Sergio</th></tr>
<tr><td>Edad actual</td><td>c − 8</td><td>4c 8</td><td>3c</td><td>c</td></tr>
<tr><td>Edad dentro de diez años</td><td>c − 8 + 10</td><td>4c 8 + 10</td><td>3c + 10</td><td>c + 10</td></tr>
</table>
Escriba el procedimiento seguido para determinar cada una de las edades:
c − 8 + 3c
4c − 8</td>
<td>ESL: Errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico
EPSA: Errores en el proceso de simbolización en el aprendizaje del álgebra</td><td>28</td><td>73,7%</td></tr>
<tr><td>No se encontró errores

<table>
<tr><th></th><th>Pedro</th><th>Toni</th><th>Marta</th><th>Sergio</th></tr>
<tr><td>Edad actual</td><td>2a</td><td>3a−4</td><td>2a+8</td><td>a</td></tr>
<tr><td>Edad dentro de diez años</td><td>2a+10</td><td>3a−4+10</td><td>2a+8+10</td><td>a+10</td></tr>
</table></td><td></td><td>3</td><td>7,9%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estudiantes que no respondieron a la pregunta</td><td>7</td><td>18,4%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total de estudiantes</td><td>37</td><td>100%</td></tr>
</table>

Como se observa en la tabla 9, el 73,6% de los estudiantes presentan dificultades para traducir del lenguaje natural al algebraico. Estas dificultades se manifiestan en errores, que según Socas (1989) son debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Cuando se tiene este tipo de errores, el origen es doble pues la traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico no se realiza de una manera automática; por un lado, las dificultades tienen su origen en la estructura e interpretación de las propias expresiones algebraicas, y por otro, encontrar la expresión simbólica adecuada para trasladar el significado del enunciado al nuevo lenguaje es una tarea que puede resultar difícil como en cualquier lenguaje; por ello pueden surgir dificultades, debidas a las características del propio lenguaje o al hacer traducciones entre lenguajes diferentes (Ruano, Socas y Palarea, 2003).

Gráficamente se presentan los resultados en la siguiente figura:

Figura 31:

Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 9



Según Palarea, estos errores suelen presentarse en el proceso de simbolización en el aprendizaje del álgebra ya que los estudiantes pueden presentar dificultades para utilizar los símbolos adecuados o para traducir sus ideas al lenguaje del álgebra; y según Alonso y otros (1993) estas dificultades se podrían concretar en errores diversos ya sea por los convenios de notación, la utilización de los paréntesis, etc. Al respecto Castro y Castro (1997) destacan que en el uso de símbolos es necesario tener en cuenta las notaciones simbólicas como sistemas de representación ya que pueden ser de gran complejidad para los estudiantes, tal como se ha visto en la situación planteada.

Alonso et al. (1993) mencionan la importancia de la traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico y recalca además que este no se realiza de una manera automática. En otras palabras, no tienen su origen únicamente en dificultades de comprensión de los enunciados, sino que tienen entidad propia y son debidos al uso específico, que en estos procesos se hace, del lenguaje algebraico.

Al respecto Olmedo et al. (2015) destaca que la complejidad del lenguaje algebraico, que hace que un mismo objeto tenga una variedad de significados provoca confusiones que demoran el aprendizaje, la comprensión y la concepción del álgebra como estructura, pues aprender y comprender álgebra no significa operar de la misma manera que lo hacían en la aritmética, sino que ahora deben interpretar los símbolos, no sólo desde lo procedimental sino desde la interpretación de su significado y del sentido que ese significado tiene en cada expresión algebraica.

El Ministerio de Educación (2020) plantea que para reducir este tipo de dificultades es necesario que al estudiante se le presenten situaciones con sentido y que se le demande expresar lo que comprenda, usando representaciones gráficas, simbólicas, algebraicas o verbales.

Haciendo referencia a la Competencia 24, los alumnos deberían evidenciar el desarrollo de las mismas. Sin embargo, se observa en las respuestas de este ejercicio que el 73,6% de los estudiantes no traduce los datos a expresiones algebraicas, lo cual impide que sean capaces de expresar lo que comprenden y elaborar afirmaciones razonando de manera inductiva como lo plantea el Currículo Nacional (2016).

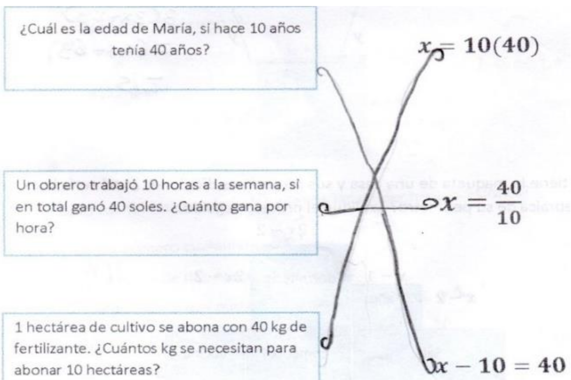
Pregunta N° 10

En la columna de la izquierda, se presentan 3 situaciones. Relaciona cada una con la ecuación que representa cada situación. Fundamente sus respuestas en cada caso:

¿Cuál es la edad de María, si hace 10 años tenía 40 años?	$x = 10(40)$
Un obrero trabajó 10 horas a la semana, si en total ganó 40 soles. ¿Cuánto gana por hora?	$x = \frac{40}{10}$
1 hectárea de cultivo se abona con 40 kg de fertilizante. ¿Cuántos kg se necesitan para abonar 10 hectáreas?	$x - 10 = 40$

Tabla 16:

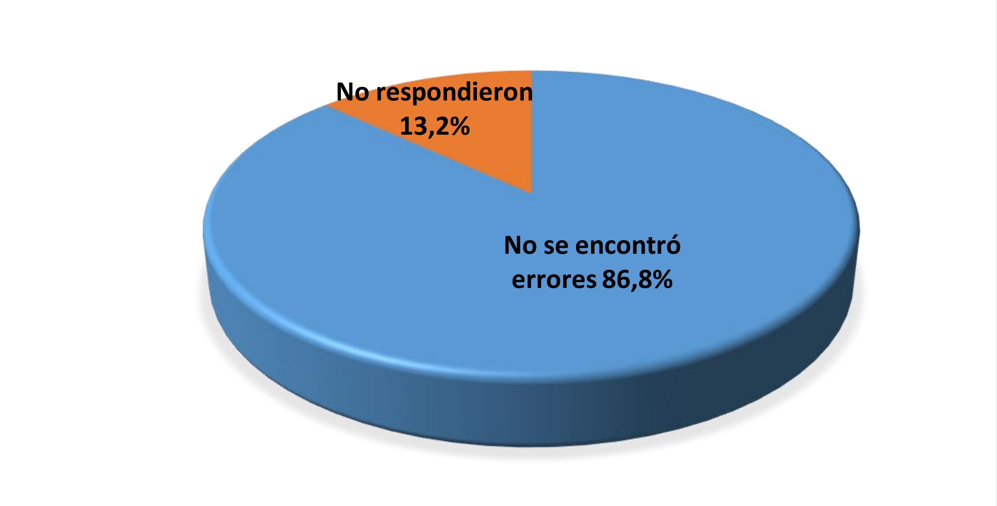
Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 10 y su incidencia porcentual

Capacidades relacionadas de la competencia 24: C4			
Procedimientos	**Errores**	**Número de estudiantes**	**%**
	No se encontró errores	33	86,8%
Estudiantes que no respondieron a la pregunta		5	13,2%
Total de estudiantes		38	100 %

Gráficamente se presentan los resultados en la siguiente figura:

Figura 32:

Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 10



Se observa en la tabla 14 que el 86,8 % de los estudiantes han logrado relacionar los datos y condiciones con la ecuación que representa la situación (modelo), sin embargo ningún estudiante planteó argumentos que justifiquen sus respuestas por ello se rescata que no se evidencia el desarrollo de la capacidad "Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia" perteneciente a la Competencia 24: "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio" (Currículo Nacional, 2016, p. 136).

Pregunta N° 11

Carlos visita la tienda agrícola. Encuentra que tres veces el valor de un fungicida sistémico, disminuido en S/ 150 no puede ser más de S/1000.

a) ¿Cuál es el precio máximo que puede tener el fungicida?

b) ¿Qué inecuación modela la situación? ¿Cuál es el conjunto solución?

c) Representa gráficamente el conjunto solución. Explica detalladamente el procedimiento seguido en cada pregunta.

Ningún estudiante resolvió o intentó al menos resolver esta situación

Si bien es cierto la comprensión de la desigualdad se inicia desde primaria a partir de analizar situaciones cotidianas como por ejemplo "película para mayores de 14 años" y reconocen si ellos o sus amigos cumplen con ese requisito. Así, pueden decir: "tengo 12, no podré ver la película". O bien, al leer un cartel informativo que diga: "La talla mínima para ingresar a los juegos es 1,10 m", reconocen que sí pueden ingresar si miden 1,18 m. Sin embargo, según el Ministerio de Educación (2020) en secundaria es necesario profundizar la noción de desigualdad, atendiendo de manera gradual a los diferentes conjuntos numéricos y generando situaciones para comparar números, establecer relaciones de orden e introducir la noción de intervalos.

Pregunta N° 12

Para evitar la pérdida de ganado lanar de la comunidad de Tejedores, los pobladores se han propuesto construir corrales de la forma como se muestra en la figura. Si deciden realizar triple cercado con alambre ¿Qué cantidad total de alambre necesitará un poblador para cercar un corral? Detalle el procedimiento seguido.

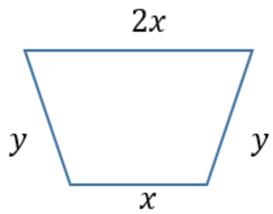
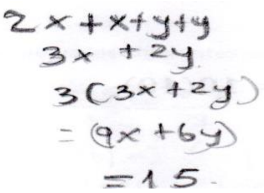
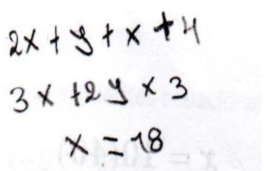
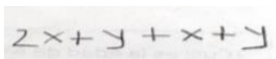


Tabla 17:

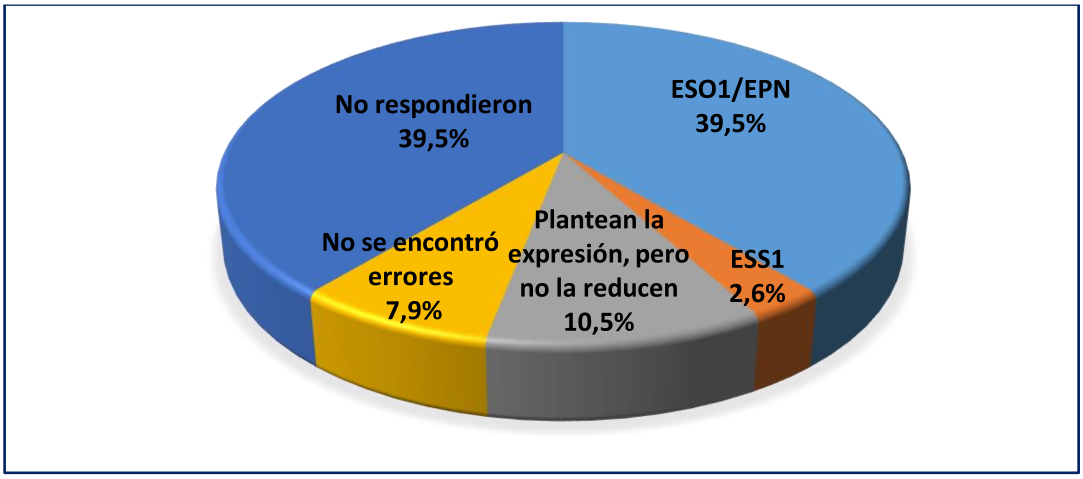
Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 12 y su incidencia porcentual

Capacidades relacionadas de la competencia 24: C2 y C3			
Procedimientos	**Errores encontrados**	**Número de estudiantes**	**%**
	ESO1: Errores debidos a la complejidad de los objetos matemáticos.	15	39,5%
	EPN: Errores debidos al objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra ESS1: Errores de procedimiento	1	2,6%
Plantean la expresión correcta, pero no la reducen 		4	10,5%
No se encontró errores		3	7,9%
Estudiantes que no respondieron a la pregunta		15	39,5%
Total de estudiantes		38	100%

Gráficamente se presentan los resultados en la siguiente figura:

Figura 33: *Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 12*

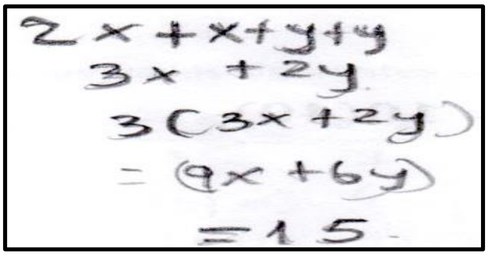
Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 12



Al plantear esta situación se esperaba que los estudiantes transformen los datos a expresiones algebraicas y sobre estas se trabajen propiedades para reducirlas. Se observa que un 39,5% del total de los estudiantes logra plantear la expresión algebraica, sin embargo, al reducirla presentan dificultades que se concretan en errores como se observa en la figura 34:

Figura 34:

Respuesta de la pregunta 12, realizada por A4



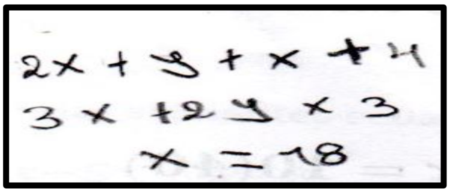
Según Palarea (1998) este tipo de errores son comunes en estudiantes y pueden resultar debido a la naturaleza de las respuestas en álgebra y tener su origen en la aritmética donde se requieren soluciones numéricas únicas, por ello los estudiantes tienden a expresarlo todo en una única respuesta (por necesidad de clausura). Según Kuchemann (como citó Palarea, 1998) este tipo de errores es común entre los estudiantes y suelen presentarse cuando tienen dificultades para atribuir significado a las letras debido a la falta de habilidades al interpretar y manipular las mismas (no las toma en cuenta y las rechaza), como se observa en la figura 34.

Este error también podría tratarse de un error de notación funcional muy común, en donde la apariencia visual genera la confusión, es decir la gran parte de estudiantes según las investigaciones intentan ver el significado de una notación, exclusivamente, sobre la base de su apariencia visible. Sin embargo, ante este tipo de dificultades se sugiere estimular a los estudiantes a reflexionar acerca del significado de tales expresiones (Socas, Camacho y Palarea, 1996).

- Por otro lado, el 2,6% de los estudiantes cometió el error que se presenta en la figura 35:

Figura 35:

Respuesta de la pregunta 12, realizada por A23



En esta figura se observa que los estudiantes confunden el significado de la variable con el producto. Esto podría tratarse de una inadecuada atribución de significado a los símbolos con los que se trabaja el contenido matemático. Este tipo de errores tiene su origen en una posible ausencia de significado y están relacionados con las etapas de aprendizaje de un sistema de representación. (Ruano, Socas y Palarea, 2003). Con respecto a esto, Palarea (1998) también menciona que los estudiantes a menudo se confunden ya que la mayoría de los símbolos que se utilizan en álgebra se han utilizado antes en la aritmética, produciéndose un conflicto al introducir el nuevo significado.

Se observa finalmente que un gran porcentaje de estudiantes no resolvieron el problema, ya que no fueron capaces de seleccionar, emplear y combinar recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para simplificar la expresión algebraica (modelo), que son desempeños de la competencia 24. Por lo tanto, los estudiantes no estarían desarrollándola.

Pregunta N° 13

Se tiene el siguiente croquis de una casa. ¿Cuál sería la expresión algebraica de su perímetro? Explique el proceso seguido.

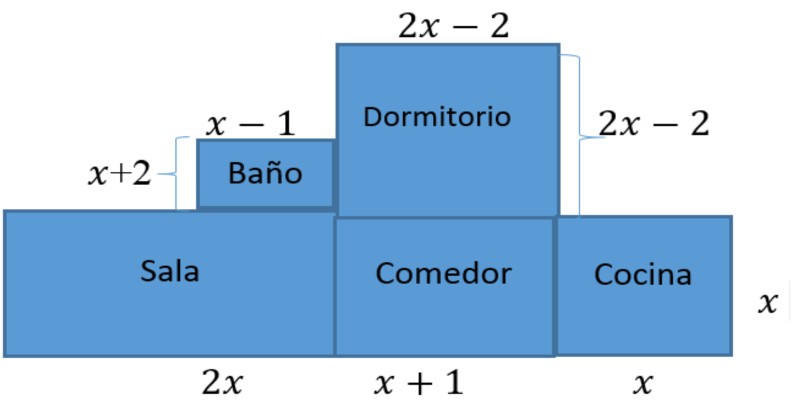
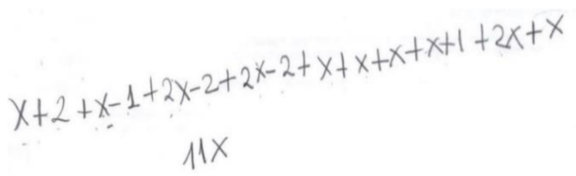


Tabla 18:

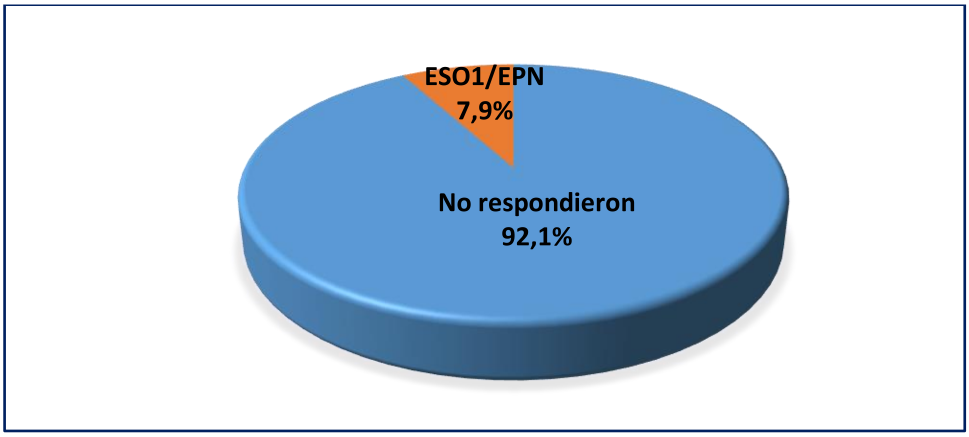
Errores encontrados en los procedimientos de los estudiantes en la pregunta 13 y su incidencia porcentual

Capacidades relacionadas de la competencia 24: C1 y C3			
Procedimientos	**Errores encontrados**	**Número de estudiantes**	**%**
	ESO1: Errores debidos a la complejidad de los objetos matemáticos. EPN: Errores debidos al objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra	3	7,9%
Estudiantes que no respondieron a la pregunta 13		35	92,1%
Total de estudiantes		38	100%

Gráficamente se presentan los resultados en la siguiente figura:

Figura 36:

Resultados porcentuales obtenidos en la Pregunta 13

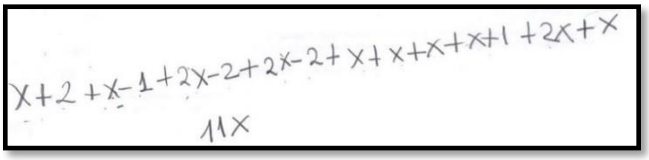


En el planteamiento de este problema se observa que solamente el 7,9 % de los estudiantes tienen clara la noción de perímetro ya que representaron correctamente su expresión algebraica, sin embargo, al simplificar dicha expresión dieron un resultado erróneo, como se puede observar en la figura 37.

Según la clasificación de Socas (1989) estos errores se deben a la complejidad de los objetos matemáticos y tienen su origen en un obstáculo relacionado en esta situación con el desconocimiento de las propiedades para operar términos semejantes. Estos obstáculos según Socas (1997) se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas como puede observarse en la figura 37.

Figura 37:

Respuesta de la pregunta 13, realizada por A7



Cabe resaltar también que este tipo de errores pone de manifiesto ciertas dificultades, que a continuación se detallan:

- La dificultad cognitiva que podrían tener los estudiantes para aceptar la falta o necesidad de clausura, situación derivada de la aritmética, relacionada con lo que se supone debe ser una "respuesta bien dada" (Collis citado en Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1996).
- Godino (2003) menciona que los estudiantes pueden presentar dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico, es decir cuando no han superado la etapa de las operaciones concretas y por lo tanto queda en evidencia cuando se les pide que realicen operaciones formales.

Según Palarea (1998) este tipo de errores también podría deberse a la naturaleza de las respuestas en álgebra ya que muchos suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige una solución única donde tienden a simplificar todo a una sola respuesta como la que han brindado los tres estudiantes en esta situación.

Los estudiantes debieron plantear y desarrollar la expresión que modele el perímetro del croquis presentado, es decir transformar los datos del problema a una expresión algebraica (modelo) y seleccionar recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para simplificarla, nos referimos a la capacidades "Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas" y "Usar estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales", pertenecientes a la competencia 24, pero encontramos que el 92,1 % no resolvió esta situación y el resto presentó errores en sus procedimientos.

Finalmente se muestra en la siguiente tabla, a modo de resumen, el porcentaje de incidencia de errores que presentan los estudiantes, según Socas y Palarea en cada una de las preguntas:

Tabla 19:

Incidencia de errores, según la tipología y capacidades del Currículo Nacional

N° de pregunta	Capacidades según Currículo Nacional				Tipología de errores									% de incidencia de errores
					Errores según Martín Socas				Errores según Mercedes Palarea					
	C1	C2	C3	C4	ESA	ESL	ESO	ESS	EPS	EPN	EPA	EPF	EPG	
1	X		X					ESS1				EPF5		78,9%
						ESL1			EPS1					13,2%
2	X	X	X				ESO2						EPGA	68,4%
						ESL1			EPS1					10,5%
4	X	X	X				ESO1		EPS1					37%
5	X				ESA	ESL			EPSA					100%
6		X				ESL1			EPS1					28,9%
7			X					ESS1				EPF5		29%
									EPS1					37%
8		X	X						EPS1					79%
9	X	X		X		ESL			EPSA					73,7%
12	X	X	X				ESO1			EPN				39,5%
								ESS1						2,6%
13		X	X				ESO1			EPN				7,9%

Según los resultados obtenidos en esta investigación (ver tabla 18) se presenta a continuación la discusión de los mismos según las clasificaciones de Socas y Palarea y también en función de las capacidades de la competencia 24 Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales, ya que en éstas dos los estudiantes presentan mayor porcentaje de errores. Asimismo, se señalan algunas orientaciones para tener en cuenta en el proceso de enseñanza:

4.2. Discusión de resultados según la tipología de Socas y Palarea, algunas orientaciones para ser abordados

En la tabla 18 se observa que los (errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico y a su complejidad (ESL), según Socas o errores en el proceso de simbolización en el aprendizaje del álgebra (EPSA) según la clasificación desarrollada por Palarea y los errores que tienen su origen en la aritmética (ESA, según Socas) son los de mayor ocurrencia con un 100%. Se evidencia que todos los estudiantes cometen este tipo de errores.

Con respecto a los ESL, los errores debido a las características del lenguaje algebraico y a la complejidad del mismo, estos suelen presentarse debido a la variedad de significados que puede tener un mismo objeto matemático, lo que provoca confusiones en el aprendizaje, la comprensión y la concepción del álgebra. Por ejemplo, los significados que puede llegar a tener el signo igual y la determinación de los distintos contextos en los que se utiliza y que pueden ser matemáticamente correctos o no (Molina, 2006). Este tipo de errores se deben a las dificultades que se producen con el lenguaje algebraico y están relacionadas con la utilización de los símbolos, ya que se presentan en el mismo proceso de simbolización (EPSA); por ello se sugiere desarrollar actividades donde los estudiantes tengan que efectuar el pasaje del lenguaje natural al lenguaje algebraico, donde trabajen la interpretación de los símbolos, no sólo desde lo procedimental sino desde la interpretación de su significado y del sentido que ese significado tiene en cada expresión algebraica, así lo plantea Olmedo et al. (2015). También, se pueden abordar actividades que involucren el trabajo con expresiones algebraicas que busquen desarrollar el razonamiento algebraico y la simbolización; por ejemplo, se pueden plantear actividades lúdicas, como estrategia didáctica para la superación de estas dificultades y errores, se podrían utilizar diversos recursos didácticos que contribuyan al fortalecimiento del razonamiento algebraico, materiales estructurados con fines educativos (regletas, fichas, cartas, juegos, modelos en cartón, madera o plástico tal como lo sostiene Alvarez (2017); quien concluyó en su investigación que cuando los estudiantes utilizan el juego de los dados algebraicos, el dominó, el tangram, etc. durante el proceso de aprendizaje del álgebra, éstos van desarrollando el razonamiento algebraico e intercambiando conocimientos, se corrigen y se explican entre ellos, además traducen del lenguaje algebraico al lenguaje habitual y viceversa. También encontró que el juego provocó una actitud positiva hacia el trabajo colaborativo haciendo más motivador, estimulante e incluso agradable el aprendizaje del álgebra.

Por otro lado, si estos errores son considerados como aquellos que tienen su origen en la aritmética (ESA) es importante que los estudiantes los aborden y comprendan cuando estudian la aritmética, de lo contrario se convierte en un obstáculo para la comprensión del álgebra. Al respecto Olmedo et al. (2015) sugiere empezar a desarrollar el álgebra como aritmética generalizada y con el estudio de patrones, importante para iniciar a los estudiantes en el proceso de generalización y el simbolismo algebraico, fundamental para capturar, revelar y describir los patrones y estructuras, utilizando las letras con el significado de números generalizados. Sin embargo, la particularización de expresiones matemáticas representa un gran conflicto sino se tiene claro por ejemplo el caso de las definiciones y propiedades algebraicas. Por ello en las actividades relacionadas con el álgebra se debe incidir en el aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos, el uso y significado de los signos y símbolos y los sistemas de representación en contextos reales. No se puede dejar de lado la contextualización en el aprendizaje de las matemáticas, orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas, y además vincular el lenguaje formal matemático con su significado (Cáceres et al., 2015).

Los errores en el uso de los símbolos (EPS1, según Palarea) presentan 79% de incidencia. Estos errores se deben al significado de los símbolos y las letras y suelen presentarse debido a que los símbolos que el estudiante ha usado en aritmética como los signos de operaciones, paréntesis y números, son de significación unívoca" (Palarea, 1998, p. 66) limitando su significado en el aprendizaje del álgebra. Kieran (citado en De la Fuente, 2016) menciona que las dificultades que los estudiantes presenten frente al lenguaje algebraico pueden estar relacionadas con la falta de significado de las letras; por ello es necesario revisar las consideraciones de Kuchemann acerca de las múltiples interpretaciones de estas. De la Fuente (2016) sugiere tener en cuenta que para que los estudiantes sean capaces de construir el lenguaje algebraico se debe desarrollar el pensamiento algebraico de modo que permita analizar relaciones entre cantidades, percibir estructuras, generalizar, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir. Se pueden plantear actividades que permitan introducir significativamente el lenguaje algebraico, fortalecer el proceso de simbolización y generalización con actividades adecuadas al grado respectivo y gradualmente (de menor a mayor complejidad).

Se observa también que los errores de procedimiento (ESS1 según Socas) o el uso de métodos informales por parte de los estudiantes (EPF5) se presentaron en la mayor parte de estudiantes (78,9%). Estos reflejan los intentos por tratar de resolver los ejercicios y plantear estrategias, pero es evidente que hay factores como conceptos, uso y significado de signos y símbolos que no están claros, pues estos tienen su origen según Socas (1989) en una ausencia de significado. Por ello, se sugiere sean abordados desde actividades que permitan a los estudiantes discutir sobre los conceptos en juego, sobre el uso de los signos y símbolos, los procedimientos que plantean al resolver uno u otro problema. Forzar el aprendizaje de la matemática poniendo énfasis en aspectos operativos o en el uso de reglas y símbolos que no entienden conlleva a la memorización y a un aprendizaje sin motivación, mecánico y desagradable tal como lo sostienen Alsina y Baroody (citados en Malaspina, 2017).

Los errores debidos al uso de métodos informales (EPF5) según Palarea (1998) se originan por el uso inapropiados de fórmulas o procedimientos, por ello se sugiere que los estudiantes antes de utilizar alguna fórmula, primero se les oriente a comprender la situación y, en base a ello, utilizar estrategias o técnicas para resolver los problemas matemáticos. Cuando un alumno se enfrenta a un problema no rutinario puede emplear las técnicas o estrategias que contribuyan al análisis del mismo, las cuales se denominan "heurísticas", según Polya (citado en Pérez, 2011); por ejemplo, una técnica heurística para entender mejor un problema, puede ser la representación del problema a través de un dibujo o de la representación gráfica de los datos. Según Pérez (2011) es importante también plantear preguntas relacionadas con el problema, explicar a los estudiantes que, primero deben leer el problema para comprenderlo, antes de iniciar la búsqueda de la solución. La idea es entrenarlos en la adquisición de estrategias y habilidades para alcanzar las soluciones a los problemas planteados. Es importante que usen técnicas para analizar el problema, pues de lo contrario se les tornará muy difícil resolver un problema no rutinario. Todo lo expuesto anteriormente queda fundamentado en una de las capacidades de la Competencia 24 que plantea el Currículo Nacional, que se refiere a seleccionar, adaptar, combinar o crear, procedimientos, estrategias para el desarrollo de la misma.

Los errores debidos a los procesos de pensamiento matemático (ESO2) también tuvieron un porcentaje de incidencia considerable (68,4%) y son aquellos que tienen su origen según Socas (1997) en un obstáculo que puede ser epistemológico, didáctico y/o cognitivo; por ello para tratar de minimizarlos se sugiere tener en cuenta el contenido matemático para prever el grado de dificultad (y superar los obstáculos cognitivos y epistemológicos dado que estos están relacionados con la resistencia a los conceptos y la construcción del conocimiento matemático) e identificar las variables que hay que tener en cuenta para facilitar su enseñanza (y superar los obstáculos didácticos). En el mejor de los casos se pueden plantear situaciones didácticas para introducir mediante transposición didáctica los conceptos preservando la esencia de las nociones fundamentales en un contexto matemático escolar propio de la etapa (tomando en cuenta los procesos de pensamiento matemático correspondientes a las etapas de desarrollo cognitivo de Piaget). Así lo plantearon Lacasta et al. (2009) con respecto a la noción de optimización. No obstante, mediante una adecuada transposición didáctica es posible elaborar y poner en marcha situaciones que movilicen los conocimientos correspondientes. Estos aspectos corresponden a la Teoría de Situaciones Didácticas que propuso Brousseau en los años

70 y que constituye para Sadovsky (2005) un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática.

Para Sadovsky (2005) la Teoría de las Situaciones Didácticas contribuye a la construcción de un clima de aprendizaje que moviliza al estudiante para el desarrollo de procesos matemáticos de complejidad crecientes, primero de forma individual (situación de acción), luego en trabajo cooperativo (situación de formulación). Esto posibilita al estudiante comunicar en y con las matemáticas sus procesos y resultados. Para Brousseau (1986) un medio sin intenciones didácticas es claramente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos que se desea que adquiera, pues se supone que es el profesor quien debe crear las condiciones suficientes para la apropiación de los conocimientos matemáticos.

Con respecto a los errores de generalización abusiva (EPGA), dentro del proceso de generalización cabe resaltar que la mejor manera de llevar al aula este proceso de pensamiento, es a través del planteamiento de problemas, que implique que los estudiantes puedan particularizar, conjeturar, verificar y argumentar (elementos característicos del pensamiento matemático), escenario natural para el camino a la generalización (Obando y Múnera, citados en Pérez, 2005). Si un docente busca el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, esto sólo se puede lograr a través de situaciones problema diseñadas estratégicamente ya que un problema dinamiza la actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Según De la Fuente (2016) es necesario que los estudiantes lleguen a generalizar para que puedan relacionar situaciones, identificar patrones, analizar estructuras y encontrar las relaciones entre ellas; por ello las actividades o situaciones problemáticas que se diseñen deben tener en cuenta estos aspectos.

Con menor porcentaje de incidencia se presentan los errores en el sentido del signo igual en álgebra (ESL1) y los errores debidos al objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra (EPN)**.** Con respecto a los primeros Socas (1989), sostiene que pueden deberse a dos escenarios: las características propias del lenguaje algebraico y/o a la complejidad de los objetos matemáticos; líneas arriba se hace mención a las características propias del lenguaje algebraico, por lo que a continuación se profundizará en lo concerniente a la complejidad de objetos matemáticos.

Para la apropiación y comprensión de un objeto matemático es necesario recurrir a diversas representaciones del mismo ya que la manipulación de representaciones matemáticas proporcionará a los estudiantes los medios para construir imágenes mentales del objeto en cuestión. Socas y Palarea (1999) señalan que la riqueza de la imagen del objeto construido dependerá de las representaciones que el sujeto haya utilizado; es así como muchos investigadores (Kaput, Duval, Palarea, Rico, Socas, entre otros) han puesto de manifiesto la importancia de las representaciones para la formación adecuada de conceptos.

Según Socas y Palarea (1999):

> Las Matemáticas no pueden ser comunicadas sin estos sistemas de representación y en muchas ocasiones, los estudiantes y profesores trabajan, de manera inconsciente, con sistemas de representación intermedios (diagramas, modelos geométricos, balanza, etc.), con la intención de que ayuden al estudiante a ser competente en el sistema de representación convencional apropiado. (p. 321).

Esto explica por qué muchos estudiantes presentan dificultades relacionadas a la complejidad de los objetos matemáticos, por ello se sugiere que los docentes promuevan actividades de aprendizaje donde los estudiantes tengan que hacer uso de los diferentes sistemas de representación matemáticas para desarrollar una formación adecuada de los conceptos.

Con respecto a los errores debidos al objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra (EPN), las investigaciones sostienen que estos suelen presentarse por las dificultades cognitivas o procesos de pensamiento implicados y que además pueden estar relacionados con la naturaleza y las actividades que implica el álgebra. Al respecto Kieran (citado en Palarea y Socas, 1999) señala que el aprendizaje del álgebra implica el reconocimiento y uso de estructuras, el significado de las letras en el contexto algebraico y el cambio a una serie de convenciones diferentes a las usadas en la aritmética. Es evidente que estos aspectos están relacionados con el manejo de las expresiones algebraicas y determinan en gran medida que los estudiantes logren o no aprender el álgebra.

Con respecto al manejo de las expresiones algebraicas Palarea y Socas (1999) manifiestan que están involucrados procesos cognitivos de tipo operacional y conceptual, que se dan en la transición de la aritmética al álgebra y que denominan habilidades cognitivas de carácter operacional y habilidades cognitivas de carácter conceptual.

4.3. Discusión de resultados en función de las capacidades que propone el currículo Nacional

Los errores que presentan mayor incidencia en porcentaje (ESA, ESL, EPSA, ESS1, EPF5, ESO1, ESO2, EPGA, EPS1) están relacionados con la capacidad 1: Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas, la capacidad 2: Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas y la 3: Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales de la competencia 24 del currículo nacional.

Con respecto a la C1, Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas se rescata que los errores encontrados (ESA, ESL, EPSA, ESS1, EPF5, ESO2, EPGA, EPS1) no permiten que los estudiantes transformen los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica, es decir que el estudiante sea capaz de representar y construir el modelo. Siendo la modelización un aspecto importante para interpretar fenómenos del entorno, juega un papel importante el uso del lenguaje algebraico (De la Fuente, 2016). En ese sentido los docentes deben plantear actividades que involucren el uso o manejo del lenguaje algebraico para construir significado a partir de diferentes representaciones como gráficos, tablas, fórmulas, etc. Por ejemplo, según De la Fuente (2016) cuando un estudiante traduce del lenguaje verbal un problema y construye una tabla, un gráfico para plantear una ecuación o fórmula que servirá para resolver el problema ya está cambiando de representación, por ende, ya estaría modelizando. En esto juegan un papel importante las actividades que involucran el trabajo con las funciones como fuente de modelos para describir e interpretar diversos fenómenos.

Con respecto a la C3, Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales, los errores encontrados (ESS1, ESO1, EPS1, EPF5) impiden que los estudiantes sean capaces de seleccionar, adaptar, combinar o crear, procedimientos, estrategias y algunas propiedades para simplificar o transformar ecuaciones, inecuaciones y expresiones simbólicas. Como se ha mencionado anteriormente es importante que los estudiantes se enfrenten a situaciones problemáticas donde se les oriente para que ellos mismos sean capaces de plantear sus propias estrategias y procedimientos, la idea es entrenarlos en la adquisición de estrategias y habilidades para alcanzar las soluciones a los problemas planteados.

Con respecto a la C2, Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas, los errores encontrados (EPS1, EPSA) son aquellos que están relacionados con el uso de símbolos y el proceso de simbolización, e impiden que los estudiantes expresen su comprensión de la noción, concepto o propiedades de los patrones, funciones, ecuaciones e inecuaciones y sean capaces de establecer relaciones entre estas. Así mismo, presentan dificultades para interpretar información con contenido algebraico, que es primordial para desarrollar la competencia 24. Los estudiantes con este tipo de errores deben trabajar uso y significado de símbolos para movilizar el desarrollo de esta capacidad.

En la C4, Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia, los errores encontrados (EPSA y ESL), son aquellos relacionados con el proceso de simbolización y el lenguaje algebraico e impiden que los estudiantes sean capaces de elaborar afirmaciones sobre las variables, las reglas algebraicas y sus propiedades; por otro lado, no se desarrolla de manera adecuada el razonamiento tanto inductivo como deductivo que les permita generalizar una regla, probar y comprobar propiedades y/o nuevas relaciones.

Finalmente, cabe resaltar que los errores que cometen los estudiantes proporcionan información valiosa, por lo tanto, deben ser abordados ya sea grupal o individualmente, deben ser discutidos a cabalidad debido a que constituyen valiosos indicadores del desarrollo de capacidades y como se ha visto, conocerlos permite reflexionar sobre las dificultades que presentan para lograr el desarrollo de cierta competencia. Mancera (2003) resalta que no es exagerado afirmar que en los errores existe una fuente inagotable de conocimiento que para aprovecharla debe ser atendida, no rechazada.

Conclusiones

Las conclusiones que surgen de este trabajo de investigación son las siguientes:

Primera: Conocer la tipología sobre los errores más frecuentes que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra representa un recurso muy valioso para poder analizar las diversas dificultades que presentan los estudiantes cuando abordan las actividades que se desarrollan en clase. La tipología de errores propuesta por Socas (1989) y Palarea (1997) proporcionan información sobre los errores en el aprendizaje del álgebra escolar; brindando información sobre causas y dificultades que los producen, permitiendo que puedan ser abordados. La clasificación de Socas proporciona información sobre el origen de los errores, mientras que la de Palarea se enfoca más en la naturaleza de éstos.

Segunda: El diseño y aplicación del cuestionario elaborado tomando como referencia la propuesta de Mercedes Palarea permitió diagnosticar los errores y las dificultades que presentan los estudiantes en relación con las capacidades involucradas en el desarrollo de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Tercera: Los errores encontrados en el 100% de los estudiantes son los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética (ESA), los errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico (ESL) y los errores en el proceso de simbolización (EPSA). Los errores mencionados generan dificultades en la comprensión del significado de los símbolos y las letras, debido a que los símbolos que el estudiante ha usado en aritmética como los signos de operaciones, paréntesis y números, son de significación unívoca y persisten en los estudiantes en la mayor parte de sus procedimientos, impidiendo desarrollar las capacidades Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales, de la competencia 24 que se establece en el Currículo Nacional, por ello el docente debe plantear diversas actividades que permitan a los estudiantes comprender mejor el significado y uso de los mismos.

Cuarta: Los errores en el uso de los símbolos (EPS1) y los errores en el proceso de simbolización (EPSA), también están presentes en la mayor parte de los estudiantes, e impiden que el desarrollo de la capacidad 2, Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. Asimismo, los errores que se deben a las características propias del lenguaje algebraico (ESL) dificultan el que los estudiantes sean capaces de elaborar afirmaciones sobre las variables, las reglas algebraicas y las propiedades algebraicas que se proponen en la capacidad 4.

Quinta: Otros errores encontrados con mayor porcentaje de incidencia son los errores de procedimiento (ESS1), el uso de métodos informales por parte de los estudiantes (EPF5), los errores debidos a la complejidad de los objetos matemáticos (ESO1), los errores debidos a los procesos de pensamiento matemático (ESO2), y la generalización abusiva (EPGA). Estos errores también constituyen impedimento para el desarrollo de las capacidades y se presentan en los procedimientos seguidos por los estudiantes, además están relacionados con las características propias del lenguaje algebraico, la complejidad de los objetos matemáticos y a la naturaleza de las respuestas en álgebra, es decir el traslado del lenguaje natural al lenguaje algebraico, al uso de letras en sustitución de números, el proceso de simbolización y el proceso de generalización. Todos estos son aspectos fundamentales para la comprensión y el desarrollo del pensamiento algebraico, por lo que deben tenerse en cuenta y abordarse en las sesiones de clase.

Sexta: Los errores que presentan los estudiantes impiden el desarrollo adecuado de las cuatro capacidades que propone el Currículo Nacional para el logro de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Séptima: El error es una vía de acceso al conocimiento que conviene valorar positivamente y que además invita a la autorreflexión, reorganización, enriquecimiento y ajuste del conocimiento en situaciones conflictivas que lo requieran; de esta forma se convierte en un elemento constructivo e innovador para mejorar el proceso de enseñanza. "Si damos categoría pedagógica al error, no es debido a la naturaleza del mismo, sino por servirnos de contraseña y señuelo de un modo de pensar y hacer diferencias" (De La Torre, p. 8).

Recomendaciones

Se sugiere a los docentes revisar bibliografía que ayude a comprender los errores de sus estudiantes y las dificultades que los involucran ya que estos pueden deberse a diferentes causas, así mismo valorar dichos errores atendiendo a las causas que los producen. Al respecto Fernández (2016) afirma que "tan importante como la detección de errores es la indagación de las causas que los provocan y que demandan al profesor medidas para su diagnóstico y subsanación, es decir, las dificultades asociadas" (p.195). De esta forma, el docente planteará actividades en el aula que ayuden a minimizarlos.

Es importante elaborar instrumentos de recojo de información (cuestionarios, fichas técnicas, etc.) para conocer y reflexionar sobre los errores que podrían presentar los estudiantes con respecto a las capacidades que plantea el currículo en las diferentes competencias matemáticas.

Finalmente, se puede afirmar que investigar acerca de los errores de los estudiantes en el salón de clases, constituye una acción importante para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje del área de matemática. Por esta razón es necesario observar el desempeño, desenvolvimiento de los estudiantes en el espacio áulico: ¿Cómo resuelven los problemas? ¿Qué estrategias plantean? ¿Qué procedimientos realizan? ¿Cuáles son las dificultades y errores frecuentes que presentan? ¿Cuál es la causa de estos errores? Las respuestas a estas preguntas son importantes porque direccionan la actividad docente en el salón de clases proporcionando insumos para realizar inferencias o determinar hipótesis en relación a cómo están pensando, con el fin de revertir actitudes, superar dificultades y modificar conceptos inadecuados que tienen los estudiantes en el aprendizaje del álgebra. Según Olmedo y otros (2015) el desafío y la responsabilidad de lograrlo corresponde a los profesores, quienes a través de propuestas didácticas pueden proporcionar el acompañamiento necesario para que los alumnos comprendan el álgebra.

Para abordar los diversos errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra es importante revisar información que proporcionan diversos investigadores en educación matemática. Por ejemplo, son valiosos los aportes de Rico (1994, 1995, 2009), Garcia, Segovia y Lupiañez (2014), Henríquez (2017), Fernández (2016), Font (2000), Molina (2006), Ruano, Socas y Palarea (2003), Pérez (2005), entre otros.

Lista de referencias

Abrate, R., Pochulu, M., y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Universidad Nacional de Villa María. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Agudelo, C. (2007). La creciente Brecha entre las Disposiciones Educativas Colombianas, las Proclamaciones Oficiales y las Realidades del Aula de Clase: las Concepciones de profesores y profesoras de Matemáticas sobre el Álgebra Escolar y el Propósito de su Enseñanza. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 5*(1), 43-62.

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., y otros. (1993) ¿Hay razones para que cueste tanto aprender álgebra? En L. Rico, J. Fortuny, y L. Espinoza (Eds), *Ideas y actividades para enseñar álgebra* (pp.13-22). Madrid, España: Editorial Síntesis S.A.

Alvarez, R. (2017). El juego como estrategia didáctica para la superación de errores y dificultades en la iniciación al álgebra al grado octavo. Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Azañero, L. (2013). Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales. *(Tesis de maestría).* Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Barrantes, H. (2006). Los Obstáculos Epistemológicos. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 1(2). 1-7.

Briceño, M. (2009). El uso del error en los ambientes de aprendizaje: Una visión transdisciplinaria. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales*, ISSN *1316 – 9505* (14), 9-28.

Brousseau, G. (1986) Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Investigaciones en Didáctica de las matemáticas, 7 (2), 33- 115. http://www.cvrecursosdidacticos.com/web/repository/1462973817_Fundamentos%20de%20Brousseau.pdf

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, *16*(1), 113-148.

Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno logo. *Educación Matemática*, *22* (3), 55-86.

Cáceres, J., Chamoso, J., Sánchez, B., Rodríguez, M., Corchoa, P., y Cárdenas, J. (2015). Tareas auténticas, ¿un objetivo para la enseñanza obligatoria? *17 JAEM Cartagena 201: Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. Jornada llevada a cabo en Cartagena, Colombia.

Castro, E., Rico, L., y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizajes de estructuras numéricas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Eds) La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona.

Cid, E., y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. Trabajo de grado no publicado. España: Universidad de Zaragoza. Extraído de http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/EvaPilar-CITAD-II-2010.pdf

De Faria, E. (Noviembre de 2013). El pensamiento algebraico en los programas de estudio de matemáticas: una visión integral. Conferencia llevada a cabo en el *I Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe*, Santo Domingo, República Dominicana.

De la Fuente, J. (2016). Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor [Tesis doctoral Universidad Autónoma de Barcelona] https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2016/hdl_10803_399341/jadlfp1de1.pdf

De La Torre, S. (2004). Aprender de los errores: El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

Delgado, A. (2011). *Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Fernández, J. (2016). Errores y dificultades. En L. Rico y A. Moreno. (Ed.*), Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 195-207). Granada, España: Ediciones Pirámide.

Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Philosophy of Mathematics Education Journal, 14, 1-35.

Gamboa, R., Castillo, M., e Hidalgo, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, 1-31. https://www.scielo.sa.cr/pdf/aie/v19n1/1409-4703-aie-19-01-104.pdf

Garcia, J., Segovia, I., y Lupiañez, J. (2012). Antecedentes y Fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. En D. Arnau, J. Lupiañez, A. Maz (Eds), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, Universidad de Valencia, España.

García, J., Segovia, I., y Lupiañez, J. (2014). El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. 28(50), p. 1545-1566.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http: //www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, J., y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http: //www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. Boletim de Educação Matemática, 26(42 B),483-511.[fecha de Consulta 26 de Febrero de 2021]. ISSN: 0103-636X. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=2912/291223574005

Godino, J. D., Aké, L.P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), pp. 199-219.

Guzmán, N. (2013). *Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Henríquez, C. (2017). Aprendiendo de los errores. Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas. Agencia de Calidad de la Educación. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/Aprendiendo_de_los_errores.pdf

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación* (quinta ed.). Recuperado de https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J., Wilhelmi, M. (2009). Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp.259-271). Santander: SEIEM.

Malaspina, M. (2017). El desarrollo de la Matemática informal en los niños. Revista de investigación en psicología, 20 (2), pp. 423-430.

Mancera, E. (2003). Errar es un placer. *Educación matemática*, 15 (2), pp.189-192.

Mayorga, L. (2018). Estructura epistémica del error desde el aprendizaje de la matemática (tesis doctoral). Universidad de Carabobo, Bárbula, Ecuador.

Ministerio de Educación. (2016) Currículo Nacional de la Educación Básica. Lima, Perú.

Ministerio de Educación. (2020*).* Informe de resultados para docentes. Un insumo para reflexionar sobre los logros y las dificultades de nuestros estudiantes. *Evaluación censal de estudiantes 2019, 2do grado de secundaria*. Lima, Perú.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Moreira, M. (2005). Aprendizaje significativo crítico. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación*. *1*(6), 83-102.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Executive Summary. Principles and Standards for School Mathematics*. Recuperado de https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf

Olmedo, N., Galindez, M., Peralta, J., Di Barbaro, M. (2015). Errores y concepciones de los alumnos en álgebra. En Gutierrez (Ed.). XIV Conferencia Interamericana de educación matemática (1-13). México: CIAEM. http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/877/367

Oviedo, L., y Kanashiro, A. (2012). Los registros de representación en Matemática. *Revista Aula Universitaria,* 13(1), 29-36.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (tesis doctoral). Universidad de La Laguna, España.

Palarea, M. y Socas, M. (1999). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. *El Guiniguada, 8*(9), 319-336. https://accedacris.ulpgc.es/bitstream/10553/5407/1/0235347_01999_0020.pdf

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 41-71.

Pérez, Y. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. Revista de investigación, 73 (35), pp. 169-194.

Pérez, J. (2005). La generalización como proceso de pensamiento matemático: Una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje del álgebra elemental [Tesis de maestría]. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia. http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7094/1/JohnPerez_2005_pensamientomatematico.pdf

Plaza, L., González, J., y Vasyunkina, O. (2020). Obstáculos en la enseñanza – aprendizaje de la matemática. Revisión sistemática. *Propuestas para la enseñanza de las matemáticas, 33*(1), 295-304.

Puga, L., Rodríguez, J., y Toledo, M. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación (20),*197-220. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=4418/441846839009

Rico, L. (1994). *Errores en el aprendizaje de las matemáticas*. Universidad de Granada, España: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

Rodríguez, I., y Torrealba, A. (2016). Dificultades que conducen a errores en el aprendizaje del lenguaje algebraico en estudiantes de tercer año de educación media general. *Revista de Postgrado FaCE-UC. 11*(20), pp.416-438.

Rodríguez, S., Molina, M., Cañadas, M., y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*. *9*(4), 273-293.

Ruano, R., Socas, M., y Palarea, M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En C. Encarnación (Presidencia), *Investigación en Educación Matemática*. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Universidad de Granada, España.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Buenos aires. Argentina. https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/343410/mod_resource/content/1/teoriaSituaciones.pdf

Socas, M. y otros. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., y Hernández, J. (1996). Iniciación al Álgebra. En L. Rico, J. Fortuny, y L. Espinoza (Eds.), *Matemáticas: Cultura y aprendizaje*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Socas, M. (1997). Dificultades, Obstáculos errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Universidad de la Laguna. Extraído de: https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/socas-robayna-dificutades-errores-y-obstc3a1culos-en-el-azaje-de-la-matemc3a1tica.pdf

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, M. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI.* Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, San Cristóbal de la Laguna, Tenerife, España.

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. Revista Educación y Pedagogía, 13(45), 39-49.

Zapata, M. y Blanco, L. (2014). Las Prácticas de Enseñanza en la Formación inicial del profesorado de Matemáticas. Piura, Perú: Editorial Académica Española.

Apendices

Apéndice 1: Análisis comparativo del cuestionario inicial y final para su validación

De: Mgtr. Emma Carreño Peña

1. Los ítems de la pregunta 1 se enumeraron para facilitar el análisis.
2. Se cambió el tema cuadrangular por cuadrado, lo cual precisa el ítem planteado y reduce la posibilidad de respuestas no previstas.
3. Se ha mantenido el término “quíntuple”, probablemente porque se tiene la seguridad de que los estudiantes saben el significado de este.
4. Se ha mantenido el esquema de visualización simplificada, probablemente porque las investigaciones de referencia indican su potencialidad y no generan confusión en los estudiantes.
5. En el ítem 8 se ha separado las preguntas para evitar que los estudiantes omitan responder alguna.
6. Se ha cuidado que las palabras estén completas (no partidas).
7. En el instrumento nuevo podría revisarse mejor la manera de enumerar la pregunta 1 porque son los apartados de esta los enumerados.

Apéndice 2: Validaciones de cuestionario por expertos docentes

- Validación de cuestionario inicial y final, por Emma Carreño Peña
- Validación de cuestionario final: Por Marcos Augusto Zapata Esteves y Flor Hau Yon Palomino.

UNIVERSIDAD DE PIURA
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador : **Mgtr. Emma Carreño Peña**
1.2 Cargo e institución donde labora : **Docente de la Universidad de Piura**
1.3 Nombre del instrumento evaluado : **Cuestionario**
1.4 Autor del instrumento : **Cinthia Pulache Panta**

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Criterios	Aspectos de validación del instrumento Indicadores	1 D	2 R	3 B	Observaciones Sugerencias
• Pertinencia	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	☐	☐	X	
• Coherencia	Los ítems responden a lo que se debe medir en la variable y sus dimensiones.	☐	X	☐	
• Congruencia	Los ítems son congruentes entre sí y con el concepto que mide.	☐	☐	X	
• Suficiencia	Los ítems son suficientes en cantidad para medir la variable.	☐	☐	X	
• Objetividad	Los ítems se expresan en comportamientos y acciones observables.	☐	☐	X	
• Consistencia	Los ítems se han formulado en concordancia a los fundamentos teóricos de la variable.	☐	☐	X	
• Organización	Los ítems están secuenciados y distribuidos de acuerdo a dimensiones e indicadores.	☐	☐	X	
• Claridad	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	☐	X	☐	Revisar los términos que se emplean
• Formato	Los ítems están escritos respetando aspectos técnicos (tamaño de letra, espaciado, interlineado, nitidez).	☐	X	☐	Revisar la numeración de los ítems
• Estructura	El instrumento cuenta con instrucciones, consignas, opciones de respuesta bien definidas.	☐	X	☐	Revisar que las consignas lleven a que responsan lo que se espera
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)		C	B	A	Total

Coeficiente de validez : $\frac{A+B+C}{30}$ = $\frac{18+8}{30} = 0,8$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

VALIDEZ BUENA

Piura, 10 de setiembre 2018.

UNIVERSIDAD DE PIURA
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

I. Información General

1.1 Nombres y apellidos del validador : **Mgtr. Emma Carreño Peña**
1.2 Cargo e institución donde labora : **Docente de la Universidad de Piura**
1.3 Nombre del instrumento evaluado : **Cuestionario**
1.4 Autor del instrumento : **Cinthia Pulache Panta**

II. Aspectos de validación

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Criterios	Aspectos de validación del instrumento Indicadores	1 D	2 R	3 B	Observaciones Sugerencias
Pertinencia	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	☐	☐	X	
Coherencia	Los ítems responden a lo que se debe medir en la variable y sus dimensiones.	☐	X	☐	Revisar la asociación a las capacidades.
Congruencia	Los ítems son congruentes entre sí y con el concepto que mide.	☐	☐	X	
Suficiencia	Los ítems son suficientes en cantidad para medir la variable.	☐	☐	X	
Objetividad	Los ítems se expresan en comportamientos y acciones observables.	☐	☐	X	
Consistencia	Los ítems se han formulado en concordancia a los fundamentos teóricos de la variable.	☐	☐	X	
Organización	Los ítems están secuenciados y distribuidos de acuerdo a dimensiones e indicadores.	☐	☐	X	
Claridad	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	☐	☐	X	
Formato	Los ítems están escritos respetando aspectos técnicos (tamaño de letra, espaciado, interlineado, nitidez).	☐	☐	X	
Estructura	El instrumento cuenta con instrucciones, consignas, opciones de respuesta bien definidas.	☐	X	☐	Al inicio del cuestionario podría darse pautas generales
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)		C	B	A	Total

Coeficiente de validez : $\frac{A+B+C}{30}$ = $\frac{24+4}{30} = 0,93$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

III. Calificación global

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena

Piura, 27 de setiembre 2018.

UNIVERSIDAD DE PIURA
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador: Marcos Augusto Zapata Esteves.

1.2 Cargo e institución donde labora: Docente de la Facultad de Ciencias de la Educación/Especialidad Matemática y Física.

1.3 Nombre del instrumento evaluado: Cuestionario para diagnosticar los errores algebraicos más frecuentes los estudiantes de segundo grado de secundaria.

1.4 Autor del instrumento: Cinthia Yeraldine Pulache Panta.

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. **D** - Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. **R** - Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. **B** - Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones
Criterios	**Indicadores**	**D**	**R**	**B**	**Sugerencias**
PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	☐	☐	X	
CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	☐	☐	X	
REDACCIÓN	Los ítems están bien escritos, respetando las reglas ortográficas y de redacción.	☐	☐	X	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)		**C**	**B**	**A**	**Total**

Coeficiente de validez : $\frac{A+B+C}{9}$ = 1

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el Intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Firma del Experto

Piura, 23 de agosto de 2021.

UNIVERSIDAD DE PIURA
Facultad de Ciencias
de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador : Flor Hau Jon Palomino
1.2 Cargo e institución donde labora : Docente Principal - Udep.
1.3 Nombre del instrumento evaluado : Cuestionario
1.4 Autor del instrumento : Cinthia Pulache Pardo.

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
• PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	☐	☐	☒	
• COHERENCIA	Los ítems responden a lo que se debe medir en la variable y sus dimensiones.	☐	☐	☒	
• CONGRUENCIA	Los ítems son congruentes entre sí y con el concepto que mide.	☐	☐	☒	
• SUFICIENCIA	Los ítems son suficientes en cantidad para medir la variable.	☐	☐	☒	
• OBJETIVIDAD	Los ítems se expresan en comportamientos y acciones observables.	☐	☐	☒	
• CONSISTENCIA	Los ítems se han formulado en concordancia a los fundamentos teóricos de la variable.	☐	☐	☒	
• ORGANIZACIÓN	Los ítems están secuenciados y distribuidos de acuerdo a dimensiones e indicadores.	☐	☐	☒	
• CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	☐	☒	☐	Mejorar la redacción
• FORMATO	Los ítems están escritos respetando aspectos técnicos (tamaño de letra, espaciado, interlineado, nitidez).	☐	☐	☒	
• ESTRUCTURA	El instrumento cuenta con instrucciones, consignas, opciones de respuesta bien definidas.	☐	☒	☐	Revisar la preg. 10
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)					
		C	B	A	Total

Coeficiente de validez : $\frac{A + B + C}{30}$ = $0,9\hat{3}$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena

Piura, 11 de agosto de 2018.

Experto

Elaboración: Juan Carlos Zapata Ancajima

Anexos

Anexo 1: Cuestionario

Cuestionario

Nombre: ____

Grado: ____ Edad: ______

En cada situación propuesta indica el procedimiento detallado para responder a cada una de las interrogantes:

1. Si al doble de mi edad le sumo 1 año resulta 9 años ¿Cuál es mi edad?

2. Cierto conductor hizo "n" viajes en un día, transportando 50 trabajadores de una fábrica en cada viaje. ¿Cómo expresarías el número total de trabajadores que transportó ese día?

3. La edad de Pepito más cuatro años es la edad de su hermano mayor. Si el hermano mayor de Pepito tiene 18 años. ¿Cuál es la edad de Pepito?

4. El siguiente cuadrado representa un terreno de cultivo de lado $(\boldsymbol{b}+\mathbf{3})$ ¿Cómo podrías expresar el área del terreno?

5. ¿Cómo escribirías con símbolos o letras las siguientes expresiones?

   f) Un número cualquiera:

   g) La suma de dos números:

   h) La suma de dos números consecutivos:

   i) El quíntuple de un número menos 2:

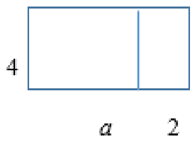
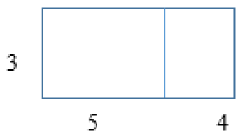
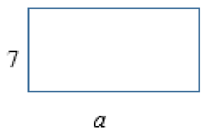
   j) La mitad de un número más 12:

6. Complete las siguientes igualdades colocando el número correcto en el rectángulo:

a) $\square - 8 = 10$ c) $\square(5) = 150$

b) $\square - 25 = 41$ d) $\square + 7 = \square + \square$

7. En el siguiente ejemplo se muestran distintas situaciones del área de un rectángulo mediante el modelo geométrico y la expresión algebraica que lo representa. Completa los recuadros que falten:

<table>
<tr><th>Modelo geométrico</th><th>Visualización simplificada</th><th>Expresión algebraica</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>×</td><td>a</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4a</td><td>8</td></tr></table></td><td>$4\,(a+2) = 4\,a + 8$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

8. Resuelva las siguientes ecuaciones indicando el procedimiento seguido:

- ✓ $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{x-2}{3}$
- ✓ $10 + 4x = 30 - x$
- ✓ $-3x + 7 = 2 + 0.5x$

9. Completa el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene el doble de edad que Sergio, Marta tiene 8 años más que Pedro y Antoni tiene 12 años menos que la suma de las edades de Marta y Sergio.

Datos	Pedro	Antoni	Marta	Sergio
Edad actual				
Edad dentro de diez años				

10. En la columna de la izquierda, se presentan 3 situaciones (No trates de resolverlas). Cada una se resuelve utilizando una de las ecuaciones que aparecen en la columna de la derecha. Relaciona cada una con la ecuación que representa cada situación. Fundamente sus respuestas en cada caso:

¿Cuál es la edad de María, si hace 10 años tenía 40 años?	$x = 10(40)$
Un obrero trabajó 10 horas a la semana, si en total ganó 40 soles. ¿Cuánto gana por hora?	$x = \frac{40}{10}$
1 hectárea de cultivo se abona con 40 kg de fertilizante. ¿Cuántos kg se necesitan para abonar 10 hectáreas?	$x - 10 = 40$

11. Carlos visita la tienda agrícola. Encuentra que tres veces el valor de un fungicida sistémico disminuido en S/ 150 no puede ser más de S/1000.

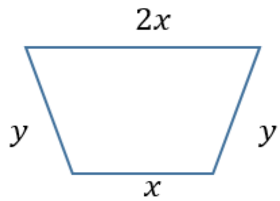
d) ¿Cuál es el precio máximo que puede tener el fungicida?

e) ¿Qué inecuación modela la situación? ¿Cuál es el conjunto solución?

f) Representa gráficamente el conjunto solución. Explica detalladamente el procedimiento seguido en cada pregunta.

12. Para evitar la pérdida de ganado lanar de la comunidad de Tejedores, los pobladores se han propuesto construir corrales de la forma como se muestra en la figura. Si

deciden realizar triple cercado con alambre ¿Qué cantidad total de alambre necesitará un poblador para cercar un corral? Detalle el procedimiento seguido.



13. Se tiene la maqueta de una casa y sus respectivas divisiones ¿cuál sería la expresión algebraica de su perímetro? Explique el proceso seguido