



UNIVERSIDAD
DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

**Actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento
algebraico vía procesos de generalización adaptadas a
un contexto virtual para estudiantes de segundo grado
de Educación Secundaria de una institución educativa
pública de Piura**

Tesis para optar el Título de
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria, especialidad Matemática y Física

**Diego Alonso Alcas Zapata
Lady Stephanie Rafael Febres**

**Asesora:
Mgtr. Flor Manuela Hau Yon Palomino**

Piura, noviembre del 2023

Declaración Jurada de Originalidad del Trabajo Final

Yo, Lady Stephanie Rafael Febres, egresado del Programa Académico de Nivel Secundaria de la Facultad de Especialidad Matemática y Física de la Universidad de Piura, identificado(a) con DNI N° 73676097.

Declaro bajo juramento que:

1. Soy autor del trabajo final titulado:
"Actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico vía procesos de generalización adaptadas a un contexto virtual para estudiantes de segundo grado de Educación Secundaria de una institución educativa pública de Piura"
El mismo que presento bajo la modalidad de Tesis¹ para optar el Título profesional² de Licenciado en Educación.
2. Que el trabajo se realizó en coautoría con los siguientes alumnos de la Universidad de Piura.
 - Diego Alonso Alcas Zapata, identificado con DNI N° 71054515
3. La asesoría del trabajo estuvo a cargo de:
 - Mgtr. Flor Manuela Hau Yong Palomino, identificado con DNI N° 06422599
4. El texto de mi trabajo final respeta y no vulnera los derechos de terceros o de ser el caso derechos de los coautores, incluidos los derechos de propiedad intelectual, datos personales, entre otros. En tal sentido, el texto de mi trabajo final no ha sido plagiado total ni parcialmente, para la cual he respetado las normas internacionales de citas y referencias de las fuentes consultadas.
5. El texto del trabajo final que presento no ha sido publicado ni presentado antes en cualquier medio electrónico o físico.
6. La investigación, los resultados, datos, conclusiones y demás información presentada que atribuyo a mi autoría son veraces.
7. Declaro que mi trabajo final cumple con todas las normas de la Universidad de Piura.

El incumplimiento de lo declarado da lugar a responsabilidad del declarante, en consecuencia; a través del presente documento asumo frente a terceros, la Universidad de Piura y/o la Administración Pública toda responsabilidad que pueda derivarse por el trabajo final presentado. Lo señalado incluye responsabilidad pecuniaria incluido el pago de multas u otros por los daños y perjuicios que se ocasionen.

Fecha: 31/10/2023.



Firma del autor optante³

¹ Indicar si es tesis, trabajo de investigación, trabajo académico o trabajo de suficiencia profesional.

² Grado de Bachiller, Título profesional, Grado de Maestro o Grado de Doctor.

³ Idéntica al DNI; no se admite digital, salvo certificado.



Declaración Jurada de Originalidad del Trabajo Final

Yo, Diego Alonso Alcas Zapata, egresado del Programa Académico Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, identificado(a) con DNI 71054515

Declaro bajo juramento que:

1. Soy autor del trabajo final titulado:
"Actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico vía procesos de generalización adaptadas a un contexto virtual para estudiantes de segundo grado de Educación Secundaria de una institución educativa pública de Piura"
El mismo que presento bajo la modalidad de Tesis ¹ para optar el (Título profesional/Grado Académico²) de ~~Título Profesional~~.
2. Que el trabajo se realizó en coautoría con los siguientes alumnos de la Universidad de Piura.
 - Lady Stephanie Rafael Febres, identificado con DNI N° 73676097
3. La asesoría del trabajo estuvo a cargo de:
 - Mgtr. Flor Manuela Hau Yon Palomino, identificado con DNI N° 06422599
4. El texto de mi trabajo final respeta y no vulnera los derechos de terceros o de ser el caso derechos de los coautores, incluidos los derechos de propiedad intelectual, datos personales, entre otros. En tal sentido, el texto de mi trabajo final no ha sido plagiado total ni parcialmente, para la cual he respetado las normas internacionales de citas y referencias de las fuentes consultadas.
5. El texto del trabajo final que presento no ha sido publicado ni presentado antes en cualquier medio electrónico o físico.
6. La investigación, los resultados, datos, conclusiones y demás información presentada que atribuyo a mi autoría son veraces.
7. Declaro que mi trabajo final cumple con todas las normas de la Universidad de Piura.

El incumplimiento de lo declarado da lugar a responsabilidad del declarante, en consecuencia; a través del presente documento asumo frente a terceros, la Universidad de Piura y/o la Administración Pública toda responsabilidad que pueda derivarse por el trabajo final presentado. Lo señalado incluye responsabilidad pecuniaria incluido el pago de multas u otros por los daños y perjuicios que se ocasionen.

Fecha: 31/10/2023



Firma del autor optante³

¹ Indicar si es tesis, trabajo de investigación, trabajo académico o trabajo de suficiencia profesional.

² Grado de Bachiller, Título de profesional, Grado de Maestro o Grado de Doctor.

³ Idéntica a DNI, no se admite digital salvo certificado.

Dedicatoria

A Dios, porque nos guardó en todo momento, nos dio las fuerzas necesarias para sacar adelante nuestra tesis. A nuestra familia y seres queridos, que siempre están con nosotros animándonos y brindándonos todo su apoyo posible.

A la mascota que siempre estuvo al pendiente de nuestros avances, te queremos mucho Gomita.



Agradecimientos

A Dios, por cuidarnos y brindarnos fortaleza para sacar adelante nuestro trabajo.

A nuestra familia que siempre nos apoya y nos da ánimos.

A PRONABEC, quienes nos dieron la oportunidad de cumplir con este sueño de ser docentes.

A nuestra asesora, Mgtr. Flor Manuela Hau Yon Palomino, por su tiempo y ayuda para desarrollar nuestra tesis.

A nuestra profesora Dra. Emma Carreño Peña, por su ayuda y orientaciones brindadas.

A nuestros amigos y colegas, Jenry Calvay, Roly Gonzales y Nilson Pérez; quienes han sido de gran ayuda para que este trabajo se desarrolle.

Y de manera especial, a Tania Correa por su constante apoyo y motivación.



Resumen

La transición de la aritmética al álgebra supone en el estudiante muchas dificultades al momento de enfrentarse a este proceso, ya que la complejidad de esta última rama de la matemática se muestra como un factor determinante. En la presente investigación se adaptan actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico vía procesos de generalización para aplicarlas en un contexto de educación virtual con estudiantes de segundo de secundaria de una institución educativa pública de la ciudad de Piura. Para ello, se identificaron inicialmente diez investigaciones referidas a la temática, de las cuales tres de ellas han sido elegidas para su análisis a partir de criterios establecidos según los objetivos planteados en este trabajo y tomando como referencia las teorías de Mason, Graham, Pimm y Gower; y de Radford, quienes señalan las fases que deben seguirse en el proceso de generalización, que es una vía clave para desarrollar el pensamiento algebraico. De estas tres investigaciones elegidas, se analizó la viabilidad de cada una para poder ser desarrollada en un contexto virtual utilizando como recurso un geoplano virtual, así pues resultó como más viable la propuesta “La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar”. El trabajo pretende determinar las incidencias de la aplicación de dichas actividades, en quince estudiantes de segundo grado de secundaria, para así brindar a la comunidad educativa docente, una justificación para la implementación de estas, en un contexto de enseñanza virtual. Por ende, esta investigación se sitúa en el paradigma empírico-analítico, ya que se pretende desarrollar pensamiento algebraico a través de procesos de generalización. A partir de los resultados, se observa que la aplicación de las actividades adaptadas ha tenido un impacto positivo en las estudiantes, ya que la mayoría ha logrado el desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización y además les ha resultado muy motivante utilizar herramientas tecnológicas.

Tabla de contenido

Introducción	13
Capítulo 1. Planteamiento de la investigación	15
1.1 Caracterización de la problemática	15
1.2. Objetivos	16
1.2.1 <i>Objetivo general</i>	16
1.2.2 <i>Objetivos específicos</i>	17
1.3 Antecedentes de la investigación.....	17
1.3.1 <i>Antecedentes internacionales</i>	17
1.3.2 <i>Antecedentes nacionales</i>	20
1.4. Justificación de la investigación	22
Capítulo 2. Marco teórico	25
2.1 Enseñanza-Aprendizaje del álgebra escolar	25
2.1.1 <i>El álgebra escolar y su importancia</i>	25
2.1.2 <i>Obstáculos, dificultades y errores en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra</i>	26
2.1.3. <i>Tipos de errores en el aprendizaje del álgebra</i>	28
2.1.4 <i>Vías de acceso al desarrollo del pensamiento algebraico</i>	31
2.2 Procesos de generalización	32
2.2.1 <i>Fases del proceso de generalización según Mason, Graham, Gower y Pimm</i>	33
2.2.2 <i>Fases del proceso de generalización según Radford</i>	34
2.2.3 <i>Dificultades en los procesos de generalización</i>	36
2.3 Educación virtual	38
2.3.1 <i>De la educación a distancia a la educación virtual</i>	38
2.3.2 <i>Rol del docente y el estudiante en la educación virtual</i>	40
2.3.3 <i>Ventajas y desventajas de la educación virtual</i>	42
2.3.4 <i>Educación virtual y currículo peruano</i>	45
2.3.5 <i>Tecnología aplicada a la enseñanza de la matemática</i>	47
Capítulo 3. Marco metodológico	50
3.1 Tipo y diseño de investigación	50
3.2 Población y muestra	51
3.3 Variables	52
3.4 Recogida de información.....	52
3.4.1 <i>Aplicación de los criterios definidos a las propuestas metodológicas</i>	53
3.4.2 <i>Análisis de las propuestas metodológicas según las teorías de Mason, Graham, Pimm y Gower; y de Radford</i>	55

3.4.3 Elección y adaptación de las actividades desarrolladas a partir de la propuesta metodológica PG6.	62
3.5 Instrumento de recolección de datos	63
3.6 Procesamiento de datos para el análisis	64
Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados	69
4.1 Análisis sobre disponibilidad y uso de medios tecnológicos.....	69
4.2 Análisis de los resultados obtenidos de la aplicación del Test 1 y Test 2.....	72
4.2.1 Análisis del Test 1 (grupal)	73
4.2.2 Análisis del Test 2 (individual)	83
4.3 Resultados del cuestionario final sobre la aplicación de las actividades virtuales	96
Conclusiones	113
Referencias	116
Apéndices	124
Apéndice A. Hallazgos del documento PG2.....	125
Apéndice B. Hallazgos del documento PG10.....	136
Apéndice C. Actividad 3, Actividad 4, Actividad 5 y Actividad 6 del PG6.....	151
Apéndice D. Encuesta para conocer la disponibilidad de medios tecnológicos	153
Apéndice E. Cuestionario final sobre la aplicación de las actividades virtuales.....	154
Apéndice F. Actividades aplicadas para el desarrollo del pensamiento algebraico utilizando el geoplano virtual	156
Apéndice G. Puntaje obtenido según el criterio 1: Objetivos de las investigaciones	157
Apéndice H. Puntaje obtenido según el criterio 2: Teoría en que se basan las investigaciones.....	158
Apéndice I. Puntaje obtenido según el criterio 3: Secuencia de actividades trabajadas en cada investigación.....	159
Apéndice J. Puntaje obtenido según el criterio 4: Resultados obtenidos	162
Apéndice K. Guía de uso del geoplano virtual: “Geoboard”	165
Apéndice L. Sesiones de clase sobre procesos de generalización	173
Apéndice M. Rúbricas de evaluación del Test 1	187
Apéndice N. Rúbrica de evaluación del Test 2.....	188

Lista de tablas

Tabla 1	Procedimiento metodológico de la investigación	50
Tabla 2	Codificación de los documentos seleccionados	52
Tabla 3	Puntaje total obtenido por cada documento según los criterios aplicados.....	55
Tabla 4	Análisis de la actividad N° 1 del PG6	57
Tabla 5	Análisis de la actividad N° 2 del PG6	60
Tabla 6	Ficha de observación del Test 1	63
Tabla 7	Ficha que se utilizó para el análisis del Test 1	65
Tabla 8	Ficha que se utilizó para el análisis del Test 2	65
Tabla 9	Rúbrica utilizada para evaluar el Test 1 (trabajo grupal)	66
Tabla 10	Rúbrica utilizada para evaluar el Test 2 (trabajo individual)	67
Tabla 11	Codificación de la muestra de las estudiantes participantes	72
Tabla 12	Distribución de las estudiantes por grupo	73
Tabla 13	Resultados de la aplicación de la ficha de observación del Test 1	74
Tabla 14	Resultados sobre la regla de generalización planteada por cada grupo.....	81
Tabla 15	Puntaje obtenido a partir de la rúbrica de evaluación del Test 1	82
Tabla 16	Puntaje obtenido a partir de la rúbrica de evaluación del Test 2	90
Tabla 17	Tabla comparativa de los resultados obtenidos en el Test 1 y Test 2	92
Tabla 18	Resultados del ítem 1 respecto al recurso tecnológico Geoplano virtual.....	97
Tabla 19	Resultados del ítem 1 respecto al recurso tecnológico Excel	98
Tabla 20	Resultados del ítem 1 respecto al recurso tecnológico Google Forms	99
Tabla 21	Resultados del ítem 1 respecto al recurso tecnológico Google Sites.....	99
Tabla 22	Resultados del ítem 2 respecto al recurso tecnológico Geoplano Virtual	100
Tabla 23	Resultados del ítem 2 respecto al recurso tecnológico Excel	101
Tabla 24	Resultados del ítem 2 respecto al recurso tecnológico Google Forms	102
Tabla 25	Resultados del ítem 2 respecto al recurso tecnológico Google Sites.....	103
Tabla 26	Resultados ítem 3 respecto a la motivación que genera usar recursos tecnológicos en clase	104
Tabla 27	Resultados ítem 4 respecto a la secuencia de actividades trabajadas durante las sesiones de clase.....	105
Tabla 28	Resultados ítem 5 respecto al ambiente de trabajo y relaciones entre compañeros en Zoom	106
Tabla 29	Resultados ítem 6 respecto a la retroalimentación brindada por los docentes en las sesiones de clase.....	107
Tabla 30	Resultados ítem 7 respecto al tiempo destinado para el desarrollo de las actividades	108

Tabla 31 Resultados ítem 8 respecto a los aprendizajes logrados durante las sesiones de clase	109
Tabla 32 Resultados ítem 9 respecto a los objetivos definidos en cada sesión de clase.....	109
Tabla 33 Resultados generales de los primeros nueve ítems	110
Tabla 34 Resultados ítem 10 respecto al trabajo realizado de manera virtual	111



Lista de figuras

Figura 1 Secuencia de flechas	34
Figura 2 Adaptación de la secuencia de flechas.....	37
Figura 3 Actividad propuesta N° 1.....	56
Figura 4 Actividad propuesta N° 2.....	59
Figura 5 Pregunta para conocer con qué recursos tecnológicos cuentan las estudiantes	69
Figura 6 Resultados pregunta 1	70
Figura 7 Pregunta para conocer si las estudiantes conocen Excel.....	70
Figura 8 Resultados pregunta 2	70
Figura 9 Pregunta para conocer si las estudiantes han utilizado Excel.....	71
Figura 10 Resultados pregunta 3	71
Figura 11 Actividad propuesta para Fase 1.....	76
Figura 12 Respuestas del grupo 3 en la Fase 1	76
Figura 13 Respuesta del grupo 5 en la Fase 1.....	77
Figura 14 Actividad propuesta para Fase 2.....	77
Figura 15 Respuestas del grupo 1 en la Fase 2	78
Figura 16 Actividad propuesta para la Fase 3	79
Figura 17 Respuestas del grupo 2 para la Fase 3.....	79
Figura 18 Respuestas del grupo 5 para la Fase 3	80
Figura 19 Actividad propuesta para Fase 4.....	80
Figura 20 Puntajes obtenidos por cada grupo en el Test 1.....	82
Figura 21 Nivel de logro alcanzado por cada grupo en el Test 1	83
Figura 22 Actividad propuesta para Fase 1 del Test 2	83
Figura 23 Respuesta de la E5 para la Fase 1	84
Figura 24 Respuesta de la E6 para la Fase 1	84
Figura 25 Actividad propuesta para la Fase 2 del Test 2.....	85
Figura 26 Respuesta de la E1 a la Fase 2.....	85
Figura 27 Respuesta de la E3 a la fase 2	86
Figura 28 Actividad propuesta para la Fase 3 del Test 2.....	86
Figura 29 Respuesta de la E5 a la Fase 3.....	87
Figura 30 Respuesta de la E13 a la Fase 3.....	87
Figura 31 Actividad propuesta para la Fase 4 del Test 2.....	88
Figura 32 Respuesta de la E15 a la Fase 4.....	88
Figura 33 Respuesta de la E1 a la Fase 4.....	89
Figura 34 Gráfico de los puntajes obtenidos al aplicarse la rúbrica	91

Figura 35 Nivel de logro obtenido en el Test 2	91
Figura 36 Resultado del ítem 1 – a respecto al recurso tecnológico Geoplano virtual	97
Figura 37 Resultado del ítem 1 – b respecto al recurso tecnológico Excel.....	98
Figura 38 Resultado del ítem 1 – c respecto al recurso tecnológico Google Forms	99
Figura 39 Resultado del ítem 1 – d respecto al recurso tecnológico Google Sites	100
Figura 40 Resultado del ítem 2 – a respecto al recurso tecnológico Geoplano Virtual.....	101
Figura 41 Resultado del ítem 2 – b respecto al recurso tecnológico Excel.....	102
Figura 42 Resultado del ítem 2 – c respecto al recurso tecnológico Google Forms	103
Figura 43 Resultado del ítem 2 – d respecto al recurso tecnológico Google Sites	103
Figura 44 Resultados ítem 3 respecto a la motivación que genera usar recursos tecnológicos en clase	104
Figura 45 Resultados ítem 4 respecto a la secuencia de actividades trabajadas durante las sesiones de clase.....	105
Figura 46 Resultados ítem 5 respecto al ambiente de trabajo y relaciones entre compañeros en Zoom	106
Figura 47 Resultados ítem 6 respecto a la retroalimentación brindada por los docentes en las sesiones de clase	107
Figura 48 Resultados ítem 7 respecto al tiempo destinado para el desarrollo de las actividades.....	108
Figura 49 Resultados ítem 8 respecto a los aprendizajes logrados durante las sesiones de clase.....	109
Figura 50 Resultados ítem 9 respecto a los objetivos definidos en cada sesión de clase	110
Figura 51 Resultados generales de los primeros nueve ítems.....	111

Introducción

La necesidad de promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años de Educación Secundaria surge a partir de las dificultades que los estudiantes presentan al momento de transitar de la aritmética al álgebra, lo cual sería más sencillo si se les introdujera previamente ideas y formas de pensar propias del álgebra. Frente a esta situación, se han buscado distintas formas de llegar a desarrollar este pensamiento, entre las cuales destaca el uso de los procesos de generalización como ruta o vía de acceso al pensamiento algebraico. En relación a esto, los autores Mason et al. (1985) y Radford, han propuesto una serie de fases y etapas respectivamente, que consideran parte de dichos procesos y que es importante que se logren evidenciar dentro de las actividades que se plantean en el aula de clase.

De la revisión de las propuestas metodológicas que abordan esta temática, se ha identificado que la mayoría de autores diseñan actividades que se implementan en entornos presenciales, donde los estudiantes interactúan físicamente con el docente y sus compañeros. Sin embargo, muchos docentes no cuentan con actividades para ser aplicadas en un contexto virtual. En este sentido, la realización de la presente investigación resulta pertinente, ya que se analizan distintas propuestas metodológicas enfocadas a promover los procesos de generalización, tomando como base las teorías propuestas por Mason et al. (1985) y Radford, de las cuales ninguna había sido aplicada anteriormente en un contexto de educación virtual, de ahí la importancia de elegir una de ellas con el propósito de seleccionar actividades que puedan ser adaptadas y aplicadas en un entorno de enseñanza virtual. En este trabajo se ha seguido el paradigma empírico-analítico, ya que se pretende determinar las incidencias de la aplicación de actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización en estudiantes de segundo grado de secundaria.

Este trabajo consta de cuatro capítulos. En el primero de ellos se presenta el planteamiento de la investigación, en el cual se expone la problemática abordada, la pregunta de investigación, los antecedentes tanto nacionales como internacionales, el objetivo general y los específicos y, la justificación.

El segundo capítulo corresponde al marco teórico, donde se presenta información de distintos autores, que permiten fundamentar la investigación, se aborda la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar, procesos de generalización y educación virtual.

En el tercer capítulo se presentan los aspectos metodológicos y se describen las características de la investigación, los documentos analizados y la descripción de los instrumentos de recolección y procesamiento de datos para el análisis de los resultados de las actividades aplicadas.

En el cuarto capítulo, se realiza el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de dos actividades y de la encuesta realizada sobre el grado de satisfacción de las estudiantes respecto a las actividades desarrolladas virtualmente utilizando recursos TIC.

Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones de la investigación, en relación con los objetivos planteados inicialmente.



Capítulo 1. Planteamiento de la investigación

1.1 Caracterización de la problemática

Una de las ramas de la matemática que ocasiona que muchos estudiantes presenten una serie de dificultades en su comprensión y no le encuentren cierto sentido, es el álgebra, lo cual es preocupante ya que el álgebra permite que el estudiante desarrolle un pensamiento más abstracto, donde la aparición de símbolos y variables que acompañan los números y que se aplican en problemas matemáticos o de la vida cotidiana, ocasionan que el cerebro se estimule y aprenda a organizar sus formas de pensar. Sin embargo, al carecer de su comprensión y la presencia de dificultades, se hace cada vez más complejo el desarrollo del pensamiento algebraico, que se concibe como una forma de reflexionar matemáticamente (Radford, 2010).

Debido a lo anterior, autores de diversos países como Colombia (González y Velandia, 2017; Guzmán y Ávila, 2020; Luque y Mena, 2016; Ruiz, 2016), México (Arriaga, 2008) y Perú (García, 2018) han realizado propuestas metodológicas conformadas por una serie de actividades que buscan desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes que cursan los primeros años de educación secundaria, y entre estas destacan los procesos de generalización como una vía a su acceso (Mason et al., 1985, como se citó en Arriaga, 2008). Dichos procesos permiten que los estudiantes logren percibir una regularidad, expresándola y comunicándola hasta llegar a una regla general, que además de favorecer la abstracción matemática en el estudiante, también permiten dar solución a diversas situaciones de manera más fácil y sencilla. Este tipo de propuestas son importantes, ya que visualizan la necesidad de orientarse hacia el uso de símbolos que permitan representar una generalidad y posean un grado significativo para los estudiantes lo cual facilita su comprensión y el trabajo dentro del aula (González y Velandia, 2017).

Las actividades que comprenden estas propuestas han sido aplicadas en aula y algunas de ellas se han podido validar a través del recojo de datos de alguna muestra determinada de estudiantes, siguiendo cada una de las acciones de los estudiantes a través de la observación y permitiendo que en ocasiones manipulen objetos concretos con los cuales se trabaja. Sin embargo, ante la situación de pandemia donde la enseñanza se ha impartido virtualmente o de manera híbrida, se presentó una mayor dificultad para trabajar con los estudiantes debido a que muchos de ellos y sus docentes no se encontraban preparados para atravesar una situación de tal magnitud, donde la falta de manejo de herramientas tecnológicas o carencia de las mismas, así como la falta de preparación docente para tal situación, se evidenciaron notablemente. De hecho, la pandemia ocasionó el cierre de los espacios educativos y afectó al 94% de la población estudiantil mundial (ONU, 2020, como se citó en García 2021).

A pesar de que la enseñanza virtual resultó compleja, era evidente la necesidad de adaptarse a la nueva realidad y buscar la mejor manera de desarrollar los procesos de enseñanza a través de la

innovación, pensando una y otra vez la planificación de nuevas experiencias (Gagliardi, 2020). En este sentido, a partir de la revisión de los documentos, se observó que todas las propuestas metodológicas han sido diseñadas para ser aplicadas en un contexto de educación presencial. Ante esto, nuestro trabajo consistió en adaptar las actividades que se presentan en tales propuestas para poder ser aplicadas a un contexto de educación virtual. Es decir, trabajamos para “hacer que un objeto o mecanismo desempeñe funciones distintas de aquellas para las que fue construido” (Real Academia Española, 2022).

Sin duda, realizar adaptaciones no resulta una tarea sencilla, requiere conocer la situación y características en las que se encuentran los estudiantes y los docentes, buscando garantizar la inclusión y una enseñanza de calidad, ya sea en un aula o en una videollamada (Gagliardi, 2020). Esto quiere decir que la tarea del docente, al aplicar algún tipo de propuesta metodológica en un contexto virtual, siempre se dirija a que el estudiante logre el aprendizaje esperado y en este caso, específicamente, logre el desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización en un contexto no presencial.

Ahora bien, como decíamos inicialmente, las propuestas metodológicas que buscan el desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización se dan en su mayoría durante los primeros años de educación secundaria, por lo que cualquier tipo de adaptación que se realice, debe tener en cuenta que se trabajará con estudiantes de esos años. Ante esto, resulta también importante conocer qué incidencias se presentan al aplicar una propuesta metodológica en un contexto de educación virtual. Debido a la problemática mencionada y según el análisis de las investigaciones consultadas surge entonces la siguiente pregunta:

¿Qué incidencias se presentan en la aplicación de actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización en estudiantes de segundo grado de secundaria?

Para responder a la pregunta anterior, se hizo una revisión bibliográfica, de la que se seleccionaron actividades de una propuesta metodológica referida a la problemática antes mencionada, la cual fue adaptada y aplicada a un grupo de estudiantes de segundo grado de secundaria, para analizar sus resultados y el efecto en ellos.

1.2. Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Determinar las incidencias de la aplicación de actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización en estudiantes de segundo grado de secundaria.

1.2.2 Objetivos específicos

- a) Identificar propuestas metodológicas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización.
- b) Evaluar las actividades que las propuestas metodológicas presentan respecto a los procesos de generalización a la luz de las teorías de Mason, Graham, Pimm y Gower; y de Radford.
- c) Seleccionar y adaptar a un contexto de enseñanza virtual, actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico a través de procesos de generalización, para aplicarlas en estudiantes de segundo grado de secundaria.
- d) Describir y analizar los resultados obtenidos por las estudiantes en los test aplicados.

1.3 Antecedentes de la investigación

Luego de realizar una búsqueda bibliográfica tanto a nivel internacional, nacional y regional, se han identificado las investigaciones más relevantes que anteceden nuestra investigación, de modo que, se tienen tres antecedentes internacionales y tres nacionales.

1.3.1 Antecedentes internacionales

Entre las distintas propuestas metodológicas que buscan desarrollar los procesos de generalización, destaca el aporte de Luque y Mena (2016), quienes en su tesis de especialización titulada “La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar”, la cual se llevó a cabo en Colombia, nos presentan el diseño de una cartilla con actividades para profesores donde se promueve el desarrollo de procesos de generalización de patrones geométricos y numéricos, utilizando el geoplano cuadrado. Este trabajo tuvo como objetivo promover el uso del geoplano como mediador para potenciar el proceso de generalización en los estudiantes y se fundamenta en la necesidad de los docentes por contar con material didáctico que permita desarrollar en los estudiantes los procesos de generalización en el álgebra escolar. La metodología empleada en este trabajo se dividió en tres partes: primero se realizó la presentación de la propuesta, luego se describió la prueba piloto a aplicar y finalmente se dio la socialización de dicha prueba, lo cual permitió identificar si los estudiantes siguieron los pasos del proceso de generalización y a partir de ello tomar esta información como base para la elaboración de todas las actividades de la cartilla o propuesta metodológica. Algunas de las conclusiones a las que llegaron señalan que el geoplano cuadrado es un material didáctico que se puede utilizar en el estudio del álgebra escolar en procesos de generalización; asimismo, la observación de la prueba piloto permitió apreciar que los estudiantes tuvieron que pasar por determinadas etapas. El aporte de estos autores a nuestra investigación radica en que, de esta cartilla de actividades se han podido seleccionar algunas para ser adaptadas al contexto virtual, ya que promueve el uso del geoplano cuadrado como material didáctico, lo cual es

un gran recurso que puede llevarse a cabo tanto en un contexto presencial como virtual, debido a herramientas tecnológicas que lo hacen accesible. De igual forma, dichas actividades promueven los procesos de generalización y evidencian claramente los pasos que se siguen en dicho proceso.

Asimismo, sabemos que una de las diferencias entre el entorno presencial y virtual, es el trabajo concreto con ciertos materiales con los que el estudiante puede trabajar durante las sesiones de clase, sin embargo, los simuladores como herramientas didácticas se han convertido en un gran apoyo para que se continúe trabajando con los estudiantes y ellos puedan seguir haciendo manipulaciones del material, en forma virtual. Es por ello, que Trespalacios y Paijón (2019), en su proyecto de investigación para optar el grado de maestría en Colombia, titulado “Efecto del uso del geoplano en el desarrollo del pensamiento geométrico, en relación con la aprehensión conceptual y operacional de polígonos”, analizan e interpretan resultados obtenidos, de un grupo de estudiantes de 5° de básica primaria de entre 10 y 12 años, al implementar la estrategia del geoplano como herramienta didáctica de forma física y virtual, con el objetivo de determinar el efecto en el desarrollo del pensamiento geométrico, en relación con la aprehensión conceptual y operacional de polígonos. El trabajo se fundamenta en la necesidad de lograr un aprendizaje significativo de contenidos geométricos, ya sea de forma presencial o virtual por medio del uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y herramientas abiertas para el aprendizaje como el uso de simuladores. En cuanto a la metodología, la investigación se enmarca en el paradigma empírico-analítico, con un diseño cuasiexperimental; se trabaja con dos secciones de 30 estudiantes cada una, un grupo control y el otro experimental, aplicándoseles un pre test y un post test para el recojo y análisis de datos. Este estudio permitió comprobar el efecto del uso del geoplano como herramienta didáctica para estructurar el pensamiento concreto, que las mediaciones didácticas concretas o virtuales de éste, facilitan la comprensión de los objetos geométricos y los elementos semióticos para la formación conceptual de los elementos geométricos. El aporte de dichos autores para la presente investigación radica en que al igual que ellos, nosotros utilizamos el geoplano virtual como herramienta didáctica para favorecer el aprendizaje significativo que, si bien nos enfocamos en álgebra, nos brinda una idea de los resultados favorables al utilizar esta herramienta.

Existen trabajos de investigación que abordan en cierta forma la educación virtual, ya sea en cuanto al diseño de propuestas metodológicas o mostrando algunos recursos didácticos para la misma. Ante esto, Almendro (2014) en su trabajo de fin de máster: “Utilización de la hoja de cálculo Excel como recurso didáctico para facilitar el aprendizaje de matemáticas en 3° de Educación Secundaria Obligatoria (ESO)” la cual se desarrolló en España, nos presenta propuestas de enseñanza utilizando como recurso didáctico las hojas de Excel para el aprendizaje de funciones y números reales. El problema que aborda el autor radica en que se evidencia poco uso de las TIC y, por tanto, un bajo desarrollo de la competencia digital. La metodología empleada en este trabajo profundiza en

un estudio cualitativo, que analiza en qué medida la literatura corrobora que las TIC, y en concreto la hoja de cálculo Excel, contribuye a la enseñanza de las matemáticas en 3° de ESO. Por ello, basándose en las hojas de cálculo, un recurso que se podría utilizar en una enseñanza virtual, ha podido concluir que la utilización de las hojas de cálculo, como recurso didáctico, se muestra como una gran herramienta para el proceso de enseñanza-aprendizaje de algunos contenidos matemáticos; además, que utilizar las TIC en educación es conveniente debido a las posibilidades que genera; y por último, el uso de las hojas de cálculo facilita al estudiante adquirir competencias básicas y contenidos del área de matemática. El aporte de Almendro a nuestro trabajo se enmarca en la posibilidad de diseñar actividades para una enseñanza virtual, utilizando recursos que potencian el aprendizaje, ello sumado a las adaptaciones que se podrían identificar y ser tomadas en cuenta para realizar las posibles adaptaciones a las actividades a proponer en nuestro trabajo.

Con el fin de comprender un poco más la producción de expresiones algebraicas simbólicas realizadas por estudiantes que se encuentran en el periodo de iniciación en el álgebra, Radford (2003) en su artículo titulado “Gestos, habla y el surgimiento de signos: Un enfoque semiótico cultural de los tipos de generalización de los estudiantes”, presenta una descripción de los procedimientos que realizan los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones que conllevan procesos de generalización. El problema que aborda este autor no se enfoca en los errores que cometen los estudiantes al enfrentarse a este tipo de actividades de generalización, sino en conocer cómo el cuerpo, discurso, y los signos influyen al momento de referirse a objetos matemáticos. Se emplea una metodología cualitativa, pues se centra en comprender los procesos que se producen en los estudiantes cuando abordan tareas referidas al álgebra, esto a través de una descripción de la experiencia estudiante-tarea, para luego poder expresar coincidencias y similitudes identificadas, y que de alguna forma le valió para generar tres ideas principales que indican cómo ha actuado el estudiante al enfrentarse a actividades de generalización. Así pues, el autor llegó a concluir que el estudiante recorre tres fases para poder llegar a la generalización: fáctica, contextual, y simbólica. Por tanto, para que haya una generalización simbólica, el estudiante ha tenido que ir más allá de solo expresar con gestos o términos lingüísticos su comprensión de un patrón determinado. El aporte de Radford a nuestra investigación se centra en que este propone tres fases por las cuales los estudiantes han de transitar hacia la generalización simbólica o expresión de una regla general, por lo que son tres escenarios que se deberán considerar si se quiere proponer actividades basadas en procesos de generalización, así pues, las bases teóricas de Radford representan un aporte al presente trabajo ya que en el análisis de las actividades se utilizan las mismas fases: fáctica, contextual y simbólica para desarrollar los procesos de generalización.

Otro de los trabajos que ha tomado en cuenta las fases de los procesos de generalización es el propuesto por Arriaga (2008), quien es su tesis de maestría titulada “Procesos de generalización

con estudiantes de 1° y 2° de secundaria de una escuela pública del distrito federal: una propuesta de enseñanza”, la cual se desarrolló en México, analizó las dificultades que presentan los estudiantes en el acceso al pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización, para a partir de ello diseñar una secuencia didáctica, además observó cómo es la interacción social y sus implicancias en el aprendizaje de contenidos matemáticos. Este estudio se ha realizado considerando una metodología cualitativa, así pues, la investigadora realizaba ajustes pertinentes a la secuencia didáctica según el avance del estudio. Este se desarrolló en 3 fases: aplicación de un pretest y una entrevista ad-hoc, diseño de la secuencia didáctica y aplicación de un cuestionario final. La autora concluyó que, en la primera etapa, los estudiantes tuvieron dificultades para resolver problemas de secuencias, percibir patrones, y hallar una fórmula general; en la segunda etapa, los estudiantes trabajaron en pareja y lograron desarrollar actividades de proporcionalidad geométrica y secuencias de figuras, sin embargo, tuvieron dificultad en el planteamiento de fórmulas; en la tercera etapa, los estudiantes lograron plantear reglas o fórmulas sin necesidad de ayuda. Se comprobó que los estudiantes lograron desarrollar los cuatro pasos propuestos por Mason et al. (1985), esto en base al avance obtenido en cada etapa del estudio. El aporte a nuestro trabajo radica en que el marco teórico utilizado por Arriaga nos sirve de base para realizar el análisis correspondiente a las propuestas metodológicas seleccionadas, en donde se ha tomado en cuenta las cuatro fases de generalización propuestas por Mason et al. (1985)

1.3.2 Antecedentes nacionales

La adaptación de una propuesta metodológica en el área de Matemática requiere del uso de ciertas herramientas que permitan llegar al estudiante y faciliten su comprensión frente a un contexto de educación virtual, es por ello que, consideramos importante citar el estudio documental realizado por Sánchez (2020), quien en su artículo “Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas durante la pandemia COVID-19”, realiza una revisión y análisis de la literatura, acerca de herramientas tecnológicas utilizadas en el área de Matemática, con una temporalización de los años: 2016 – 2020, complementando con su experiencia de aula en los primeros meses del año escolar 2020 con estudiantes del VII ciclo de la Educación Básica Regular (EBR). El objetivo del trabajo tuvo como finalidad evaluar diversas herramientas tecnológicas y describir aquellas que cumplen con ciertas características mínimas y que son asequibles, tanto para el docente como para los estudiantes, identificando aquellas herramientas que se utilizan de manera síncrona y asíncrona. Este trabajo se fundamenta en la necesidad del docente de amoldar o adaptar la enseñanza de las matemáticas al contexto virtual, viéndose en la obligación de desarrollar o adquirir competencias digitales. Respecto a la metodología empleada, se trata de un estudio de revisión descriptiva, por lo que se realiza un análisis desde la perspectiva de los autores que se referencian, lo cual facilita al docente un listado de herramientas sincrónicas y asincrónicas que ayudan en la adaptación de los

contenidos del área de Matemática y favorecen al logro del aprendizaje del estudiante, ayudándolo a interiorizar y comprender el porqué de los temas del área. Entre las principales conclusiones que destaca la autora tenemos que: las herramientas digitales que se han presentado en el periodo de educación virtual a partir de la pandemia facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; lo concreto, gráfico, y abstracto, son aspectos que deben estar siempre presentes en la enseñanza. El aporte de Sánchez para la presente investigación radica en que, si bien puede ayudar en el desarrollo de cada una de las competencias del área de Matemática, en su mayoría se encuentra enfocado en la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, la cual se relaciona con el álgebra y por ende enriquece a nuestra investigación ya que parte de este trabajo es adaptar una propuesta metodológica enfocada precisamente en el desarrollo del pensamiento algebraico; además, nos ofrece un panorama de algunas herramientas tecnológicas que pueden ser utilizadas y aprovechadas en las clases de matemática.

Otro trabajo relacionado con la utilización de herramientas tecnológicas para abordar la enseñanza de la matemática es el de Apaza y Gamarra (2018), quienes en su tesis de Licenciatura titulada: “Influencia del uso de herramientas algebraicas y geométricas del GeoGebra para mejorar el aprendizaje en la competencia resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio, en estudiantes del tercer grado de secundaria de la I.E. Cornejo Acosta, Cayma – 2017”, nos presentan un análisis de la eficacia de implementar y aplicar el software GeoGebra en las sesiones de clase sobre los temas de sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas, específicamente en los niveles de logro en el aprendizaje de 36 estudiantes. La metodología empleada en este trabajo consiste en una investigación de campo, de Nivel Descriptivo Explicativo Cuasi experimental. Este análisis permitió evidenciar que la utilización de herramientas tecnológicas en determinados temas, se pueden aplicar a temas similares, además que su uso influye significativamente en la mejora de los aprendizajes en los estudiantes. Una de las conclusiones que se puede resaltar de este trabajo es que el uso de las herramientas algebraicas y geométricas del GeoGebra influyó significativamente en la mejora del aprendizaje en la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Es por esta razón que aporta a nuestra investigación, ya que la forma en cómo se ha adecuado esta herramienta tecnológica ha permitido el desarrollo de la competencia antes mencionada, siendo esta la que se aborda y se relaciona con el álgebra escolar y el desarrollo de los procesos de generalización.

Caycho (2019), en su tesis de maestría titulada: “Incentivando el uso de un entorno virtual en el área de Matemática para los estudiantes de primer grado de secundaria de una institución educativa privada de Lima”, propone una forma de trabajo basada en entornos virtuales para la enseñanza de la Matemática, la cual está dirigida, en principio, a 116 estudiantes de primer grado de educación secundaria, y 5 maestros de Matemática de educación secundaria. La autora propone

nuevas estrategias de aprendizaje, abordadas desde un entorno virtual, a partir del bajo nivel de desarrollo de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio en los estudiantes de primero de secundaria. Los investigadores diseñaron un plan para alcanzar los objetivos que propusieron, de modo tal que se consideren recursos didácticos y estrategias metodológicas que puedan emplear los profesores de matemática del nivel secundario en un entorno virtual. Con lo anterior, los investigadores pudieron diseñar y aplicar una experiencia piloto. Este trabajo pudo evidenciar que, la incorporación de estrategias basadas en las TIC eleva el nivel de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos, el maestro cumple un rol fundamental en la guía y orientación en cuanto al uso de estas herramientas tecnológicas. Entre las conclusiones principales se destaca que la propuesta permitió evidenciar que, la utilización de recursos didácticos virtuales y el trabajo en equipo potencian el aprendizaje; para resolver problemas, los estudiantes prefieren trabajar en entornos virtuales, y utilizar aplicaciones tecnológicas tal como Google Classroom que proporciona múltiples ventajas para aplicar exámenes en línea, enviar información, crear foros, tareas, etc. El aporte a nuestra investigación radica en que, Caycho sigue un proceso para poder plantear la propuesta, toma en cuenta recursos didácticos y estrategias metodológicas enfocadas en una enseñanza virtual; además, considerando que su trabajo está en la línea investigativa nuestra, proporcionará aportes significativos.

1.4. Justificación de la investigación

En un contexto de educación virtual, muchos docentes no disponen de actividades para trabajar, pues la mayoría de recursos educativos están enfocados para una educación presencial. Ante esta situación, se vio la necesidad de contar con actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico, que puedan ser desarrolladas en un entorno de educación virtual, esto contribuye a que los docentes dispongan de herramientas y recursos que les permitan trabajar en diversos contextos. Los procesos de generalización se muestran como un elemento intrínseco del pensamiento algebraico, por lo que es de gran importancia realizar un análisis de las propuestas metodológicas referidas al desarrollo de este tipo de pensamiento a través de dichos procesos, y, tratar de identificar la relación de la secuencia de actividades con teorías que explican las fases seguidas hacia la expresión de la generalidad, entre las que destacan la de Mason, Graham, Pimm y Gower; y la de Radford, autores que describen una ruta para acceder al pensamiento algebraico mediante la comprensión de la generalidad.

Respecto a los resultados, se espera que las actividades adaptadas a un contexto virtual permitan al estudiante aprender de manera significativa, de modo que se pueda evidenciar que la virtualidad no es un impedimento para el aprendizaje. Además, esta investigación permitirá abrir paso a otras investigaciones referidas a actividades para entornos virtuales, que han de tener en

cuenta las características propias de los estudiantes con los que se trabaje y realizar adaptaciones según sus necesidades.

Cabe resaltar que la adaptación de actividades a un contexto virtual favorece a la innovación pedagógica (Gagliardi, 2020), permitiendo que los docentes se capaciten y puedan enseñar a los estudiantes de una manera distinta a la convencional, considerando además que los adolescentes y jóvenes de hoy en día se identifican con las herramientas tecnológicas. De esta manera, tanto los docentes como los estudiantes se benefician y aprenden juntos durante el proceso. Así pues, este trabajo será un aporte para los docentes en ejercicio y en formación, ya que dispondrán de una descripción detallada de las propuestas metodológicas analizadas y de actividades adaptadas a la virtualidad que pueden resultar beneficiosas para las estudiantes.

Además, se ha decidido abordar la investigación seleccionando estudios que consideran a estudiantes entre 12 y 14 años, quienes se beneficiarían, debido a que el tema de procesos de generalización, según el diseño curricular peruano, se debe desarrollar durante los primeros años de la educación secundaria. En cuanto al nivel primario, la enseñanza de la Matemática enfatiza en lo aritmético, sin conceder la oportuna importancia al desarrollo del pensamiento algebraico, el cual permite que los estudiantes puedan pensar y percibir la simbología, y las operaciones aritméticas de una forma distinta a lo que usualmente se suele hacer en este nivel (Currículo Nacional, 2016). Como plantean Rojas y Vergel (2013), la generalización se muestra como una estrategia para la introducción al álgebra, especialmente en la escuela. Esto justifica la necesidad de abordar distintas propuestas metodológicas para promover procesos de generalización hacia el desarrollo del pensamiento algebraico, revisando la secuencia de actividades e identificando su relación con las teorías que describen las fases hacia la generalidad. Los docentes se verán beneficiados también si quisieran impartir clases de forma virtual, pues estos buscan referencias que les ayude a proponer actividades a sus estudiantes, que en un principio fueron útiles en un entorno presencial, pero que con ciertas adaptaciones también tienen éxito al ser llevadas a la virtualidad.

Por otro lado, se ha identificado que la mayoría de los autores de propuestas metodológicas que buscan desarrollar el pensamiento algebraico, a través de los procesos de generalización, han propuesto actividades para entornos presenciales, donde los estudiantes interactúan físicamente con el docente y sus compañeros. Esto implica que, dentro de un contexto virtual, muchos docentes no cuentan con diversas actividades para trabajar, por ende, disminuye la posibilidad de desarrollar el pensamiento algebraico en sus estudiantes, ya que no encuentran referencias previas que los orienten.

Si bien es cierto, esta problemática ya ha sido reportada en trabajos como el de Ruano et al. (2008), Rojas y Vergel, (2013), aun así, cabe enfatizar en más aspectos, como el análisis y contraste de las propuestas metodológicas, que permitirán llegar a una idea más clara y concisa de las

actividades que pueden plantear los docentes en el aula para desarrollar de manera eficiente los procesos de generalización. Como afirman Gonzáles y Velandia (2017), desde el punto de vista didáctico, reflexionar sobre las metodologías y las secuencias de aprendizaje, permite aportar elementos que ayuden a disminuir la distancia entre lo esperado a nivel curricular y lo encontrado en el aula. Esto denota la importancia de realizar un análisis e identificar la relación de lo propuesto con las teorías que explican el proceso de generalización.

Otra de las razones que justifican este trabajo es que se hace una propuesta de manera sistemática y detallada, de modo que, si otros investigadores quisieran realizar un trabajo similar, cambiando el tema, podrán realizarlo siguiendo la secuencia desarrollada en la investigación.

Las mencionadas razones justifican la importancia y utilidad de realizar la adaptación de actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico a un contexto virtual y determinar su efecto en los estudiantes.



Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo se revisan los fundamentos teóricos que constituyen la base de esta investigación. En primer lugar, se hace notar la importancia del álgebra escolar, los obstáculos, dificultades y errores con los que se debe enfrentar tanto el docente como el estudiante en el proceso de enseñanza aprendizaje de ésta. Asimismo, se describe de forma general su relación con algunas propuestas metodológicas y en qué consiste el pensamiento algebraico y sus rutas o vías de acceso. Luego, se describen las fases del proceso de generalización, según los autores Mason et al. y Radford; y finalmente, se aborda el tema de la educación virtual, la evolución que ha tenido, el rol del docente y el estudiante frente al contexto virtual que se tuvo que afrontar debido a la pandemia, sus ventajas y desventajas, su relación con el currículo, la situación de la educación virtual en el Perú y cómo la tecnología se ha aplicado en la enseñanza de la matemática.

2.1 Enseñanza-Aprendizaje del álgebra escolar

En esta sección se abordará la importancia de la enseñanza del álgebra en la EBR, así como los obstáculos, dificultades y errores que se presentan tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Asimismo, se dará un acercamiento a lo referido a pensamiento algebraico y sus rutas o vías de acceso.

2.1.1 El álgebra escolar y su importancia

El álgebra es uno de los pilares básicos sobre los que se construye la matemática, por ello, es relevante conocer más sobre sus aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y la implicancia que tiene dentro del ámbito escolar. El álgebra se define según Arsuaga et al. (2005, como se citó en Felip, 2016), como “la rama de la matemática que tiene por objeto el estudio de las operaciones algebraicas definidas en conjuntos arbitrarios, considerando operación algebraica a toda ley que asocia dos objetos matemáticos (operandos) con un tercer objeto (resultado)” (p. 4). Si bien con esta definición, el álgebra puede ser vista de manera general, también existen distintos focos desde los cuales puede ser analizada. Sobre dichos focos, Serres (2011), afirma:

el primero de ellos es su relación con la aritmética y la definición de la misma como una aritmética generalizada, lo cual presenta ciertas dificultades para comprender los cambios de significado de los símbolos de la aritmética al álgebra, como es el caso del signo igual y de las operaciones. Otra acepción muy aceptada es la del álgebra como un lenguaje que sirve para comunicar las ideas de la matemática, para expresar generalizaciones a través de símbolos. También el álgebra se asocia a una actividad, herramienta que se utiliza para resolver problemas y diseñar modelos matemáticos. (p. 124)

Estos distintos focos llevan a tener una amplia visión del álgebra, lo que genera diversas investigaciones dirigidas a enriquecer los conocimientos sobre esta rama de la matemática.

En la EBR, nivel secundario, se hace evidente el estudio del álgebra, ya que, comprende un nivel más riguroso en cuanto al estudio de la matemática. Si bien es cierto, en el nivel primario, se emplean letras para definir propiedades y fórmulas que permiten determinar perímetros y áreas de figuras geométricas, es en el nivel secundario donde se usan más frecuentemente dentro de contextos algebraicos, esperando que los estudiantes aprendan a interpretarlas como incógnitas, dependiendo de la situación que se les presente (Escareño et al., 2005, como se citó en Serres, 2011).

Cabe resaltar que, en el plan curricular del nivel secundario los estudiantes cursan otras asignaturas de ciencias, física o química, por ejemplo; por ello, los estudiantes han de poseer determinadas bases matemáticas para afrontar algunos temas que estas ciencias desarrollan. En efecto, no se concibe un estudio del álgebra restringido netamente como rama de la matemática, pues como menciona Márquez (2019), “el álgebra elemental y toda la matemática por sí misma relacionada sólo a objetos meramente abstractos es estéril para el joven estudiante” (p. 27). El estudio de estas ciencias demanda de un conocimiento determinado sobre un contenido específico de la matemática; en la mayoría de los casos, se hace evidente el tratamiento de estas ciencias a través del álgebra. Esto se justifica en la idea de Great Schools Staff (2018), “cuando los estudiantes realizan la transición de aritmética al lenguaje simbólico del álgebra, desarrollan las habilidades de razonamiento abstracto necesarias para sobresalir en matemáticas y ciencia” (párr. 5). Por tanto, es evidente que los estudiantes deben poseer un conocimiento adecuado sobre esta rama de la matemática.

Aunado a esto, el pensamiento algebraico, que es pertinente para el estudio algebraico de algunas cuestiones matemáticas, se muestra como un tipo de pensamiento que facilita diversos procesos, no solamente en el plano estudiantil o escolar, sino que este contribuye a resolver situaciones cotidianas. Sin embargo, la enseñanza del álgebra escolar viene siendo trabajada aún por muchos profesores como una simple manipulación de símbolos literales y numéricos, mediante operaciones numéricas, quitándole significado a las expresiones que envuelven dichos símbolos (Rojas y Vergel, 2018). Esto genera dificultades en la comprensión y correcta manipulación del uso de las letras en el álgebra, por lo que se requiere un alto nivel significativo de los problemas que se les propone. Por ello, Malagón et al. (2002), señalan que, partiendo del trabajo numérico y geométrico en diferentes contextos, donde los estudiantes puedan encontrar sentido al lenguaje simbólico, ellos muestran una actitud más positiva hacia las matemáticas, mostrando mayor interés, más participación y seguridad en sí mismos.

2.1.2 Obstáculos, dificultades y errores en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra

Debido a que el álgebra emplea símbolos (números y letras) se hace evidente la necesidad de un nivel de pensamiento más abstracto, lo que acarrea múltiples dificultades, por ello se han desarrollado diversas investigaciones respecto a los obstáculos, dificultades y errores, los cuales en

matemática tienen un distinto significado, por tal razón se presentan las definiciones de cada uno y su relación entre ellos.

Los obstáculos se conciben como un conocimiento adquirido, que utilizado en cierto contexto ha resultado efectivo, sin embargo, al aplicar este mismo en otra situación resulta inadecuado; no es una ausencia de conocimiento, sino que origina resultados erróneos en otras situaciones (Bachelard 1938; Brousseau, 1983, como se citó en Ruano et., al 2008). En esta misma línea, Godino (1991) afirma que:

un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. (p. 22)

Algunos estudiantes al iniciarse en el álgebra observan las expresiones algebraicas como enunciados incompletos, por ejemplo, si se les pide realizar una adición algebraica como $4x + 6$, ellos lo tomarán como una adición aritmética, ya que ese es el conocimiento que han adquirido anteriormente y se ha fijado, por lo que buscarán reemplazar esta expresión por el resultado de la operación (Collis, 1974, como se citó en Palarea y Socas, 1994).

Respecto a las dificultades, se pueden definir como el menor o mayor nivel de éxito de los estudiantes frente a cierta actividad matemática (Sánchez, 2019). Es decir, dependerá del porcentaje de aciertos y errores que el estudiante cometa para determinar si la dificultad es alta o baja. Socas (1997), por su parte, define dificultades como aquellas que se deben a “múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de las matemáticas” (p. 35). Por ello, las dificultades se pueden analizar desde distintas perspectivas, asociando su origen a la propia disciplina, así como a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, destaca además las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas; y, por último, las que están en relación a los procesos de enseñanza y al desarrollo cognitivo de los estudiantes (Socas, 1997). Ante lo mencionado, se encuentra que las dificultades parten de la acción pedagógica; el nivel de desarrollo cognitivo determina en cierta medida lo que el estudiante pueda comprender, por lo que también se muestra como una dificultad a considerar; se entiende también que la forma en cómo el estudiante aprecia la matemática, determina si esta puede ser aprendida con facilidad. Comúnmente se concibe a la matemática como un curso muy difícil por lo tanto no hay un aprecio positivo, lo que genera en los estudiantes cierto rechazo hacia estas. Castellanos y Obando (2009) destacan dificultades en el álgebra en cuanto al uso e interpretación de los paréntesis; otra de las dificultades que más resalta están relacionadas a los conceptos nuevos que se adquieren al iniciar el estudio del álgebra, pues se parte de un conocimiento aritmético. Específicamente se menciona las dificultades

referidas al significado de los símbolos y la interpretación de las letras, así como a la nueva concepción del significado de igualdad.

Otro concepto que ha merecido la atención de muchos investigadores es el relacionado a los errores. En esta línea, Socas (1997) lo define como “la presencia en el estudiante de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de despiste” (p. 1). Por su parte, Ruano et. al (2008) en una de sus investigaciones dirigida a describir los errores cometidos en el álgebra destacan que estos derivan de los contenidos de las tareas que le son presentadas a los estudiantes, y otros que se evidencian en el desarrollo, además han identificado que muchos de los errores se originan en una ausencia de sentido. Como se mencionó, los errores en el álgebra se hacen evidentes cuando los estudiantes se encuentran en pleno desarrollo de una determinada actividad dirigida a su estudio. Castellanos y Obando (2009), encontraron errores en el uso de procedimientos y fórmulas, cuando se trabaja con el símbolo negativo, al aplicar la propiedad distributiva, y por último al generalizar propiedades de la aritmética al álgebra.

En resumen, se pueden relacionar estos tres conceptos, englobándolos como dificultades que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los estudiantes en forma de errores (Socas, 1997).

2.1.3. Tipos de errores en el aprendizaje del álgebra

Las diversas investigaciones sobre los errores que se presentan tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del álgebra han permitido clasificarlos. A continuación, se presenta la realizada por el proyecto SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics)(Booth, 1914, como se citó en Palarea 1998).

2.1.3.1. Según el proyecto SESM

El proyecto SESM se llevó a cabo en Reino Unido entre los años 1980 y 1983, logrando concluir que los errores más comunes se pueden atribuir a los siguientes aspectos:

a) La naturaleza y significado de los símbolos y las letras:

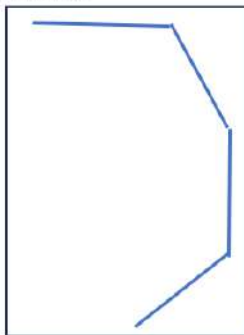
- **Los símbolos:** En ocasiones los estudiantes confunden los símbolos utilizados en el álgebra por que los han utilizado anteriormente en aritmética, pero con su propio significado, ocasionando un conflicto con el nuevo aprendizaje. Es por ello que el nuevo significado debe ser distinto y extender el que ya tenían antes (Alonso et al., 1993).
- **Las letras:** El estudiante al adentrarse al álgebra sufre un gran cambio conceptual respecto a la interpretación de las letras, sin embargo, a veces solo se da ese cambio de significado a los símbolos y a las letras no. Esto ocasiona confusión en los estudiantes, haciendo difícil la comprensión y el aprendizaje del álgebra.

Cabe resaltar que existen diversos significados que puede tomar una letra, complicando el trabajo de los estudiantes al momento de identificarlas y emplearlas (García et al., 2014).

Kuchemann, 1980 (citado en García et al., 2014), realiza una clasificación de las diversas interpretaciones dadas por los estudiantes:

- **Letra evaluada:** Se da cuando el estudiante asigna desde un inicio un valor numérico a la letra. Por ejemplo, en la siguiente expresión algebraica: $x + y = 10$, el estudiante puede asignar $x = 5, y = 5$.
- **Letra no utilizada o ignorada:** Se da cuando los estudiantes identifican las letras, sin embargo, no le dan significado, ni la interpretan. Por ejemplo, en la expresión: $5a + 5 + 3a$, el estudiante puede responder incorrectamente 13.
- **Letra como objeto:** Se da cuando el estudiante considera la letra como un objeto determinado. Por ejemplo, $3m + 2n$ se puede interpretar que m es la inicial de la palabra manzana y n es la inicial de naranja y que esta expresión representa tres manzanas más dos naranjas.
- **Letra como incógnita:** Se da cuando los estudiantes consideran las letras como un número desconocido pero específico, y se puede operar con el directamente. Por ejemplo, en la siguiente pregunta:

¿Cuál será el perímetro de un polígono de "n" lados, cuya figura se ve parcialmente, si todos miden 4cm de longitud?



El estudiante en lugar de decir $4n$ dice 16, porque solo toma en cuenta los lados visibles.

- **Letra como número generalizado:** Se da cuando el estudiante no puede concebir que una letra pueda tomar diversos valores, sino sólo uno. Por ejemplo, en el siguiente ejercicio: ¿Qué valores podría tomar a , en la siguiente expresión: $a + b = 15$ si b es menor que a ? Para dar la respuesta correcta es necesario tener en cuenta que para a existen varias posibilidades; sin embargo, puede haber estudiantes que sólo consideren un único valor y no dan todos los valores posibles.

- **Letra como variable:** Se da cuando el uso de las variables se confunde con el uso de las letras, manejándolas sin comprender su concepto. En aritmética, los alumnos usaban los símbolos con un significado único, acostumbrándose a eso, por lo que cuando una letra sustituye un número, les resulta complicado pensar que para dicha letra exista diversas posibilidades, en otras palabras, aceptar la idea de letra como “variable”.

b) El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra

El objetivo en álgebra es establecer relaciones, llegar a expresiones generales y simplificadas, sin embargo, muchos estudiantes suponen que en problemas algebraicos la respuesta debe ser única y numérica, ya que eso lo hacían en aritmética, así, por ejemplo, dan como respuesta $5n$ a la expresión $2n + 3$.

c) La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes

Las respuestas erróneas podrían deberse a que los estudiantes no conciben el álgebra como aritmética generalizada. Se debe tener en cuenta que para realizar procesos algebraicos y llegar a una generalización, se requiere que sean asimilados en un contexto aritmético, pero sin ignorar las letras.

d) El uso inapropiado de fórmulas o procedimientos

Los estudiantes usan fórmulas o reglas conocidas de forma incorrecta, adaptándolas a diversas situaciones. Se pueden encontrar cinco grupos de errores:

- **Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva**

Se aplica incorrectamente la propiedad distributiva, por ejemplo:

$$x(y + z) = xy + z$$

$$\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

- **Errores relativos al mal uso de los recíprocos**

Se dan como consecuencia de los errores en aritmética, al sumar fracciones algebraicas, dan resultados como estos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x + y}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x + y}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$$

- **Errores de cancelación**

Se da cuando los estudiantes generalizan procedimientos que se verifican en determinadas condiciones. Por ejemplo:

$$\frac{3x + 4}{4} = 3x$$

$$\frac{3x - 6}{3} = x - 6$$

- **Errores debidos a falsas generalizaciones sobre números**

Se da cuando los estudiantes tienen la necesidad de generalizar, pues les resulta fácil aplicar una regla general en un problema similar, por ejemplo:

$$(a - 7)(a - 3) = 0 \rightarrow a - 7 = 0 \text{ ó } a - 3 = 0$$

Los estudiantes pueden generalizar y operar de la siguiente manera:

$$(a - 7)(a - 3) = 2 \rightarrow a - 7 = 2 \text{ ó } a - 3 = 2$$

- **El uso de métodos informales por parte de los estudiantes**

Se da cuando los estudiantes usan sus propios métodos informales para resolver situaciones, los cuales han tenido éxito en ciertas ocasiones, pero no siempre es así.

2.1.4 Vías de acceso al desarrollo del pensamiento algebraico

En muchos currículos de diferentes países, entre ellos, el peruano, se evidencia el interés de desarrollar el pensamiento algebraico desde edades tempranas, es por ello, que es muy común abordarlo en estudiantes de entre 12 y 14 años. Este pensamiento, desde una perspectiva matemática, es definido por Lins (1992, como se citó en Gutiérrez y Valenzuela, 2018), como una “habilidad para transitar del análisis del contexto a la estructura” (p. 52). Es decir, gracias a esta habilidad el estudiante puede identificar relaciones entre los elementos y establecer una “estructura” o patrón que ejemplifica la propiedad general.

Por su parte, Radford (2010) define el pensamiento algebraico como una forma de reflexionar matemáticamente, además lo caracteriza mediante tres elementos interrelacionados: el sentido de indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos. En el pensamiento algebraico se presentan datos desconocidos, o cantidades indeterminadas, entre las que se tiene a las incógnitas y variables. En el proceso hay un tratamiento de estas por medio de cálculos matemáticos, aunque lo que se esté trabajando manifieste un sentido de indeterminancia, de cantidades no conocidas; por otro lado, la analiticidad se refiere al tratamiento que se le da a la indeterminancia, en este caso a nivel operatorio, es decir, que los datos no conocidos que parten de la indeterminancia se trabajan a través de operaciones aritméticas; por último, con la designación simbólica se atribuye una forma específica para mencionar los objetos con los que se está trabajando.

Sobre rutas de acceso al pensamiento algebraico Butto y Rojano (2010) en su investigación afirman que internacionalmente se reconocen dos grandes rutas de acceso al pensamiento algebraico, la primera que se centra en el razonamiento proporcional y la segunda, en base a los procesos de generalización; esta última es la que se ha tomado como base para realizar el análisis de las propuestas.

Por su parte, Butto y Rivera (2011) mencionan que la comunidad internacional reconoce cuatro acercamientos sobre el pensamiento algebraico: “la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes en relación numérica, la modelación de situaciones matemáticas y de situaciones concretas, el estudio de situaciones funcionales, y la solución de problemas” (p. 3).

En el análisis de las propuestas metodológicas se adopta la perspectiva de la generalización, descrita por Mason (1985) como una vía de acceso al pensamiento algebraico. Por su parte Butto y Rojano (2010) refieren a este autor argumentando que la generalización es “el punto de partida hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades” (p. 62). Por consiguiente, para que se piense algebraicamente, “es importante que el alumno tenga algo que comunicar, para ello necesita percibir un patrón o una regularidad y después intentar expresarlo y comunicarlo a alguien” (Butto y Rojano, 2004, p. 129).

El trabajo con patrones como acercamiento al pensamiento algebraico, también está recomendado en los estándares curriculares y de evaluación por el National Council Teacher of Mathematics (NTCM, 1989), este documento recomienda trabajar con patrones desde edades tempranas extendiéndose a los grados superiores; al respecto Butto y Rojano (2010) mencionan que:

se debe incluir la exploración de patrones y funciones para que los estudiantes sean capaces de: descubrir, extender, analizar y crear una amplia gama de patrones; describir y representar relaciones con tablas, gráficas y reglas; analizar relaciones funcionales para explicar cómo un cambio en una cantidad provoca un cambio en la otra; y usar patrones y funciones para representar y resolver problemas. (pp. 62-63)

Es evidente que estos autores resaltan la importancia de trabajar los procesos de generalización con los estudiantes para el desarrollo del pensamiento algebraico, es por ello, que para el análisis de las propuestas metodológicas se ha optado por esta ruta, pues es considerada por varios de los autores como uno de los acercamientos al pensamiento algebraico que mejor describen el tránsito del análisis general hasta expresar la relación de los elementos en un patrón.

2.2 Procesos de generalización

En esta sección se abordarán los procesos de generalización, según autores que dan a conocer diversas fases para la comprensión de este contenido.

2.2.1 Fases del proceso de generalización según Mason, Graham, Gower y Pimm

Para la comprensión del contenido, estos autores consideran partir de cuatro raíces: aritmética generalizada, posibilidades y restricciones, expresión a la generalidad, reordenamiento y manipulación; todas ellas encaminadas a orientar al estudiante a hacerse del conocimiento algebraico. Sin embargo, se sugiere trabajar una de ellas para acceder al conocimiento de una forma más asequible. Es así que al elegir una raíz se traza lo que los autores definen como “una ruta hacia el álgebra” entendida como un camino trazado para orientar al estudiante a la consecución del conocimiento significativo del pensamiento algebraico (Mason et al., 1985, como se citó en Arriaga, 2008).

En la investigación se ha decidido abordar una de las raíces, la “expresión de la generalidad”, la cual Mason et al. (1985, como se citó en Arriaga, 2008, pp. 5-6) considera que “es la vida de las matemáticas y el álgebra es el lenguaje con el que se expresa esta generalidad”. Asimismo, los autores encuentran pertinente abordar la “expresión de la generalidad” con una ruta basada en cuatro fases que a continuación se describen:

Ver un patrón. En esta fase se pueden presentar actividades con secuencias de figuras o de números, donde se solicite a los estudiantes encontrar una figura o un número determinado que se encuentra alejado de la secuencia y que no se pueda identificar de manera rápida. Ante esto, para responder a la actividad, el estudiante observará lo que está pasando de una figura a otra, o de un número al siguiente y en esta observación el estudiante percibirá la regularidad.

Decir cuál es el patrón. El estudiante necesita expresar lo que observó y para ello es necesario incluir en las actividades preguntas que indaguen sobre cómo encontró la figura o el número siguiente y que lo comente con los demás compañeros. Ello permite también que el estudiante organice sus ideas y sus observaciones, las exprese adecuadamente, de forma que sus compañeros las comprendan y así corroborar si son correctas o no.

Registrar un patrón. Esta fase consiste en que el estudiante señale de manera precisa lo que ha observado en la fase anterior, de modo que las ideas queden expresadas sin olvidar las conjeturas a las que van arribando. El estudiante vuelve a reflexionar sobre sus ideas para hacerlas accesibles a los demás, al mismo tiempo, se inicia en la manipulación de expresiones cuando las construye y reconstruye. El registro del patrón puede iniciar con oraciones donde se mezclen palabras, dibujos, y símbolos. Se debe insistir en este proceso hasta obtener expresiones exclusivamente simbólicas. Lo importante es que los registros sean elaboraciones de los estudiantes, para que tengan significado.

Prueba de la validez de las fórmulas. Una vez que el estudiante obtiene el registro simbólico, se puede verificar la validez de la fórmula de acuerdo a la actividad que lo produjo a través de cálculos aritméticos, dibujando o contando.

Asimismo, es necesario aclarar que las primeras fases no tienen que realizarse sólo de manera lineal, es decir, el orden puede ser diferente según las necesidades de los estudiantes.

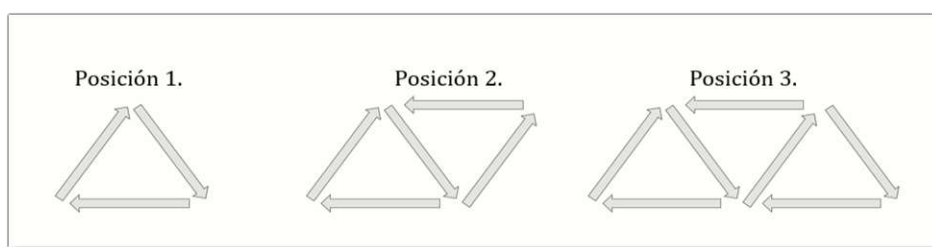
2.2.2 Fases del proceso de generalización según Radford.

Radford (2003) a través de sus investigaciones, en las que, estudia cómo los estudiantes se enfrentan a actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico, propone una descripción de tres fases en las que se evidencia el proceso que sigue el estudiante hacia la generalización.

Etapas de la generalización fáctica. En esta primera etapa la acción se lleva a cabo sobre objetos de un "mismo nivel concreto", que, en procesos de generalización el que destaca es el nivel concreto numérico. En la acción se pueden evidenciar señalamientos, articulación de enunciados con símbolos matemáticos, objetos que se puedan usar para señalar, la gestualidad, y la observación. Se puede decir que en esta etapa el principal factor que se pone en evidencia es el manipulativo, en donde el estudiante directa o indirectamente "manipula" el patrón que se le pone en frente a través de su gestualidad, movimientos de las manos, observación, entre otras acciones que ponga en evidencia ese primer acercamiento hacia el trabajo de generalización. Se presentan también aspectos lingüísticos y signos, que son utilizados por los estudiantes para expresar lo que pretenden realizar, hay un uso combinado de palabras, gestos. Por ejemplo, a partir de la secuencia que se presenta en la figura 1, se les pide a los estudiantes encontrar el número de flechas que se necesitarían para construir la figura que ocupa la posición 28.

Figura 1

Secuencia de flechas



Nota. Elaboración propia

El primer paso que deben realizar los estudiantes es observar detenidamente cada figura, de tal manera que reconozcan su forma y lo que necesitan para construir las siguientes figuras de la serie. En un primer momento es suficiente con "ver" las figuras, pero el proceso se va complejizando de modo que determinar la forma y composición de las figuras en posiciones superiores ya no es tan evidente, por lo que deben proceder a realizar un análisis más profundo de la secuencia.

Luego, los estudiantes deben percatarse que en la figura de la segunda posición hay dos flechas más que en la primera, es decir, $3 + 2 = 5$, además observan que sucede lo mismo en la tercera posición, donde hay dos flechas más que en la segunda, por lo que se deduce que siempre será así.

Sin embargo, como la estrategia necesita ir paso a paso, demandaría de mucho tiempo, así que deben buscar una forma más fácil de deducir en número de flechas en función de la posición.

Por último, los estudiantes deberán notar que el número de flechas está relacionado con la posición que ocupa, es decir, que el número de la posición más el valor numérico consecutivo es igual al número de flechas. Por ejemplo: para la figura de la primera posición sería: $1 + 2 = 3$, para la segunda sería: $2 + 3 = 5$, para la tercera sería $3 + 4 = 7$ y así sucesivamente. Para hallar el número de flechas de la posición 28 sólo tendrían que sumar: $28 + 29 = 57$.

Etapas de la generalización contextual. Para esta etapa del pensamiento, los estudiantes ya deben reducir sus formas de expresión, lo cual hace evidente un pensamiento algebraico contextual. El estudiante dice, por ejemplo: “arriba resto uno”, “dos por la posición de la figura más uno”, “número de la figura más uno para la fila de arriba y número de la figura más dos para la de abajo”, “sumar los dos para el total”, etc. Esto significa que, la generalización sube de nivel, ya que se logra establecer algo en común dentro de las secuencias. En esta etapa, luego de que el estudiante reconozca las características de la regularidad, logra simplificarlas por medio de palabras claves que conlleva a proponer distintas hipótesis, con el fin de generalizar el fenómeno.

Se les pide a los estudiantes describir una explicación de cómo calcular el número de flechas que se necesitan para una posición cualquiera. En esta etapa los estudiantes deben plantear distintas hipótesis: primero tratar de expresarlas de acuerdo con lo que obtienen en la generalización fáctica ($28 + 29 = 57$), por lo que se podría afirmar, si se suma el número de la posición con el valor numérico consecutivo se obtendrá lo que se busca:

$$28 (\text{posición}) + 29 (\text{número consecutivo}) = 57 (\text{número de flechas})$$

Por otro lado, se evidencia que, si suman el mismo número de la figura dos veces y luego le suman uno, también se obtendría lo mismo para cada caso que con la estrategia anterior. Entonces se tendrían dos estrategias diferentes que darían solución al problema.

Etapas de la generalización simbólica. En esta etapa las palabras clave tendrían que ser reemplazadas por signos alfanuméricos del álgebra, como “ $n + (n + 1)$ ” o “ $2n + 1$ ”. El pensamiento algebraico simbólico, permite deducir una expresión, con la cual se podrá hallar cualquier término de una determinada secuencia. En otras palabras, permite deducir una fórmula general. En este caso, el estudiante empleará letras como variables, las cuales servirán para generalizar un número, también emplearán signos o símbolos, los cuales junto a las letras y números van formando un lenguaje alfanumérico, que serán de gran ayuda para facilitar la tarea de resolver distintas situaciones que se les presente a los estudiantes.

Los estudiantes pueden escoger una de las dos estrategias y elaborar una simbolización algebraica a partir de ella. “La posición de la figura” ahora sería reemplazada por la variable “ n ”, por lo tanto, se podría decir: $n + n + 1$, que se puede expresar también como $(n + n) + 1$; sin

embargo, puede simplificarse aún más la expresión, siendo: $2n + 1$. Esta sería la fórmula para calcular el número de flechas que se necesitan para formar la figura en una determinada posición “n”.

2.2.3 Dificultades en los procesos de generalización.

En el proceso de generalización, así como en cualquiera de las rutas donde se pretende desarrollar el pensamiento algebraico, se presentan dificultades para los estudiantes. Las cuales pueden ser muy sencillas y rápidas de superar, con la intervención oportuna del docente, o difíciles y muy perjudiciales a futuro si no se aclaran. Por ello, es necesario que el docente las tenga en cuenta al momento de planificar y ejecutar su sesión de clase; de esta forma si alguno de sus estudiantes llegase a tenerlas, él pueda identificarlas e intervenir eficazmente en bien del aprendizaje del estudiante.

Es así que, para hacer mención de las dificultades más comunes en torno a los procesos de generalización, se tomará como referencia a Alonso, et al. (1993, como se citó en Navas y Molina, 2016) y a Mora (2012, como se citó en Navas y Molina 2016).

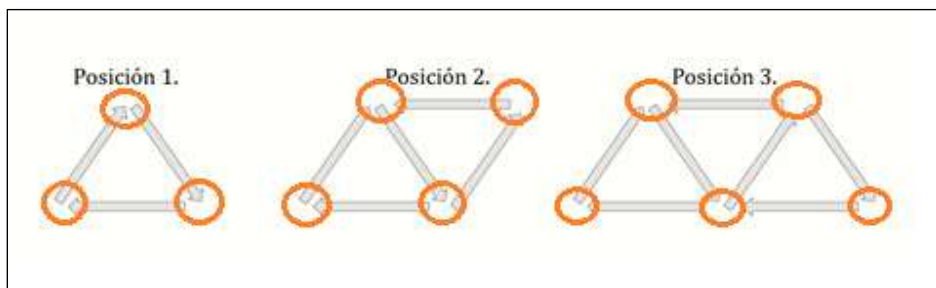
Uno de los retos a los que se enfrenta el docente es que el estudiante pueda “encontrar la forma de abordar el problema, principalmente cuando los estudiantes nunca han tenido un acercamiento al estudio de secuencias” (Navas y Molina, 2016, p.20). En otras palabras, el estudiante al no tener familiaridad con secuencias aritméticas o geométricas no podrá proceder con la resolución y el establecimiento de un patrón o regla; incluso aquellos que ya han trabajado con secuencias tienen dificultad cuando el ejercicio que se les presenta es nuevo y muy diferente a lo que ya han venido trabajando. Por ello, el docente debería proponer ejemplos que sean similares o relacionados, y, ya cuando muestren dominio plantear secuencias variadas. Es preciso considerar que: “al utilizar configuraciones geométricas, es posible que, al observarlas, se encuentre gran variedad de características de tales configuraciones, que pueden resultar difíciles de guardar en la memoria, de relacionar, clasificar o identificar cuáles son las más importantes para disponer de una solución” (Navas y Molina, 2016, p.20). Así pues, al ver las secuencias geométricas es posible que tengan muchos aspectos a analizar; por ejemplo, al observar la secuencia de la figura 1, se puede ver una representación gráfico-numérica en la que la secuencia aumenta 2 flechas cada vez que se avanza una posición, pero no es suficiente con que el estudiante sume 2 flechas por posición, sino que debe considerar que la secuencia empieza con 3 flechas y a partir de allí sumar 2 flechas. Es decir, debe ir registrando aquello que va descubriendo y considerarlo para el planteamiento de la regla general.

Además, observaron que los estudiantes buscan “proponer características irrelevantes, de tipo anecdótico, para describir lo observado en una secuencia” (Navas y Molina, 2016, p.20). Esto se da cuando el estudiante empieza a observar aspectos en la secuencia que no aportan en el

planteamiento de una determinada regla. Para explicar esto se tomará como ejemplo la figura 2, en donde el estudiante podría indicar que la figura contiene espacios cada vez que las flechas se encuentran, lo cual podría darse como la búsqueda de un nuevo patrón o regla. Por ello el docente debe indicar lo que se debe analizar en cada secuencia, en este caso la variación del número de flechas en cada posición y no la variación del número de espacios en cada posición.

Figura 2

Adaptación de la secuencia de flechas



Nota. Elaboración propia.

A continuación, se presentan algunas dificultades identificadas en la actividad de la figura 2, señaladas por Navas y Molina (2016):

- En la posición 1 se toma como característica necesaria el dato de que la secuencia empieza con 3 flechas, pero no es suficiente saber eso, sino que hace falta conocer la regularidad que hay entre una posición y otra (aumenta de 2 en 2). Por lo que, hay datos que pueden resultar útiles y necesarios, no obstante, siempre se deben hacer más consideraciones o tomar en cuenta más características, las que sean suficientes para hallar la regla general. Es decir, una de las dificultades es la confusión entre las características necesarias y las características suficientes en ejercicios donde se presentan sucesiones de figuras.
- Otra dificultad se presenta cuando el estudiante no logra percibir o identificar el patrón de una secuencia gráfico-numérica, es decir, no podrá describir de forma precisa lo relevante en la secuencia y será incapaz de establecer una relación entre los elementos de la secuencia gráfico-numérica.
- Es muy probable que el estudiante durante el proceso de generalización no logre encontrar o establecer relaciones entre los elementos de una secuencia gráfico-numérica que lo lleve a expresar la regla o ley de forma simbólica, usando el lenguaje matemático adecuado, y así encontrar el término para cada posición o viceversa.
- Una dificultad específica es la utilización del lenguaje algebraico en la expresión de la regularidad, más conocidos como errores de traducción del lenguaje verbal al lenguaje matemático. Esto se observa, cuando los estudiantes habiendo encontrado el patrón y pudiendo expresarlo de forma

verbal, representan la regla general utilizando el lenguaje algebraico, pero se presentan dificultades al utilizar las operaciones o símbolos adecuados; por ejemplo, en la secuencia: 2, 4, 6, 8, 10..., indican que “la secuencia va aumentando de 2 en 2”, y cuando lo expresan simbólicamente, escriben “ $2(n)$ ” donde “ n ” es el número anterior.

2.3 Educación virtual

En esta sección se abordará todo lo referente a la educación virtual, la evolución que ha tenido para pasar de una educación a distancia a una educación virtual, cuál ha sido el rol del docente y el papel del estudiante frente a la educación virtual, sus ventajas y desventajas, su relación con el currículo nacional, cómo es la situación de la educación virtual en el Perú y la tecnología aplicada en la enseñanza de la matemática.

2.3.1 De la educación a distancia a la educación virtual

En el año 2020, a consecuencia de la pandemia de COVID-19, y para que esta no se siga expandiendo, las instituciones de educación se vieron obligadas a ejercer su práctica de manera remota. Es decir, a brindar una educación a distancia, o como se le considera también una “educación virtual”, dejando así de lado, temporalmente, la presencialidad. En marzo de 2020, a comienzos de la pandemia, se estimó que aproximadamente el 89% de la población estudiantil en el mundo estaba fuera de la escuela debido a las restricciones aplicadas en los diferentes países (Albrechtsen y Giannini, 2020). Ante esto, todos los miembros de la comunidad educativa tuvieron que pasar por un proceso de adaptación para que esta “educación virtual” pueda ser llevada a cabo, destacando el uso de medios tecnológicos para asegurar una mayor efectividad.

Al referirnos a educación virtual, es preciso mencionar a lo que se considera educación a distancia, pues existe una relación entre ambos significados, aunque hay cierta variación en la forma en que se ejecuta cada una de estas. En este caso, la educación virtual se distingue porque la adquisición de los conocimientos se produce a través del uso de medios tecnológicos, buscando siempre facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje (Crisol et al., 2020).

Según Alfonso (2003), en el año de 1728, el profesor de Caligrafía, Caleb Philipps convocó a estudiantes interesados en tomar un curso a distancia, el cual se llevaría a cabo a partir de la distribución de material autoinstrutivo y asesoramiento a través de correspondencia. Este es el primer dato que se podría considerar de manera formal como una educación a distancia, en la que el proceso educativo presenta variaciones de espacio y tiempo respecto de la educación tradicional presencial que hasta entonces era totalmente predominante.

Además de Philipps, cabe destacar también que se considera a Isaac Pitman, como uno de los pioneros de lo que se conoce como educación a distancia formal. Lo que se resalta en este personaje es que, en el año de 1840, propuso una enseñanza de la Taquigrafía utilizando para ello el correo

postal. De modo que, según García (1999), se enseña cierta temática a través de una comunicación que no se da de manera directa, ni presencial.

Hasta ahora tenemos a dos personajes que resaltan en lo referido a los orígenes de la educación a distancia, ambos personajes proponen un tipo de educación que en su tiempo se consideraba como novedoso. Esto para romper algunas brechas que impedían que los estudiantes tomen clases a las que les sería difícil asistir debido a cuestiones de tiempo, espacio, y ocupaciones. Así pues, empieza a gestarse un nuevo tipo de educación, que perseguía entre otras muchas cosas, facilitar el acceso al conocimiento a través de ciertos mecanismos de comunicación e interacción.

El desarrollo histórico en general demanda de formas de comunicación cada vez más eficaces, esto para satisfacer las necesidades propias de cada tiempo. Ante esto, en 1920 se ejecuta la primera transmisión de radio en el mundo, específicamente en Estados Unidos (Durante y Prieto, 2007). A partir de esto, es claro que el perfeccionamiento de este medio de comunicación devendría al paso del tiempo. Respecto a la educación virtual, en el año 1922, dos universidades ofrecen cursos mediante este medio de comunicación mencionado, específicamente la Universidad Estatal de Pensilvania y la Universidad de Colombia, luego tres años más tarde lo haría la Universidad Estatal de Iowa (Rivera et al., 2017).

Otro medio de comunicación destacado en esta revisión del desarrollo histórico de la educación a distancia, es el de la televisión. La Fundación Ford, alrededor de 1950, promovió contenido educativo que se impartió a través de este medio de comunicación (Canales, 2003). Cabe destacar también que esta fundación, unió esfuerzos con Japón para que la posesión de los programas sea conjunta y que además estos sean almacenados en una biblioteca (De Aguilera, 2015).

El uso de la radio y televisión se presentó como una nueva forma de llevar a cabo la educación a distancia, en la que primeramente se utilizaba los correos postales. Desde distintas perspectivas, cada una de estas tenía sus propias ventajas y desventajas. Lo que se puede resaltar es que, con los correos postales había una respuesta determinada por parte del tutor al estudiante, produciéndose así una comunicación bidireccional, mientras que con la radio y televisión la comunicación se daba de manera unidireccional.

Respecto a una educación superior netamente formal, “se crea en 1969 en el Reino Unido la primera universidad sin campus del mundo: la Open University, que logró alcanzar un nivel de prestigio similar al de las universidades presenciales” (Izquierdo y de Lorenzo, 2017, p. 141). Esta es la primera universidad que se crea con el fin de brindar una educación a distancia basándose en medios como la radio y la televisión (García, 1999).

En la actualidad, hay una predominancia en el uso de ciertos aparatos electrónicos desarrollados por los avances tecnológicos propios de cada tiempo; los cuales, de alguna forma facilitan y potencian ciertas tareas cotidianas. Por ejemplo, el celular y los ordenadores

portátiles/escritorio, son aparatos que poco a poco han generado cierta dependencia para realizar tareas de comunicación, estudio, trabajo, entre otros. La globalización ha permitido la creación de redes que posibilitan que la Internet llegue a muchos lugares, convirtiéndose así en una herramienta muy importante y de gran ayuda para el funcionamiento de los aparatos antes mencionados. Tal como lo manifiesta Martínez (2008):

es aquí donde la educación a distancia rompe paradigmas y surge con una nueva visión por medio de la educación virtual y del e-learning, principalmente, aunque surgen también otras formas que utilizan tecnologías muy diversas (TV, radio, video, CD, teleconferencias, computadora, y lo más moderno, Internet), en forma simultánea o diferida, unidireccional o bidireccional. (p. 8)

Ante lo descrito, observamos tres marcadas etapas de la educación a distancia, que comienzan con particulares formas de llevar a cabo la instrucción: la primera en la que predomina la correspondencia postal, la segunda con la radio y la televisión, y la tercera en la que predomina los aparatos electrónicos tales como los celulares y los ordenadores. Cada una se adaptó al contexto histórico y se apoyó en los avances tecnológicos, así la educación a distancia fue potenciando sus objetivos y atrayendo a más personas a valerse de ella para poder crecer profesionalmente.

2.3.2 Rol del docente y el estudiante en la educación virtual

Todo docente debe estar a la vanguardia de los cambios, transformaciones y exigencias a los que la sociedad se ve afectada. Debe mostrar experticia ante los nuevos recursos educativos que se le presentan, para así aprovechar al máximo las potencialidades que estos ofrecen. En cuanto a brindar una educación virtual, el maestro cumple principalmente un rol orientador, de modo que las herramientas tecnológicas que utiliza para brindar una educación virtual a sus estudiantes deben ayudar al proceso educativo, y facilitar su utilización (Suárez et al., 2018).

Además, el docente debe estar atento a la problemática que afecta a su entorno, debe cumplir un rol activo. En este caso, la educación virtual se presenta como una alternativa ante un problema que actualmente afecta a la sociedad. La creatividad que pueda emanar del docente será clave para que este tipo de educación pueda ser efectiva para sus estudiantes. Lo anterior se justifica en las ideas de Angulo y Avila (2010), quienes manifiestan que esta capacidad creativa permite proponer nuevas ideas como alternativas de solución ante problemas que surgen en el transcurrir de la vida. Además, que posibilitan enfrentar nuevos desafíos frente a situaciones académicas y cotidianas.

El docente debe poseer competencias que le permitan hacer frente a este tipo de educación, hablamos pues de las competencias tecnológica, comunicativa, y pedagógica. De esta forma, según Suárez et al. (2018), se estaría ayudando a promover la innovación educativa apoyándose en las TIC, herramientas actuales que presentan muchas potencialidades. En cierto modo, el docente debe

presentarse como un agente innovador, que utilice las competencias antes mencionadas de manera que pueda obtener el máximo provecho de las herramientas tecnológicas con las que cuenten sus estudiantes. No se trata de promover dichas competencias de manera aislada, sino que estas puedan complementarse entre sí para que el producto final sea en beneficio de los estudiantes.

El docente que imparte clases en un entorno de educación virtual debe cumplir además la función de facilitar el aprendizaje en este tipo de entorno, en el que debe mostrar las potencialidades presentes en la red; de modo que vaya “encaminando al estudiante a través de los materiales, debates, foros, casos y simulaciones que se reflejan en una evaluación continua de las actividades realizadas individualmente o en grupos, apoyándose en numerosas herramientas electrónicas que provee el campus virtual” (Velásquez, 2019, p. 4). En la Internet el estudiante puede encontrar múltiples opciones para llevar a cabo su proceso de aprendizaje, por lo que el maestro tendrá el deber de facilitar esta información, así como el enseñarle a acceder a ella de manera autónoma.

El distanciamiento social, ha representado un gran reto en muchos ámbitos especialmente en el educativo, por ello es preciso que el docente promueva su creatividad para hacer frente a este desafío, de manera que la alternativa de llevar a cabo una educación virtual a los estudiantes, se pueda ejercer de la mejor manera, siendo el docente aquel sujeto que busca las mejores formas de llevarla a cabo. Para ello, el docente debe de poseer competencias que le serán útiles en esta tarea, en la que se añade una cota tecnológica a su labor educativa. Por último, la información tan basta que se puede encontrar en la red, podría confundir al estudiante; por ello, el docente ha de ejercer su función facilitadora del aprendizaje.

La tecnología avanza a gran escala en los diversos ámbitos de la vida, en lo que respecta a lo educativo se posiciona como poseedora de múltiples ventajas y oportunidades que los docentes deben tener en cuenta en su práctica pedagógica. Los estudiantes se muestran abiertos a la manipulación de ciertos aparatos tecnológicos, así como a la exploración de sus funcionalidades. Así pues, caber resaltar que “la rapidez con la que se han extendido las nuevas tecnologías de la información y la comunicación ha sido especialmente intensa entre adolescentes y jóvenes, mucho más familiarizados con su uso que los adultos” (Sánchez et. al, 2015, p. 4). Esto permite que los estudiantes estén dispuestos, en la mayoría de casos, a seguir una sesión de clase mediada por las TIC.

Respecto a las características que manifiesta un estudiante cuando se enfrenta a una educación virtual, se destacan aquellas que tienen relación a “la capacidad de autogestión, expresada en la autodisciplina, el autoaprendizaje, el análisis crítico y reflexivo, así como en el trabajo colaborativo, fundamental para contribuir al desarrollo del ser en su interacción y aporte con

y para otros” (Rugeles et. al, 2015, p. 135). Esto posibilita que el estudiante pueda adquirir los conocimientos que han sido previstos en la planificación elaborada por el docente.

El rol del estudiante frente a la educación virtual, según Zambrano et. al (2010) se remarca en la habilidad del estudiante para construir nueva información a partir de la que ya tiene consigo, de modo que le dé un tratamiento oportuno, así también debe manifestar una capacidad para integrar los aspectos intrínsecos de la misma, lo cual le permitiría difundirla ya que poseería una concepción global y estructurada. Los autores indican también que es preciso que los estudiantes sepan trabajar de manera autónoma, y que a partir de la interacción con los medios tecnológicos pueda generarse en éstos nuevos saberes, esto será posible si conocen las funcionalidades y fines pedagógicos de las herramientas tecnológicas con las que se trabaje.

Entre las competencias que deben poseer los estudiantes para enfrentarse a una educación virtual, Zambrano (2010) destaca las siguientes:

- Conocimiento del proceso en línea: Comprender las dificultades que se pueden presentar al momento de empezar la etapa como estudiante virtual, además de saber identificar el potencial de los recursos en línea.
- Habilidades técnicas: Utilizar nuevas vías para poder hacerse de la información presente en línea, así como buscar formas innovadoras para que esta pueda ser comunicada de manera eficaz; además, esta competencia se relaciona con la habilidad para navegar a través de diversas páginas web.
- Habilidad de comunicación en línea: capacidad para redactar mensajes, comentar, participar en foros. Esta competencia se relaciona también con el saber expresarse oralmente cuando se está participando en una videollamada.
- Experiencia con el contenido: Referida a la capacidad para asimilar y clasificar la información que encuentre en la red, así como utilizar recursos virtuales que potencien el aprendizaje de un determinado contenido. Aquí se considera también el saber emitir un juicio constructivo luego de haber vivido la experiencia de un contenido en línea.
- Características personales: Considerar siempre que se es un estudiante virtual, y para ello se ha de pretender utilizar los diversos recursos virtuales que se ofrecen en la red, pues es deber del estudiante buscar nuevas formas de aprender.

2.3.3 Ventajas y desventajas de la educación virtual

Si bien es cierto la educación virtual tiene el mismo objetivo que la educación presencial o tradicional: el aprendizaje de los estudiantes; también se sabe que ambas tienen sus diferencias, por lo que podemos destacar algunas ventajas y desventajas de la educación virtual respecto a la presencial.

Castellanos (2021), considera que la educación virtual ha sido beneficiosa para los estudiantes y profesores, rescatando las siguientes cuatro ventajas:

La asincronicidad, la cual implica que el estudiante sea capaz de decidir la hora o el momento más adecuado para llevar a cabo sus actividades académicas. Esto es de gran ayuda cuando se dejan actividades a presentar fuera del horario escolar. Por ejemplo, al recibir las clases por WhatsApp se quedan grabados los mensajes y el estudiante puede volver a observar la sesión por si algo no le ha quedado claro, de igual manera pasa con los videos de las sesiones grabadas que se dan por medio de plataformas como Zoom o Google Meet.

La autonomía, es una de las ventajas de la educación virtual que surge de la necesidad del estudiante de dar un mayor esfuerzo, disciplina y compromiso de sí mismo para cumplir con los objetivos trazados en su educación, aunque esto no significa que se le debe dejar solo, sino más bien que requiere de la orientación del docente y en muchos casos hasta de algún familiar que pueda apoyarlo, pero sin dejar que se vuelva dependiente. Debemos tener en cuenta que el aprendizaje es un proceso autónomo donde el estudiante va adquiriendo conocimientos que parten de la propia conciencia de su responsabilidad (Ferroni et. al, 2013). Por lo tanto, siempre debe centrarse en el estudiante, en que él mismo se sienta capaz de lograr los aprendizajes esperados y pueda autoevaluarse con el fin de seguir mejorando.

Sin embargo, cabe resaltar que no todos los estudiantes se han vuelto autónomos a raíz de la educación virtual, debido a que en muchos casos los docentes junto a los padres de familia han realizado la mayor parte del trabajo, teniendo toda la programación, planificación, desarrollo, control y evaluación del proceso de enseñanza- aprendizaje, mientras que los estudiantes solo reciben y memorizan información, dificultando el desarrollo de su autonomía (Contentlab, 2020). Es por ello que, para desarrollar la autonomía dentro de una educación virtual se recomienda que los docentes brinden herramientas creativas que permitan no sólo desarrollar las competencias previstas en el currículo, sino que busquen ir más allá, incorporando ejercicios de autoevaluación, metacognición y actividades donde los estudiantes puedan descubrir el estilo de aprendizaje que le es propio, aprendan a organizarse y a valerse por sí mismos (Grupo de iniciativas para la calidad de la Educación Superior, 2020).

Otra de las ventajas de la educación virtual es la adquisición de habilidades digitales, en estudiantes y profesores, ha sido una nueva experiencia trabajar con distintas herramientas tecnológicas que a largo plazo seguirán ayudando en distintos ámbitos de nuestra vida. Gracias a la educación virtual los estudiantes tienen a su disposición una gran variedad de recursos digitales que les permite reforzar sus conocimientos, mientras que a los profesores les ayuda a mejorar sus estrategias didácticas.

Reducción de costos, esto resulta un gran beneficio financiero para la familia, puesto que se ahorran los gastos de movilidad, compra del uniforme, útiles escolares, etc. De igual forma los profesores se ahorran el dinero de traslado hacia sus centros de labores, concretando así las actividades académicas desde la comodidad de su casa.

Por su parte García (2017) considera que la educación virtual posee las siguientes ventajas:

- Brinda la oportunidad de que los estudiantes trabajen a su propio ritmo, destacando su papel como protagonistas en su proceso de aprendizaje. Un buen diseño les permite decidir cómo, cuándo, y con qué aprender.

- Las distintas herramientas tecnológicas que permiten la comunicación entre los estudiantes y profesores favorecen al aprendizaje colaborativo, además de sumar experiencias enriquecedoras.

- Los estudiantes y profesores disponen de información en distintos formatos y medios, además de recursos que pueden ser adaptados según las necesidades y estilo de aprendizaje de los estudiantes.

Así mismo, Harasim et al. (2000) indican que la educación virtual trae consigo una serie de ventajas, entre las cuales destacan: Otorga mayor posibilidad de un aprendizaje cooperativo, ya que pone una gran variedad de herramientas de comunicación a nuestra disposición; los estudiantes desarrollan su autonomía; la enseñanza se puede adaptar de acuerdo al estilo de aprendizaje de los estudiantes; acerca más a las personas a su ámbito familiar y permite que se desarrollen habilidades digitales a través del manejo de herramientas tecnológicas.

Podemos notar que los autores ya mencionados han coincidido en las ventajas de la educación virtual, ya que todos señalan el desarrollo de habilidades digitales, autonomía, uso variado de recursos educativos, etc., por lo que se puede concluir que la educación virtual contribuye desde distintos aspectos a la mejora del sistema educativo.

Por otro lado, si vemos la educación virtual desde otra perspectiva nos podemos dar cuenta de que existen también ciertas desventajas dentro del entorno educativo. Garzosi et al. (2020) nos menciona las siguientes desventajas:

- a) Los costos que se generan para implementar una educación virtual suelen ser altos, ya que se necesita de equipos tecnológicos como computadoras, laptops, smartphones, etc. A esto se le suman los gastos de Internet y un ambiente favorable donde instalarse para llevar a cabo las actividades académicas.

- b) Los profesores de las instituciones educativas poseen poco manejo y conocimiento de las TIC, por lo que se ven sometidos a muchas complicaciones al momento de desarrollar las sesiones de clase.

c) Si bien es cierto que las herramientas tecnológicas permiten mantener una comunicación entre profesores y estudiantes, esta no es igual a la comunicación en entorno presencial, ya que la relación que se puede establecer no es la misma.

d) Los estudiantes se pueden distraer fácilmente durante las sesiones de clase, ya que la variedad de recursos que se encuentran en Internet les llama mucho la atención.

e) El aprendizaje autorregulado del estudiante puede ser un fracaso, ya que, si no posee madurez y autocontrol, no generará acciones que busquen la consecución de sus metas académicas.

f) El uso excesivo del smartphone puede generar distintos problemas en los estudiantes, dentro de los cuales destacan los riesgos psicológicos, sociológicos, familiares, académicos y hasta suelen perder el sentido de la realidad (Calpa y Martínez, 2017).

Por su parte, Stojanovic (2009) señala desventajas como: No toda la población tiene acceso a Internet o en algunos casos la conexión falla, los dispositivos que se emplean pueden presentar fallas técnicas, los materiales pueden no estar correctamente diseñados, solo un tercio de los profesores a nivel mundial tiene un buen manejo de las TIC, esto puede generar desorganización de los estudiantes en sus actividades y horarios, los recursos tecnológicos de la Internet pueden desviar su atención, etc.

Cabe resaltar que la mayoría de las desventajas dependen sobre todo del talento humano, por lo que se puede ir mejorando conforme estudiantes y profesores pongan de su parte. De igual forma se requiere del compromiso de las autoridades para ir mejorando y superando las deficiencias del sistema educativo.

2.3.4 Educación virtual y currículo peruano

La educación virtual, es definida por Avendaño (2017) como: “un proceso de formación desarrollado mediante la incorporación de las tecnologías de la información y de la comunicación a través de Internet, mediados en entornos virtuales de aprendizaje” (p.44). Tal definición manifiesta una relación directa con las TIC.

El sistema educativo peruano concentra sus lineamientos en el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB), que presenta un exigente perfil de egreso, ya que se pretende que el estudiante al término de sus estudios pueda insertarse a la sociedad. Además, considerando que vivimos en una época en la que la tecnología avanza a gran escala, es preciso formar al estudiante en este aspecto, y así lo entiende este perfil de egreso al manifestar que al término de su educación: “el estudiante aprovecha responsablemente las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) para interactuar con la información, gestionar su comunicación y aprendizaje” (Ministerio de Educación, 2016, p. 17). Ante esto, podemos afirmar que la educación peruana pretende que el estudiante egresado de la EBR manifieste capacidades relacionadas con el uso de las TIC; y para lograrlo, se plantea trabajarla de forma transversal.

La pandemia posibilitó una nueva forma de enseñar a través de una educación virtual. La misma situación precisó de la utilización de medios tecnológicos para que se pueda llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, en la que tanto estudiantes como maestros tuvieron que adaptarse para poder utilizarlas. Entonces, se podría decir que en este caso se está potenciando en el estudiante el uso de las TIC, de modo que sean aprovechadas por este para ahondar en el conocimiento, al poder buscar adecuadamente información, al navegar por Internet y aprovechar las ventajas que esta provee para la comunicación y el aprendizaje. Además, se fomenta el desarrollo del enfoque transversal presente en el currículo, el cual está relacionado al uso de las TIC.

Si observamos los desempeños que se precisan en el programa curricular, notaremos también que los estudiantes deben demostrarlos al utilizar recursos tecnológicos, esto con el fin de que se fomente el desarrollo de las competencias que se plantean. Por ejemplo, el desempeño de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio del primer grado de secundaria, indica lo siguiente: “Selecciona y emplea recursos, estrategias heurísticas y procedimientos pertinentes a las condiciones del problema, como determinar términos desconocidos en un patrón gráfico...” (Ministerio de Educación, 2017, p. 159). Así pues, notamos cómo el desempeño indica la selección y empleo de recursos para llegar a la solución de un problema, estos recursos se pueden encontrar en la web. Notamos la importancia del uso de recursos y herramientas presentes en la web que ayudarán al estudiante en su proceso educativo, por tanto, las TIC proporcionan grandes posibilidades para un aprendizaje óptimo por parte del estudiante.

Debido a la pandemia del COVID 19, se impuso una educación virtual en todo el mundo para no descuidar el ámbito educativo. El Perú no fue ajeno a esto y se sumó al gran reto de impartir una educación virtual, pese a que nuestro sistema educativo aún no se encontraba listo para enfrentar esta realidad, pues como manifiesta Criollo et al. (2021), el país tenía muchos problemas de conectividad y los docentes no se encontraban capacitados en herramientas tecnológicas que constituyen una base importante en la virtualidad, esto hizo que la educación impartida estos años haya sido compleja.

El Ministerio de Educación puso en marcha el Programa Aprendo en casa, por medio de una multiplataforma capaz de alcanzar el ámbito nacional, lo cual trajo consigo que profesores y profesoras de todo el país busquen vencer infinidad de limitaciones de conectividad, falta de equipo y la carencia de conocimientos sobre herramientas digitales (Patiño, 2020). Sin duda el esfuerzo que se puso desde un comienzo para que los profesores logren comunicarse con sus estudiantes y familias, quienes serían los que acompañarían a sus hijos durante este proceso, ha sido muy grande.

A raíz de esta situación se ha podido notar que en nuestro país hay grandes desigualdades y se marcan las diferencias en el acceso a los medios de comunicación (Patiño, 2020). Es claro que por más esfuerzo que se haga, no todos los estudiantes peruanos han accedido a sus clases y en muchos

casos se han visto en la necesidad de abandonar sus estudios. Si bien todos los estudiantes sin importar su nivel socioeconómico deben tener acceso a la educación, aquellos con un nivel más bajo presentan mayor dificultad.

Por su parte el Instituto Peruano de Economía (2021), señala algunas repercusiones que se dieron por la implementación de la educación virtual en el Perú a raíz del COVID 19:

-Menor asistencia: Según el INEI, el porcentaje de estudiantes que continuaron sus estudios se redujo de un 92% a 87% entre el año 2019 y 2020, lo que implica que más de 400 000 estudiantes dejaron de estudiar, siendo más afectado el nivel inicial. Esto se debe a que muchos padres de familia pensaron que no sería tan relevante que sus hijos perdieran el año siguiendo clases virtuales, ya que en estas edades la socialización es un componente importante en su desarrollo.

-De la escuela al trabajo: Los estudiantes de zonas rurales que presentaban mayor dificultad de acceso a Internet, prefirieron optar por realizar otras actividades, es por ello que, el promedio de trabajadores entre 14 y 18 años se incrementó de 388 mil en el 2020 a 485 mil en el 2021.

-Pérdida de capital humano: El porcentaje de estudiantes por debajo del nivel mínimo de rendimiento en pruebas de razonamiento matemático y comprensión lectora se incrementó en los dos últimos años de 54% a 76%. Esto sin duda afecta el futuro profesional de los estudiantes y su inserción en el mercado laboral, en especial para los que han egresado durante los años 2020 y 2021.

Si bien con estos datos estadísticos podemos darnos cuenta de cómo se ha visto afectada la educación de nuestro país en estos dos últimos años, debemos tener en cuenta que la educación virtual lo que ha hecho es aumentar las debilidades que nuestro sistema educativo ya tenía, sobre todo aumentando las brechas de desigualdad social y digital, provocando que muchos estudiantes se vean en la necesidad de abandonar el sistema, reduciéndose la cobertura educativa y, más aún, su calidad (Gómez y Escobar, 2021). Por lo que es urgente implementar políticas que contribuyan al fortalecimiento de la educación pública y privada, buscando que nuestro sistema educativo sea realmente igualitario y que pueda estar preparado para este tipo de situaciones, evitando que muchos estudiantes y profesores se vean perjudicados.

2.3.5 Tecnología aplicada a la enseñanza de la matemática

Los nuevos tiempos demandan de nuevas formas de afrontar la realidad, y la educación no es ajena a esto. En el caso específico de la educación matemática, la utilización de la tecnología es cada vez más frecuente durante los procesos de enseñanza-aprendizaje. Se trata de aprovechar las potencialidades de la tecnología para el logro de los objetivos de aprendizaje. Esta integración depende en gran medida de la “formación y la actitud de los docentes, así como la voluntad de la

comunidad educativa de perseguir una educación más flexible e integradora, más cercana al mundo exterior y más centrada en las individualidades del alumno” (Martín, 2005, p. 4).

El trabajo constante con ejercicios no siempre lleva al estudiante a reflexionar sobre el proceso seguido para obtener una respuesta (Gamboa, 2007). Por esta razón, los estudiantes presentan dificultades cuando se enfrentan a otro tipo de ejercicios y/o problemas matemáticos donde se requiera un proceso de análisis y reflexión. Ante esta problemática, los docentes deberán proponer actividades para que sean resueltas a través de diversidad de procesos.

Aunado a lo anterior, Flores (1997) manifiesta que: “un problema importante y común que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas es que los alumnos mecanizan o automatizan un algoritmo o proceso sin tener una comprensión cabal de las ideas y conceptos que están detrás” (p. 49). Por ello, la enseñanza de la matemática debe tener un carácter innovador, que permita al estudiante desarrollar muchas de sus potencialidades, no limitarse a una tarea memorística ni automatizada.

Una forma de innovar la enseñanza de la matemática es a través del uso de la tecnología, que ofrece muchas ventajas, en este caso se destaca como un “medio que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observación que, en otros ambientes, por ejemplo “lápiz y papel”, sería difíciles de obtener” (Gamboa, 2007, p. 8). Existen programas informáticos que permiten realizar representaciones gráficas de curvas, así como una manipulación virtual de objetos, además de poder apreciar diversos fenómenos físicos, lo cual sería una tarea complicada si se quisiese realizar utilizando materiales clásicos tales como lápiz y papel.

Por otro lado, Gamboa (2007) indica que “la clave está en trabajar las situaciones cotidianas y los problemas presentes en los libros de texto desde un nuevo enfoque, apoyadas en las herramientas tecnológicas disponibles” (p. 16). Así pues, tenemos que el trabajo escolar debe partir de situaciones significativas para el estudiante, en las que este pueda manifestar una comprensión y reflexión a partir del problema planteado apoyándose en el uso de las TIC.

El área de matemática exige de ciertas acciones por parte de los estudiantes para que los contenidos enseñados sean aprendidos eficazmente, además considerando que la implementación de recursos tecnológicos es parte importante en la educación actual, “los docentes tienen la obligación de fomentar el uso de las TIC, y lograr con ello que los estudiantes lleven a cabo una reflexión más profunda al momento de resolver un problema de aplicación” (Cornejo et al., 2013, p. 215). A partir de las funcionalidades y potencialidades que ofrecen los recursos virtuales, el estudiante podrá valerse de estas para conseguir aprender determinados contenidos que se le pretende enseñar. Guaypatin et al. (2017), respecto a la integración de la enseñanza de la matemática con la tecnología, manifiesta que:

al aplicar la tecnología en una ciencia exacta como la Matemática se logra desarrollar en los estudiantes capacidades y habilidades básicas entre las que se encuentran la representación, uso de herramientas y recursos, comunicación, razonamiento y pensamiento, que permitirá desenvolverse en la vida diaria resolviendo sus problemas con eficiencia y eficacia. (p. 65)

Los aparatos tecnológicos que ayudan en gran medida a los estudiantes son: las calculadoras gráficas, los softwares de cálculo simbólico, y los programas de geometría dinámica. Respecto a programas y herramientas tecnológicas con los que se puede trabajar tenemos: los micro mundos operados por el usuario, simulaciones de fenómenos específicos, tutoriales, programas de geometría, programas de representación, pizarra digital. Por último, estos autores destacan que en cuanto a estrategias para favorecer el interés o motivación en el curso se puede utilizar juegos computacionales, proporcionar material didáctico almacenado en unidades de disco duro, y/o dictar clases virtuales.

La tecnología es parte de la realidad actual, los docentes deben aprovecharla para que sus estudiantes puedan alcanzar los logros de aprendizaje propuestos. Así pues, esta implementación en las aulas de clase permitirá la mejora constante de los procesos de enseñanza-aprendizaje.



Capítulo 3. Marco metodológico

En este apartado se muestra el marco metodológico de la investigación, describiendo el paradigma, tipo, y diseño de investigación; así como, la técnica de investigación utilizada para el análisis de datos y la posterior obtención de resultados. Además, se explica cómo se hizo la selección y análisis de las propuestas que desarrollan el pensamiento algebraico.

3.1 Tipo y diseño de investigación

La investigación se sitúa en el paradigma empírico-analítico (Ricoy, 2006), pues se quería determinar las incidencias que se presentan en la aplicación de actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización. En este sentido, se ha seguido un diseño de investigación cuasiexperimental (Pitarque, 2016), pues los sujetos (estudiantes) no han sido elegidos a través de un proceso aleatorio, sino que debido a las características del objeto de estudio (procesos de generalización) y a la necesidad de la presente investigación, es que las actividades están dirigidas para estudiantes del ciclo VI (1° y 2°) de la EBR. Por ello, se ha podido trabajar con 15 estudiantes que cursan el 2° de secundaria. Además, se contempla la manipulación de una variable independiente, las actividades propuestas para un entorno de enseñanza presencial adaptadas a un contexto virtual; para identificar su incidencia en el posible desarrollo del pensamiento algebraico que puedan lograr las estudiantes.

A partir del diseño elegido, tenemos que se trata de un “diseño de un grupo con postest únicamente” (Echevarría, 2016, p.70), pues luego de aplicar un tratamiento al grupo se procede a medir los resultados de la variable dependiente.

En la tabla 1 se muestra, de manera resumida, el procedimiento metodológico desarrollado en la investigación.

Tabla 1

Procedimiento metodológico de la investigación

Procedimiento	Descripción
1. Determinación del problema	Se identificó una serie de dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión del álgebra, lo que no permite un adecuado desarrollo del pensamiento algebraico. Si bien podemos encontrar distintas propuestas metodológicas que permiten el desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización, ninguna de estas ha sido adaptada a un contexto de enseñanza virtual.
2. Planteamiento de los objetivos	Se plantearon cinco objetivos específicos, los cuales se centran en determinar las incidencias de la aplicación de actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización en estudiantes de segundo de secundaria.

3. Selección de la información que sustenta la investigación	Se revisó la información acerca de la enseñanza- aprendizaje del álgebra escolar, los procesos de generalización y la educación virtual.
4. Aplicación de los criterios definidos a las propuestas metodológicas	Se aplicaron cinco criterios para evaluar los aspectos específicos del contenido de diez propuestas metodológicas, los cuales fueron: objetivo general, teoría adoptada, secuencia de actividades y análisis de resultados. Se asignó un puntaje a cada propuesta metodológica, las tres con mayor puntaje (PG2, PG6 y PG10) se analizaron con más detalle.
5. Análisis de las propuestas metodológicas según las teorías de Mason, Graham, Pimm y Gower; y de Radford	Se realizó una comparación de las actividades de las propuestas metodológicas PG2, PG6 Y PG10 con las teorías de Mason y su equipo; y de Radford. Se revisó en cada actividad el proceso de generalización, además de la viabilidad y limitaciones de cada propuesta.
6. Elección y adaptación de las actividades desarrolladas a partir de la propuesta metodológica PG6.	A partir del análisis de las propuestas, se seleccionó para ser adaptada a la propuesta PG6 y se analizó con mayor profundidad las actividades 1 y 2, ya que las otras cuatro tenían características similares.
7. Selección de la muestra	La muestra estuvo conformada por 15 estudiantes de 2° "A", de una Institución Educativa Pública, perteneciente a la Unidad de Gestión Educativa Local de Piura, quienes tenían entre 12 y 14 años.
8. Aplicación de encuesta para conocer la disponibilidad de medios tecnológicos	Se recopiló información sobre la disponibilidad y uso de medios tecnológicos por parte de las estudiantes participantes, lo cual permitió identificar las herramientas con las que cuentan las estudiantes para así poder planificar las sesiones.
9. Aplicación del Test 1 y Test 2	Las dos actividades adaptadas se aplicaron en forma de test y en distintas sesiones, el test 1 se aplicó de manera grupal y el test 2 se aplicó de manera individual.
10. Aplicación de cuestionario final	Se aplicó a las estudiantes un cuestionario final sobre la aplicación de las actividades virtuales con el fin de conocer su percepción respecto a la aplicación de las dos sesiones de clase desarrolladas de manera virtual.

Nota. Elaboración propia.

3.2 Población y muestra

La aplicación de este trabajo de investigación se realizó en una institución educativa local, perteneciente a la Unidad de Gestión Educativa Local de Piura, con estudiantes del 2° grado de secundaria de EBR, en el año escolar 2021. La población son las estudiantes del segundo grado "A" de secundaria de esta institución, y la muestra estuvo conformada por 15 estudiantes de 2° "A", quienes tenían entre 12 y 14 años.

El tipo de muestreo considerado fue el No probabilístico por conveniencia, pues la selección de los sujetos ha sido realizada a partir de las características del presente trabajo y criterios tomados en cuenta por los investigadores; ya que las estudiantes que forman parte de la investigación poseen recursos tecnológicos que pueden utilizar durante las sesiones de clase. Además, las estudiantes decidieron participar con el consentimiento de sus padres por medio de una encuesta enviada a través de Google Forms. Por lo tanto, la muestra se determinó al identificar quiénes de las estudiantes aceptaron formar parte de la investigación y contaban con los recursos tecnológicos necesarios.

3.3 Variables

Respecto a las variables de investigación, tenemos que “las variables independientes son las que elegimos libremente, o manipulamos, para verificar su efecto en, o su relación con, las variables dependientes” (Morales, 2012, p. 4). De modo que en la presente investigación la variable independiente corresponde a las actividades extraídas de una propuesta metodológica con las adaptaciones realizadas para un entorno virtual, y la variable dependiente es el desarrollo del pensamiento algebraico que manifiestan las estudiantes luego de la aplicación de las actividades planteadas.

3.4 Recogida de información

Inicialmente se hizo una revisión bibliográfica para recopilar una serie de propuestas sobre las metodologías aplicadas en el desarrollo de los procesos de generalización en estudiantes de entre 12 y 14 años, identificando la secuencia de actividades que plantean, y así observar la relación que existe con las teorías de Mason et al. (1985) y de Radford. A partir de esta revisión se identificaron diez propuestas metodológicas, las mismas que fueron codificadas tal como se muestra en la tabla 2. Así, la propuesta metodológica 1 se codificó como PG1 (“PG” por la palabra clave “proceso de generalización”, que es el constructo en el cual se centra la investigación) y así sucesivamente.

Tabla 2

Codificación de los documentos seleccionados

N°	Documento referenciado en APA 7	Código
1	Arriaga, G. (2008). <i>Procesos de generalización con estudiantes de 1° y 2° de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal: una propuesta de enseñanza</i> . [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. http://200.23.113.59:8080/jspui/handle/123456789/745	PG1
2	Guzmán, C. y Ávila, Y. (2020). <i>Procesos de generalización en situaciones asociadas a contextos algebraicos: una experiencia con estudiantes de grado séptimo de educación básica (11-13 años)</i> . [Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/22912	PG2
3	González, E. (2012). <i>Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas</i> . [Tesis de Maestría, Universidad de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10835	PG3

4	Ruiz, M. (2016). <i>Diseño de una propuesta metodológica que contribuya al lenguaje algebraico, su precisión e importancia para la enseñanza-aprendizaje del álgebra</i> . [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/59655	PG4
5	Gustin, J., y Pantón, T. (2020). Emergencia de los medios semioticos en estudiantes de grado séptimo al desarrollar tareas de generalización de patrones. <i>Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matemática</i> , 16(60), 38-56. http://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/94	PG5
6	Luque, U., y Mena, E. (2016). <i>La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar</i> . [Trabajo de fin de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/153	PG6
7	Olaya, L. (2014). <i>Procesos de generalización en situaciones que involucran secuencias numéricas y geométricas una propuesta didáctica</i> . [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/54419	PG7
8	Ríos, N. (2020). <i>Desarrollo de procesos de Generalización por medio de un videojuego</i> . [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/12451	PG8
9	Rojas, C., y Brango, J. (2016). <i>Aplicación para dispositivos móviles Android: una propuesta para el desarrollo de habilidades en el proceso de generalización</i> . [Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]. http://hdl.handle.net/20.500.12209/149	PG9
10	González, A., y Velandia, A. (2017). <i>Procesos de generalización en la iniciación al álgebra escolar: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo</i> . [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/6381	PG10

Nota. Elaboración propia.

Cabe destacar que, de acuerdo con Aguilar y Chamba (2019), una propuesta metodológica es un manuscrito académico que tiene como principal objetivo comunicar los resultados obtenidos en una investigación, donde se sistematiza unos saberes teóricos y prácticos que favorecen el alcance de aprendizajes significativos.

Las propuestas, por sí mismas, constituyen valiosos recursos para los docentes, ya que ponen a su disposición planteamientos de enseñanza que han generado resultados aceptables; las mismas que pueden ser adaptadas para ser llevadas a diferentes contextos, tomando en cuenta las normas que rigen el sistema educativo donde se quieren aplicar.

3.4.1 Aplicación de los criterios definidos a las propuestas metodológicas.

La presente investigación consideró en un primer momento 10 documentos, los cuales fueron seleccionados estableciendo filtros de búsqueda como palabras clave, edad de los estudiantes con los que se realiza la propuesta, idioma (español) y que su antigüedad no sea mayor a 15 años. Luego, se hizo una segunda selección y se redujeron a tres, basándose en un análisis más profundo de acuerdo con criterios que evalúan aspectos específicos del contenido de las investigaciones, con una valoración de 0 a 5 puntos por cada criterio: objetivo general, teoría adoptada, secuencia de actividades y análisis de resultados. A continuación, se describe la evaluación de cada criterio en los puntajes asignados a los 10 documento seleccionados.

El primer criterio que se aplicó fue verificar el *objetivo general de las propuestas*, es decir, se valoraron con mayor puntaje aquellas que promovían el desarrollo de los procesos de generalización. Luego de extraer y ordenar los 10 objetivos de las propuestas (Apéndice G), se dedujo que los documentos PG6 y PG9 cumplen con el criterio en mayor medida, obteniendo una valoración de 5 puntos; los PG2, PG3, y PG10, diseñaron propuestas metodológicas, pero su objetivo gira en torno a usar esas propuestas como medios para otro fin; y los objetivos de los PG1, PG4, PG5, PG7 y PG8 no se enfocan directamente en desarrollar una propuesta metodológica o no promueven el desarrollo de los procesos de generalización, por ello se les asignó un puntaje menor a 4.

Con respecto al segundo criterio, *teoría adoptada*, se considera las teorías de Mason, Graham, Pimm y Gower y/o Radford. Luego de la revisión que se muestra en el Apéndice H se ha inferido que los PG1, PG2, PG5, PG6, PG9 y PG10 cumplen con el criterio establecido, con un puntaje de 5; y los PG3, PG4, PG7 y PG8 no toman como base las teorías de los autores mencionados, quienes describen las fases de los procesos de generalización.

Por otro lado, en la *secuencia de actividades*, tercer criterio aplicado, se ha considerado que la propuesta presente una serie de actividades que muestre detalladamente el desarrollo de procesos de generalización, con ejemplos y justificando el planteamiento de cada tarea. Tras analizar los documentos se puede afirmar que los PG2, PG3, PG6, PG8, y PG10 cumplen con la descripción del criterio establecido, con un puntaje de 5; y los PG1, PG4, PG7 y PG9 son los que obtuvieron 3 puntos, debido a que su secuencia de actividades no busca desarrollar los procesos de generalización, sino, encontrar dificultades en el acceso al pensamiento algebraico o desarrollar el lenguaje algebraico, razonamiento por inducción y no describen detalladamente cada actividad (PG1, PG4, PG7). Además, el PG5 fue calificado con un puntaje de 2, debido a que no presenta la secuencia de actividades, tal como se muestra en el Apéndice I.

El último criterio aplicado ha sido que los *resultados de la investigación* se presenten de forma clara, detallada y señalando la viabilidad y limitaciones de la propuesta en torno a los procesos de generalización. Con respecto al PG2, PG7 y PG10, han cumplido con el criterio establecido (véase Apéndice J), por ello se les ha asignado un puntaje de 5; los PG1 y PG4, presentan su análisis final de forma clara, sin embargo, este se enfoca en las dificultades que se van presentando en los estudiantes a lo largo de la secuencia de actividades y no en describir los procesos de generalización, es por ello que se les ha asignado un puntaje de 4; con los PG3, PG5, PG6, PG8 y PG9, se ha evidenciado que el análisis final no está desarrollado de forma detallada, además, este no aborda por completo el proceso de generalización, es por ello que se les ha asignado 3 puntos.

Resumiendo, los resultados de la aplicación de los criterios señalados se muestran en la última columna de la tabla. Los puntajes para cada documento se presentan en la siguiente tabla 3.

Tabla 3*Puntaje total obtenido por cada documento según los criterios aplicados*

Documento	Criterio 1	Criterio 2	Criterio 3	Criterio 4	Puntaje total
PG1	2.5	5	3	4	14.5
PG2	4	5	5	5	19
PG3	4	1	5	3	13
PG4	2	1	3	4	10
PG5	3	5	2	3	13
PG6	5	5	5	3	18
PG7	3	1	3	5	12
PG8	3	1	5	3	12
PG9	5	5	3	3	16
PG10	4	5	5	5	19

Nota. Elaboración propia.

A continuación, se presenta un análisis más detallado de las propuestas que obtuvieron mayor puntaje: PG2, PG6 y PG10.

3.4.2 Análisis de las propuestas metodológicas según las teorías de Mason, Graham, Pimm y Gower; y de Radford

En el análisis que se presenta a continuación, se ha considerado la comparación de las actividades de cada propuesta metodológica con las teorías de Mason et al. (1985) y de Radford. Cabe señalar que el documento PG6 considera la teoría de Radford, el PG10 considera a Mason et al. (1985) y el PG2 toma como base las teorías de ambos autores; revisando en cada actividad el proceso de generalización. Así mismo, se evalúa la viabilidad y las limitaciones de las propuestas, a partir de los resultados que hayan obtenido en su aplicación (PG2 y PG10) y la propuesta PG6 a partir de un ejercicio aplicado al inicio de la investigación. El análisis del PG2 y PG10 se muestra en el Apéndice A y Apéndice B, respectivamente. A continuación, se muestra el análisis del PG6, que es la que se tomó en consideración para el desarrollo de esta investigación.

Hallazgos del documento PG6.

La investigación PG6 desarrollada por Luque y Mena en el año 2016, denominada La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar, se presentó como trabajo de grado para optar el título de especialista en educación matemática, en la Universidad Pedagógica Nacional. El objetivo del trabajo fue “diseñar una cartilla para profesores, donde se use el geoplano cuadrado como instrumento articulador para potencializar el proceso de generalización” (Luque y Mena, 2016, p. 5). En ella se plantea una prueba piloto, en la que a partir del desarrollo se busca observar si el geoplano cuadrado cumple con un rol protagónico, y si se logran evidenciar las etapas del proceso de generalización propuestas por Radford; a partir de los resultados se procedió al diseño de la cartilla de seis actividades con las reestructuraciones pertinentes.

Una visión desde la teoría de Mason et al. (1985) y Radford.

En este apartado se presenta la Actividad 1 y Actividad 2, pues son estas las que se han considerado para realizar las adaptaciones al contexto de educación virtual. Las actividades 3, 4, 5 y 6 se presentan en el Apéndice C. Se realizó un análisis a la luz de las fases o etapas que consideran las teorías de Mason et al. (1985) y Radford respectivamente. Este se presenta en la tabla 4 y tabla 5, donde se describen con mayor detalle la secuencia seguida en el desarrollo de las tareas según las teorías mencionadas.

Actividad 1: El objetivo fue realizar procesos de generalización a través de habilidades y procesos de visualización, utilizando el geoplano cuadrado como recurso didáctico (véase figura 3)

Figura 3

Actividad propuesta N° 1

ACTIVIDAD PROPUESTA No. 1 "SECUENCIA DE CUADRADOS"

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el Geoplano Cuadrado.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Evidenciar que efectivamente los estudiantes pasan por las tres etapas descritas por Radford (2003), en el desarrollo de procesos de generalización.

PROCEDIMIENTO: Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el Geoplano Cuadrado las siguientes figuras correspondientes a una secuencia de cuadrados.



Los cuadrados anteriores se construyeron siguiendo un patrón. Como pueden ver no aparece la FIGURA 3 y la FIGURA 4. Ustedes deben de acuerdo a sus observaciones, construirlas en el geoplano, de acuerdo a la regularidad presentada.

Completen las cantidades numéricas para cada una de las casillas vacías de cada fila en la TABLA No. 1, de acuerdo a lo que observen y puedan deducir en las diferentes construcciones de la secuencia de cuadrados.

En la última columna, donde aparece la letra n , cada equipo deberá encontrar para cada fila de la tabla, una fórmula o término general, que funcione para conocer el resultado en cualquier posición que se desee hallar; en caso que no lo puedan realizar continúen con la actividad e inténtenlo más tarde con la asesoría del profesor.

Nota: Los ejemplos mostrados en la tabla, les serán de gran ayuda para contestar este punto

LETRAS	FIGURA													n
	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100			
u	NÚMERO DE PUNTILLAS EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	2	3	4					11					$n + 1$
v	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS EN LOS CUATRO LADOS DEL CUADRADO	4	8	16						400				
w	NÚMERO DE LADOS EN EL CUADRADO	4	4											
x	NÚMERO DE PUNTILLAS AL INTERIOR DEL CUADRADO	0	1	4				36						
y	NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	1	2											
z	NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN LOS CUATRO LADOS DEL CUADRADO	4	8											$4n$

TABLA No. 1 - GENERALIZACIÓN PARA SECUENCIAS DE CUADRADOS

4. Escriban al frente de cada letra, con sus propias palabras, el patrón o regularidad que encontraron, para ir obteniendo los resultados numéricos en cada una de las casillas vacías para cada fila de la tabla anterior; de acuerdo a la secuencia de los cuadrados.

u: _____

v: _____

w: _____

x: _____

y: _____

z: _____

Nota. Adaptado de Actividad propuesta No 1 (pp. 46-48), por Luque y Mena, 2016.

El análisis de la actividad 1 se presenta en la tabla 4:

Tabla 4

Análisis de la actividad N° 1 del PG6

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
a) Ver un patrón: Se les presenta a los estudiantes figuras que deben ser construidas en un geoplano cuadrado usando bandas elásticas. En este caso, se presentan las figuras 1, 2 y 5; pidiéndole a los estudiantes que construyan las figuras 3 y 4. En esta fase se trabaja básicamente la observación, que se tendrá que realizar a las primeras 3 figuras, tratando de identificar lo que cambian entre una y otra, para que a partir de ella se logren obtener las dos figuras faltantes. Como se mencionó, y para explicitar, la actividad se pide expresamente que, construyan las figuras correspondientes a una secuencia de cuadrados, las mismas que se han presentado de manera impresa en el documento que se les brinda a los estudiantes. Estas figuras deben ser construidas en un geoplano cuadrado a través de bandas elásticas. b) Decir un patrón: Las actividades contempladas sí consideran esta fase, ya que se pide una identificación de datos numéricos, y alfanuméricos; además, en el último apartado (pregunta 3) se solicita escribir el patrón o regularidad que se ha encontrado, esto con el fin de recoger información sobre cómo se han obtenido los datos numéricos con los que se han llenado las casillas vacías de la tabla propuesta. En esta fase, los estudiantes deben expresar de forma escrita utilizando un lenguaje verbal, lo que han observado en las figuras justificando los resultados numéricos dados en las casillas vacías. En las capturas de pantalla presentadas no se especifica que se va a realizar una exposición y discusión de los resultados, pero en el documento principal se señala la realización de tales actividades, luego del desarrollo de la ficha. Además, las actividades se desarrollan en pareja, por lo que previamente ya se han discutido los resultados parciales que han ido encontrando en el proceso. c) Registrar un patrón: Esta etapa se ve evidenciada en el llenado de las casillas vacías de la tabla propuesta por los investigadores. Los estudiantes quienes a partir de la observación y habiendo pasado ya por las etapas precedentes, disponen de esta tabla para organizar los datos numéricos recolectados de las figuras que han sido plasmadas en el geoplano cuadrado. En este sentido, no se emplean oraciones	a) Etapa de la generalización fáctica: Para esta primera actividad, se ha implementado el uso de un geoplano cuadrado como material didáctico. El estudiante tiene que construir sobre este geoplano cuadrado, tres imágenes que le son propuestas y que representan una secuencia de cuadrados, usando para esto las bandas elásticas. Con ello, se busca que el estudiante tenga ese primer acercamiento a la secuencia de cuadrados y le facilite la identificación de la regularidad a partir de la manipulación e interacción con el geoplano cuadrado. En este desarrollo, el cual está centrado en la acción manipulativa, los estudiantes realizan señalamientos directos a las figuras que han representado, además, se expresan empleando una gestualidad, que hace manifiesta esa intención de comunicar la identificación de alguna característica común entre las figuras. b) Etapa de la generalización contextual: En esta actividad 1 se presenta una tabla con algunos espacios vacíos, los cuales deben completar a partir de la observación de las figuras plasmadas en el geoplano cuadrado. El estudiante entonces identifica, la cantidad de, por ejemplo, el número de puntillas en un solo lado del cuadrado, dato que ha de encontrar a partir del conteo que pueda realizar en las figuras elaboradas en el recurso didáctico implementado, el estudiante puede identificar fácilmente los datos de las primeras tres figuras, y puede extender esta identificación a otras figuras, pues la tabla está organizada de tal forma que le concede la posibilidad de seguir la regularidad a partir de las primeras tres figuras mencionadas. Así el estudiante puede obtener datos de una figura que no está presente en el geoplano cuadrado. Se entiende a partir de lo anterior, que el estudiante manifiesta un nivel más avanzado en cuanto a la identificación de datos numéricos respecto a las primeras tres figuras, sin llegar aún a establecer una regla general. Además, se evidencia que hay una mayor complejidad al plasmar sus ideas textualmente, se produce entonces un tipo de registro que permite al estudiante proponer conjeturas. Cuando el estudiante menciona, por ejemplo, “o sea es que

verbales, aunque, se hace uso exclusivo de expresiones simbólicas, las cuales han surgido de la regularidad identificada en los datos numéricos previos. Así se tiene que, para hallar el número total de puntillas en un solo lado del cuadrado (apartado v), se puede emplear la regla general $n + 1$; lo mismo para hallar el número total de espacios entre una puntilla y otra alrededor del cuadrado (apartado z), se expresa como $4n$.

d) Prueba de validez de la fórmula: Se proporciona una tabla en la que se debe llenar casillas vacías, presentándose once figuras en las que se ha de identificar valores de variables, además de la figura n -ésima, por ejemplo, se pide hallar el número de puntillas al interior del cuadrado para las once figuras y para la figura n -ésima. La tabla solo permite llenar datos numéricos de doce figuras, incluyendo la del término n -ésimo. No se presenta una actividad en la que el estudiante pueda comprobar la regla general a la que ha llegado con figuras diferentes a las presentadas, pero con las proporcionadas son suficientes para probar la validez.

nos están dando la figura 1, 2 y 5, nos toca encontrar la 3 y 4, o sea que la de 3 sería 4 y la figura 4 sería de 5", o "la que sigue o sea la segunda tiene 8", se evidencia un planteamiento de conjeturas en función del patrón identificado. En este caso el estudiante ya reduce sus formas de expresión.

c) Etapa de la generalización simbólica: Se propone en la tabla una última columna de casillas en las que se ha de utilizar letras como variables, esto como parte de la generalización que deben hacer los estudiantes considerando los anteriores datos numéricos identificados. Por ejemplo, que el número de puntillas en un solo lado del cuadrado es igual al número de la figura más uno (para la figura 1, hay 2 puntillas en un solo lado del cuadrado; para la figura 2, hay 3 puntillas en un solo lado del cuadrado; análogamente, para la figura n , hay $n + 1$ puntillas en un solo lado del cuadrado). Además de proponer la regla general a través de símbolos alfanuméricos, se pide enunciar la deducción de la fórmula.

Esta actividad 1 considera cada fase de la teoría de Radford, en la cual lo central es completar la tabla propuesta por los investigadores, y para el llenado de cada casilla el estudiante tiene que remitirse directamente al geoplano cuadrado al cual accede a manipularlo. Esta misma tabla posibilita que a partir del análisis numérico se identifiquen los patrones.

Nota. Elaboración propia.

Actividad 2: El objetivo es el mismo que en la actividad anterior, pero en esta se presenta un cambio respecto a las imágenes y regularidades que se puedan identificar (véase figura 4).

Figura 4

Actividad propuesta N° 2

ACTIVIDAD PROPUESTA No. 2
"SECUENCIA DE ESCUADRAS EN EL GEOPLANO"

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el Geoplano cuadrado.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Evidenciar que efectivamente los estudiantes pasan por las tres etapas descritas por Radford (2003), en el desarrollo de procesos de generalización.

PROCEDIMIENTO: Observen las dos imágenes siguientes detallando sus similitudes y diferencias.




- Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el geoplano la secuencia de escuadras (↖) de la **IMAGEN No. 1**.
- Completen las casillas vacías de la fila correspondiente a la letra "p" en la tabla No. 2, con las cantidades numéricas, de acuerdo a las apreciaciones observadas en las escuadras construidas sobre el geoplano.

Nota: Tengan en cuenta que la figura 1 en la tabla, corresponde en la **IMAGEN No. 1**, a la primera escuadra (↖) que aparece abajo y a la izquierda del geoplano. La figura 2 es la escuadra que le sigue, y así sucesivamente.

- Utilizando de nuevo la **IMAGEN No. 1**, comiencen a sumar la primera puntilla suelta con el número de puntillas que forman la primera escuadra, en este caso, $1 + 3 = 4$. Luego, este resultado lo suman con el número de puntillas de la siguiente escuadra, en este caso $4 + 5 = 9$; y así sucesivamente. Vayan escribiendo el resultado en cada una de las casillas vacías de la tabla No. 2, correspondientes a la fila de la letra "q".
- Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el geoplano la secuencia de escuadras (↖) de la **IMAGEN No. 2**.
- Escriban en las casillas vacías de la fila correspondiente a la letra "r" de la tabla No. 2, las cantidades numéricas correspondientes a lo que la variable "r" indica y ustedes observan sobre el geoplano.

Nota: Tengan en cuenta que la figura 1 en la tabla, corresponde en la **IMAGEN No. 2**, a la primera escuadra (↖) que aparece abajo y a la izquierda del geoplano. La figura 2 es la escuadra que le sigue, y así sucesivamente.

- Utilizando el esquema de escuadras de la **IMAGEN No. 2**, encuentren los resultados de contar el número de puntillas que forman cada escuadra y escriban el dato en las casillas vacías correspondientes a la fila de la variable "s".
- En la última columna de la tabla No. 2, donde aparece la letra n, cada equipo deberá encontrar para cada fila de la tabla, una fórmula o término general, que funcione para conocer el resultado en cualquier posición que se desee hallar; en caso que no lo puedan realizar continúen con la actividad e inténtelo más tarde con la asesoría del profesor.
- Escriban al frente de cada letra: p, q, r, s, con sus propias palabras, el patrón o regularidad que encontraron, para ir obteniendo los resultados numéricos en cada una de las casillas vacías para cada fila de la tabla No. 2. "Generalización para secuencia de escuadras en el geoplano"

p: _____

q: _____

r: _____

s: _____

FIGURA		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
LETRAS	p												
		NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA EN LA IMAGEN No. 1											
	q	1	4	9	16			49		100			
	r	5	9	13						41			
	s	3	7	11								309	

TABLA No. 2 – GENERALIZACIÓN PARA SECUENCIA DE ESCUADRAS EN EL GEOPLANO

Nota. Adaptado de Actividad propuesta No 1 (pp. 49-52), por Luque y Mena, 2016.

El análisis de la actividad 2 se presenta en la tabla 5:

Tabla 5

Análisis de la actividad N° 2 del PG6

Relación con la teoría de Mason et al. (1985)	Relación con la teoría de Radford
a) Ver un patrón: Para esta primera fase los estudiantes tienen que observar el geoplano cuadrado con las figuras formadas utilizando bandas elásticas. Se les pide que detallen las similitudes y diferencias de dos imágenes, por lo que el estudiante tendrá que observar detenidamente para identificar qué pasa de una imagen respecto a otra, en este caso, cada imagen contiene una secuencia de figuras internas. Se pretende entonces, que el estudiante conciba la regularidad a partir de esta primera fase, que consiste básicamente en ver el patrón, identificar que pasa de una figura a otra. b) Decir cuál es el patrón: A través del apartado que pide redactar con sus propias palabras la regularidad encontrada, se pretende que se posea el conocimiento necesario para completar las casillas vacías de la tabla. Se considera entonces que esta pregunta, dirige al estudiante a expresar lo que ha identificado a partir de la observación previa. Al trabajarse en parejas, existe la posibilidad de que las ideas sean discutidas respecto a la regularidad que pueda haber identificado cada estudiante en la primera fase. c) Registrar un patrón: El señalamiento de lo que el estudiante ha ido observando es lo que se considera en esta fase. Este registro de datos numéricos es realizado por los estudiantes en la tabla 2. A medida que se va completando la tabla, la regularidad se muestra más evidente, por lo que los estudiantes tendrán esa facilidad de identificación. En la columna final de la tabla se considera un tratamiento alfanumérico del patrón, partiendo siempre de un tratamiento exclusivamente numérico. Cabe resaltar que todos los registros no son elaborados por los estudiantes, algunos ya son colocados intencionalmente para que los estudiantes los consideren como datos correctos y para posteriormente corroborar la validez de la fórmula. d) Prueba de la validez de las fórmulas: Se enuncia textualmente el patrón identificando, y se expresa de manera simbólica. Pero no hay un apartado que pida verificar con cálculos aritméticos o de otra forma, si esta regla se cumple para figuras diferentes a las presentada, sin embargo, la prueba de la validez se puede realizar con las figuras con las que se ha trabajado.	a) Etapa de la generalización fáctica: En esta primera etapa el estudiante tiene ese primer acercamiento hacia la generalización. Tal como en la actividad descrita anteriormente, lo que se destaca en esta primera etapa es la manipulación del geoplano cuadrado en el que se han construido algunas figuras. La forma de estas figuras, en esta actividad, son distintas respecto a las que se presentaron en la actividad piloto. Aun así, permite a los estudiantes manipular directamente el geoplano cuadrado, dando la posibilidad de interactuar con este a través de otros medios ya conocidos, como son: la gestualidad, los señalamientos, entre otros similares, esto se manifiesta en función de la pregunta referida a las similitudes y diferencias entre las figuras. b) Etapa de la generalización contextual: En la identificación de la regularidad, el estudiante podría proponerse decir que para hallar el total de puntillas de una determinada figura de la imagen 1, sería igual a “dos por el número de la figura más uno”. La gestualidad, manifestada en un primer momento, ahora es sustituida por palabras que expresan un sentido más general de las figuras. En el proceso de llenado de las casillas vacías es cuando el estudiante puede manifestar similares afirmaciones, porque de la identificación de datos numéricos a partir de la observación de las figuras, puede encontrar el patrón. c) Etapa de la generalización simbólica: La deducción de la fórmula que defina el comportamiento del patrón, se presenta en la última columna de la tabla, aquí se evidencia un tratamiento a nivel algebraico. El estudiante a partir de la regularidad identificada previamente cuando ha de completar las casillas vacías podrá proponer la regla que defina el patrón para cada apartado que se solicite. Además, para esta etapa el estudiante dispone de un apartado en donde podrá expresar de manera verbal el patrón o regularidad que se ha encontrado.

Nota. Elaboración propia.

Viabilidad y limitaciones de la propuesta

La propuesta resulta interesante para llevarla a cabo en las sesiones de clase, ya que proporciona una secuencia lógica que permite a los estudiantes llegar a la generalización. Esta justificación se basa en que cada apartado que propone la actividad apunta al desarrollo de cada una de las etapas que conduce hacia la generalización que propone Radford.

Se destaca el uso del geoplano cuadrado como material didáctico, pues proporciona al estudiante un acercamiento mayor a los patrones, desde el momento en el que los construye hasta el registro y posterior apoyo para elaborar sus conjeturas. A diferencia de otras actividades referidas a la búsqueda de una regla general, los patrones numéricos o geométricos son representados de forma bidimensional, impresos en una hoja. En esta actividad, se considera la presentación de los patrones de forma tridimensional, manipulativa. Cuando el estudiante manipula este material didáctico le es de gran ayuda, pues este podrá actuar directamente según lo que pretende encontrar.

En la actividad número 2 se ha podido evidenciar a través del análisis, las tres etapas hacia la generalización que propone Radford; etapas que se evidencian en las tareas de observar y manipular el geoplano que contiene las figuras construidas, en el registro de datos numéricos y alfanuméricos en la tabla, y en la justificación de cómo se ha llegado a encontrar el patrón o regularidad.

También se ha podido evidenciar las 4 fases de generalización que proponen Mason et al. (1985). Entre los apartados de la actividad se distinguen el del registro de los datos numéricos a partir de la observación de las figuras, y el del justificar la regla a la que se ha llegado. Se pide al estudiante justificar o expresar cómo es que ha logrado completar la tabla, esto lo debe hacer de manera verbal, sin proponer aún un tratamiento a nivel simbólico; es en el apartado de registro de datos por medio de la tabla en donde se propone la regla general para cada variable que se solicite, esto a partir del razonamiento previo realizado cuando se completaban los datos. Luego de que se haya encontrado la regla general, no hay un apartado específico que pida al estudiante comprobar a través de cálculos aritméticos, por ejemplo, que la regla es verdadera para otras figuras diferentes de las presentadas. Pero el estudiante sí podría realizar la corroboración de la fórmula con los datos que se proporcionaron en las tablas.

A partir de lo anterior, se puede decir que es viable llevar a cabo esta propuesta metodológica, implementado un apartado en el que se indique explícitamente al estudiante comprobar a partir de la fórmula encontrada los datos de la tabla. Esto le dará un significado mayor a la regla general propuesta.

Luego de haber analizado las tres propuestas metodológicas (PG2, PG6 y PG10), se decidió que se escogería una de ellas para seleccionar las actividades que serían posteriormente adaptadas. Para esto, se tuvo en cuenta que dichas actividades pudieran adaptarse a un contexto virtual, empleando herramientas tecnológicas. En el caso del PG2 y PG10 se pueden utilizar diapositivas para

presentar la secuencia de figuras, mientras que en el PG6 se puede emplear una herramienta digital llamada “geoplano virtual”, con la cual las estudiantes tendrán la oportunidad de manipular la construcción de los patrones. Además, tomando en cuenta la viabilidad para la ejecución de las actividades en un contexto virtual, el “geoplano virtual” se muestra como un recurso innovador y con funcionalidades que permiten la interacción con el usuario. Por lo tanto, se escogió la propuesta PG6, de Luque y Mena, La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar, para su adaptación a un entorno de enseñanza virtual, considerando que “las tecnologías de la información y la comunicación se integran al sistema educativo en un ambiente de enseñanza aprendizaje actual y como un principio de evolución de las prácticas educativas” (Caycho, 2019, p.24).

3.4.3 Elección y adaptación de las actividades desarrolladas a partir de la propuesta metodológica PG6.

Como se mencionó anteriormente, la propuesta seleccionada para esta investigación fue la PG6. En esta se presentan seis actividades, de las cuales se analizó con mayor profundidad las actividades 1 y 2, ya que las otras cuatro tenían características similares a las primeras. Es por ello que, se decidió tomar las dos primeras para ser adaptadas al contexto virtual. Además, resultó conveniente elegir dos, ya que se necesitó una actividad para ser aplicada de forma grupal y otra de forma individual.

Respecto a las adaptaciones realizadas a fin de que las actividades se desarrollen en un entorno virtual, se destaca el uso de un geoplano virtual al que se podía acceder a través de una página web desde cualquier dispositivo móvil o computadora; además, se emplearon plataformas tales como Google Sites (para la presentación de los Test), Excel (para completar las tablas que se trabajan en cada actividad), Classroom (para la entrega de los Test). En cuanto a la teoría adoptada, se consideró la de Mason et al. (1985), quienes proponen que el estudiante verifique la fórmula general planteada, siendo así más completa que la de Radford.

Asimismo, fue necesario emplear la encuesta como técnica de recogida de información, la cual se presenta a continuación:

La encuesta: A través de un cuestionario construido por los investigadores, se buscó recopilar información sobre la disponibilidad y uso de medios tecnológicos por parte de las estudiantes participantes. Esta encuesta (Apéndice D) permitió recoger información que nos ayudaría a identificar las herramientas con las que cuentan las estudiantes para así poder planificar las sesiones de tal manera que no tuvieran problemas al realizar las actividades. Este cuestionario se realizó a través de Google Forms, herramienta que facilita la recopilación y acceso a todas las respuestas obtenidas en el cuestionario.

De igual modo, luego de haber adaptado y aplicado las actividades en un contexto virtual, se aplicó una segunda encuesta de manera presencial donde las estudiantes expresaron su nivel de satisfacción con respecto a las actividades trabajadas y las herramientas empleadas, lo cual nos permite ver que tan motivador les ha resultado en su aprendizaje (Apéndice E).

3.5 Instrumento de recolección de datos

En esta investigación se han empleado Test como recurso para recolectar los datos que posteriormente se analizaron.

-Test: Es un instrumento de evaluación que se aplicó a las estudiantes, con el fin de conocer el aprendizaje logrado, así como su comprensión respecto a los pasos que han seguido para encontrar una regla general y así desarrollar el pensamiento algebraico. Para la presente investigación los test aplicados fueron las actividades previamente adaptadas (Apéndice F) de la propuesta metodológica: “La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar”, por lo que en este caso se aplicaron dos test, uno que fue resuelto de forma grupal y el otro de forma individual. En ellos se plantearon preguntas destinadas a recoger, procesar y analizar datos. Sus repuestas permitieron realizar un análisis para determinar la efectividad de las actividades adaptadas a un contexto virtual, es decir, si las estudiantes lograron o no los aprendizajes. Para el desarrollo de los test, las estudiantes emplean herramientas como Google Sites, Geoplano virtual, Excel, Google Forms y Classroom.

Test 1: Se realizó de forma grupal, permitiendo que las estudiantes trabajen de forma cooperativa, repartándose roles, eligiendo un coordinador grupal y trabajaron con miras a una misma meta o fin, que fue el desarrollo del test.

Test 2: Se realizó de forma individual y permitió que los estudiantes desarrollen su aprendizaje y construyan sus propios conocimientos.

Seguidamente, en la tabla 6 se presenta un ejemplo de ficha de observación del Test 1, donde los indicadores corresponden a las fases del proceso de generalización, las cuales favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico:

Tabla 6

Ficha de observación del Test 1

N° DE	INDICADORES			
GRUPO	FASES DEL PROCESO DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN			
VER EL PATRÓN: Las estudiantes manipulan el Geoplano Virtual e identifican algún patrón o	DECIR CUÁL ES EL PATRÓN: Las estudiantes expresan el patrón o regularidad encontrada con sus propias palabras y	REGISTRAR EL PATRÓN: Las estudiantes establecen acuerdos y registran el patrón o regularidad en el cuadro de Excel.	PRUEBA DE VALIDEZ DE LAS FÓRMULAS: Las estudiantes comprueban la validez de las fórmulas, dándoles valores a “n”.	

	regularidad en la secuencia de las figuras.			comparten ideas con sus compañeras.								
	SC	PC	NC	SC	PC	NC	SC	PC	NC	SC	PC	NC
1												
	Observaciones:											
2												
	Observaciones:											
...												
	Observaciones:											

SC: Sí cumplió **PC:** Cumplió parcialmente **NC:** No cumplió
Nota. Elaboración propia.

3.6 Procesamiento de datos para el análisis

A continuación, se describen los pasos del procesamiento de los datos para ser analizados:

- A la luz de los resultados de la encuesta aplicada a los estudiantes respecto a su disponibilidad de medios tecnológicos se realizaron los cambios y adaptaciones a las actividades, para que puedan ser trabajadas por todas.
- Para analizar los Test 1 y 2 se tuvo en cuenta las fases del proceso de generalización propuestas por Mason et al. (1985) y Radford, separando cada ítem según la fase que corresponda. En el caso del Test 1, se analizó de manera grupal, mientras que en el Test 2 se considera el trabajo individual de cada alumna. Luego se evaluaron los test a través de una rúbrica, otorgando un puntaje según el nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, donde los criterios que se tomaron en cuenta fueron las capacidades y desempeños de la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” extraído del currículo nacional y que se han tenido en cuenta a lo largo de las sesiones. Cada criterio tuvo un puntaje entre 0 a 5 puntos, teniendo en cuenta la siguiente escala: En inicio (0-1p), En progreso (2p), Regular (3p), Satisfactorio (4p) y Muy satisfactorio (5p). Luego, según el puntaje alcanzado por cada grupo, se obtuvo el nivel de logro en el que se encuentra: Deficiente (entre 01 a 10), regular (entre 11 a 15) y eficiente (entre 16 a 20).
- Con los puntajes obtenidos de ambos test se elaboraron gráficos de barras.

- También se realizó una comparación de los Test 1 (grupal) y 2 (individual), para visualizar los resultados alcanzados por cada estudiante.

Enseguida, en la tabla 7 y tabla 8 se muestran las fichas que se utilizaron para realizar el análisis de los Test 1 y 2; y en la tabla 9 y tabla 10, sus rúbricas respectivas.

Tabla 7

Ficha que se utilizó para el análisis del Test 1

TEST 1: "SECUENCIA DE CUADRADOS"		
FASE: "..."		
PREGUNTA:		
Nº DE GRUPO	RESPUESTA	ANÁLISIS
1		
2		
3		
4		
5		

Nota. Elaboración propia.

Tabla 8

Ficha que se utilizó para el análisis del Test 2

TEST 2: "SECUENCIA DE ESCUADRAS EN EL GEOPLANO"		
FASE: "..."		
Pregunta:		
Estudiante	RESPUESTA	ANÁLISIS
E1		
E2		
E3		
...		
E14		
E15		

Nota. Elaboración propia.

Tabla 9*Rúbrica utilizada para evaluar el Test 1 (trabajo grupal)*

FASES	CRITERIOS	EN INICIO (0-1)	EN PROCESO (2)	REGULAR (3)	SATISFACTORIO (4)	MUY SATISFACTORIO (5)	Ptos.
Ver el patrón	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas	Las estudiantes observan la secuencia gráfica del geoplano virtual, pero sólo algunas identifican las regularidades	Las estudiantes observan la secuencia gráfica del geoplano virtual y la mayoría identifica las regularidades.	Las estudiantes observan la secuencia gráfica del geoplano virtual e identifican las regularidades	Las estudiantes establecen relaciones entre las regularidades que se le presentan en la secuencia gráfica del geoplano virtual.	Las estudiantes establecen relaciones entre las regularidades que se le presentan en la secuencia gráfica del geoplano virtual y las transforma a expresiones algebraicas.	
Decir cuál es el patrón	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas	La mayoría de las estudiantes presenta dificultades para expresar mediante lenguaje verbal u escrito su comprensión sobre la regla de formación de patrones gráficos	Algunas de las estudiantes expresan mediante lenguaje verbal o escrito su comprensión sobre la regla de formación de patrones gráficos.	Las estudiantes expresan mediante lenguaje verbal o escrito su comprensión sobre la regla de formación de patrones gráficos, pero no intercambian ideas con sus compañeras	Las estudiantes expresan mediante lenguaje verbal o escrito su comprensión sobre la regla de formación de patrones gráficos e intercambian ideas con sus compañeras.	Las estudiantes expresan mediante lenguaje verbal, escrito y simbólicamente su comprensión sobre la regla de formación de patrones gráficos, intercambiando ideas con sus compañeras.	
Registrar un patrón	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Las estudiantes presentan dificultades para seleccionar y combinar recursos que les permitan encontrar la regla general en cada caso.	Las estudiantes seleccionan y combinan recursos y estrategias para hallar sólo la regla general en algunos casos.	Las estudiantes seleccionan y combinan recursos y estrategias para hallar la regla general en la mayoría de los casos	Las estudiantes seleccionan y combinan recursos, estrategias y el procedimiento matemático más conveniente para hallar la regla general en cada caso.	Las estudiantes seleccionan y combinan recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos convenientes para hallar la regla general en cada caso.	
Prueba de validez de las fórmulas	Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia	Las estudiantes presentan dificultades para plantear afirmaciones sobre las reglas generales que han encontrado. Asimismo, no logran verificar todas las fórmulas	Las estudiantes plantean afirmaciones sobre las reglas generales encontradas, pero no logran verificar la validez de todas las fórmulas.	Las estudiantes plantean afirmaciones sobre las reglas generales encontradas y verifican la validez de la mayoría de las fórmulas.	Las estudiantes plantean afirmaciones sobre las reglas generales encontradas y verifican la validez de las fórmulas de acuerdo con la actividad que las produjo a través de cálculos aritméticos, dibujando o contando.	Las estudiantes plantean afirmaciones sobre las reglas generales obtenidas y los pasos que han seguido hasta llegar a ellas. Además, verifican la validez de las fórmulas de acuerdo con la actividad que las produjo a través de cálculos aritméticos, dibujando o contando.	
TOTAL							

Nota. Elaboración propia.

Tabla 10

Rúbrica utilizada para evaluar el Test 2 (trabajo individual)

FASES	CRITERIOS	EN INICIO (0-1)	EN PROCESO (2)	REGULAR (3)	SATISFACTORIO (4)	MUY SATISFACTORIO (5)	ptos.
Ver el patrón	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas	La estudiante observa la secuencia gráfica del geoplano virtual, pero se le dificulta identificar regularidades.	La estudiante observa la secuencia gráfica del geoplano virtual e identifica alguna regularidad.	La estudiante observa la secuencia gráfica del geoplano virtual e identifica las regularidades	La estudiante establece relaciones entre las regularidades que se le presentan en la secuencia gráfica del geoplano virtual.	La estudiante establece relaciones entre las regularidades que se le presentan en la secuencia gráfica del geoplano virtual y la transforma a expresiones algebraicas.	
Decir cuál es el patrón	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas	La estudiante expresa con dificultad su comprensión sobre la regla de formación de los patrones.	La estudiante expresa mediante lenguaje verbal o escrito su comprensión sobre la regla de formación en algunos de los patrones.	La estudiante expresa mediante lenguaje verbal o escrito su comprensión sobre la regla de formación en la mayoría de los patrones.	La estudiante expresa mediante lenguaje verbal o escrito su comprensión sobre la regla de formación en todos patrones gráficos.	La estudiante expresa mediante lenguaje verbal, escrito y simbólicamente su comprensión sobre la regla de formación de patrones gráficos.	
Registrar un patrón	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	La estudiante presenta dificultades para seleccionar y combinar recursos que le permitan encontrar la regla general en cada caso.	La estudiante selecciona y combina recursos y estrategias para hallar la regla general sólo en algunos casos.	La estudiante selecciona y combina recursos y estrategias para hallar la regla general en la mayoría de los casos.	La estudiante selecciona y combina recursos y estrategias para hallar la regla general en cada caso.	La estudiante selecciona y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos convenientes para hallar la regla general en cada caso.	
Prueba de validez de las fórmulas	Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia	La estudiante presenta dificultades durante las fases anteriores para plantear afirmaciones sobre las reglas generales encontradas. Asimismo, no logra verificar todas las fórmulas	La estudiante plantea afirmaciones en las fases anteriores sobre las reglas generales encontradas, pero no logra verificar la validez de todas las fórmulas.	La estudiante plantea afirmaciones en las fases anteriores sobre las reglas generales encontradas y verifica la validez de la mayoría de las fórmulas.	La estudiante plantea afirmaciones en las fases anteriores sobre las reglas generales encontradas y verifica la validez de todas las fórmulas.	La estudiante plantea afirmaciones en las fases anteriores sobre las reglas generales obtenidas y los pasos que ha seguido hasta llegar a ellas. Además, verifica la validez de las fórmulas a través de cálculos aritméticos, dibujando o contando.	
TOTAL							

Nota. Elaboración propia.

- Siguiendo con el procesamiento de los datos, se realizó un análisis del efecto que ha tenido, en las estudiantes, la aplicación de las dos sesiones de clase, referidas a procesos de generalización, en un contexto de educación virtual, a través de una encuesta. Esta constó de diez preguntas, las primeras nueve se plantearon de forma que sean respondidas tomando en cuenta la escala de Likert (totalmente satisfactorio, satisfactorio, neutro, insatisfactorio, totalmente insatisfactorio), y en la última se propuso una pregunta abierta para que las estudiantes se expresen de manera libre acerca de la preferencia de las clases virtuales o presenciales. Se debe destacar que la encuesta se aplicó de forma presencial al finalizar las sesiones de clase.
- Las respuestas de las estudiantes se procesaron utilizando el software informático Excel, para presentarlos en tablas y gráficos. Luego se procedió a diseñar un gráfico de frecuencias y un gráfico circular para las primeras nueve preguntas; para la última se presentaron los resultados según la incidencia o similitudes en las ideas que proporcionaron las estudiantes. Por cada gráfico obtenido se presenta una síntesis, así como una descripción de los resultados, y un acercamiento a la posible causa por la que las estudiantes hayan brindado una determinada respuesta.

En resumen, se presenta para cada pregunta:

- a. Pregunta X
- b. Descripción de la pregunta
- c. Gráfico de frecuencias con los resultados obtenidos.
- d. Presentación de los resultados

Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados

Este capítulo presenta un análisis sobre la disponibilidad y uso de medios tecnológicos por parte de los estudiantes; posterior a este, se presenta un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de los Test 1 y Test 2 en las sesiones de clase; por último, se exponen los resultados del cuestionario final sobre la aplicación de las actividades virtuales.

4.1 Análisis sobre disponibilidad y uso de medios tecnológicos

Se aplicó una encuesta (ver Apéndice D) a las estudiantes para identificar con qué herramientas tecnológicas contaban para así poder planificar las sesiones de clase; con dichos resultados se realizaron las adaptaciones pertinentes a las actividades seleccionadas.

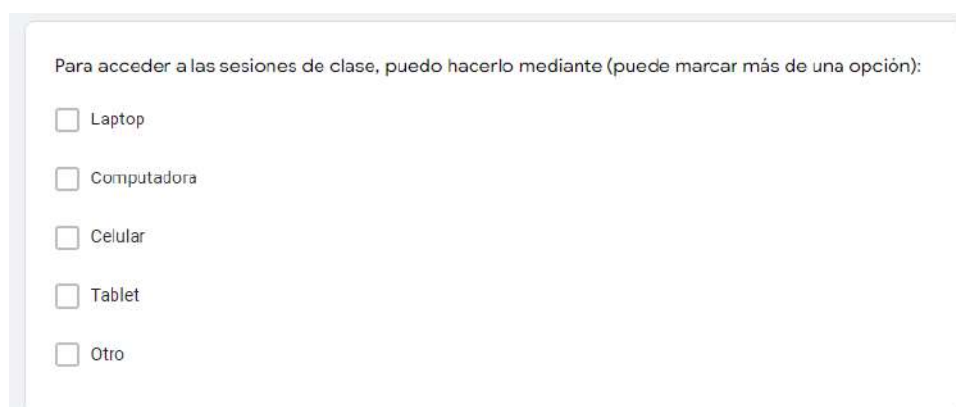
A continuación, se presenta los resultados de la encuesta realizada.

Pregunta 1:

La primera pregunta buscaba conocer con qué herramientas tecnológicas contaban las estudiantes para poder acceder a sus clases (véase figura 5). Esto nos ayudaría a decidir los recursos a utilizar en las sesiones, de tal manera que ninguna estudiante presentara inconvenientes.

Figura 5

Pregunta para conocer con qué recursos tecnológicos cuentan las estudiantes

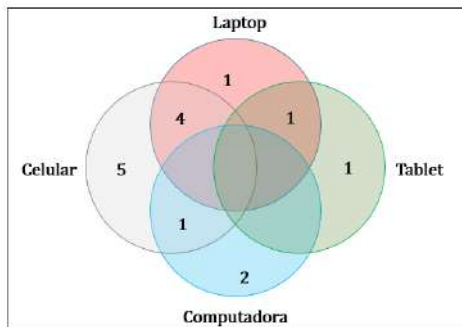


Para acceder a las sesiones de clase, puedo hacerlo mediante (puede marcar más de una opción):

- ☐ Laptop
- ☐ Computadora
- ☐ Celular
- ☐ Tablet
- ☐ Otro

Nota. Elaboración propia

De la muestra de 15 estudiantes, se identificó que 4 usan celular y laptop, 1 usa celular y computadora, 1 usa laptop y tablet, 5 usan sólo celular, 1 usa sólo laptop, 1 usa sólo tablet y 2 usan sólo computadora (véase figura 6). A partir de estas respuestas se puede ver que la mayoría de las estudiantes accede por medio de un celular, o una laptop, de igual forma se tendrá en cuenta toda esta información para realizar las adaptaciones pertinentes. A continuación, se presenta el siguiente gráfico donde se observan las respuestas obtenidas:

Figura 6*Resultados pregunta 1**Nota. Elaboración propia***Pregunta 2:**

La segunda pregunta buscaba saber si las estudiantes conocían el programa informático Excel (véase figura 7). Para el desarrollo de las actividades no se necesita un conocimiento profundo de las funcionalidades del programa, sin embargo, es conveniente que al menos tengan un acercamiento previo para que pueda ser considerado.

Figura 7*Pregunta para conocer si las estudiantes conocen Excel*

¿Conoces el programa informático Excel?

☐ SI

☐ NO

Nota. Elaboración propia.

Respecto a esta pregunta se encontró que 10 estudiantes sí conocían el programa informático Excel y 5 no lo conocían (véase figura 8). Esto indica que la mayoría de las estudiantes si habían visto o trabajado este programa, así pues, se pueden ver las respuestas en el siguiente gráfico:

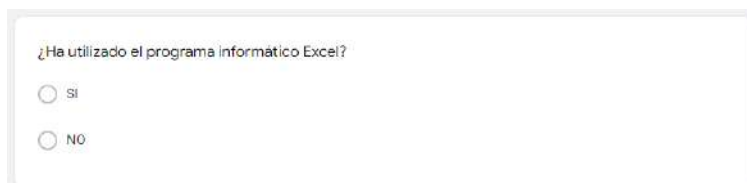
Figura 8*Resultados pregunta 2**Fuente: Elaboración propia*

Pregunta 3:

La tercera pregunta buscaba conocer cuántas de las estudiantes participantes han utilizado el programa informático Excel (véase figura 9), esto con el fin de determinar la pertinencia del uso de este recurso durante las actividades.

Figura 9

Pregunta para conocer si las estudiantes han utilizado Excel



¿Ha utilizado el programa informático Excel?

☐ SI

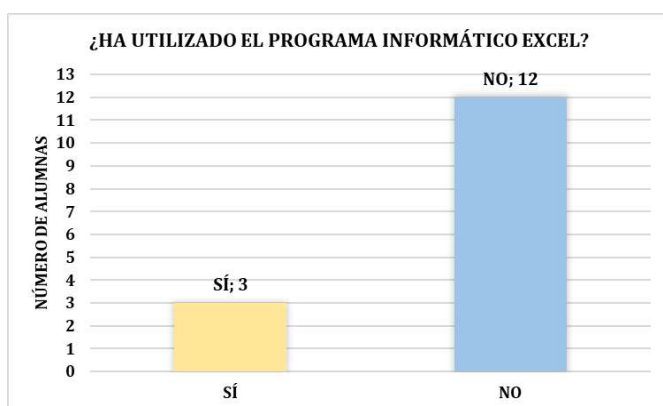
☐ NO

Nota. Elaboración propia

Del total de 15 estudiantes, solo 3 de ellas han utilizado Excel (véase figura 10). Esto nos indica que la mayoría de las estudiantes desconoce la funcionalidad de esta herramienta tecnológica, por lo que es conveniente que para la aplicación de las actividades no se consideren funcionalidades avanzadas. Los resultados obtenidos se resumen en el siguiente gráfico:

Figura 10

Resultados pregunta 3



Nota. Elaboración propia

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la encuesta, se diseñaron dos guías (ver Apéndice K) para el uso del geoplano virtual, de modo que las estudiantes podrían conocer su uso a través de estos. Uno se hizo para las estudiantes que accedían desde computadora o laptop, y otro manual para quienes accedían desde un celular o tablet. En ellos se describía a detalle cómo se podía acceder a este programa y la funcionalidad de cada una de sus herramientas.

Por otro lado, respecto al uso del programa Excel, debido a los resultados obtenidos, y al bajo porcentaje de estudiantes que han usado el programa, fue pertinente brindar una explicación previa a la aplicación de las sesiones de clase. De tal manera que las estudiantes no presentaran problemas al momento de desarrollar las actividades.

4.2 Análisis de los resultados obtenidos de la aplicación del Test 1 y Test 2.

Luego de haber realizado las adaptaciones pertinentes de cada una de las actividades, se diseñaron dos sesiones de clase (ver Apéndice L), donde se incluyeron las actividades adaptadas. Para la aplicación de las sesiones se decidió nombrar a cada una de las actividades como Test 1 y Test 2, el primero fue desarrollado de manera grupal, organizados en cinco grupos de tres integrantes y el segundo fue desarrollado de manera individual.

En el caso del Test 1, durante su desarrollo se monitoreó el trabajo grupal de las estudiantes por medio de una ficha de observación, tal como se muestra en la tabla 6 cuyos indicadores responden a las fases del proceso de generalización, y que posteriormente se utilizaron para el análisis de las respuestas obtenidas en este test, asignando un puntaje a cada grupo respecto a una rúbrica de evaluación (ver Apéndice M). Los criterios de evaluación definidos se relacionan con las fases del proceso de generalización y los desempeños de la competencia “Resuelve Problemas de Regularidad, equivalencia y cambio”, del currículo nacional. En el caso del Test 2, se analizaron las respuestas obtenidas y se le designó a cada estudiante un puntaje a partir de una rúbrica (ver Apéndice N) con los mismos criterios que se tomaron en cuenta para el trabajo grupal.

La tabla 11 presenta la muestra de las 15 estudiantes participantes, las cuales fueron denominadas con un código para hacer referencia a cada una de ellas. Así, la estudiante 1 se codificó como E1 (“E” por la palabra “estudiante”) y así sucesivamente con las demás estudiantes.

Tabla 11

Codificación de la muestra de las estudiantes participantes

Muestra	Código
Estudiante 1	E1
Estudiante 2	E2
Estudiante 3	E3
Estudiante 4	E4
Estudiante 5	E5
Estudiante 6	E6
Estudiante 7	E7
Estudiante 8	E8
Estudiante 9	E9
Estudiante 10	E10
Estudiante 11	E11
Estudiante 12	E12
Estudiante 13	E13
Estudiante 14	E14
Estudiante 15	E15

Nota. Elaboración propia

De igual manera, se presenta en la tabla 12, la distribución de las 15 estudiantes en sus respectivos grupos, los cuales se formaron para desarrollar el Test 1.

Tabla 12*Distribución de las estudiantes por grupo*

Número de grupo	Estudiante
Grupo 1	E1
	E2
	E3
Grupo 2	E4
	E5
	E6
Grupo 3	E7
	E8
	E9
Grupo 4	E10
	E11
	E12
Grupo 5	E13
	E14
	E15

Nota. Elaboración propia

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en el Test 1 y luego los resultados del Test 2, para finalmente hacer una comparación entre ambos.

4.2.1 Análisis del Test 1 (grupal)

Durante la aplicación del Test 1, los investigadores a cargo del dictado de la sesión, se distribuyeron los cinco grupos y completaron una ficha de observación por cada uno de ellos, detallando el desarrollo de las fases del proceso de generalización en las integrantes de cada grupo, de tal manera que se pueda evaluar el trabajo grupal con una rúbrica y a la vez se tenga en cuenta la participación y aporte de cada una de ellas, ya que puede darse que un grupo logre llegar satisfactoriamente a una regla general, pero no todas las integrantes han aportado o comprendido lo que se plantea y por ende no lograron desarrollar su pensamiento algebraico. Esto resulta de mucha importancia, ya que permitió evaluar si las estudiantes desarrollan mejor los procesos de generalización trabajando de forma grupal o individual. A continuación, en la tabla 13, se presenta la Ficha de Observación con los datos recogidos de cada uno de los grupos observados.

Tabla 13

Resultados de la aplicación de la ficha de observación del Test 1

N° DE GRUPO		INDICADORES											
		FASES DEL PROCESO DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN											
		VER EL PATRÓN:			DECIR CUÁL ES EL PATRÓN:			REGISTRAR EL PATRÓN:			PRUEBA DE VALIDEZ DE LAS FÓRMULAS:		
		Las estudiantes manipulan el geoplano virtual e identifican algún patrón o regularidad en la secuencia de las figuras.			Las estudiantes expresan el patrón o regularidad encontrada con sus propias palabras y comparten ideas con sus compañeras.			Las estudiantes establecen acuerdos y registran el patrón o regularidad en el cuadro de Excel.			Las estudiantes comprueban la validez de las fórmulas, dándoles valores a "n".		
		SC	PC	NC	SC	PC	NC	SC	PC	NC	SC	PC	NC
1		X				X		X				X	
		Observaciones: Las estudiantes mostraron interés en la manipulación del geoplano virtual, pues empezaron a probar las diversas funcionalidades del recurso, además de que construían figuras distintas a los cuadrados que la actividad demandaba construir. Una vez que ya tenían claro cómo utilizar este recurso virtual, procedieron a construir los cuadrados en base a la discusión que se generó respecto a la regularidad identificada en las figuras del test, así pues, llegaron a la segunda fase de "decir el patrón" Cabe indicar que dos de las tres estudiantes tuvieron una participación constante, mientras que la restante se mostraba poco atenta y solo decía que estaba de acuerdo respecto a las opiniones de sus compañeras. Luego, las estudiantes continuaron con el registro del patrón que habían identificado a partir de la colocación de las cantidades en los espacios en blanco de la tabla proporcionada. Cabe indicar que, una vez identificada la regularidad en la figura mostrada, recurrieron a comprobar los datos que se proporcionaron en la tabla y a partir de estos identificaron el patrón entre una figura y otra.											
		X				X		X				X	
2		X				X		X				X	
		Observaciones: Las estudiantes se mostraron, al principio un poco renuentes al manejar el geoplano virtual, esto porque manifestaban que les sería difícil pues veían muchas opciones de las cuales no identificaron cuál era la que se utilizaba para poder construir las figuras. Al paso de los minutos, fueron descubriendo el para qué de cada funcionalidad, así que no tardaron en utilizar el recurso para construir las figuras que pedía el test. En la segunda fase de decir el patrón, las estudiantes mencionaban ideas relacionadas a la variación de algunas características de las figuras, ya sea respecto a las puntillas, así como a los espacios entre estas. Se destaca que las tres estudiantes mostraron una participación activa durante su trabajo. Por lo que les fue fácil comprobar que los datos que se les colocó en la tabla coincidían con las figuras que se propusieron como ejemplos.											
		X				X		X				X	
3		X				X		X				X	
		Observaciones: En la fase de ver el patrón, las estudiantes manipularon satisfactoriamente el geoplano virtual, por lo que pudieron identificar la regularidad en la secuencia de figuras, sin embargo, en la fase de decir cuál es el patrón, al momento de expresarlo con sus propias palabras tuvieron cierta dificultad para comprender el patrón en algunas letras y una de las estudiantes no compartió su opinión. En la fase de registrar patrón, las estudiantes se ponen de acuerdo para colocar los patrones que creen son los correctos, sin embargo, en la fase de prueba de validez de las fórmulas, al verificar cada uno de los patrones se dan cuenta que dos de ellos no coinciden con los datos colocados previamente en la tabla, de modo que aceptan sus errores, pero no realizan la corrección de los mismos.											
		X				X		X				X	

	SC	PC	NC	SC	PC	NC	SC	PC	NC	SC	PC	NC
	X			X			X			X		
4	Observaciones: En la fase de ver el patrón, las tres estudiantes tuvieron la oportunidad de manipular el geoplano virtual y no tuvieron dificultad para percibir una regularidad en la secuencia de figuras, de igual forma, en la fase de decir cuál es el patrón, al momento de compartir sus opiniones respecto a la regularidad encontrada y decirlo con sus propias palabras, las tres se mantuvieron participativas y complementaban sus ideas. En la fase de registrar cada uno de los patrones, sólo tuvieron dificultad en uno de ellos, no sabían cómo expresarlo algebraicamente, por otro lado, en el registro de los otros patrones se observó ciertos errores en el uso de los símbolos. En la fase de prueba de validez de las fórmulas, reemplazaron “n” por valores de la tabla y se sintieron muy seguras respecto a los patrones encontrados, a pesar de que uno no lo lograron hallar.											
	X			X			X			X		
5	Observaciones: En la fase de ver el patrón, las estudiantes manipularon satisfactoriamente el geoplano virtual e identificaron la regularidad de la secuencia de figuras. En la fase de decir cuál es el patrón, cada una de ellas expresó con sus propias palabras la regularidad y trataron de unificar ideas. En la fase de registrar el patrón, el compromiso y colaboración de las tres permitió que lograran expresar algebraicamente cada uno de los patrones encontrados, aunque dudaron un poco en el tercero, pero igual lo hicieron. Por último, en la fase prueba de validez de las fórmulas, las estudiantes le dieron valores a “n” y lograron verificar todos los datos escritos en la tabla.											

SC: Sí cumplió

PC: Cumplió parcialmente

NC: No cumplió

Nota. Elaboración propia

A continuación, se presenta el resumen del análisis de las respuestas de los grupos en relación a las fases del proceso de generalización.

Fase 1: Ver el patrón

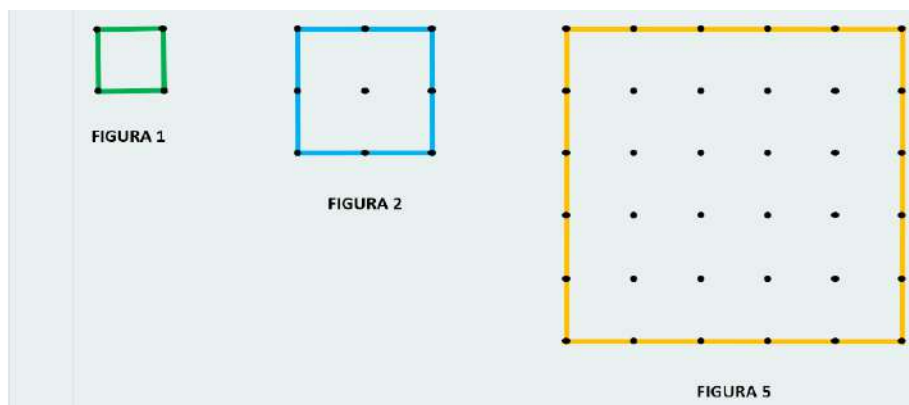
La primera indicación que se les dio a las estudiantes fue construir la Figura 3 y Figura 4, a partir de la secuencia de cuadrados que se les presentó de tal manera que, a través de la manipulación del geoplano virtual, pudieran identificar la regularidad presente (véase figura 11).

Figura 11

Actividad propuesta para Fase 1

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el *Geoplano virtual*.

PROCEDIMIENTO: Con ayuda del *Geoplano virtual*, y las bandas elásticas que se pueden utilizar, construir las figuras correspondientes a una secuencia de cuadrados.



1. Para la construcción de los cuadrados se ha seguido un patrón. A partir de sus observaciones, ustedes deben construir la FIGURA 3 y FIGURA 4, de acuerdo a la regularidad presentada.

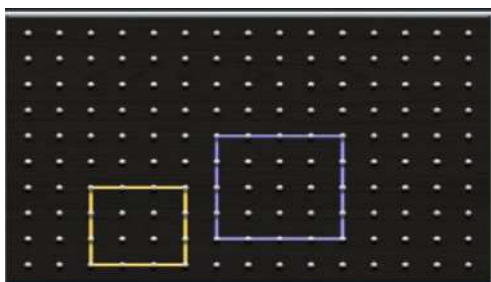
Nota. Captura de pantalla de la actividad virtual. Extraído de: <https://cutt.ly/UVUD9NX>

En la primera fase todos los grupos trabajaron en el geoplano virtual sin mayor complicación, cada uno de ellos graficó lo que la consigna pedía. Cabe destacar que, a pesar de haber respondido correctamente, no todos los grupos dieron respuestas similares, ya que algunos realizaron las figuras de forma ordenada, otros separaron una figura de la otra, y uno de los grupos graficó más figuras de las que se le pedía.

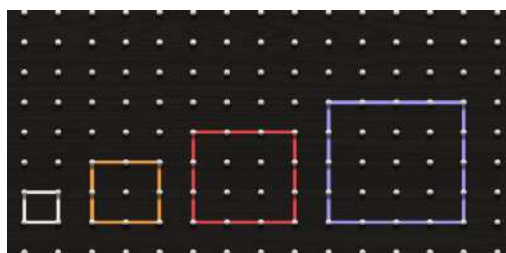
A continuación, se muestra algunas de las respuestas dadas por los grupos (véase figura 12 y 13).

Figura 12

Respuestas del grupo 3 en la Fase 1



Nota. Captura de pantalla de las respuestas del grupo 3 para la Fase 1, Test 1.

Figura 13*Respuesta del grupo 5 en la Fase 1*

Nota. Captura de pantalla de las respuestas del grupo 5 para la Fase 1, Test 1.

Tal como se puede observar, ambos grupos han cumplido con la consigna, sin embargo, se denota cierta diferencia entre los gráficos que han construido.

Fase 2: Decir el patrón

En esta segunda fase se les pidió a las estudiantes escribir el patrón o regularidad encontrada, es decir aquella que les ayudó a obtener los datos numéricos para completar la tabla, la pregunta específica se muestra a continuación en la figura 14.

Figura 14*Actividad propuesta para Fase 2*

4.

Escriban al frente de cada letra, con sus propias palabras, el patrón o regularidad que encontraron, para ir obteniendo los resultados numéricos en cada una de las casillas vacías para cada fila de la tabla anterior; de acuerdo a la secuencia de los cuadrados.

U
Tu respuesta:

V
Tu respuesta:

W
Tu respuesta:

X
Tu respuesta:

Y
Tu respuesta:

Z
Tu respuesta:

Nota. Captura de pantalla de Google Forms. Extraído de: <https://cutt.ly/xVUO0cR>

Así pues, entre las respuestas que han brindado los grupos (véase figura 15), podemos resaltar las siguientes: El grupo 1, ha encontrado correctamente la regularidad de las letras U, V, X, Y, y Z. Para el caso de la letra W, las estudiantes indican que no existe una regularidad, sin embargo, en su justificación indican que “se repetía el mismo número”, lo cual, es una regularidad. Ante esto se

puede inferir que las estudiantes identifican la regularidad, pero no logran comprender lo que han hecho.

Figura 15

Respuestas del grupo 1 en la Fase 2

U:	$n+1$, nos dimos cuenta que los valores iban aumentando de uno en uno.
V:	el número de la figura se multiplicaba por 4
W:	no encontramos un patrón ya que se repetía el mismo número.
X:	nos dimos cuenta que si le restamos 1 al número de la figura y lo multiplicamos por el mismo número nos da el resultado.
Y:	el número de espacios es el mismo que el número de la figura
Z:	la cantidad de espacios era el cuádruple

Nota. Captura de pantalla de las respuestas del grupo 1 para la Fase 2, Test 1.

El grupo 2, ha mencionado en la letra W, así como el grupo anterior, que no hay patrón. En este caso, las estudiantes lo justifican diciendo que “es un cuadrado y el cuadrado siempre tiene 4 lados”. Lo anterior indica que, las estudiantes no tienen muy clara la noción de regularidad, pues el hecho de que el cuadrado es una figura formada por cuatro lados iguales, y que las figuras en cuestión siempre sean cuadrados, hace que piensen que esa es la regularidad (la cantidad de lados del cuadrado).

Fase 3: Registrar el patrón

Una vez que las estudiantes expresaban el patrón con sus propias palabras, ya podrían registrarlo en la tabla (véase figura 16) en su forma algebraica como una regla general. Cada grupo envió sus respuestas a través de Classroom, empleando una tabla en el programa de Excel.

Figura 16*Actividad propuesta para la Fase 3*

FIGURA		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
LETRAS													
U	NÚMERO DE PUNTILLAS EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	2	3	4						11			$n+1$
V	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS EN LOS CUATRO LADOS DEL CUADRADO	4	8		16							400	
W	NUMERO DE LADOS EN EL CUADRADO	4	4										
X	NÚMERO DE PUNTILLAS AL INTERIOR DEL CUADRADO	0	1	4				36					
Y	NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	1	2										
Z	NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN LOS CUATRO LADOS DEL CUADRADO	4	8										$4n$

Nota. Captura de pantalla de la actividad virtual. Extraído de: <https://cutt.ly/UVUD9NX>

En esta tercera fase, las estudiantes registraron el patrón en su forma algebraica, coincidiendo los cinco grupos en las reglas generales de las letras U,V y Z ; en la letra W, un grupo lo hizo de forma incorrecta y un grupo lo registró correctamente, los demás lo dejaron en blanco; en la letra Y, cuatro de los grupos registraron el patrón correctamente y uno se equivocó; y en el caso de la letra X, 4 grupos tuvieron un error en el uso de los signos al expresar el patrón, lo cual hizo que fuera incorrecto, ya que $n - 1(n1)$ o $n - 1 \times n - 1$, no es lo mismo que $(n - 1)(n - 1)$.

A continuación, en la figura 17 y figura 18 se muestra algunas de las respuestas dadas por los grupos.

Figura 17*Respuestas del grupo 2 para la Fase 3*

LETRAS		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
U	NÚMERO DE PUNTILLAS EN	2	3	4	5	6	7	8	9	11	21	101	$n+1$
V	NÚMERO TOTAL DE	4	8	12	16	20	24	28	32	40	80	400	$4n$
W	NUMERO DE LADOS EN EL	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
X	NÚMERO DE PUNTILLAS AL	0	1	4	9	16	25	36	49	64	361	9801	$n-1(n-1)$
Y	NÚMERO DE ESPACIOS	1	2	3	4	5	6	7	8	81	20	100	n
Z	NÚMERO DE ESPACIOS	4	8	12	16	20	24	28	32	40	80	400	$4n$

Nota. Captura de pantalla de las respuestas del grupo 2 para la Fase 3, Test 1.

Figura 18*Respuestas del grupo 5 para la Fase 3*

LETRAS FIGURAS	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
U NÚMERO DE PUNTILLAS EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	2	3	4	5	6	7	8	9	11	21	101	$n+1$
V NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS EN LOS CUATRO LADOS DEL CUADRADO	4	8	12	16	20	24	28	32	40	80	400	$4n$
W NÚMERO DE LADOS EN EL CUADRADO	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	$4n/n$
X NÚMERO DE PUNTILLAS AL INTERIOR DEL CUADRADO	0	1	4	9	16	25	36	49	81	361	9801	$n \times n - 2n + 1$
Y NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN UN SOLO LADO DEL CUADRADO	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
Z NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN LOS CUATRO LADOS DEL CUADRADO	4	8	12	16	20	24	28	32	40	80	400	$4n$

Nota. Captura de pantalla de las respuestas del grupo 5 para la Fase 3, Test 1.

En ambos grupos se puede observar cómo algunas respuestas coinciden y otras han variado.

Fase 4: Probar la validez de la fórmula

En esta fase se les pide a las estudiantes indicar si la regla general propuesta se comprueba con los datos numéricos que se les ha presentado además de los que ellos han hallado y completado en la tabla (véase figura 19).

Figura 19*Actividad propuesta para Fase 4*

5.

Indica si la regla general encontrada para cada letra se comprueba con los datos numéricos proporcionados y con los que has hallado. Marca SÍ o NO, según corresponda.

U:

☐ SÍ
☐ NO

V:

☐ SÍ
☐ NO

Nota. Captura de pantalla de Google Forms. Extraído de: <https://cutt.ly/xVUO0cR>

Entre las respuestas de las estudiantes, tenemos que en la mayoría de las letras han podido comprobar la regla general. La dificultad se presentó en la letra W, en donde G1, G2, G3 y G4 respondieron que “NO” la han podido comprobar, además se resalta que el G3 no ha podido

comprobar la letra Y. Tal como en las anteriores fases, la no comprensión del concepto de regularidad hace que las estudiantes asuman que en la letra W no hay regularidad, lo que implica que no puedan comprobar la fórmula. Respecto a la letra Y, como la figura es N y la fórmula hallada es n, el grupo G3 ha tenido dificultades debido a que no hay variación entre el número de figura y la fórmula.

Luego de haber realizado el análisis correspondiente a cada una de las fases del proceso de generalización, se ha podido identificar lo siguiente:

- El grupo 1, conformado por E1, E2 y E3, ha logrado llegar a la regla general en 5 de las letras. Sin embargo, en una de ellas las estudiantes mostraron su comprensión respecto a la regularidad presente en las figuras, pero no lograron plasmar la regla general de manera algebraica correctamente. Así mismo, no respondieron una pregunta.
- El grupo 2, conformado por E4, E5 y E6, ha logrado llegar a la regla general en 5 de las letras, pero al igual que el primer grupo, escribieron el patrón de una letra incorrectamente en su forma algebraica. Además, no respondieron una pregunta.
- El grupo 3, conformado por E7, E8 y E9, ha logrado encontrar la regla general para las 6 letras, sin embargo, tres de ellas han sido propuestas de manera incorrecta.
- El grupo 4, conformado por E10, E11 y E12, ha respondido de manera similar que los grupos 1 y 2, puesto que han llegado a la regla general en 5 letras, en una han tenido un error al expresarlo algebraicamente, y han dejado una sin responder.
- El grupo 5, conformado por E13, E14, y E15, ha logrado llegar a la regla general en las 6 letras, siendo todas correctas.

En síntesis, lo respondido por cada grupo se muestra en la tabla 14:

Tabla 14

Resultados sobre la regla de generalización planteada por cada grupo

	U	V	W	X	Y	Z
G1	C	C	B	I	C	C
G2	C	C	B	I	C	C
G3	C	C	I	I	I	C
G4	C	C	B	I	C	C
G5	C	C	C	C	C	C

C: Correcta; I: incorrecta; B: en Blanco

Nota. Elaboración propia

A continuación, se presenta la tabla 15 con los puntajes asignados a cada grupo según cada una de las fases y se señala el nivel de logro alcanzado. Cabe señalar que se ha asignado 5 puntos al grupo que ha trabajado con mayor orden y 4 puntos a los que han acertado con las respuestas, pero no siguen un ordenamiento que les ayude a la visualización de las regularidades.

Tabla 15

Puntaje obtenido a partir de la rúbrica de evaluación del Test 1

Grupo	F1	F2	F3	F4	Total	Nivel de logro
1	4	4	3	3	14	Regular
2	4	4	3	3	14	Regular
3	4	3	2	2	11	Regular
4	4	4	3	3	14	Regular
5	5	5	4	4	18	Eficiente

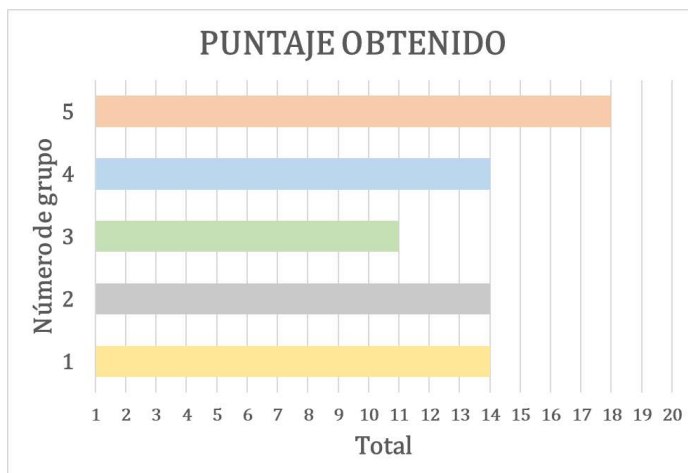
Deficiente (entre 01 a 10), Regular (entre 11 a 15) y Eficiente (entre 16 a 20).

Nota. Elaboración propia

La siguiente figura 20 muestra los puntajes obtenidos luego de haberse aplicado la rúbrica a cada uno de los grupos, además en la figura 21 se muestra el nivel de logro alcanzado.

Figura 20

Puntajes obtenidos por cada grupo en el Test 1

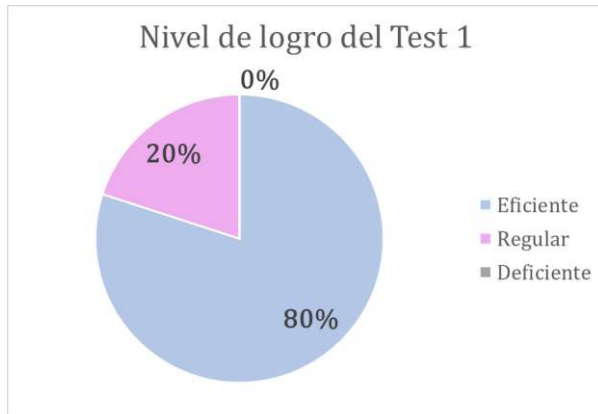


El promedio de puntajes es de 14.2

Nota. Elaboración propia

Figura 21

Nivel de logro alcanzado por cada grupo en el Test 1



Nota. Elaboración propia.

4.2.2 Análisis del Test 2 (individual)

Durante la aplicación del Test 2, el cual se desarrolló en la segunda sesión de clase, los estudiantes lo resolvieron de forma individual. A continuación, se presenta el resumen del análisis de las respuestas obtenidas por cada una de las fases del proceso de generalización.

Fase 1: Ver el patrón

La primera indicación que se les dio a los estudiantes fue construir la secuencia de escuadras de la IMAGEN 1 y de la IMAGEN 2, de tal manera que puedan percibir las regularidades desde la propia visualización y manipulación del geoplano virtual (véase figura 22).

Figura 22

Actividad propuesta para Fase 1 del Test 2

OBJETIVO: Realizar procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el *Geoplano virtual*.

PROCEDIMIENTO: Observen las dos figuras siguientes detallando sus similitudes y diferencias.

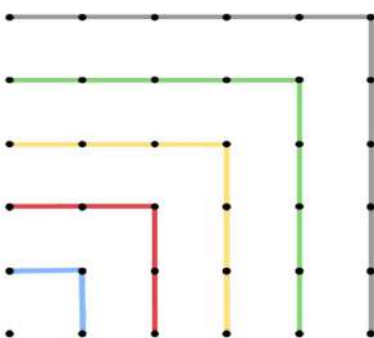


IMAGEN 1



IMAGEN 2

Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el geoplano la secuencia de escuadras (↵) de la IMAGEN 1.

Con ayuda de las bandas elásticas, construyan en el *geoplano virtual* la secuencia de escuadras (↵) de la IMAGEN 2.

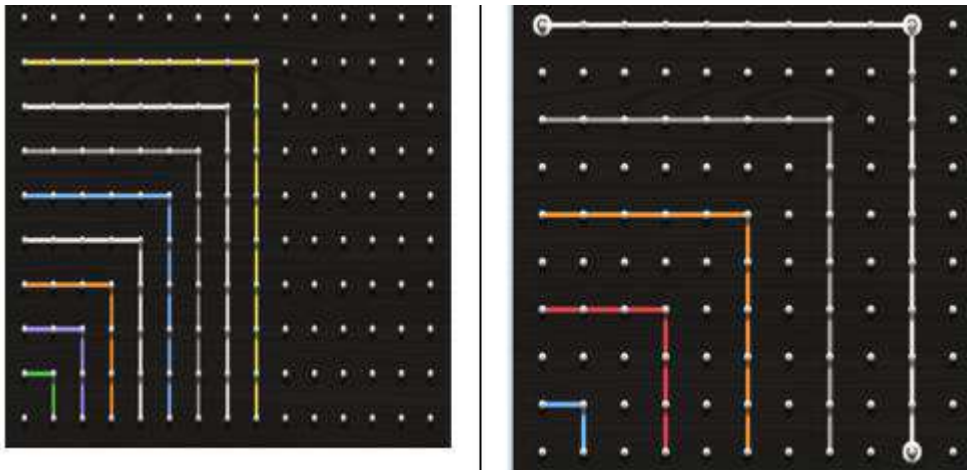
Nota. Captura de pantalla de la actividad virtual. Extraído de: <https://cutt.ly/4VUD0vR>

En esta primera fase, las estudiantes graficaron la secuencia de escuadras de la IMAGEN 1 y la IMAGEN 2, se pudo observar que todas cumplieron la consigna, sin embargo, no todas las respuestas fueron iguales, ya que algunas estudiantes hicieron más escuadras de la secuencia, la posición de las escuadras varió en el tablero según el criterio de cada una de ellas, asimismo, una de las estudiantes se animó a realizar la secuencia de la IMAGEN 1, en un tablero con menos puntos.

A continuación, en la figura 23 y figura 24 se muestra algunas de las respuestas dadas por las estudiantes:

Figura 23

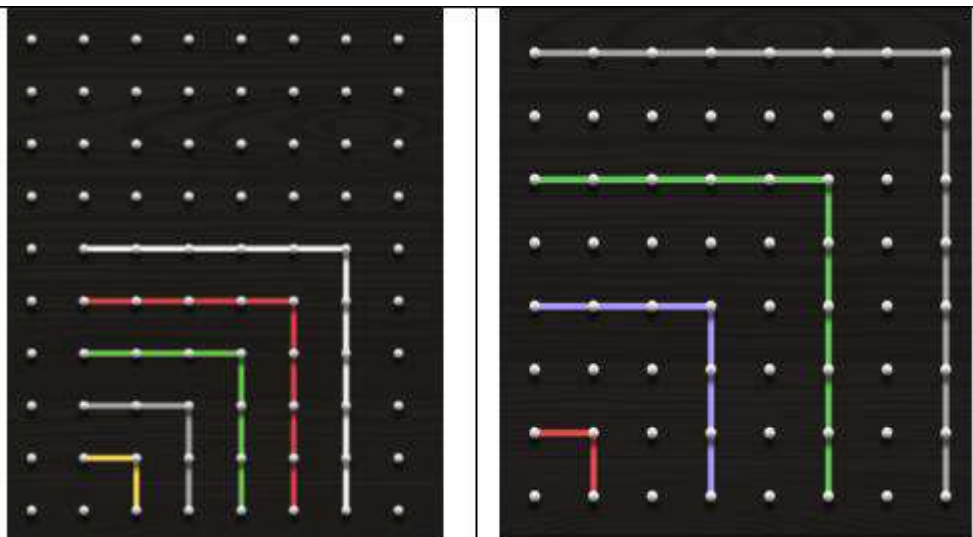
Respuesta de la E5 para la fase 1



Nota. Captura de pantalla de las respuestas de la E5 para la Fase 1, Test 2.

Figura 24

Respuesta de la E6 para la Fase 1



Nota. Captura de pantalla de las respuestas de la E6 para la Fase 1, Test 2.

Fase 2: Decir el patrón

Tal como en el Test 1, se les propuso a las estudiantes completar una tabla con datos numéricos respecto a figuras que tenían que construir en el geoplano virtual. Cada estudiante tenía

la tarea de hallar la fórmula general para determinadas características de las secuencias de figuras construidas. En esta fase, se les pide a las estudiantes que escriban con sus propias palabras la regularidad encontrada.

Algunas estudiantes solo colocan la regularidad expresada de manera simbólica, mientras que otras estudiantes sí indican de manera verbal la regularidad encontrada, tal como se muestra en las figuras 25, 26 y 27.

Figura 25

Actividad propuesta para la Fase 2 del Test 2

9.

Escriban al frente de cada letra: P, Q, R, S, con sus propias palabras, el patrón o regularidad que encontraron, para ir obteniendo los resultados numéricos en cada una de las casillas vacías para cada fila de la tabla No. 2. "Generalización para secuencia de escuadras en el geoplano".

Nota. Captura de pantalla de Google Forms. Extraído de: <https://cutt.ly/IVUGdRy>

Figura 26

Respuesta de la E1 a la Fase 2

P:
 $2n+1$

Q:
 N^2

R:
 $4n+1$

S:
 $(3n)+(n-1)$

Nota. Captura de pantalla de las respuestas de la E1 para la Fase 2, Test 2.

Figura 27*Respuesta de la E3 a la fase 2*

P:

Lo fui reduciendo y viendo según el número de la figura si en la primera es 3, en la segunda es 5, entonces, nos quiere decir que $2n + 1$, luego lo ponemos ir comprobando por ejemplo en la tercera figura:

$2n + 1$
 $6 + 1 = 7$
 En realidad si nos sale

Q:

Aquí sólo debemos observar con detenimiento y ver como tienen coherencia el número de figura con el otra, es ahí donde eh podido dar cuenta que es $n \times n$
 Y si nosotros lo comprobamos si nos va a salir

R:

En este este según el número de figura sacamos el patrón y nos podemos dar cuenta que sería $4n + 1$
 Y si lo vamos comprobando y nos damos cuenta que si encaja y sigue la secuencia

S:

En este después de ver sacamos el patrón viendo como es la coherencia que se dan entre ambos número y por lo cual quedaría en $4n - 1$, luego de eso se puede comprobar para mayor efectividad

Nota. Captura de pantalla de las respuestas de la E3 para la Fase 2, Test 2.

Fase 3: Registrar el patrón

Una vez que las estudiantes expresaban con sus propias palabras, ya podrían registrarlo en la tabla en su forma algebraica como una regla general. Cada estudiante envió sus respuestas a través de Classroom, empleando una tabla en el programa de Excel, tal como se muestra en la figura 28.

Figura 28*Actividad propuesta para la Fase 3 del Test 2*

FIGURA		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
LETRAS													
P	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA EN LA IMAGEN 1.	3	5	7							41		$2n + 1$
Q	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS PARA LA SUMA ENTRE LA PRIMERA PUNTILLA SUELTA Y EL NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN LA PRIMERA ESCUADRA, LUEGO ÉSTE RESULTADO SUMADO CON EL NÚMERO DE PUNTILLAS DE LA SEGUNDA ESCUADRA Y ASÍ SUCESIVAMENTE, EN LA IMAGEN 1.	1	4	9	16			49		100			
R	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE SE ENCUENTRAN ENTRE DOS ESCUADRAS CONSECUTIVAS. EN LA IMAGEN 2.	5	9	13						41			
S	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA. EN LA IMAGEN 2.	3	7	11								399	

Nota. Captura de pantalla de la actividad virtual. Extraído de: <https://cutt.ly/4VUD0vR>

En esta etapa se pudo observar que cinco de las estudiantes lograron registrar el patrón correctamente en todas las letras, una de las estudiantes se confundió al registrar el patrón de la letra P a pesar de ser un dato ya existente, cinco estudiantes se equivocaron al registrar el patrón de la letra S, cambiando el signo “ - ” de la expresión “ $4n - 1$ ” por el signo “ + ”, una estudiante se equivocó en la letra R y S, donde colocó como expresión en ambas “ $4n$ ” siendo esto incorrecto y dos estudiantes no registraron los patrones en la tabla dejando sus respuestas en blanco. Por otro lado, se debe destacar que en la letra Q las estudiantes expresaron el mismo patrón de diversas formas como n^2 , $n^{\wedge}2$, $n * n$ y nxn , siendo todas válidas, sin embargo una estudiante se equivocó y lo expresó como $xn = n2$.

A continuación, en la figura 29 y figura 29 se muestra algunas de las respuestas dadas por las estudiantes:

Figura 29

Respuesta de la E5 a la Fase 3

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
LETRAS	FIGURA	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
P	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA EN LA IMAGEN 1.	3	5	7	9	11	13	15	17	21	41	201	$21n+1$
Q	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS PARA LA SUMA ENTRE LA PRIMERA PUNTILLA SUELTA Y EL NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN LA PRIMERA ESCUADRA, LUEGO ÉSTE RESULTADO SUMADO CON EL NÚMERO DE PUNTILLAS DE LA SEGUNDA ESCUADRA Y ASÍ SUCESIVAMENTE, EN LA IMAGEN 1	1	4	9	16	25	36	49	64	100	400	10000	n^2n
R	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE SE ENCUENTRAN ENTRE DOS ESCUADRAS CONSECUTIVAS. EN LA IMAGEN 2.	5	9	13	17	21	25	29	33	41	81	401	$4n+1$
S	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA. EN LA IMAGEN 2.	3	7	11	15	19	23	27	31	39	79	399	$4n+1$

Nota. Captura de pantalla de las respuestas de la E5 para la Fase 3, Test 2.

Figura 30

Respuesta de la E13 a la Fase 3

LETRAS	FIGURA	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
P	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA EN LA IMAGEN 1.	3	5	7	9	11	13	15	17	21	41	201	$2n + 1$
Q	NÚMERO TOTAL DE PUNTILLAS PARA LA SUMA ENTRE LA PRIMERA PUNTILLA SUELTA Y EL NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN LA PRIMERA ESCUADRA, LUEGO ÉSTE RESULTADO SUMADO CON EL NÚMERO DE PUNTILLAS DE LA SEGUNDA ESCUADRA Y ASÍ SUCESIVAMENTE, EN LA IMAGEN 1	1	4	9	16	25	36	49	64	100	400	10000	nxn
R	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE SE ENCUENTRAN ENTRE DOS ESCUADRAS CONSECUTIVAS. EN LA IMAGEN 2.	5	9	13	17	21	25	29	33	41	81	401	$4n+1$
S	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA. EN LA IMAGEN 2.	3	7	11	15	19	23	27	31	39	79	399	$4n-1$

Nota. Captura de pantalla de las respuestas de la E13 para la Fase 3, Test 2.

Fase 4: Prueba de validez de la fórmula

Se les pidió a las estudiantes indicar si la regla general encontrada para cada letra se comprueba con los datos numéricos proporcionados y con los que han hallado (véase figura 31). Para esto tenían que marcar SI o NO, respecto a cada letra según corresponda.

Figura 31

Actividad propuesta para la Fase 4 del Test 2

10.

Indica si la regla general encontrada para cada letra se comprueba con los datos numéricos proporcionados y con los que has hallado. Marca SI o NO, según corresponda.

P:

☐ SI

☐ NO

Q:

☐ SI

☐ NO

R:

☐ SI

☐ NO

Nota. Captura de pantalla de Google Forms. Extraído de: <https://cutt.ly/IVUGdRy>

Entre las respuestas proporcionadas (véase figura 32 y 33), tenemos que la letra S es la que menos estudiantes han podido comprobar, seguidas de las letras R, P y Q. Se destaca que hay una estudiante que no ha logrado superar esta fase, pues no ha podido comprobar ninguna letra, a comparación de las E1, E2, E3, E4, E12 y E13, que sí han podido comprobar todas las fórmulas halladas.

Figura 32

Respuesta de la E15 a la Fase 4

P:

☐ SI

☒ NO

Q:

☐ SI

☒ NO

R:

☐ SI

☒ NO

S:

☐ SI

☒ NO

Nota. Captura de pantalla de las respuestas de la E15 para la Fase 4, Test 2.

Figura 33*Respuesta de la E1 a la Fase 4*

P:	☒ SI	☐ NO
Q:	☒ SI	☐ NO
R:	☒ SI	☐ NO
S:	☒ SI	☐ NO

Nota. Captura de pantalla de las respuestas de la E1 para la Fase 4, Test 2.

Luego de haber realizado el análisis correspondiente a cada una de las fases del proceso de generalización, se ha podido identificar lo siguiente:

- La E1, E2, E3, E4, E12 y E13, han logrado llegar a la regla general en las 4 letras y han podido proponer una expresión algebraica para cada una de ellas, además de haber comprobado la validez de las fórmulas.
- La E5, ha escrito correctamente la regla general en 2 letras (Q y R), en las otras 2 llegó a expresar correctamente en la fase de decir el patrón, sin embargo, al momento de registrarlo algebraicamente tuvo error en la expresión.
- La E6, ha escrito correctamente la regla general en 1 letra (P), sin embargo, en las otras 3 no ha registrado ningún patrón, esto se debe a que en la fase de decir cuál es el patrón lo hizo de forma incorrecta.
- La E7, E9, E10 y E14 han escrito correctamente la regla general en 3 letras (P, Q y R), en la letra restante expresaron correctamente la regularidad en la fase de Decir el patrón, excepto la E14, quien sí presentó dificultades. Además, al momento de registrarlo algebraicamente lo hicieron de manera incorrecta.
- La E8, ha escrito correctamente la regla general en 2 letras (P y Q), sin embargo, en las otras 2, logró expresarlo correctamente en la fase de decir el patrón, mas no pudo expresarlo correctamente en la fase de registrar.
- E11, ha escrito correctamente la regla general en 3 letras (P, R y S), en la letra restante la estudiante logró expresar de manera correcta la regularidad en la fase de decir el patrón, pero no pudo hacerlo de la misma forma al momento de registrarlo.
- La E15, no ha escrito la regla general en ninguna de las letras. Aunque, sí ha completado de manera correcta los datos solicitados para cada una de las casillas de

la tabla, y en la fase de decir el patrón ha expresado de manera correcta la regularidad de cada una de las letras.

A continuación, se presenta la tabla 16 con los puntajes asignados a cada estudiante a partir de la rúbrica que evalúa su desempeño en cada una de las fases y se señala el nivel de logro alcanzado.

Tabla 16

Puntaje obtenido a partir de la rúbrica de evaluación del Test 2

Estudiante	F1	F2	F3	F4	Total	Nivel de logro
1	4	4	5	4	17	Eficiente
2	4	4	5	4	17	Eficiente
3	4	5	5	4	18	Eficiente
4	4	5	5	4	18	Eficiente
5	4	4	3	3	14	Regular
6	4	1	1	1	7	Deficiente
7	4	4	3	3	14	Regular
8	4	4	2	2	12	Regular
9	4	4	3	3	14	Regular
10	4	3	3	3	13	Regular
11	4	4	3	3	14	Regular
12	4	4	5	4	17	Eficiente
13	4	5	5	5	19	Eficiente
14	4	3	3	3	13	Regular
15	4	4	1	2	11	Regular

Deficiente (entre 01 a 10), Regular (entre 11 a 15) y Eficiente (entre 16 a 20).

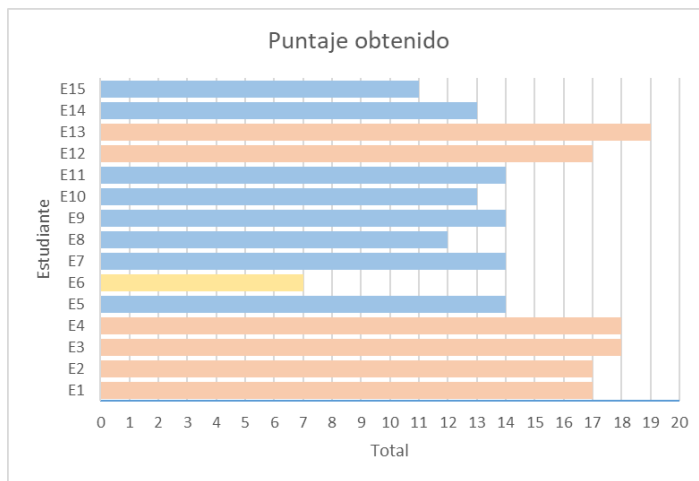
Nota. Elaboración propia.

De acuerdo a la tabla se puede ver que 6 de las estudiantes han alcanzado un nivel eficiente, 8 se encuentran en un nivel regular y sólo una de las estudiantes tiene un nivel deficiente. Por lo tanto, se puede notar que los resultados han variado y en muchos casos el nivel de logro de las estudiantes ha cambiado respecto al test grupal.

La siguiente figura 34, muestra los puntajes obtenidos luego de haberse aplicado la rúbrica a cada una de las estudiantes, además en la figura 35 se muestra el nivel de logro alcanzado.

Figura 34

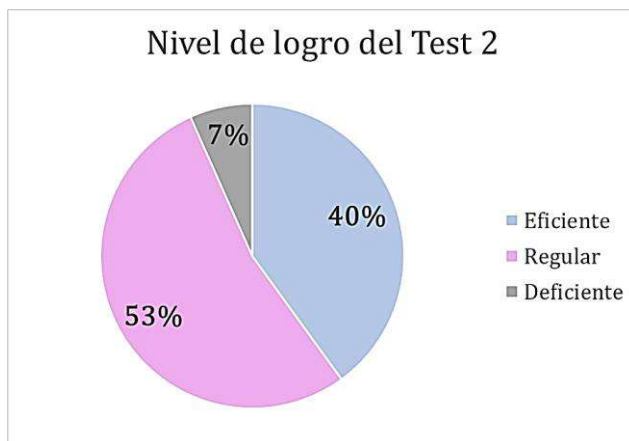
Gráfico de los puntajes obtenidos al aplicarse la rúbrica



Nota. Elaboración propia

Figura 35

Nivel de logro obtenido en el Test 2



Nota. Elaboración propia

El promedio de los puntajes obtenidos es de 14.5.

A continuación, se presenta tabla 17 sobre la comparativa de los resultados de las estudiantes en el Tes1 y Test 2:

Tabla 17

Tabla comparativa de los resultados obtenidos en el Test 1 y Test 2

GRUPO	ESTUDIANTE	TEST 1 (GRUPAL)	TEST 2 (INDIVIDUAL)	COMPARACIÓN
1	E1	Las estudiantes lograron llegar a la regla general en 5 de las 6 letras, de las cuales 4 fueron registradas y validadas de forma correcta, una fue expresada	La estudiante ha logrado llegar a la regla general en las 4 letras, registrándolas y validándolas correctamente. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo, ha sido de 17, encontrándose en un nivel eficiente.	La E1 ha tenido un mejor desempeño de forma individual que de manera grupal, ha subido de puntaje de 14 a 17, pasando de estar en un nivel regular a un nivel eficiente.
	E2	correctamente con sus propias palabras, pero tuvo un error en su expresión algebraica, y una la dejaron sin responder. El puntaje obtenido respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo y de acuerdo con su trabajo grupal realizado, ha sido de 13, encontrándose en un nivel regular.	La estudiante ha logrado llegar a la regla general en las 4 letras, registrándolas y validándolas correctamente. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo, ha sido de 17, encontrándose en un nivel eficiente.	La E2 ha tenido mejor desempeño de forma individual que grupal, ya que pasó de estar en un nivel regular a un nivel eficiente, subiendo de puntaje de 14 a 17.
	E3		La estudiante ha logrado llegar a la regla general en las 4 letras, registrándolas y validándolas correctamente. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo, ha sido de 18, encontrándose en un nivel eficiente.	La E3 ha tenido un mejor desempeño de forma individual que grupal, ha logrado subir su puntaje de 14 a 18, pasando de un nivel regular a un nivel eficiente.
2	E4	Al igual que el grupo anterior, las estudiantes lograron llegar a la regla general en 5 de las 6 letras, de las cuales 4 fueron registradas y validadas correctamente, una fue expresada	La estudiante ha logrado llegar a la regla general en las 4 letras, registrándolas y validándolas correctamente. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo, ha sido de 18,	La E4 ha tenido un mejor desempeño trabajando de forma individual que de manera grupal, ha logrado subir su puntaje de 14 a 18 y ha podido pasar de un nivel regular a un nivel eficiente.

		correctamente con sus propias palabras, pero tuvo un error en su expresión algebraica, y una la dejaron sin responder. El puntaje obtenido respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo y de acuerdo con su trabajo grupal, ha sido de 13, encontrándose en un nivel regular.	encontrándose en un nivel eficiente. La estudiante ha logrado llegar a la regla general en 2 letras, registrándolas y validándolas correctamente, en las otras 2 llegó a expresarlas correctamente con sus propias palabras, sin embargo, al momento de registrarlo algebraicamente tuvo error en la expresión. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo, ha sido de 14, encontrándose en un nivel regular.	La E5 no ha mostrado ningún cambio en su trabajo de forma individual y de manera grupal, ya que su puntaje ha sido el mismo, 14 y se mantiene en un nivel regular.
	E5		La estudiante ha logrado llegar a la regla general en 1 letra, registrándolas y validándolas correctamente, sin embargo, en las otras 3 no ha registrado ningún patrón, esto se debe a que en la fase de decir cuál es el patrón ella lo expresó de forma incorrecta. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo, ha sido de 07, encontrándose en un nivel deficiente.	La E6 tuvo un mejor desempeño trabajando de manera grupal que de forma individual, bajando su puntaje de 14 a 07, pasando de un nivel regular a deficiente.
3	E7	Las estudiantes lograron llegar a la regla general en las 6 letras, sin embargo, sólo 3 fueron registradas y validadas correctamente, dos eran incorrectas y una la lograron expresar con sus propias palabras, pero cometieron un error en su	La estudiante ha logrado llegar a la regla general en 3 letras, registrándolas y validándolas correctamente. En la otra letra, logró expresarlo con sus propias palabras, pero al registrarlo lo hizo de forma incorrecta. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del	La E7 ha podido trabajar mejor de forma individual que grupal, ha subido su puntaje de 11 a 14, aunque se mantiene en el mismo nivel regular eso igual demuestra un avance.

		expresión algebraica. El puntaje obtenido	currículo, ha sido de 14, encontrándose en un nivel regular.	
	E8	respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo y de acuerdo con su trabajo grupal, ha sido de 11, encontrándose en un nivel regular.	La estudiante ha logrado llegar a la regla general en 2 letras, registrándolas y validándolas correctamente. En las otras 2, logró expresarlas con sus propias palabras, pero al registrarlos lo hizo de forma incorrecta. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo ha sido de 12, encontrándose en un nivel regular.	La E8 no ha tenido mucha diferencia en su desempeño al trabajar de forma individual que, de manera grupal, sólo ha subido 1 punto en su calificación, de 11 a 12, por lo tanto, se mantiene en el mismo nivel regular.
	E9		La estudiante ha logrado llegar a la regla general en 3 letras, registrándolas y validándolas correctamente. En la otra letra, logró expresarlo con sus propias palabras, pero al registrarlo lo hizo de forma incorrecta. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo ha sido de 14, encontrándose en un nivel regular.	La E9 ha trabajado mejor de forma individual que de manera grupal, ha subido su puntaje de 11 a 14, aunque se mantiene en el mismo nivel regular eso igual demuestra un avance.
4	E10	Las estudiantes, lograron llegar a la regla general en 5 de las 6 letras, de las cuales 4 fueron registradas y validadas de forma correcta, una fue expresada correctamente con sus propias palabras, pero tuvo un error en su expresión algebraica, y una la dejaron sin responder. El puntaje obtenido	La estudiante ha logrado llegar a la regla general en 3 letras, registrándolas y validándolas correctamente. En la otra letra, logró expresarlo con sus propias palabras, pero al registrarlo lo hizo de forma incorrecta. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo ha sido de 13, encontrándose en un nivel regular.	La E10, no muestra mucha diferencia entre trabajar de forma grupal o de manera individual, aunque si ha bajado de puntaje de 14 a 13, pero se ha mantenido en el mismo nivel regular.

5	E11	respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo y de acuerdo con su trabajo grupal, ha sido de 14, encontrándose en un nivel regular.	La estudiante ha logrado llegar a la regla general en 3 letras, registrándolas y validándolas correctamente. En la otra letra, logró expresarlo con sus propias palabras, pero al registrarlo lo hizo de forma incorrecta. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo ha sido de 14, encontrándose en un nivel regular.	La E11 no ha mostrado diferencia entre trabajar de forma individual o grupal, ha mantenido su puntaje de 14 y su nivel sigue siendo regular.
	E12		La estudiante ha logrado llegar a la regla general en las 4 letras, registrándolas y validándolas correctamente. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo, ha sido de 17, encontrándose en un nivel eficiente.	La E12 ha trabajado mejor de forma individual que de manera grupal, ha subido su puntaje de 14 a 17 y ha pasado de un nivel regular a un nivel eficiente.
	E13	Las estudiantes han logrado llegar a la regla general en todas las 6 letras, registrándolas y validándolas correctamente. Cabe resaltar que dos de las letras pudieron haber sido escritas de forma más	La estudiante ha logrado llegar a la regla general en las 4 letras, registrándolas y validándolas correctamente. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo, ha sido de 19, encontrándose en un nivel eficiente.	La E13 no muestra mucha diferencia de trabajar de forma individual o grupal, pero si ha subido de puntaje de 18 a 19, manteniéndose en el nivel eficiente.
	E14	simplificada. El puntaje obtenido respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo y de acuerdo con su trabajo grupal, ha sido de 18,	La estudiante ha logrado llegar a la regla general en 3 letras, registrándolas y validándolas correctamente. En la otra letra, lo hizo de forma incorrecta. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo ha sido de 13,	La E14 ha trabajado mejor de forma grupal que de manera individual, su puntaje ha bajado de 18 a 13, pasando de un nivel eficiente a un nivel regular.

	encontrándose en un nivel eficiente.	encontrándose en un nivel regular.
E15		La estudiante no ha logrado registrar y validar ninguna de las reglas generales, pero si ha completado todos los datos de la tabla y expresó los patrones con sus propias palabras de forma correcta. El puntaje que obtuvo respecto al nivel de cumplimiento de las fases del proceso de generalización, en relación con los desempeños del currículo ha sido de 11, encontrándose en un nivel regular.

Nota. Elaboración propia

Comparando los puntajes obtenidos en el Test 1 y Test 2, se evidencia que 9 de las estudiantes ha incrementado su puntaje, 4 han bajado su puntaje y 2 lo ha mantenido. Asimismo, en cuanto al nivel de logro que han conseguido se evidencia que 5 estudiantes han subido de nivel, 3 han bajado de nivel y 7 se han mantenido en el mismo nivel. De acuerdo a estos resultados se puede afirmar que la mayoría de las estudiantes han tenido un mejor desempeño trabajando de forma individual, lo cual se puede deber a la experiencia previa obtenida en el Test 1 y que les da una mayor seguridad al momento de trabajar cada una por su cuenta. De igual forma, cabe destacar que aquellas estudiantes que han bajado de puntaje y nivel, desempeñándose mejor de manera grupal que individual, evidencian que en una primera instancia trabajar de forma colaborativa con sus compañeras les ha favorecido y aportado en su desempeño respecto al Test 1.

De forma general se puede decir que las estudiantes han trabajado mejor individualmente, sin embargo, el trabajo grupal les ha servido de base para su desempeño, ya que han compartido e intercambiado ideas que les ayudó a un buen entendimiento para la realización de cada consigna. Esto dependerá también mucho del estilo de aprendizaje de cada estudiante, ya que algunas estudiantes prefieren intercambiar ideas con sus compañeras y otras prefieren trabajar de forma independiente y así se desenvuelven mejor.

4.3 Resultados del cuestionario final sobre la aplicación de las actividades virtuales

Se aplicó el cuestionario de 10 ítems (Anexo B) a las 15 estudiantes la I.E., el cual tuvo como objetivo conocer la percepción de las estudiantes respecto a la aplicación de las dos sesiones de clase desarrolladas de manera virtual.

La estructura seguida para el tratamiento del cuestionario es la siguiente:

Para las primeras nueve preguntas: primero, se presenta la pregunta explícita, así como una breve descripción de la misma; segundo: se muestra los resultados obtenidos a través de una tabla

de doble entrada que especifica la frecuencia y porcentaje por cada nivel de la escala de Likert; tercero, los resultados obtenidos se presentan en un gráfico de barras; finalmente, se realiza una descripción de los resultados obtenidos. Cabe indicar que el mismo proceso se siguió para cada sub-ítem.

La última pregunta es de respuesta abierta, se propone para que las estudiantes la puedan responder libremente, por lo que, en una tabla de doble entrada se van a presentar algunos fragmentos de las respuestas emitidas por determinadas estudiantes, así como un análisis y apreciación final.

1. *¿La explicación del uso de los siguientes recursos tecnológicos empleados resultó entendible?*

Este ítem busca identificar el nivel de satisfacción de las estudiantes respecto a la explicación brindada por los docentes sobre el uso de recursos tecnológicos que se utilizaron para el desarrollo de las sesiones y para resolver los test. Para esto, se ha subdividido en 4 apartados en los que se presentan los resultados respecto a: Geoplano virtual (véase tabla 18), Excel (véase tabla 19), Google Forms (véase tabla 20) y Google Sites (véase tabla 21). Además, se presenta su gráfico correspondiente en las figuras 36, 37, 38 y 39; respectivamente.

Tabla 18

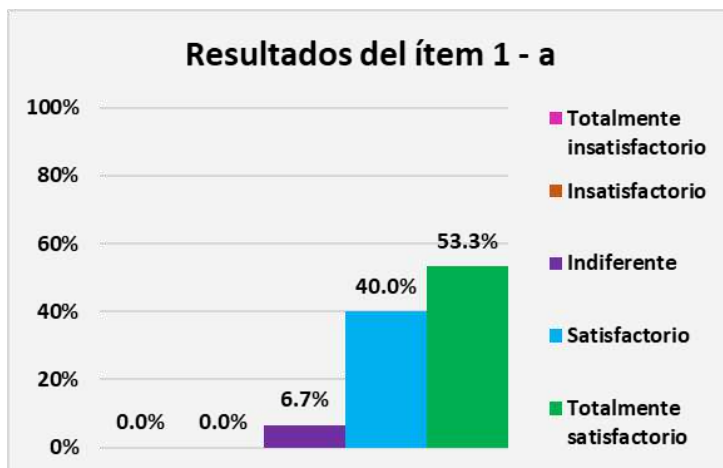
Resultados del ítem 1 respecto al recurso tecnológico Geoplano virtual

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	1	6.7%
Satisfactorio	6	40.0%
Totalmente satisfactorio	8	53.3%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia

Figura 36

Resultado del ítem 1 – a respecto al recurso tecnológico Geoplano virtual



Nota. Elaboración propia

En la Figura 36, se observa que el 53,3% de las estudiantes están totalmente satisfechas, por otra parte, el 40% indican estar satisfechas, un 6,7% se muestra indiferente, y ninguna alumna se ha sentido insatisfecha.

Como se puede apreciar, el 93,3% de las estudiantes opinan que la explicación respecto al uso del geoplano virtual se ha dado de manera satisfactoria. Lo cual indica que la presentación del recurso en las sesiones de clase ha sido recibida de forma oportuna por parte de las estudiantes, ya que se ha comprendido las funcionalidades que tal recurso proporciona.

Tabla 19

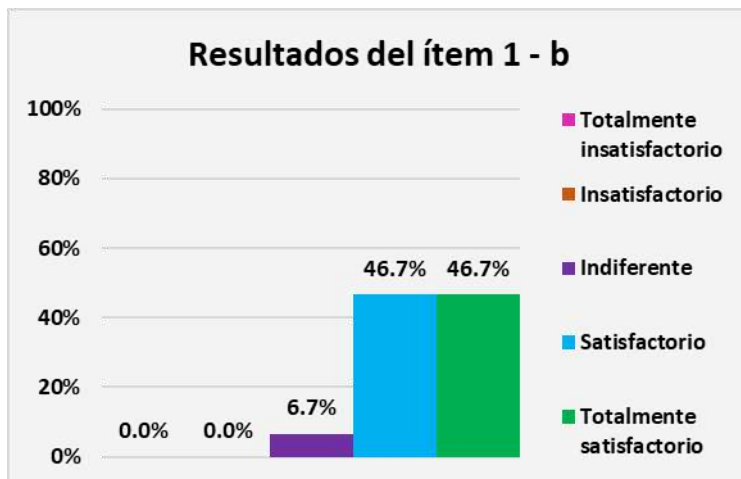
Resultados del ítem 1 respecto al recurso tecnológico Excel

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	1	6.7%
Satisfactorio	7	46.7%
Totalmente satisfactorio	7	46.7%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia

Figura 37

Resultado del ítem 1 – b respecto al recurso tecnológico Excel



Nota. Elaboración propia

En la Figura 37, se puede apreciar que el 46,7% de las estudiantes se sienten totalmente satisfechas, otro 46,7% indican sentirse satisfechas, un 6,7% manifiestan una posición indiferente, y ninguna estudiante dice sentirse insatisfecha.

A partir de los datos recogidos, se puede señalar que el 93,4% de las estudiantes manifiestan satisfacción en cuanto a la explicación de la utilización del recurso tecnológico Excel, esto debido a

que, en parte, los investigadores en las sesiones de clase realizaron una tarea para enseñar su funcionalidad.

Tabla 20

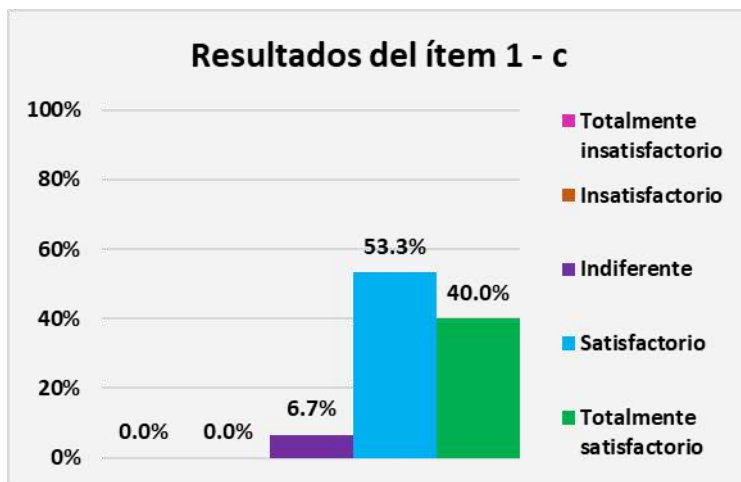
Resultados del ítem 1 respecto al recurso tecnológico Google Forms

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	1	6.7%
Satisfactorio	8	53.3%
Totalmente satisfactorio	6	40.0%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia

Figura 38

Resultado del ítem 1 – c respecto al recurso tecnológico Google Forms



Nota. Elaboración propia

Se observa que el 40% de las estudiantes indican que se han sentido totalmente satisfechas, además de un 53,3% que se siente satisfecha, y un 6,7% que se muestra indiferente, cabe indicar que ninguna estudiante consideró haberse sentido insatisfecha.

Así tenemos que, alrededor de un 93,3% se siente satisfecha con la explicación del recurso virtual Google Forms. Considerando además que es una experiencia nueva para las estudiantes, y, la oportunidad de trabajar con este programa les ha permitido potenciar el conocimiento acerca de esta herramienta.

Tabla 21

Resultados del ítem 1 respecto al recurso tecnológico Google Sites

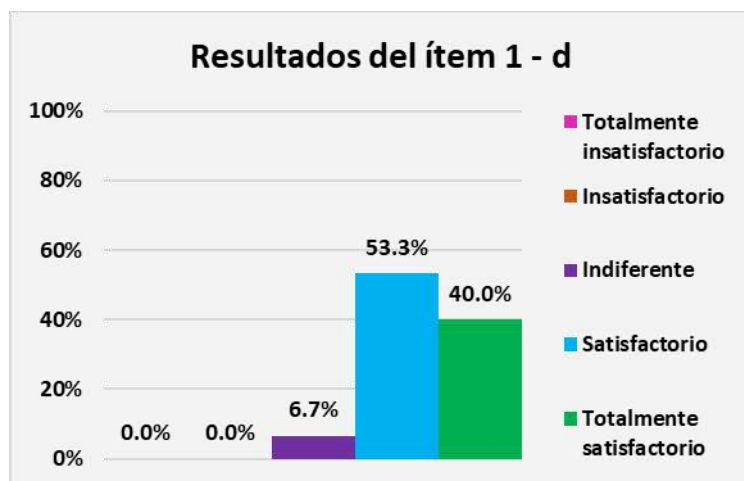
Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	1	6.7%

Satisfactorio	8	53.3%
Totalmente satisfactorio	6	40.0%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia

Figura 39

Resultado del ítem 1 – d respecto al recurso tecnológico Google Sites



Nota. Elaboración propia

A partir del gráfico, tenemos que el 40% de las estudiantes ha indicado haberse sentido totalmente satisfecha, un 53,3% indica que se sintió satisfecha, y un 6,7% que no distingue si se sintió satisfecha o insatisfecha.

Se tiene que el 93,3% de las estudiantes se siente satisfecha con la explicación referida al uso de Google Sites. Hay que considerar que ellas no han trabajado directamente con el sitio web, sino que han tenido que acceder a este para poder visualizar los test que se les ha aplicado.

2. ¿Los siguientes recursos virtuales utilizados en las sesiones de clase han sido oportunos para el área de matemática?

El ítem presentado pretende identificar si las alumnas consideran que los recursos tecnológicos han resultado convenientes para el desarrollo de sesiones de clase en el área de matemática. Para esto, se ha subdivido en 4 apartados en los que se presentan los resultados respecto a: Geoplano virtual (véase tabla 22), Excel (véase tabla 23), Google Forms (véase tabla 24) y Google Sites (véase tabla 25). Además, se presenta su gráfico correspondiente en las figuras 40, 41, 42 y 43; respectivamente.

Tabla 22

Resultados del ítem 2 respecto al recurso tecnológico Geoplano Virtual

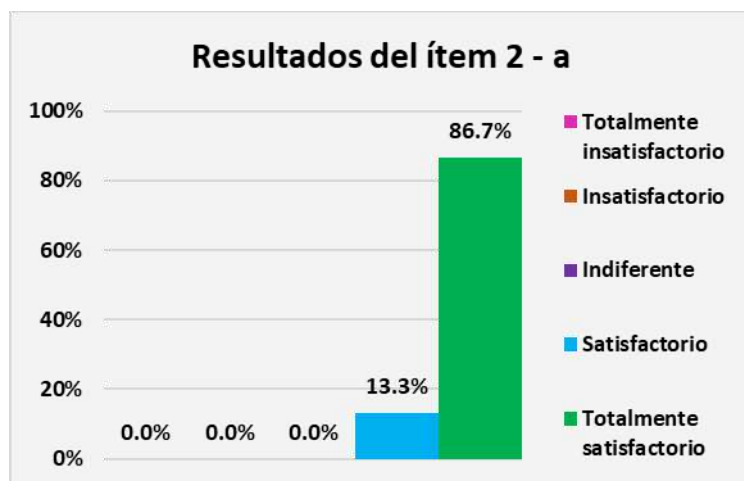
Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	0	0.0%

Satisfactorio	2	13.3%
Totalmente satisfactorio	13	86.7%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia

Figura 40

Resultado del ítem 2 – a respecto al recurso tecnológico Geoplano Virtual



Nota. Elaboración propia

El gráfico mostrado indica que el 86,7% de las estudiantes indican sentirse totalmente satisfechas, de la misma forma el 13,3 % manifiestan satisfacción respecto a este ítem.

Ante esto, se puede evidenciar que el 100% de las estudiantes están satisfechas respecto a que la utilización del geoplano virtual es oportuna para el área de la matemática. Esto puede ser porque las estudiantes pueden manipular un geoplano de manera virtual, no necesita tener el material concreto para hacerlo.

Tabla 23

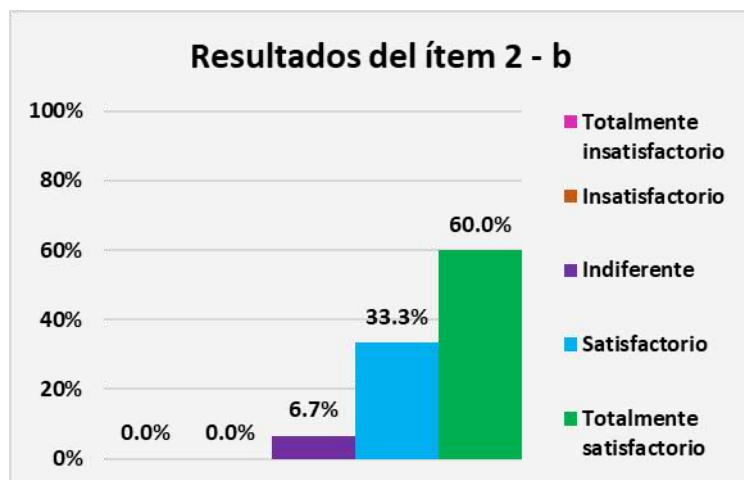
Resultados del ítem 2 respecto al recurso tecnológico Excel

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	1	6.7%
Satisfactorio	5	33.3%
Totalmente satisfactorio	9	60.0%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 41

Resultado del ítem 2 – b respecto al recurso tecnológico Excel



Nota. Elaboración propia.

A partir de los resultados mostrados en la Figura 41, el 60% de las estudiantes se sienten totalmente satisfechas, el 33,3% indican estar satisfechas, y un 6,7% indica estar ni satisfecha ni insatisfecha, respecto al uso de Excel.

El porcentaje de satisfacción es del 93,3%, lo cual indica también que las estudiantes sienten que la utilización del programa Excel proporciona múltiples ventajas que pueden ser aprovechadas en el área de matemática.

Tabla 24

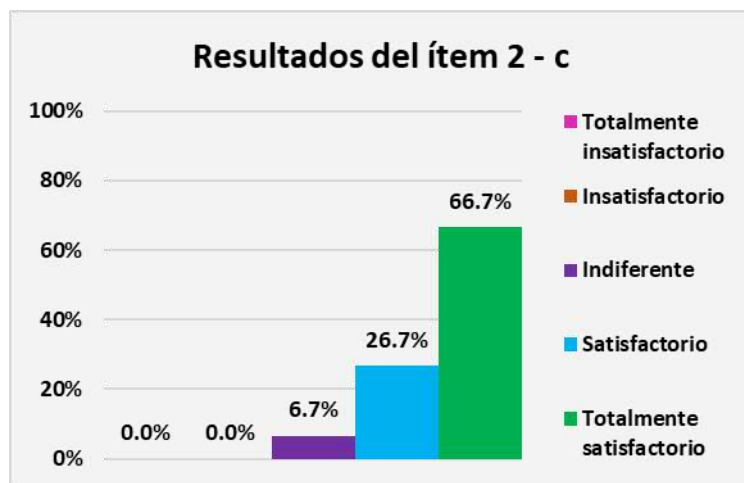
Resultados del ítem 2 respecto al recurso tecnológico Google Forms

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	1	6.7%
Satisfactorio	4	26.7%
Totalmente satisfactorio	10	66.7%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 42

Resultado del ítem 2 – c respecto al recurso tecnológico Google Forms



Nota. Elaboración propia.

El gráfico manifiesta que el 66,7% de las estudiantes indican estar totalmente satisfechas, un 26,7% se muestran satisfechas, y un 6,7% indican que el ítem les parece indiferente, respecto a Google Forms.

Tabla 25

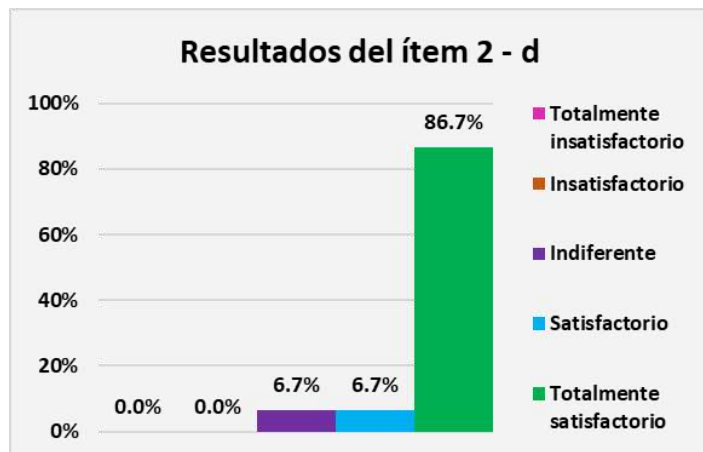
Resultados del ítem 2 respecto al recurso tecnológico Google Sites.

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	1	6.7%
Satisfactorio	1	6.7%
Totalmente satisfactorio	13	86.7%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 43

Resultado del ítem 2 – d respecto al recurso tecnológico Google Sites



Nota. Elaboración propia.

El gráfico muestra que un 86,7% de las estudiantes manifiestan sentirse totalmente satisfechas, 6,7% indican satisfacción, y un 6,7 no les parece satisfactorio ni insatisfactorio con el uso de Google Sites.

El recurso presenta la opción de poder redactar respuestas, lo cual ha sido algo novedoso para las estudiantes, además que pueden justificar ciertos procedimientos que a veces no pueden hacerlo cuando se les propone un tipo de examen presencial

3. *Te sientes motivado cuando se usan recursos tecnológicos durante la sesión de clase*

Este ítem pretende determinar el nivel de motivación que genera el uso de recursos tecnológicos durante la clase. A continuación, en la tabla 26 se presentan los resultados, y de manera gráfica en la figura 44.

Tabla 26

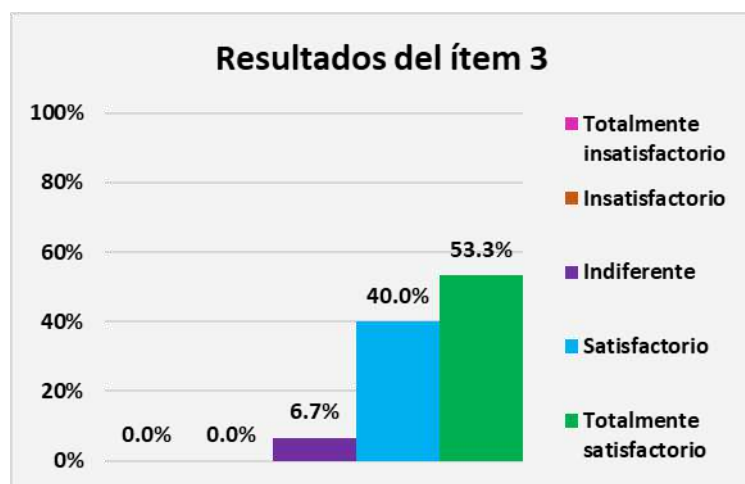
Resultados ítem 3 respecto a la motivación que genera usar recursos tecnológicos en clase

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	1	6.7%
Satisfactorio	6	40.0%
Totalmente satisfactorio	8	53.3%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 44

Resultados ítem 3 respecto a la motivación que genera usar recursos tecnológicos en clase



Nota. Elaboración propia.

A partir del gráfico, un 53,3% de las estudiantes indican estar totalmente satisfechas, un 40% de manera satisfecha, y un 6,7% no manifiesta estar satisfecha ni insatisfecha con el uso de recursos tecnológicos.

Así pues, se tiene que la mayoría de las estudiantes indican que se sienten motivados cuando se usan recursos tecnológicos durante las sesiones de clase, lo cual les permitiría atender de mejor forma las clases, así como a querer interactuar con el desarrollo de la clase.

4. ¿La secuencia de las actividades trabajadas durante las sesiones de clase te pareció adecuada?

El mencionado ítem permite conocer si las estudiantes consideran que las actividades planteadas durante las sesiones de clase han resultado adecuadas según el orden en el que se han presentado. A continuación, en la tabla 27 se presentan los resultados, y de manera gráfica en la figura 45.

Tabla 27

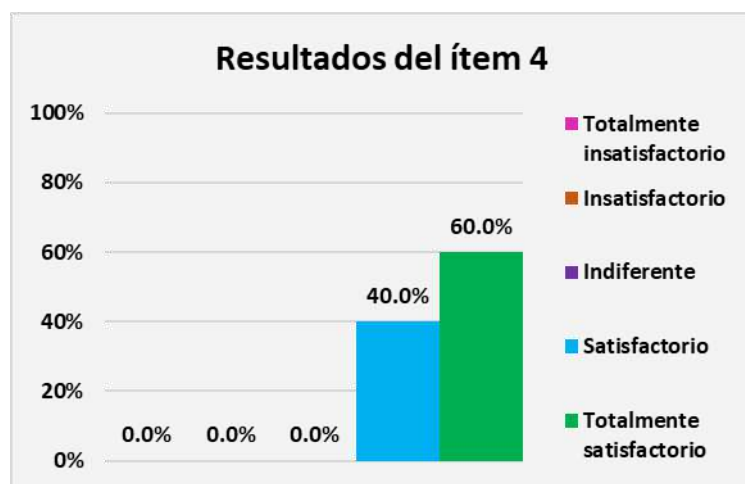
Resultados ítem 4 respecto a la secuencia de actividades trabajadas durante las sesiones de clase

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	0	0.0%
Satisfactorio	6	40.0%
Totalmente satisfactorio	9	60.0%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 45

Resultados ítem 4 respecto a la secuencia de actividades trabajadas durante las sesiones de clase



Nota. Elaboración propia.

A partir del gráfico, se puede extraer que el 60% de las estudiantes indican estar totalmente satisfechas, y un 40% se sienten satisfechas con la secuencia trabajada en las sesiones.

Así pues, se tiene que la mayoría de estudiantes considera que la secuencia de actividades se ha presentado de manera adecuada, la secuencia de actividades ha resultado pertinente para la consecución de los objetivos que se plantearon en el desarrollo de las sesiones de clase.

5. El ambiente de trabajo y las relaciones con mis compañeras a través de salas pequeñas en Zoom resultaron motivadoras.

El ítem presentado pretende conocer si es que parte del trabajo planteado durante las sesiones de clase han resultado motivadoras, esto en relación al trabajo en grupo realizado en las salas pequeñas de la aplicación Zoom. A continuación, en la tabla 28 se presentan los resultados, y de manera gráfica en la figura 46.

Tabla 28

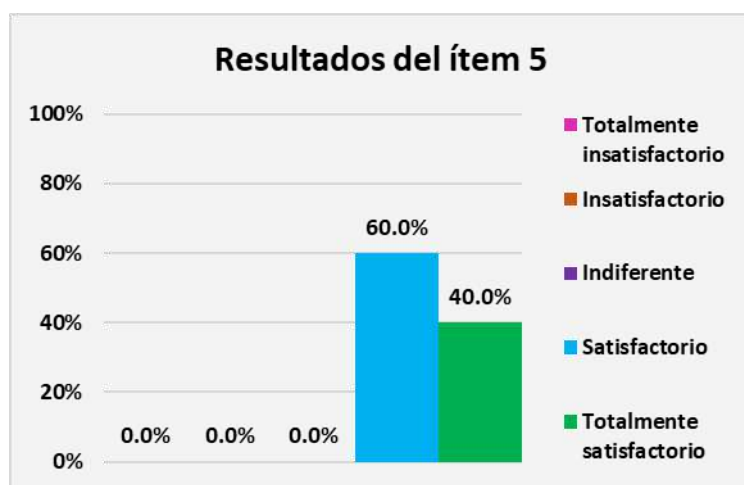
Resultados ítem 5 respecto al ambiente de trabajo y relaciones entre compañeros en Zoom

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	0	0.0%
Satisfactorio	9	60.0%
Totalmente satisfactorio	6	40.0%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 46

Resultados ítem 5 respecto al ambiente de trabajo y relaciones entre compañeros en Zoom



Nota. Elaboración propia.

A partir del gráfico anterior, se tiene que el 40% de las estudiantes se sienten totalmente satisfechas, y el 60% restante manifiestan estar satisfechas.

Así pues, se tiene que la mayoría de estudiantes dicen estar satisfechas, al parecer no están del todo convencidas de que el trabajo en grupo proporciona muchas ventajas, así que por tal razón no están totalmente satisfechas.

6. La retroalimentación brindada por los docentes durante las sesiones fue de ayuda para el logro de los aprendizajes.

Este ítem busca conocer si es que las estudiantes consideran si la interacción con los profesores les ha permitido lograr los aprendizajes esperados. A continuación, en la tabla 29 se presentan los resultados. y de manera gráfica en la figura 47.

Tabla 29

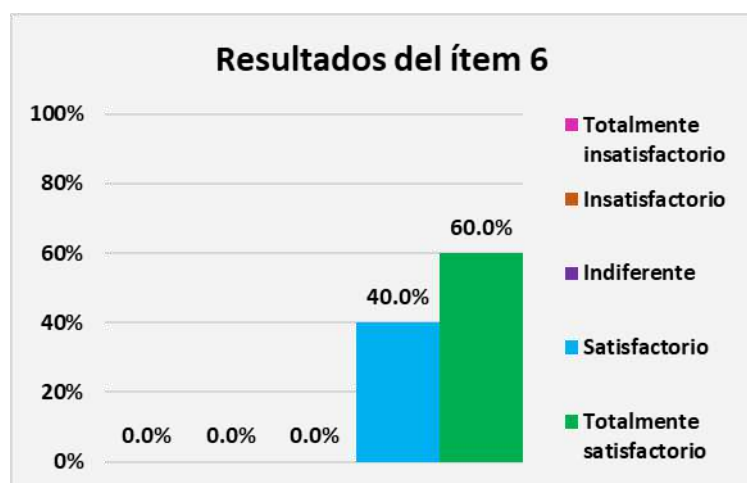
Resultados ítem 6 respecto a la retroalimentación brindada por los docentes en las sesiones de clase

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	0	0.0%
Satisfactorio	6	40.0%
Totalmente satisfactorio	9	60.0%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 47

Resultados ítem 6 respecto a la retroalimentación brindada por los docentes en las sesiones de clase



Nota. Elaboración propia.

Se tiene que el 60% de las estudiantes indicar estar totalmente satisfechas, y un 40% indica estar satisfechas.

Lo anterior indica que la retroalimentación brindada por los docentes les ha permitido, en parte, poder entender aquello que le resulta complicado y de tal modo puedan desarrollar correctamente lo que se les propone como parte del desarrollo de las sesiones de clase.

7. ¿Consideras que el tiempo destinado para el desarrollo de las actividades fue suficiente?

Este ítem busca conocer si es que las estudiantes consideran que las actividades se han desarrollado en un tiempo prudente, o si es que creen necesario dedicarle tiempo adicional al destinado en un principio. A continuación, en la tabla 30 se presentan los resultados, y de manera gráfica en la figura 48.

Tabla 30

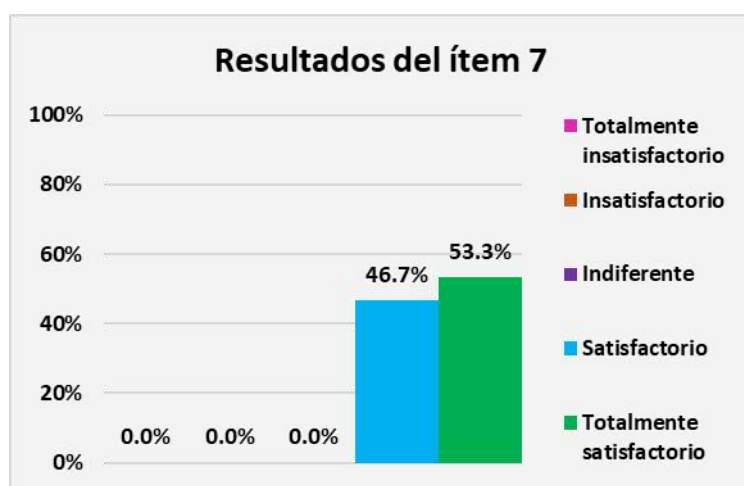
Resultados ítem 7 respecto al tiempo destinado para el desarrollo de las actividades

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	0	0.0%
Satisfactorio	7	46.7%
Totalmente satisfactorio	8	53.3%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 48

Resultados ítem 7 respecto al tiempo destinado para el desarrollo de las actividades



Nota. Elaboración propia.

Así pues, a partir del gráfico anterior, se tiene que el 53,3% de las estudiantes indican estar totalmente satisfechas con el tiempo que se ha destinado para el desarrollo de las sesiones de clase, así pues, consideran que el tiempo empleado les ha sido suficiente para poder entender aquello que se ha pretendido enseñar. EL 46,7% indica sentirse satisfecha. Con lo cual, se puede deducir que el tiempo sí ha sido el pertinente, es decir, que la aplicación de las actividades se puede realizar en dos sesiones de clase.

8. ¿Piensas que los aprendizajes logrados en esta sesión los podrás aplicar en tu vida cotidiana?

Con este ítem se busca identificar si las estudiantes han podido aprender cosas que pueden ser utilizadas en su vida diaria. A continuación, en la tabla 31 se presentan los resultados, y de manera gráfica en la figura 49.

Tabla 31

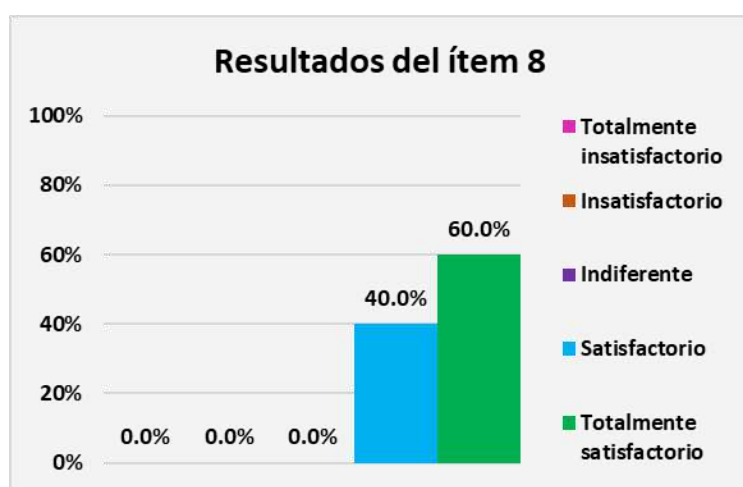
Resultados ítem 8 respecto a los aprendizajes logrados durante las sesiones de clase

Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	0	0.0%
Satisfactorio	6	40.0%
Totalmente satisfactorio	9	60.0%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 49

Resultados ítem 8 respecto a los aprendizajes logrados durante las sesiones de clase



Nota. Elaboración propia.

El gráfico manifiesta que el 60% de las estudiantes indican sentirse totalmente satisfechas respecto a pensar que los conocimientos adquiridos durante el desarrollo de las actividades los pueden plasmar en algunos aspectos de la vida cotidiana. Un 40% indica estar satisfechas. Así que la mayoría de estudiantes consideran que lo aprendido les servirá para su vida cotidiana.

9. ¿Los objetivos definidos en cada sesión se han cumplido?

Con este ítem se pretende identificar si las estudiantes consideran que los objetivos que se han planteado en la sesión se han cumplido. A continuación, en la tabla 32 se presentan los resultados, y de manera gráfica en la figura 50.

Tabla 32

Resultados ítem 9 respecto a los objetivos definidos en cada sesión de clase

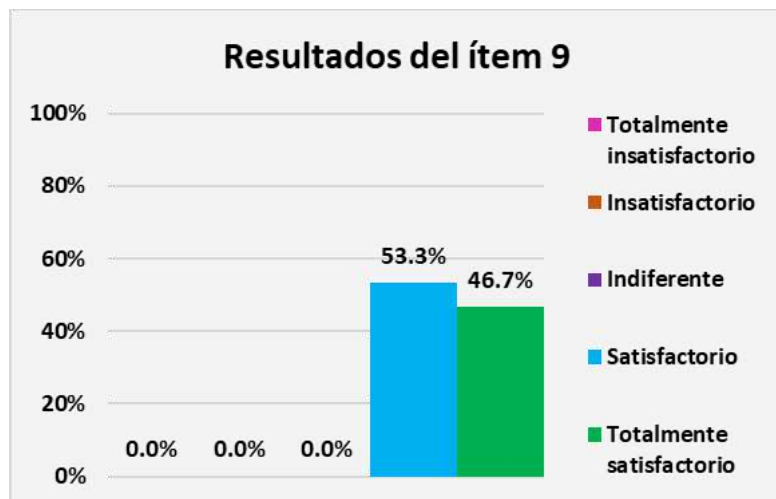
Escala	F	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	0	0.0%
Satisfactorio	8	53.3%

Totalmente satisfactorio	7	46.7%
Total	15	100%

Nota. Elaboración propia.

Figura 50

Resultados ítem 9 respecto a los objetivos definidos en cada sesión de clase



Nota. Elaboración propia.

Del gráfico se puede extraer que el 46,7% indica sentirse totalmente satisfecha, un 53,3% dice sentirse satisfecha. Esto indica que todos los objetivos planteados al inicio de la sesión se han cumplido.

Como parte de resumen de estas primeras nueve preguntas, a continuación, se presenta la tabla 33, además en la figura 51 se muestra la totalidad de respuestas brindadas por las estudiantes.

Tabla 33

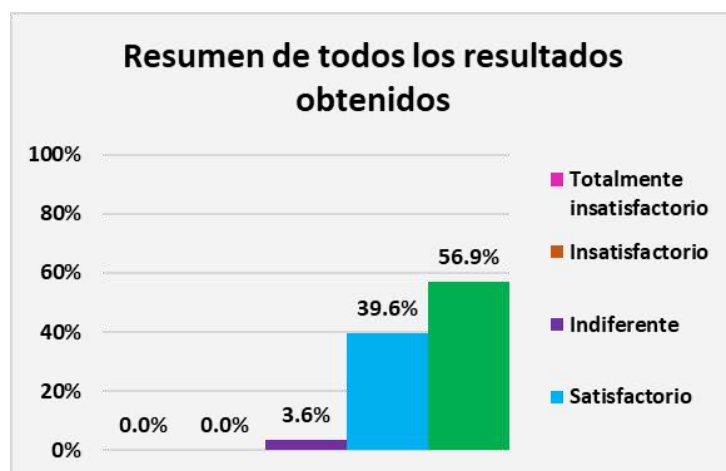
Resultados generales de los primeros nueve ítems

Escala	#	%
Totalmente insatisfactorio	0	0.0%
Insatisfactorio	0	0.0%
Indiferente	8	3.6%
Satisfactorio	89	39.6%
Totalmente satisfactorio	128	56.9%
N	225	100.0%

Nota. Elaboración propia.

Figura 51

Resultados generales de los primeros nueve ítems



Nota. Elaboración propia.

A partir del gráfico mostrado, tenemos que, de la totalidad de respuestas, se presenta una total satisfacción del 56,9%, así como un 39,6% de satisfacción, y un 3,6% indicó haberse sentido indiferente. Los datos mostrados indicarían que a las estudiantes les ha parecido pertinente y adecuada la aplicación de las sesiones de clase, no manifiestan disconformidad e indican que las actividades les resultaron motivadoras.

10. ¿Consideras que el tema abordado en sesiones virtuales ha resultado motivador? O ¿consideras que sería mejor abordar el tema en sesiones presenciales?, ¿Por qué?

El ítem presentado pretende conocer la preferencia que tienen las estudiantes respecto al tipo de educación que prefieren recibir, virtual o presencial, en relación al área de matemática. A continuación, en la tabla 34 se presentan los resultados.

Tabla 34

Resultados ítem 10 respecto al trabajo realizado de manera virtual

Estudiante	Contexto de preferencia	Respuestas	Análisis
E8		"sería mejor las clases presenciales"	En las celdas de la parte izquierda se han transcrito parte de las respuestas proporcionadas por las estudiantes. En tales respuestas predomina la idea de que es mejor que las clases se lleven de manera presencial, para ello se justifican indicando que:
E5		"es mejor llevar las clases de manera presencial"	
E14	P	"sí fue motivador, pero creo que en sesiones presenciales sería más favorable",	Se puede entender mejor al profesor El trabajo virtual se dificulta por la conexión a Internet.
E7	R	"sí me han resultado motivadoras, pero me gustaría abordar el tema presencialmente"	
E6	E	"de manera presencial se entendería mejor, ya que a veces la mala conexión no lo permite"	Así se logra entender de una mejor manera, estar más concentrada y prestar más atención.
E10	N	"yo considero presencial"	
	C		En presencial todo se entiende mejor.
	I		
	A		
	L		

E11		"yo creo que sería mejor las sesiones presenciales"	Cuando no sabemos usar las herramientas, en clases presenciales se puede preguntar en cualquier momento al profesor. Cabe destacar que tienen comentarios positivos a las clases virtuales, pero en general perciben que les ayuda más la presencialidad. Sin duda, regresar a la presencialidad con las ideas aprendidas respecto a las herramientas virtuales les será de gran ayuda, además de que se puede trabajar en equipo y hay más interacción.
E14		"considero que de manera virtual fue motivador..., pero creo que presencial sería mucho mejor"	
E15		"sí, también sería bueno... que lo tomen en cuenta presencialmente".	
E1		"sí han sido motivadoras y entendibles"	El conjunto de respuestas colocadas en las celdas de la izquierda se relaciona con que las sesiones virtuales han sido motivadoras y entendibles. Hacen referencia a los recursos virtuales como elementos que potencian el aprendizaje, así mismo se menciona que les ha resultado útil trabajar en plataformas educativas. La motivación que generaba trabajar en un entorno virtual proporcionaba la oportunidad de aprender de manera eficaz.
E2		"sí, porque se utilizó recursos virtuales para que podamos entender mejor el tema"	
E3	V	"sí, porque nos resulta muy útil tanto el haber trabajado temas importantes, como el haber manejado plataformas educativas"	
E4	I	"sí, ya que así aprendemos mejor"	
E12	R	"... me da a entender muy bien y me motiva mucho"	
E9	T	"sí, ya que aprendíamos muchas cosas"	

Nota. Elaboración propia.

A partir de las respuestas emitidas por las estudiantes, se puede concluir que el uso de la tecnología en las sesiones de clase se muestra como un factor motivador para el aprendizaje. Sin embargo, debido a problemas de conexión a Internet que han tenido muchas de las estudiantes, se manifiesta un deseo de abordar las actividades de manera presencial. En general, los resultados son muy favorables debido a que las estudiantes manifiestan que la propuesta de las actividades les resultó motivadora, lo cual es algo muy importante para el aprendizaje.

Conclusiones

- Respecto al objetivo a) Identificar propuestas metodológicas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización.

Se identificaron diez propuestas metodológicas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico a través de procesos de generalización aplicando los siguientes criterios: objetivo de la investigación, teoría en la que se fundamenta, secuencia de actividades y resultados obtenidos. A partir de ellos se seleccionaron tres, “Procesos de generalización en situaciones asociadas a contextos algebraicos: una experiencia con estudiantes de grado séptimo de educación básica (11-13 años)” (PG2), “La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar” (PG6) y “Procesos de generalización en la iniciación al álgebra escolar: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo” (PG10).

- Respecto al objetivo b) Evaluar las actividades que las propuestas metodológicas presentan respecto a los procesos de generalización a la luz de las teorías de Mason, Graham, Pimm y Gower; y de Radford.

Las actividades propuestas en la PG2 y, las actividades 3, 4, 5, y 6 de la PG 10 cumplen con todas las fases propuestas por Mason et al. (1985): “Ver un patrón”, “Decir cuál es el patrón”, “Registrar un patrón” y “Prueba de validez de las fórmulas”. Así mismo, las propuestas PG2, PG6 y PG10 consideran las tres etapas de generalización de Radford: “Etapa de generalización fáctica”, “Etapa de generalización contextual” y “Etapa de generalización simbólica”. Así mismo, todas las propuestas desarrollan procesos de socialización, a través de explicaciones en pequeños grupos y exposiciones frente al aula. En la propuesta PG10 se evidenció una gran mejora de los estudiantes en relación con los procesos de generalización de patrones, trabajando la generalidad desde distintos contextos, tanto matemáticos (numéricos y geométricos), así como situaciones de la vida cotidiana. En la propuesta PG6 se destaca el uso del geoplano como material didáctico que permitió un mayor acercamiento a los patrones para llegar a una regla general.

- Respecto al objetivo c) Seleccionar y adaptar a un contexto de enseñanza virtual, actividades dirigidas al desarrollo del pensamiento algebraico a través de procesos de generalización, para aplicarlas en estudiantes de segundo grado de secundaria.

La propuesta seleccionada “La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar” (PG6), presenta seis actividades con la misma estructura, de las cuales se eligieron dos para ser adaptadas a un contexto virtual, siendo estas aplicadas posteriormente como un test, uno de

forma grupal y otro individual. Entre las adaptaciones realizadas se destacan la utilización del geoplano virtual en vez del geoplano en físico, presentar los test por medio de Google Sites, completar las tablas con ayuda de Excel, responder las preguntas por medio de Google Forms y el uso de Classroom para la entrega de los test. Por otro lado, durante el desarrollo de las sesiones y actividades se enfatizó en el uso de las fases propuestas por Mason et al. (1985), ya que resulta más completa respecto a las etapas propuestas por Radford, quien no propone validar la fórmula.

Respecto al objetivo d) Describir y analizar los resultados de los test desarrollados por las estudiantes y la aplicación de un cuestionario para determinar el efecto en su aprendizaje.

En el Test 1, desarrollado en grupo, el promedio de los puntajes obtenidos ha sido de 13.8, el 80% logró un nivel Regular en su desempeño (entre 11 a 15 puntos) y el 20% alcanzó un nivel Eficiente (entre 16 a 20 puntos). Si bien estos resultados nos brindan una idea del desarrollo del pensamiento algebraico de las estudiantes, también se debe tener en cuenta que no todas tienen el mismo desempeño en el grupo, no aprenden de la misma manera, ni brindan el mismo aporte. En el Test 2, el cual se realizó de forma individual, el promedio de los puntajes obtenidos ha sido de 14.5, el 53% de las estudiantes ha logrado un nivel Regular, el 40% un nivel Eficiente y un 7% un nivel Deficiente (entre 0 a 10 puntos). La variedad de los puntajes se debe a que cada estudiante tuvo su propia forma de desarrollar cada una de las fases del proceso de generalización, ya que no todas pudieron identificar las mismas regularidades, expresar el patrón con sus propias palabras, registrar y validar cada regla general. En resumen, se puede evidenciar que el efecto generado en las estudiantes ha sido positivo, la mayoría ha logrado cumplir con las fases del proceso de generalización, lo cual favorece el desarrollo del pensamiento algebraico.

Respecto a los resultados del cuestionario, la mayoría de las estudiantes ha manifestado que les ha resultado motivador trabajar con herramientas tecnológicas y consideran que se han cumplido con los objetivos trazados en las sesiones y que aquello que han aprendido les parece de gran utilidad. Sin embargo, algunas de las estudiantes manifiestan que dentro de un contexto de educación presencial habría una mayor comprensión, debido a las limitaciones que se presentan en un entorno virtual.

Recomendaciones.

- Plantear siempre una prueba diagnóstica que permita identificar las dificultades que presentan los estudiantes para tomarlas en consideración al diseñar y ejecutar las sesiones de aprendizaje.
- Para el diseño de las sesiones de aprendizaje, se recomienda plantear situaciones relacionadas al contexto del estudiante, ello favorece a la motivación y captación del interés de los estudiantes.
- Proponer actividades que desarrollen las cuatro fases de Mason et al. (1985), sobre todo la última fase referida a la validez de la fórmula. De este modo, se potencia en los estudiantes el desarrollo del pensamiento algebraico.
- Para desarrollar el pensamiento algebraico se sugiere promover que los estudiantes justifiquen sus respuestas, así se desarrollará la capacidad Argumentar las afirmaciones sobre las relaciones de cambio y equivalencia de la Competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
- Se recomienda a los docentes que quieran aplicar estas actividades que refuercen en sus estudiantes el uso de símbolos matemáticos y expresiones algebraicas, de tal manera que, al momento de registrar los patrones o reglas generales, no tengan mayor dificultad.
- Si bien las sesiones han sido adaptadas a un contexto de educación virtual, también se pueden aplicar de manera presencial empleando los recursos tecnológicos que se han utilizado.

Referencias

- Aguilar, F., y Chamba A. (2019). Reflexiones sobre la filosofía de la tecnología en los procesos educativos. *Conrado*, 15(70), 109-119.
<https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/1113>
- Albrechtsen, A., y Giannini, S. (31 de marzo de 2020). *El cierre de escuelas debido a la Covid-19 en todo el mundo afectará más a las niñas*. <https://es.unesco.org/news/cierre-escuelas-debido-covid-19-todo-mundo-afectara-mas-ninas>
- Alfonso, I. (2003). La educación a distancia. *ACIMED*, 11(1), 3-4.
http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1024-94352003000100002#cargo
- Almendro, J. (2014). *Utilización de la hoja de cálculo Excel como recurso didáctico para facilitar el aprendizaje de las matemáticas de 3º de ESO*. [Tesis de Maestría, Universidad Internacional de la Rioja]. <https://reunir.unir.net/handle/123456789/2320>
- Angulo, P., y Avila, L. (2010). *Desarrollo de la creatividad de los niños en la etapa escolar* [tesis de licenciatura, Universidad de Cuenca].
<http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/2315>
- Apaza, J., y Gamarra, J. (2018). Influencia del Uso de Herramientas Algebraicas y Geométricas del Geogebra Para Mejorar el Aprendizaje en la Competencia Resuelve Problemas de Regularidad Equivalencia y Cambio, en Estudiantes del Tercer Grado de Secundaria de la IE Cornejo Acosta, Cayma—2017. <http://tesis.ucsm.edu.pe/repositorio/handle/UCSM/8470>
- Arriaga, G. (2008). *Procesos de generalización con estudiantes de 1º y 2º de secundaria de una escuela pública del Distrito Federal: una propuesta de enseñanza*. [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. <http://200.23.113.59:8080/jspui/handle/123456789/745>
- Avendaño, J. (2017). *Modelo de formación virtual para ofrecer educación informal para las Pymes ubicadas en la ciudad de Bogotá DC* [Tesis de Maestría, Universidad La Gran Colombia]. https://repository.ugc.edu.co/bitstream/handle/11396/3991/Modelo_formaci%C3%B3n_virtual_educaci%C3%B3n_informal.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Butto, C. y Rivera, T. (7-11 de noviembre de 2011). *La generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo*, *Educación y Conocimientos Disciplinarios* [Sesión de conferencia]. XI Congreso Nacional de Investigación Educativa, Ajusco, México.
- Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(1), 113-148. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol16/vol16-1/vol16-1-5.pdf>

- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22(3), 55-86. ISSN: 2448-8089. <http://somidem.com.mx/revista/vol22-3/>
- Calpa, A. y Martínez, D. (2017). Influencia del Smartphone en los procesos de aprendizaje y enseñanza. *Suma de Negocios*, 8(17), 11-18. [10.1016/j.sumneg.2017.01.001](https://doi.org/10.1016/j.sumneg.2017.01.001)
- Canales, M. (2003). *Propuesta de programa de televisión formativo para niños: Análisis de audiencia y producción* [tesis de licenciatura, Universidad de las Américas Puebla]. http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lco/canales_r_m/
- Castellanos, A. (2021). Ventajas y retos de la virtualidad en la educación. *Revista Seres y Saberes*, 9(1), 70-74. <http://revistas.ut.edu.co/index.php/SyS/article/view/2431>
- Castellanos, M. y Obando, J. (08-10 de octubre de 2009). *Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico* [Sesión de conferencia]. 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.
- Caycho, E. (2019). Incentivando el uso de un entorno virtual en el área de matemática para los alumnos de primer grado de secundaria de una institución educativa privada de Lima. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/15698>
- CONTENTLAB. (21 de diciembre del 2020). Aprendizaje autónomo: El gran desafío de la educación remota. El Comercio. <https://especial.elcomercio.pe/comprometidosconlaeducacion/aprendizaje-autonomo-el-gran-desafio-de-la-educacion-remota/>
- Cornejo, D., Villalobos, E., Tabares, J., Soledad, J., y Rodríguez, J. (2013). El uso de geogebra en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden, aplicaciones en el de vaciado de tanques. *Pistas educativas*, 33(104), 214-237. <https://docplayer.es/94537002-El-uso-de-geogebra-en-la-solucion-de-ecuaciones-diferenciales-de-primer-orden-aplicaciones-en-el-de-vaciado-de-tanques.html>
- Criollo, V., Calderón, A., Ruiz, L., y Tuesta, J. (2021). Rol del Perú frente a la educación virtual y nuevos desafíos por la pandemia Covid-19. *Maestro y sociedad*, 18(3), 1815-4867. <https://maestroysociedad.uo.edu.cu/index.php/MyS/article/view/5397>
- Crisol, E., Herrera, L., y Montes, R. (2020). Educación virtual para todos: una revisión sistemática. *Education in the knowledge society: EKS*. <https://doi.org/10.14201/eks.20327>
- De Aguilera, J. (2015). *La televisión educativa ante el derecho español* [Tesis de doctorado, Universidad Complutense de Madrid]. <https://eprints.ucm.es/id/eprint/54332/1/5327075734.pdf>

- Durante, E., y Prieto, I. (2007). La evolución de la radio y las implicaciones tecno-socio-culturales en la audiencia: De oyente a usuario en la recepción del mensaje. *Espacio abierto*, 16(2), 313-329. <https://www.redalyc.org/pdf/122/12216208.pdf>
- Echevarria, H. (2016). *Los diseños de investigación cuantitativa en psicología y educación*. Córdoba-Argentina: Universidad Nacional de Río Cuarto. <http://www.unirioeditora.com.ar/wp-content/uploads/2018/10/978-987-688-166-1.pdf>
- Felip, S. (2016). *Desarrollo del razonamiento algebraico en alumnos de educación primaria* [Tesis de Licenciatura, Universitat Jaume I]. Repositorio Institucional UJI. http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/161973/TFG_2015_felipS.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Ferroni, E. y Velásquez, H. y Chavarro, L. (2013). Educación a distancia para el salto académico (Parte I). *Poliantea*, 2 (4). 7-34. <https://doi.org/10.15765/plnt.v2i4.331>
- Flores, A. (1997). Soluciones geométricas a problemas de Máximos y Mínimos. https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.ba3e4d76e3ed79a6.666c6f7265732e706466.pdf
- Gagliardi, V. (2020). Desafíos educativos en tiempos de pandemia. *Questión*. <https://perio.unlp.edu.ar/ojs/index.php/question/article/view/5990>
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (3), 11-44. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6890>
- García, J. (2018). *Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de tareas estructurales de números racionales* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional. <https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/12308>
- García, J.; Segovia, I. ; Lupiáñez, J. (2014). El uso de las letras como fuente de errores de estudiantes universitarios en la resolución de tareas algebraicas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1545-1566. <https://www.scielo.br/j/bolema/>
- García, L. (1999). Historia de la educación a distancia. <http://62.204.194.45/fez/eserv/bibliuned:20191/historia.pdf>
- García, L. (2017). Educación a distancia y virtual: calidad, disrupción, aprendizajes adaptativo y móvil. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 20 (2), 9-25. <https://doi.org/10.5944/ried.20.2.18737>
- García, L. (2021). COVID-19 y educación a distancia digital: preconfinamiento, confinamiento y posconfinamiento. *RIED. Revista Iberoamericana De Educación a Distancia*. <https://doi.org/10.5944/ried.24.1.28080>

- Garzozí, R., Garzozí, Y., Solórzano, V. y Sáenz, C. (2020). Ventajas y Desventajas de la relación enseñanza-aprendizaje en la educación virtual. *Revista CONAIC*, 7(3), 58-62. <https://doi.org/10.32671/terc.v7i3.69>
- Godino, J. (1991). *Hacia una teoría de la didáctica de la matemática*. Madrid: Síntesis
- Gómez, A. y Escobar, F. (2021). EDUCACIÓN VIRTUAL EN TIEMPOS DE PANDEMIA: INCREMENTO DE LA DESIGUALDAD SOCIAL EN EL PERÚ. *Chakiñan, Revista De Ciencias Sociales Y Humanidades*, (15), 152–165. <https://doi.org/10.37135/chk.002.15.10>
- Gonzáles, A., y Velandia, A. (2017). *Procesos de generalización en la iniciación al álgebra escolar: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo* [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/6381>
- Gonzáles, E. (2012). *Del Lenguaje natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el Planteamiento y Resolución de problemas*. [Tesis de Maestría, Universidad de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10835>
- Great Schools. (19 de junio del 2018). *¿Por qué es tan importante el álgebra?* Great Schools. Recuperado el 20 de mayo del 2020. <https://www.greatschools.org/gk/articles/por-que-es-tan-importante-el-algebra/>
- Grupo de iniciativas para la calidad de la Educación Superior. (23 de junio del 2020). El aprendizaje autónomo en la educación a distancia. <https://gicesperu.org/articulo.php?id=etPvn0RLmRoE/o8MWZiBkg==>
- Guaypatin, O., Salazar, J., y Mendoza, M. (2017). Una aproximación a la aplicación de las tics en la didáctica de la matemática. *Revista Ciencias Sociales y Económicas - UTEQ*, 1(2), 65-83. <https://revistas.uteq.edu.ec/index.php/csye/article/view/258>
- Gustin, J., y Pantón, T. (2020). Emergencia de los medios semióticos en estudiantes de grado séptimo al desarrollar tareas de generalización de patrones. *Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(60), 38-56. <http://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/94>
- Gutiérrez, V. y Valenzuela, J. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación Matemática*, 30(2), 41-72. <https://doi.org/10.24844/em3002.03>
- Guzmán, C. y Ávila, Y. (2020). *Procesos de generalización en situaciones asociadas a contextos algebraicos: una experiencia con estudiantes de grado séptimo de educación básica (11-13 años)*. [Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/22912>
- Harasim, L.; Hiltz, S., Turoff, M. y Teles, L. (2000). REDES DE APRENDIZAJE. GUÍA PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE EN RED. Gedisa.

- Instituto Peruano de Economía. (5 de julio del 2021). Efectos del COVID 19 en la educación. <https://www.ipe.org.pe/portal/efectos-del-covid-19-en-la-educacion/>
- Izquierdo, J., y de Lorenzo, R. (2017). Evolución de la enseñanza universitaria a distancia, irrupción de las nuevas tecnologías y su potencial como herramienta de inclusión social. *Revista española del tercer sector*. (37), 131-158. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6460267>
- Luque, U., y Mena, E. (2016). *La utilidad del geoplano cuadrado en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en el proceso de generalización del álgebra escolar*. [Trabajo de fin de grado, universidad pedagógica nacional]. <http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/153>
- Malagón, R.; Torres, L., y Valoyes, E. (2002). *Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar*. *Revista EMA*, 7(2), 227-246. <http://funes.uniandes.edu.co/1536/>
- Márquez, M. (2019). ¿Por qué importa aprender álgebra elemental? *DOCERE*, (20), 25-28. <https://doi.org/10.33064/2019docere202200>
- Martín, R. (2005). Las nuevas tecnologías en la educación. http://www.telecentros.info/pdfs/05_06_05_tec_edu.pdf
- Martínez, C. (2008). La educación a distancia: sus características y necesidad en la educación actual. <http://disde.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/1824>
- Ministerio de Educación del Perú. (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú. (2017). Programa Curricular de Educación Secundaria. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf>
- Morales, P. (2012). Tipos de variables y sus implicaciones en el diseño de una investigación. Madrid: Universidad Pontificia Comillas. <http://web.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/Variables.pdf>
- Navas, A. y Molina, H. (2016). *Dificultades y errores en el proceso de generalización de una secuencia gráfico-numérica* [Tesis de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UNP. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/148>
- NTCM (1989). *Principios para la acción*. [Resumen Ejecutivo]. Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas
- Olaya, L. (2014). *Procesos de generalización en situaciones que involucran secuencias numéricas y geométricas una propuesta didáctica*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/54419>
- Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años* [Tesis de doctorado, Universidad de la Laguna]. Repositorio Institucional RIULL. <http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21205>

- Palarea, M. y Socas M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (16), 91-98.
- Patiño, A. (2020). *Por una educación a distancia de calidad*. <https://files.pucp.education/departamento/educacion/2020/09/11202611/alberto-patino-por-una-educacion-a-distancia-de-calidad.pdf>
- Pitarque, A. (2016). Métodos y diseños de investigación. http://www.conductitlan.org.mx/04_Investigacion/Materiales/A_Dise%C3%B1os%20de%20investigacion.pdf
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70. DOI:10.1207/S15327833MTL0501_02
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*. 12(1), 1-19. Doi: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14794800903569741>
- Real Academia Española. (2022). *Adaptación*. En Diccionario de la lengua Española (edición de tricentenario). Consultado el 16 de mayo de 2023. <https://dle.rae.es/adaptar>
- Ricoy, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Revista do Centro de Educação*, 31(1), 11-22. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=117117257002>
- Ríos, N. (2020). *Desarrollo de procesos de Generalización por medio de un videojuego*. [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/12451>
- Rivera, P., Alonso, C., y Sancho, J. (2017). Desde la educación a distancia al e-Learning: emergencia, evolución y consolidación. *Revista educación y tecnología*, 1(10), 1-13. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6148504>
- Rojas, C., y Brango, J. (2016). *Aplicación para dispositivos móviles Android: una propuesta para el desarrollo de habilidades en el proceso de generalización*. [Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/149>
- Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*, 2, 688–694. <https://doi.org/10.14483/23448350.7753>
- Rojas, P. y Vergel, R. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://die.udistrital.edu.co/publicaciones/algebra_escolar_pensamiento_algebraico_aportes_para_trabajo_aula
- Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74. <http://hdl.handle.net/10481/4441>

- Rugeles, P., Mora, B. y Metaute, P. (2015). El rol del estudiante en los ambientes educativos mediados por las TIC. *Revista Lasallista de Investigación*, 12(2), 132-138. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=69542291025>
- Ruiz, M. (2016). *Diseño de una propuesta metodológica que contribuya al lenguaje algebraico, su precisión e importancia para la enseñanza-aprendizaje del álgebra* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/59655>
- Sánchez, C. (2020). Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas durante la pandemia COVID-19. *Hamut'ay*, 7 (2), 46-57. <http://revistas.uap.edu.pe/ojs/index.php/HAMUT/article/view/2132>
- Sánchez, L., Crespo, G., Aguilar, R., Bueno, F., Aleixandre, R. y Valderrama, J. (2015). *Los adolescentes y las tecnologías de la información y la comunicación (TIC)*. Ayuntamiento de Valencia. <https://digital.csic.es/handle/10261/132633>
- Sánchez, Z. (2019). Errores y dificultades en la resolución de problemas algebraicos. *Eco Matemático*, 10(2), 23-34. <https://doi.org/10.22463/17948231.2590>
- Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 12(1), 122-142. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41030367007>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. Bolea (Eds), *Investigación en educación matemática* (pp.19-52). SEIEM. <http://funes.uniandes.edu.co/1247/>
- Stojanovic, L. (2009). Tecnologías de comunicación e información en educación: Referentes para el análisis de entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje. *Revista de Investigación*, 32(65), 159-197. <https://www.revistas.upel.edu.ve/index.php/revinvest/article/view/3842/1903>
- Suárez, P., Vélez, M., y Londoño, D. (2018). Las herramientas y recursos digitales para mejorar los niveles de literacidad y el rendimiento académico de los estudiantes de primaria. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (54), 184-198. <https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/990/1438>
- Trespalacios, A. y Paijón, J. (2019). *Efecto del uso del geoplano en el desarrollo del pensamiento geométrico, en relación con la aprehensión conceptual y operacional de polígonos* [Tesis de Maestría, Universidad de la Costa]. Repositorio Universidad de la Costa. <https://hdl.handle.net/11323/5146>
- Velásquez, Ó. (2019). El nuevo rol del docente virtual para entornos virtuales de aprendizaje "El caso CEIPA". *Lupa Empresarial*. <https://revistas.ceipa.edu.co/index.php/lupa/article/view/303/268>

Zambrano, W., Medina, V., y Martín, A. (2010). Nuevo rol del profesor y del estudiante en la educación virtual. *Dialéctica: Revista de investigación*, (26), 51-62.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3340102>



Apéndices



Apéndice A. Hallazgos del documento PG2

La investigación PG2 desarrollada por Guzmán y Ávila en el año 2020, Procesos de generalización en situaciones asociadas a contextos algebraicos: una experiencia con estudiantes de grado séptimo de educación básica (11-13 años), se presentó como tesis de Maestría, en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. El objetivo del trabajo fue describir los procesos de generalización realizados por los estudiantes de 11 a 13 años mediados por el reconocimiento de patrones y sus representaciones, en situaciones asociadas a contextos algebraicos. En ella se plantean cinco tareas, las mismas que se analizarán tomando como base las teorías de Mason et al. (1985) y Radford; finalmente se señala la viabilidad y limitaciones de la propuesta de Guzmán y Ávila

En esta sección se presentan cada una de las cinco tareas planteadas en la investigación de Guzmán y Ávila, que son analizadas a la luz de las fases o etapas que consideran las teorías de Mason et al. (1985) y Radford respectivamente. El análisis se presenta en tablas donde se describen con detalle la secuencia seguida en el desarrollo de las tareas según las teorías mencionadas.

Tarea 1: Esta tarea (véase figura A1) se plantea para describir el uso que los estudiantes le dan a la letra al momento de hacer la representación simbólica, identificando además la manera en que la operan.

Figura A1

Secuencia de círculos de la tarea 1

En clase de Matemáticas Paula Alejandra presenta la siguiente secuencia:

Fig	1	2	3	4
-----	---	---	---	---

- ✓ Extiende la secuencia hasta la figura 6:
 - ¿Cuántos círculos hay en la figura 5?
 - ¿Cuántos círculos hay en la figura 6?
- ✓ ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos de la figura 15 sin necesidad de dibujar la secuencia? Explica
- ✓ Santiago tiene una figura de esta secuencia, donde usó exactamente 19 círculos, ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta
- ✓ ¿Existe alguna figura que tenga una cantidad par de círculos? Explica
- ✓ Un amigo tuyo que no asistió a la clase te llama en horas de la tarde para adelantar lo realizado en clase. Explica cómo procedes para hallar la cantidad de puntos para cualquier posición.
- ✓ ¿Cómo podrías hallar la cantidad de puntos para una posición m ?

Nota. Extraído de Guzmán y Ávila (2020)

El análisis de la tarea 1 se presenta en la siguiente tabla A1:

Tabla A1*Análisis de la tarea 1 del PG2*

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
a) Ver un patrón: En esta fase los estudiantes trabajan individualmente observando la secuencia de figuras que se les plantea. Luego de ello los estudiantes deben responder la primera pregunta: ¿Cuántos círculos hay en las figuras 5 y 6?, de este modo deben encontrar el número de círculos de las dos figuras siguientes. b) Decir un patrón: En esta fase los estudiantes trabajan en equipos para que cada uno socialice y comunique a sus compañeros lo trabajado de manera individual. La finalidad es que en este proceso cada estudiante sea consciente de los aciertos o errores que ha tenido y el de sus compañeros. c) Registrar un patrón: Esta fase se evidencia en función de las preguntas planteadas en la tarea, por ejemplo, en la segunda pregunta donde se le pide al estudiante que sin necesidad de dibujar toda la secuencia encuentre el número de círculos que conforma la figura 15. De esta manera se le induce a buscar otra forma de llegar a la respuesta que le solicitan; lo mismo sucede con la quinta pregunta, donde se les pide hallar la cantidad de círculos para cualquier posición. Se observa cómo poco a poco se le plantean cuestiones que lo llevarán a definir una fórmula; finalmente en la última pregunta, concretamente se le pide encontrar la cantidad de círculos para la posición m, es decir, se le pide la generalidad del patrón. Sin embargo, se observa que los estudiantes no llegan a plantear la fórmula haciendo uso de la letra m. Se advierte que los estudiantes trabajan con la variable x, con la que tienen más familiaridad; y en la mayoría de los casos los estudiantes hacen una combinación de lenguaje natural y expresiones aritméticas. d) Prueba de validez de la fórmula: Esta fase se trabaja en equipo, donde, luego de revisar los errores y aciertos, se llega a un consenso entre todos los integrantes y se prueba la validez de la fórmula. Se ha podido observar que el orden en que se realiza la tarea es diferente a la secuencia en que el autor propone las fases; sin embargo, el mismo autor afirma que la secuencia puede variar de acuerdo con las	a) Etapa de la generalización fáctica: Esta primera etapa se evidencia en la primera pregunta, cuando el estudiante hace uso de un registro aritmético para hallar el número de círculos que conforman las figuras 5 y 6. Es decir, trabajan con un lenguaje aritmético para resolver casos particulares, manipulando casi sin sospecharlo el patrón que hay entre una figura y otra. b) Etapa de la generalización contextual: En esta etapa los estudiantes dan un paso más en la generalización, y se hace visible en la producción escrita que realizan los estudiantes, respondiendo a la tercera pregunta donde se les pide que expliquen si hay alguna manera de encontrar el número de círculos de la figura 15 sin necesidad de dibujarla, así mismo en la quinta pregunta donde se les pide que expliquen si existe alguna figura que tenga una cantidad par de círculos. Evidentemente la tercera pregunta implica que el estudiante razone en torno a la regularidad existente en las figuras. Por otro lado, es importante aclarar que los estudiantes para su explicación usaron expresiones aritméticas específicas, combinadas con lenguaje natural, por ejemplo: “Sumando de dos en dos porque en el primero hay uno y después hay 3 porque se le suman 2”, esto acompañado de expresiones aritméticas como: $7 = 13$ (intentando decir que en la figura 7 hay 13 círculos, donde además se nota un mal uso del signo igual) c) Etapa de la generalización simbólica: Esta etapa se evidencia concretamente en las respuestas a las dos últimas preguntas, en las cuáles se pide al estudiante que explique cómo hallar el número de círculos en cualquier posición y que determine la cantidad de círculos para la posición m. Evidentemente el estudiante deberá, a través de palabras y expresiones algebraicas, representar mediante una fórmula las regularidades que ha observado. La investigación ha recogido respuestas como: “Multiplica por dos la posición y réstale el número 1 es decir: $2 \times \text{posición} - 1 =$

necesidades de los estudiantes.

cantidad", cabe resaltar que los estudiantes de alguna manera intentan plantear la generalidad del patrón, utilizando un lenguaje alfanumérico.

Como se puede observar, la propuesta de Radford es mucho más visible en esta tarea, respetando el orden de la secuencia que el autor plantea.

Es conveniente señalar que en la tarea planteada se utilizan dos términos para referirse a los mismos elementos de la figura: "círculo" y "punto", lo que puede generar algunos inconvenientes en su desarrollo, por ello se sugiere hacer esta corrección y evitar posibles confusiones en los estudiantes.

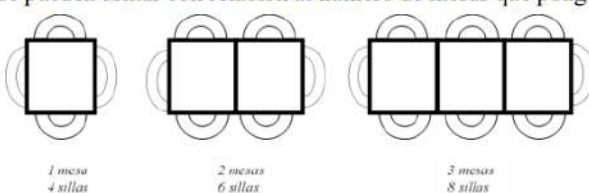
Nota. Elaboración propia

Tarea 2: La finalidad es visualizar los procesos de generalización que los estudiantes siguen, pero sin inducir el uso de la letra a través de alguna indicación (véase figura A2).

Figura A2

Secuencia de mesas de la tarea 2

En un restaurante solo se pueden organizar las mesas en una fila alargada. Averigua el número máximo de personas que se pueden sentar con relación al número de mesas que pongamos.



1 mesa
4 sillas

2 mesas
6 sillas

3 mesas
8 sillas

- ✓ ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
- ✓ ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 7 mesas? ¿y alrededor de 18 mesas?

Explica en este recuadro el procedimiento que utilizaste para solucionar las dos preguntas anteriores.

- ✓ Si en un cumpleaños han invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntas en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
- ✓ Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Nota. Extraído de Guzmán y Ávila (2020)

El análisis de la tarea 2 se presenta en la siguiente tabla A2:

Tabla A2

Análisis de la tarea 2 del PG2

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford

Esta tarea fue planteada tomando como punto de referencia la tarea 1, a partir de la cual se deduce que el uso de la letra fue muy forzado. Con esta actividad se pretende que los estudiantes usen la letra de forma natural. También debe entenderse que en cada tarea siempre hay un primer momento donde los estudiantes trabajan individualmente toda la tarea, pero habrá un segundo momento donde se agruparán con los mismos compañeros de la actividad anterior; adicionalmente, en esta tarea se plantea que los estudiantes se agrupen con otros compañeros para enriquecer lo que han trabajado.

a) Ver un patrón: Esta fase se pone en evidencia de manera explícita en la observación de la secuencia que se presenta en la tarea, además el estudiante en esa acción intentará ver lo que pasa entre una figura y otra, es decir, intentará percibir una regularidad. Esta actividad de observación minuciosa se inducirá a partir de la realización de las dos primeras preguntas, donde se le indica al estudiante que dibuje 4 mesas y sus correspondientes sillas, y se le pide el número de sillas que hay que colocar alrededor de 7 y 18 mesas.

b) Decir un patrón: Esta fase se manifiesta al explicar en el recuadro el procedimiento que ha seguido el estudiante para solucionar las dos primeras preguntas; también al responder a la tercera pregunta, donde debe encontrar el número de mesas que necesita cuando tiene 42 sillas, todo esto explicando el procedimiento que ha seguido para hallar el resultado. Así mismo, esta fase también se evidencia en dos ocasiones más, la primera cuando los estudiantes se reúnen con el mismo grupo con el que trabajaron en la tarea anterior; y la segunda cuando se reagrupa con compañeros diferentes. En ambas reuniones cada estudiante tiene que explicar a los demás integrantes cómo ha desarrollado la tarea dos.

c) Registrar un patrón: Esta fase se muestra en la última pregunta, donde el estudiante deberá plantear con sus propias palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas. Sin embargo, no se les exige que aquella regla sea expresada en un lenguaje algebraico, se pretende que esta forma sea planteada por el estudiante de manera voluntaria.

d) Prueba de validez de la fórmula: Esta fase se evidencia cuando los estudiantes trabajan de manera grupal, ya que es allí donde estos presentan lo que han trabajado individualmente y con ayuda de sus compañeros se hacen visibles los errores y aciertos que tienen. Además, esto se refuerza en la segunda agrupación de estudiantes donde cada integrante

a) Etapa de la generalización fáctica: Esta primera etapa se desarrolla en buena medida al plantear un ejemplo con objetos concretos de su realidad (sillas y mesas), de alguna manera esto le permite al estudiante visualizar mentalmente los objetos y proyectar la secuencia en función de ese pensamiento. Además, las dos primeras preguntas posibilitan que haya una proyección en la secuencia y a la vez los estudiantes acompañen este proceso con dibujos de la secuencia y con razonamientos aritméticos.

b) Etapa de la generalización contextual: Esta etapa se manifiesta en la explicación que los estudiantes proporcionan en el recuadro y en la tercera pregunta, al explicar la manera en la que respondieron las dos primeras preguntas y al explicar la forma en que resolvieron la tercera pregunta. Aquí los estudiantes intentan expresar a través de palabras las operaciones que han realizado, y donde evidentemente se darán cuenta que existe algo en común en la secuencia; en otras palabras, percibirán las características de la regularidad. Por ejemplo: “El número se multiplica por (2) y al final se le suma (2)”. Como se puede observar, la afirmación ya contiene explícitamente la regularidad existente en la secuencia.

c) Etapa de la generalización simbólica: Esta etapa no es exigida a los estudiantes, pero sí se evidencia en algunas de las respuestas de la última pregunta, en la que se le pide al estudiante que exprese con sus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas. En este sentido, no se exige al estudiante que exprese algebraicamente la regla, sino que lo haga de manera verbal, por lo que se pensaría que ninguno de los estudiantes exprese la regla de manera simbólica. Sin embargo, sí había estudiantes que de manera excepcional y voluntaria plantearon la regla de la siguiente forma: “ $(n \times 2) + 2 = m$ ”, donde “ n ” era el número de mesas y “ m ” el número de sillas. Pero la mayoría hacía afirmaciones como: “Siempre al número de mesas sumarle (1) después al resultado se le multiplicará por (2) y ese será nuestro resultado”, en las que se puede ver que hay mayor certeza en lo que afirman, a comparación de la tarea anterior.

Aun así, es necesario aclarar que algunos estudiantes todavía se quedan en procedimientos aritméticos, sin proponer una regla general para la secuencia de figuras. Pero un aspecto a destacar como provechoso son los trabajos en equipo,

comparte por segunda vez sus respuestas y también con ayuda de los nuevos integrantes del grupo extraen algunas conclusiones. Por ejemplo, en la segunda agrupación los estudiantes perciben que se han planteado diferentes formas de representar los procesos para llegar a la solución, pero todas son válidas y conducen a una respuesta correcta.

De acuerdo con el análisis hecho, se puede afirmar que la realización de la tarea tiene una secuencia que no va precisamente en función de lo que proponen Mason et al. (1985), aunque sí cumple con todas sus fases, solo que siguen un orden diferente, e incluso regresan sobre algunas fases para un mejor desarrollo del proceso de generalización.

En esta tarea se busca que los estudiantes tengan argumentos más sólidos al momento de compartir las respuestas con sus compañeros.

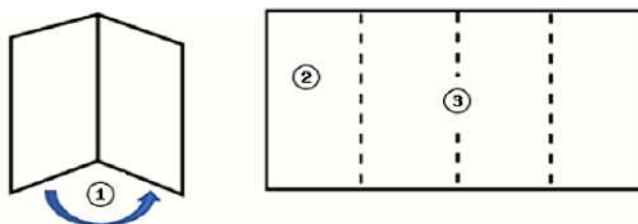
donde se pretende explicar a todos los compañeros los avances que se ha tenido y corregir posibles errores que se hayan cometido.

Nota. Elaboración propia.

Tarea 3. La finalidad es evidenciar las formas en que los estudiantes llegan a expresar la generalidad de un patrón a través de la relación de cantidades (véase figura A3).

Figura A3

Secuencia de dobleces de la tarea 3



1. ¿Cuántas marcas creen que aparecen si se hacen 3 dobleces?
2. ¿Cuántas marcas creen que aparecen si se hacen 7 dobleces? Expliquen claramente la manera como procedieron
3. ¿Cuántas marcas creen que aparecen si se hacen 15 dobleces? Expliquen claramente la manera como procedieron
4. ¿Cómo realizan el proceso para encontrar el número de marcas después de hacer 100 dobleces?
5. Expliquen con sus palabras una regla que relacione el número de dobleces con el número de marcas.

Nota. Extraído de Guzmán y Ávila (2020)

El análisis de la tarea 3 se presenta en la siguiente tabla A3:

Tabla A3

Análisis de la tarea 3 del PG2

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford

En esta actividad se cambia un poco la metodología con la que se ha venido trabajando, por lo que los estudiantes desde el principio de la clase se reúnen en grupos para que puedan observar las instrucciones y tener contacto con el docente. Sin embargo, inicialmente hacen un análisis de la secuencia por sí mismos. Además, los estudiantes no llevan un registro de los procesos que hacen individualmente, pero sí lo hacen cuando trabajan en grupo.

a) Ver un patrón: Esta fase se cumple cuando los estudiantes manipulan dos tiras de papel para observar las marcas que aparecen al realizar dobleces a la hoja. Sin embargo, estos dobleces no son hechos de manera aleatoria, sino siguiendo las instrucciones de la tarea, en este caso al dar respuesta a las tres primeras preguntas, donde se le pide que encuentre el número de marcas que aparecen al realizar 3, 7 y 15 dobleces. Se entiende que 3 y 7 dobleces sí se pueden hacer sin mucha dificultad, pero 15 ya parece algo más complejo de lograr, por lo que se ven obligados a relacionar la cantidad de dobleces con la cantidad de marcas y el número de partes en que se divide la hoja, operando aritméticamente para percibir el patrón.

b) Decir un patrón: Esta fase se desarrolla en el trabajo en equipo, donde todos comparten sus descubrimientos, recordando los procesos que hicieron al inicio. Además, esta fase se hace más visible al dar la explicación en la segunda y tercera pregunta, donde los estudiantes expresan con sus propias palabras lo que han observado en la resolución de las preguntas.

c) Registrar un patrón: Esta fase se manifiesta en el trabajo en equipo, donde los estudiantes proponen por iniciativa propia la representación de los valores numéricos en una tabla, para hacer más visible la regularidad que hay al hacer dobleces consecutivos, promoviendo la reflexión y recurrencia sobre esos valores. Pero, la pregunta cinco, la última, es la que los induce a buscar la regla que relacione el número de dobleces con el número de marcas, explicando verbalmente y quizás presentando expresiones exclusivamente simbólicas si el estudiante puede.

d) Prueba de validez de la fórmula: En esta tarea no hay un momento en el que los estudiantes comprueben la validez de la fórmula, pero se entiende que, en la tabla, elaborada en la fase anterior, van colocando valores y a la vez evaluando si estos cumplían con la fórmula planteada. Esta tarea se desarrolló de acuerdo con la secuencia propuesta por Mason et al. (1985), sin embargo, no se plantea una

a) Etapa de la generalización fáctica: Esta etapa se desarrolla al inicio de la sesión, donde los estudiantes tienen a la mano dos tiras de papel, el cual pueden manipular para encontrar el número de marcas que dejan los dobleces que se vayan haciendo. Además, se desarrolla dando respuesta a la primera pregunta, donde se les pide el número de marcas que aparecen al hacer 3 dobleces, lo cual les permite una manipulación del papel con sentido, no sólo a través de movimientos con las manos y observación, sino también con el registro aritmético del número de marcas que aparecen en relación con el número de dobleces que se hacen.

b) Etapa de la generalización contextual: Esta etapa se evidencia cuando los estudiantes trabajan en las preguntas 2,3 y 4, donde se les pide el número de marcas que hay en 7,15 y 100 dobleces, con la respectiva explicación de los procesos empleados para llegar a la respuesta. Se entiende que mientras hacen este ejercicio, los estudiantes podrán percibir la regularidad de la secuencia, pero con dificultad, por ello, ingeniosamente estos decidieron organizar los datos numéricos en una tabla, lo que les permitió tener un panorama amplio de la secuencia. Todo este proceso se realizó en grupo, por lo que estaban en constante comunicación con sus compañeros verbalizando todo el proceso.

c) Etapa de la generalización simbólica: Esta etapa nuevamente se ve descuidada, debido a que en la pregunta 5, se le pide al estudiante que explique una regla que relacione el número de dobleces con el número de marcas, más no que lo expresen algebraicamente. Sin embargo, la intención de plantear así la pregunta es porque se pretende que el estudiante naturalmente utilice un lenguaje algebraico sin ningún tipo de exigencia, que comprenda que es mucho mejor expresar las generalidades matemáticas de esa forma.

Como se puede observar, la última etapa no se desarrolla de manera explícita a través de la resolución de la tarea, sino que se deja a libertad del estudiante. La secuencia seguida si funciona, al menos con algunos de los estudiantes que ya van adoptando los procesos de generalización.

pregunta o actividad que promueva la última fase, donde se prueba la validez de la fórmula.

Nota. Elaboración propia.

Tarea 4. La finalidad es describir el proceso empleado para hallar y representar la generalidad de un patrón partiendo de lo concreto hacia lo abstracto (véase figura A4 y figura A5).

Figura A4

Secuencia de estrechón de manos de la tarea 4 individual

1. Imagina que te reúnes con 3 compañeros más, conformando un grupo de 4 estudiantes, cada uno de los integrantes debe dar un SOLO estrechón de manos con los otros integrantes: ¿Cuántos estrechones de mano se dieron en total las 4 personas? Explica detalladamente cómo hiciste para hallar el resultado.
2. Si el grupo no fuese de 4 persona sino de 7 personas, ¿cuántos estrechones de mano se dieron en total las 7 personas?
3. Explica si encuentras una relación entre el número de personas y la cantidad de estrechones de mano que se dan.
4. Si en una reunión hay 40 amigos, en la que cada quién saludó a los demás con un estrechón de manos, ¿cuántos estrechones de manos se dieron las personas que asistieron a dicha reunión? Utiliza la relación que encontraste en el punto anterior.

Nota. Extraído de Guzmán y Ávila (2020)

Figura A5

Secuencia de estrechón de manos de la tarea 4 grupal

1. Reúnete con 3 compañeros más, conformando un grupo de 4 estudiantes, cada uno de los integrantes debe dar un SOLO estrechón de manos con los otros integrantes: ¿Cuántos estrechones de mano se dieron en total las 4 personas? Explica detalladamente cómo hiciste para hallar el resultado
2. Si el grupo no fuese de 4 personas sino de 9 personas, ¿cuántos estrechones de mano se darán en total las 9 personas?
3. Explica si encuentras una relación entre el número de personas y la cantidad de estrechones de mano que se dan.
4. Si en una reunión hay 40 amigos, en la que cada quién saludó a los demás con un estrechón de manos, ¿cuántos estrechones de manos se dieron las personas que asistieron a dicha reunión? Utiliza la relación que encontraste en el punto anterior.

Nota. Extraído de Guzmán y Ávila (2020)

El análisis de la tarea 4 se presenta en la siguiente tabla A4:

Tabla A4

Análisis de la tarea 4 del PG2

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
a) Ver un patrón: En el desarrollo de la tarea se le muestra al estudiante una situación problemática que debe resolver de manera individual. En el proceso, el estudiante tiene que razonar para construir una representación simbólica y gráfica del problema, así mismo, se observa que hay estudiantes que representan los datos con dibujos para identificar el patrón. Por ejemplo: los estudiantes dibujan 4 personas y usan flechas para referirse al estrechón de	a) Etapa de la generalización fáctica: Esta fase se evidencia en el trabajo individual. El estudiante encuentra el patrón entre una expresión aritmética y la verbalización, asociados a una sumatoria descendente de términos en cada estrechón de manos, “3 + 2 + 1 + 0”. En otro ejemplo, se evidencia que el 25% de los estudiantes emplean una relación entre el dibujo y el valor específico de la situación, tratando de encontrar el patrón, el

manos, donde consideran que por cada dos personas hay un saludo, el cual solo se puede dar una vez en la misma reunión, a partir de ello van registrando los estrechones de mano que se dan. Este registro permite observar las regularidades, validando los argumentos teóricos de Mason et al. (1985) en esta primera fase.

b) Decir un patrón: En esta fase, los estudiantes trabajan en grupos para que todos puedan socializar con sus compañeros y comunicar lo que han desarrollado de manera individual. El fin de esta tarea grupal es que los estudiantes la experimenten de manera real, dándose los estrechones de mano entre ellos, de modo que, cada estudiante sea consciente de los aciertos o errores que ha tenido. Efectivamente, los hallazgos obtenidos de manera individual fueron cambiando de orientación, permitiendo a los estudiantes discutir ideas hasta encontrar la regularidad.

c) Registrar un patrón: Esta fase se desarrolla en grupos, la actividad se complementa con una entrevista, donde se plantean preguntas que conllevan al estudiante a cuestionarse lo que observó en la primera y segunda fase. Por ejemplo, cuando se le pide al estudiante que exprese la regularidad con un símbolo alfanumérico, un grupo expresa numéricamente la forma para encontrar la cantidad de estrechones de manos, dándose cuenta de que los números van disminuyendo de 1 en 1 en cada saludo. Otro grupo, por medio de construcción de tablas, encuentran una expresión algebraica correspondiente a la generalidad del patrón, tal como se muestra en la siguiente expresión: $4 \times \frac{3}{2} = \# \text{ estrechones}$.

d) Prueba de validez de la fórmula: En esta fase, tiene una gran importancia la interacción entre los estudiantes y la docente, quien pide que expliquen cómo pueden comprobar que funcionan en otros casos similares, para ello la profesora cambia los datos, ahora son 8 personas, y dos de los grupos muestran una explicación de los términos para comprobar su validez. En la explicación se puede observar una representación algebraica que corresponde a una regla general y la representación aritmética que implica la validación de dicha fórmula. Los grupos conjuntamente con la profesora logran, mediante un consenso, expresar la siguiente generalidad algebraica, $n \times m = y, \frac{y}{2} = s$ donde; “n” corresponde al número de personas, “m” es el número anterior de personas, “y” es el total de personas y “s” representa el número de estrechones

cual expresan de manera verbal y con expresiones aritméticas.

b) Etapa de la generalización contextual: Esta etapa se identifica en torno a la etapa uno, donde realizan un registro simbólico figurado, dibujando personas ubicadas de manera circular, registrando el número de estrechones realizados por cada persona, en este caso, se logra percibir el patrón, lo expresa, pero no logra representar la regularidad con símbolos alfanuméricos. Otro ejemplo se muestra, cuando se pregunta sobre la relación entre el número de personas y la cantidad de estrechones de mano, donde el estudiante percibe el patrón y la regularidad con la palabra “va disminuyendo uno” a lo cual va sumando los estrechones de mano de manera descendente, así el estudiante va reconociendo algunas características de la regularidad y emplea palabras claves, con el fin de generalizarla.

c) Etapa de la generalización simbólica: Esta etapa se desarrolla en grupos, tomando como referente las características y palabras clave registradas en la etapa 1 y 2. Aquí los estudiantes reemplazan las palabras clave por símbolos alfanuméricos, logrando registrar la regularidad. Ejemplo, se evidencia un registro numérico y algebraico, en el que los estudiantes otorgan a cada letra utilizada una función y significado propio de la regularidad, llegando así a representar y generalizar algebraicamente el patrón, $(p - 1) \times \frac{p}{2} = \# \text{ estrechones}$, donde “p” representa el número de personas.

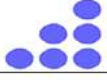
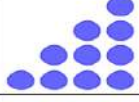
de mano.

Nota. Elaboración propia.

Tarea 5. El objetivo es observar cómo los estudiantes representan y relacionan la generalidad del patrón, con el patrón que se obtuvo en la tarea anterior (véase figura A6).

Figura A6

Secuencia de puntos de la tarea 5

Observa la siguiente tabla:						
	Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5	...
Configuración de puntos						...
1. ¿Cuántos puntos tiene la posición 30? Describe detalladamente la manera como llegaste a la solución y la configuración de puntos en dicha posición. 2. Describe la configuración y su respectiva posición cuando el total de puntos es 55 3. ¿Encuentras alguna relación entre la cantidad de puntos, la posición y la configuración de puntos?						

Nota. Extraído de Guzmán y Ávila (2020)

El análisis de la tarea 5 se presenta en la tabla A5:

Tabla A5

Análisis de la tarea 5 del PG2

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
a) Ver un patrón: En esta primera fase, los estudiantes desarrollan la tarea de manera individual, observan que esta tarea tiene una similitud con la anterior, ya que realizan el mismo proceso inductivo para hallar una expresión alfanumérica, además hacen una relación entre tres variables: la posición, la configuración y la cantidad de puntos. Se presenta una tabla con una secuencia de puntos, donde se pide que encuentren la cantidad de puntos en la posición 30. Frente a ello, los estudiantes realizan dibujos y tablas para encontrar la regularidad del patrón, por ejemplo, uno de los estudiantes observa la figura y se da cuenta que va creciendo, logrando señalar la configuración de puntos de manera ascendente. b) Decir un patrón: En esta fase se evidencia un razonamiento por parte de los estudiantes más minucioso, donde van describiendo lo que observan; y para reforzar este análisis hay que considerar la experiencia del desarrollo de la actividad anterior, lo que se complementa con la primera pregunta que a la vez permite al estudiante a partir de la identificación de la regularidad matemática para llegar a la representación simbólica, en donde se le pide que describan la manera de hallar la cantidad total de puntos en la posición 30. Con ello se logra evidenciar que perciben el patrón y lo expresan de manera aritmética, además describen la relación de esta actividad con la tarea anterior, así como la diferencia en cuanto al registro de datos, pues en la tarea anterior el registro de datos decrece conforme aumentan los términos y en ésta, crece.	a) Etapa de la generalización fáctica: En esta etapa se evidencia que los estudiantes a partir de la observación detenida de los puntos en cada posición de la tabla, llegan a encontrar una similitud con la tarea anterior. Se destacan enunciados como “este problema es similar al anterior; es una suma, solo que en este caso va aumentando secuencialmente” en otras palabras, utilizan el lenguaje aritmético para resolver situaciones específicas y manipular los patrones entre la posición y el total de puntos tal como se evidenció en el desarrollo de la actividad anterior. b) Etapa de la generalización contextual: En esta etapa se muestra el trabajo en grupo, la contextualización se realiza apoyándose en el desarrollo de la tarea anterior, se comparten las características de las regularidades identificadas, los datos extraídos se van registrando en tablas, con una pequeña variación en cuanto al orden de los

c) Registrar un patrón: Esta fase se evidencia a partir del trabajo en grupos, donde uno de los grupos logra registrar un patrón similar a la tarea anterior, en este solo cambia el orden de los términos; sin embargo, las representaciones de las regularidades no son las mismas en ambas tareas ya que se distinguen en cuanto a la representación aritmética. Se pide a los estudiantes que hallen la cantidad de puntos en cualquier posición, generando que el estudiante vuelva a reflexionar sobre sus ideas permitiendo captar algunas regularidades que conlleva al registro del patrón. Por ejemplo, un estudiante describe que deben considerar la cantidad anterior que es " $n - 1 = m$ " y se multiplica por la posición que se desea trabajar " n ", a ese resultado se divide por 2, logrando así tener el total de puntos.

Cabe resaltar que en esta tarea no se describe detalladamente el análisis debido a que se toma como referencia el desarrollo de la tarea anterior para encontrar y expresar la secuencia de puntos en cada posición de la tabla.

d) Prueba de validez de la fórmula: En esta fase se evidencia que el estudiante logra validar la representación algebraica de la generalidad mediante ejemplos concretos, por ejemplo, un grupo de estudiantes logra construir la representación algebraica de la regularidad en donde las expresiones se van comprobando de manera aritmética " $(m \times n)/2 = y$ ". En esta etapa se muestra el trabajo arduo de los estudiantes para explicar la representación algebraica por medio de la identificación de la regularidad en la secuencia de patrones, el análisis operatorio de las expresiones aritméticas y algebraicas, y la designación simbólica de esa generalidad representada por las siguientes expresiones " $n - 1 = y$ ", " $y \times n = m$ ", " $\frac{m}{z} = p$ ", " $p - 1 = z$ ", donde; $n =$ posición, $y =$ posición anterior, $p =$ número de puntos, $z =$ los puntos que aumenta respecto de la posición anterior.

factores, de esta manera, un grupo logra representar el patrón en una forma particular realizando sumas, una generalización aritmética, "Coger la cantidad anterior que es $n - 1 = m$ y se multiplica". En esta etapa los estudiantes evidencian un avance positivo en la generalización, haciéndose visible en la producción escrita.

c) Etapa de la generalización simbólica: Esta etapa se evidencia a partir de la revisión de las tareas uno y dos, donde se sugiere que los estudiantes reflexionen sobre sus avances en el desarrollo del proceso de generalización descritos en la tarea anterior, para describir la representación algebraica del patrón. Los estudiantes representan algebraicamente las irregularidades encontradas en cada posición del conjunto de puntos permitiéndoles comprobar con expresiones aritméticas el patrón, de esta forma logran encontrar la relación entre la cantidad de puntos, la posición y la configuración de punto. Finalmente llegan a representar la generalidad mediante la siguiente expresión algebraica, " $n - 1 = y$ ", " $y \times n = m$ ", " $\frac{m}{z} = p$ ", " $p - 1 = z$ ", donde; " n " = posición, " y " = posición anterior, " p " = números de puntos, " z " = los puntos que aumenta a la posición anterior.

Nota. Elaboración propia

Viabilidad y limitaciones de la propuesta.

Los autores de la propuesta afirman que esta fue muy provechosa para el desarrollo integral de los estudiantes, no solo en el proceso de generalización, que es un aspecto propio del área de matemática, sino también ha permitido el desarrollo de habilidades y destrezas que se pueden extender a otras áreas; por ejemplo: la manera de argumentar, el trabajo en equipo asumiendo responsabilidades y roles dentro del grupo. Al centrarse concretamente en los procesos de generalización, concluyen que fue muy acertado dividir cada tarea en dos momentos, de manera individual y posteriormente un trabajo grupal. A través del trabajo individual, los estudiantes tienen un primer contacto con las diversas tareas poniendo en marcha habilidades propias de cada uno,

asimismo, recurren a sus conocimientos previos para encontrar las respuestas a las preguntas de cada tarea; luego, el trabajo grupal les permitió discutir en torno a sus respuestas individuales, reconociendo similitudes y diferencias en sus producciones.

Por otro lado, los autores describen algunas de las limitaciones que tuvo la propuesta durante su aplicación; en primer lugar el tiempo, que no permitió que se desarrollara con calma las actividades, recomiendan que sean sesiones de 2 horas; en segundo lugar el alcance del docente, que no podía atender a todos y debido a eso algunos solo se copiaban las respuestas; y recomiendan que siempre se haga una prueba diagnóstica para conocer las dificultades que tienen los estudiantes para tratar de evitarlas.

De acuerdo al análisis de la propuesta en función de las teorías de Mason et al. (1985) y Radford, se puede afirmar que no siempre se respeta el orden de la secuencia de Mason et al. (1985), por ejemplo, en las tareas 1 y 2, se pasa de la cuarta a la segunda fase para recapitular sobre lo ya trabajado individualmente, y comentarlo en el grupo para ponerlo en discusión. Sin embargo, eso no ocurre en la teoría de Radford, donde siempre se sigue el orden de las etapas que propone. Es necesario aclarar que, aunque en las tareas 1 y 2 no se sigue la secuencia que plantea Mason et al. (1985), el mismo Mason menciona que no hay problema en variar la secuencia, lo importante es atender las necesidades de los estudiantes.

Por otro lado, con respecto a las fases o etapas que no se desarrollan en las tareas, casi siempre las más afectadas son la última fase de Mason et al. (1985) (tarea 3) y la última etapa de Radford (tarea 2 y 3), las cuales se desarrollan de manera implícita en el trabajo grupal, pero no se les plantea un enunciado en la tarea que haga efectivo su cumplimiento; es decir los estudiantes las desarrollan de manera natural y sin necesidad de que se les exija.

Por último, hay que recalcar que la secuencia es muy completa y permite un desarrollo escalonado de los procesos de generalización, pasando de cálculos de patrones sencillos, con operaciones de suma, resta y multiplicación, a cálculos cada vez más complejos, como la potenciación. Aun así, hay que realizar algunas correcciones en las tareas que faciliten la resolución de los problemas por parte de los estudiantes, por ejemplo: unificar términos al referirse a los mismos elementos de la secuencia (caso de la tarea 1), siempre representar a través de una figura o forma la secuencia de la tarea (caso de la tarea 4) y también incluir en todas las tareas dos apartados adicionales, uno que solicite la expresión algebraica de la fórmula que los estudiantes plantean y otro apartado que solicite la comprobación de aquella fórmula.

Apéndice B. Hallazgos del documento PG10

La investigación PG10 desarrollada por Gonzáles y Velandia en el año 2017, titulada “Procesos de generalización en la iniciación al álgebra escolar: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo (13 y 14 años)” se presentó como tesis de Maestría, en la universidad Distrital Francisco José de Caldas. El objetivo del trabajo fue describir y analizar la implementación de una experiencia de aula relacionada con la iniciación al álgebra escolar, desarrollada con estudiantes de grado octavo (entre 13 y 14 años) de una institución escolar del municipio de Mosquera (Colombia). En ella se plantean ocho actividades, las mismas que se analizarán tomando como base las teorías de Mason et al. (1985) y Radford; finalmente se explica la viabilidad y limitaciones de la propuesta de Gonzáles y Velandia.

Análisis en función de las teorías de Mason et al. (1985) y Radford.

En esta sección se presentan cada una de las ocho actividades planteadas en la investigación de Gonzáles y Velandia, que son analizadas a la luz de las fases o etapas que consideran las teorías de Mason et al. (1985) y Radford respectivamente. El análisis se ha organizado en tablas donde se describen con detalle la secuencia seguida en el desarrollo de las actividades según las teorías mencionadas.

Actividad 1: Tiene como finalidad posibilitar un trabajo de generalización para hacer énfasis en un proceso que lleve a la expresión escrita desde las etapas iniciales del “ver” y “decir” propuestas por Mason et al. (1985), para ello se utiliza una secuencia gráfica, denominada “secuencia de cuados” (véase figura B1). Sin embargo, el docente también induce la etapa de registrar de manera forzada.

Figura B1

Secuencia de figuras de la actividad 1

Tenga en cuenta la siguiente secuencia de figuras



Figura 1



Figura 2



Figura 3



Figura 4

1. Dibuja la siguiente figura
2. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 9?
3. ¿Cuál será la figura que tendrá 52 cuadros?
4. ¿Cuántos cuadros tendrá la figura 100?
5. Explique el procedimiento que le permitiría hallar el total de cuadros en cualquier número de figura
6. Escriba una expresión que represente la cantidad de cuadritos para la figura n

Nota. Extraído de Gonzáles y Velandia (2017)

El análisis de la actividad 1 se presenta en la siguiente tabla B1:

Tabla B1*Análisis de la actividad 1 del PG10*

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
a) Ver un patrón: En esta fase los estudiantes trabajan individualmente, observando la secuencia de figuras que se les plantea. Luego de ello estos responden las cuatro primeras preguntas, donde se evidencia la fase del “ver”, por ejemplo, en la pregunta 1, los estudiantes deben dibujar la figura de la posición 5, para ello cada uno deberán “observar” lo que está pasando de una figura a otra. b) Decir un patrón: Esta fase se evidencia cuando los estudiantes trabajan de forma grupal (3 o 4 integrantes) con la finalidad de responder la pregunta 5, en la que se les pide a los estudiantes “explicar” el procedimiento que realizaron para resolver las preguntas anteriores, es decir, discuten con la finalidad de encontrar una relación entre el número de cuadritos y el número de la figura y con ello describir el patrón. Es importante mencionar que no se evidenció esta fase en la mayoría de los estudiantes, esto pudo deberse a que no estaban familiarizados con esta nueva metodología de enseñanza. c) Registrar un patrón: Esta fase se evidencia en las preguntas 2, 3, 4 y 6; los estudiantes deberán encontrar la cantidad de cuadritos tanto en la posición 9 (pregunta 2) como en la 100 (pregunta 4), con estos ya se les está induciendo a que dejen de dibujar la secuencia de cuadritos y definan un patrón. Con respecto a la pregunta 3, ya no se les pide a los estudiantes hallar la cantidad de cuadros de una posición específica, sino que ahora se les pide hallar la figura (posición) a partir de la cantidad de cuadritos que tiene esta. Con respecto a la pregunta 6, se pide a los estudiantes “escribir” una “expresión” que represente la cantidad de cuadritos para la figura n, es aquí donde ya se les presenta una variable con la finalidad de registrar un patrón haciendo uso de la letra “n”. Sin embargo, se evidenció que la mayoría de los estudiantes no definió el patrón y los pocos que lo logran (4 estudiantes) representaron un patrón, pero haciendo uso de un lenguaje “intermedio”, es decir, utilizando lenguaje natural y simbólico. d) Prueba de validez de la fórmula: No se evidencia	a) Etapa de la generalización fáctica: Esta etapa se evidencia en las preguntas 1 y 2, en la que los estudiantes a través de dibujos pretenden encontrar en número de cuadritos tanto de la figura 5 como de la 9; por ejemplo, en la investigación, algunos estudiantes indicaron que para encontrar las figuras siguientes solamente se tenía que aumentar dos cuadritos a la última figura que ya se tenía definida. b) Etapa de la generalización contextual: En esta etapa los estudiantes deben buscar relaciones entre los elementos de la situación que se les presenta, ello se evidencia en la pregunta 4 en la que se pide encontrar el número de cuadritos en la posición 100, es claro que se induce al estudiante a dejar de dibujar la secuencia de figuras y tratar de definir una regla general para encontrar el número de cuadritos en cualquier posición; lo mismo pasa en la pregunta 3, pero ya no se le pide al estudiante hallar el número de cuadritos de una figura determinada, sino que se les pide encontrar la posición de la figura o el número de la figura a partir de la cantidad de cuadritos. c) Etapa de la generalización simbólica: Esta etapa se evidencia en las dos últimas preguntas en donde ya se pide al estudiante explicar una regla general para encontrar el número de cuadritos de cualquier figura ubicada en la posición “n”. Es evidente que el estudiante deberá expresar esta regla a través de una fórmula utilizando palabras y expresiones algebraicas. Es importante indicar que esta actividad estaba planteada en base a las fases de “ver” y “decir” que proponen Mason et al. (1985), pero también se evidencia las etapas que propone Radford.

esta fase, pues esta actividad se planteó con la finalidad de desarrollar las fases del ver y decir un patrón.

Cabe mencionar que esta actividad tenía como objetivo enfocarse en las fases de Ver y Decir el patrón, sin embargo, durante la sesión de clase el docente se enfocó en desarrollar la pregunta 6 y forzó a que el estudiante exprese o escriba el patrón (registrar) usando una fórmula o lenguaje algebraico, perdiendo de vista el objetivo inicial.

Nota. Elaboración propia.

Actividad 2: Esta actividad tiene como finalidad retomar la fase del “ver”, ya que los estudiantes no fueron capaces de cumplirla en la actividad anterior, para ello se le presenta a los estudiantes dos sucesiones numéricas, en las que deberán encontrar el patrón (véase figura B2).

Figura B2

Secuencia numérica de la actividad 2

Secuencia del 2	Secuencia del 3
Observa la siguiente secuencia: 2, 4, 6, 8, ... Responde las siguientes preguntas: 1. ¿cuál es el siguiente número? 2. ¿cuál es el número de la posición 7? 3. ¿cuál es el número de la posición 15? 4. ¿cuál es el número de la posición 100? 5. Escribe una expresión o fórmula para encontrar el número de cualquier posición.	Observa la siguiente secuencia: 3, 6, 9, 12, ... Responde las siguientes preguntas: 1. ¿cuál es el siguiente número? 2. ¿cuál es el número de la posición 7? 3. ¿cuál es el número de la posición 15? 4. ¿cuál es el número de la posición 100? 5. Escribe una expresión o fórmula para encontrar el número de cualquier posición.

Nota. Extraído de Gonzáles y Velandia (2017)

El análisis de la actividad 2 se presenta en la tabla B2:

Tabla B2

Análisis de la actividad 2 del PG10

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
Esta actividad no estaba pensada para ser desarrollada en la propuesta, sin embargo, en la actividad anterior se evidenció que muchos de los estudiantes no lograron describir el patrón con un lenguaje algebraico, por otra parte, se forzó a que el estudiante realice esta acción perdiéndose de vista el objetivo principal que era de ver y decir el patrón. Es por ello que se aplicó esta segunda actividad de forma emergente con la finalidad de reforzar la verbalización del patrón, en palabras de Mason et al. (1985), el	Como se mencionó, esta actividad se planteó con la finalidad de reforzar el “ver” y “decir” que son propias de Mason et al. (1985). Sin embargo, se evidencia que la secuencia de actividades también logra cumplir con las etapas que propone Radford. a) Generalización fáctica: Esta etapa se evidencia en las preguntas 1 y 2, en las que los estudiantes observan y se dan cuenta de qué es lo que pasa de un número a otro en ambas secuencias. En algunas

“decir” de los estudiantes.

a) Ver un patrón: Para esta fase los estudiantes trabajan individualmente, observando las secuencias numéricas que se les plantea. Luego de ello estos responden a las dos primeras preguntas, en las que deberán encontrar el número de las posiciones 5 y 7; se espera que estos respondan después de observar lo que está pasando de un número a otro.

b) Decir un patrón: No hay una pregunta precisa en la actividad que evidencie esta etapa, sin embargo, se muestra de manera implícita cuando los estudiantes trabajan de manera grupal, es allí donde el docente se dio cuenta que estos discutían acerca de las estrategias que utilizaron para encontrar los números de las posiciones ya mencionadas. Es importante mencionar que a diferencia de la actividad 1, ahora sí se evidenció el cumplimiento de esta fase, pues los estudiantes en su mayoría discutían acerca de las estrategias que emplearon para la resolución de las preguntas.

c) Registrar un patrón: Esta fase se evidencia en las preguntas 3 y 4, en la que se induce a los estudiantes a definir un patrón para encontrar el número correspondiente a posiciones más alejadas. Además, en la pregunta 5 ya se les pide que “escriban” una “expresión” o “fórmula” para encontrar el número de “cualquier posición”, es decir, se está induciendo a los estudiantes a reflexionar sobre sus ideas para utilizar variables, símbolos y números con la finalidad de “escribir” una regla general en caso de querer encontrar el número en una posición “ n ” determinada.

Si bien esta actividad tenía como objetivo retomar el ver y decir un patrón, se evidenció que hubo un gran avance por parte de los estudiantes, es por ello que se decidió continuar con esta fase en donde se mostró grandes resultados; a pesar de que, hubo un pequeño porcentaje que presentó complicaciones en esta fase.

d) Prueba de validez de la fórmula: No se evidencia esa fase, pues esta actividad estaba enfocada en retomar las fases del ver y decir el patrón, y al mostrar un gran progreso, se decidió continuar con la tercera fase.

de las respuestas que se indican en la investigación, se evidencia que los estudiantes suman de 2 en 2 en la secuencia dos y de 3 en 3 en la secuencia tres. De esta manera, no se presentaron mayores complicaciones para el cumplimiento de esta etapa.

b) Generalización contextual: Esta etapa se evidencia en las preguntas 3 y 4 de ambas secuencias numéricas, pues se pide a los estudiantes hallar el número que se encuentra en las posiciones 15 y 100. Como se observa, son posiciones muy alejadas de la posición 7 que fue la última que los estudiantes lograron encontrar. Por esta razón, los estudiantes ya empiezan a establecer ideas y reglas generales para evitar sumar de 2 en 2 o de 3 en 3, y de esta manera encontrar el número en posiciones más alejadas.

c) Generalización simbólica: Esta etapa se evidencia en la pregunta 5, en donde se pide a los estudiantes “escribir” una explicación de cómo se puede encontrar el número para cualquier posición; es decir, los estudiantes deben expresar sus ideas contextuales en una “fórmula” empleando palabras o expresiones algebraicas.

Nota. Elaboración propia

Actividad 3. Esta actividad se planteó con la finalidad de continuar con el proceso de “registrar” guiando a los estudiantes hacia el uso del lenguaje escrito. Para ello, el docente presenta la actividad denominada “En el mercado de mi barrio” (véase figura B3).

Figura B3

Actividad “En el mercado de mi barrio”



Doña Rosa, la dueña del mercado, ha elaborado unas tablas que le dicen cuánto cobrar por determinados números de frutas vendidas. Por ejemplo para la venta de manzanas tiene:

Número de Manzanas	Valor a cobrar (\$)
1	300
2	600
3	900
4	1200
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

1. Escriba en la anterior tabla los valores a pagar por 9, 10 y 20 manzanas.
2. ¿Qué hacemos para calcular el valor a cobrar por un número cualquiera de manzanas? Escriba en el espacio siguiente:
3. ¿Qué números se tendría en la tabla anterior si el precio de una manzana fuera de \$350?
4. ¿Qué cálculo debe hacer doña Rosa, para determinar el valor a cobrar a las personas que compren cierto número de manzanas y determinado número de bananos?

Nota. Extraído de Gonzáles y Velandia (2017)

El análisis de la actividad 3 se presenta en la siguiente tabla B3:

Tabla B3

Análisis de la actividad 3 del PG10

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
Al mostrar progreso en la actividad 2, se planteó esta nueva actividad, enfocada en aquel porcentaje de estudiantes que presentó complicaciones en la fase de “registrar el patrón”.	Esta actividad tuvo como objetivo retomar la fase del “registrar el patrón” de Mason et al. (1985). Sin embargo, en la secuencia de actividades, también se evidencia el cumplimiento de las etapas de Radford.
a) Ver un patrón: En esta fase los estudiantes trabajan individualmente, observando las secuencias numéricas del valor a cobrar por la venta de manzanas. Luego de ello se responde la pregunta 1, donde se evidencia esta fase del “ver”, pues los estudiantes a partir de la observación deberán calcular el valor obtenido por la venta de 9, 10 y 20 manzanas, teniendo en cuenta lo que ocurre de un valor a otro.	a) Etapa de la generalización fáctica: Esta etapa se evidencia en la misma metodología en la cual está planteada la actividad, pues se presenta una situación muy relacionada al contexto de los estudiantes “el mercado de mi barrio”, además en la pregunta 1 y 3, se induce a que éstos encuentren el valor por la venta de una cierta cantidad de manzanas teniendo en cuenta su precio. Es evidente que se trabaja con objetos concretos (frutas), no directamente, pero si se hace referencia a ello.
b) Decir un patrón: Al igual que en la actividad anterior, no se presenta una pregunta en la que se evidencie esta fase, sin embargo, se muestra cuando los estudiantes trabajan de manera grupal,	b) Etapa de la generalización contextual: Como se mencionó, hubo un momento en el que los

percibiéndose que discuten acerca de sus observaciones y estrategias que utilizaron para responder a la pregunta 1.

c) Registrar un patrón: Esta etapa se evidencia en las preguntas 2 y 4. Con respecto a la pregunta 2, se les pide a los estudiantes que escriban un patrón que permita calcular el valor a cobrar por “cualquier número de manzanas vendidas”; con ello se busca que el estudiante establezca una variable y escriba una regla general. Con respecto a la pregunta 4, se les pide a los estudiantes calcular el valor a cobrar por cierto número de manzanas y bananos vendidos; es decir, se busca establecer un solo patrón para encontrar el valor a cobrar, tanto por la venta de manzanas y bananos juntos. Además, deben hacer uso de otra variable para representar a los bananos.

d) Prueba de validez de la fórmula: Esta etapa se evidencia en el trabajo grupal, donde los estudiantes responden a la pregunta 3, en la que van a hacer uso de la regla general o patrón que dedujeron en la fase anterior para calcular el valor a cobrar por cada número de manzanas expresadas en la tabla de la actividad, pero tomando en cuenta el nuevo precio (\$350).

estudiantes trabajaron grupalmente, es allí donde se evidencia esta etapa, donde los estudiantes dialogan y discuten acerca de las estrategias que cada uno utilizó para responder a las preguntas anteriores.

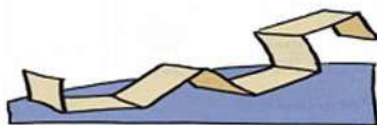
c) Etapa de la generalización simbólica: Esta etapa se evidencia en la pregunta 2, donde el estudiante debe organizar sus ideas y establecer una regla general o “fórmula” la cual le permita encontrar el valor para cualquier cantidad de manzanas vendidas. Además, en la pregunta 4, se pide a los estudiantes establecer una fórmula que le permita no solo calcular el valor de cualquier cantidad de manzanas vendidas, sino que se le pide establecer otra “fórmula” o regla general para calcular el valor a cobrar por la venta tanto de manzanas y bananos vendidos. Es decir, unir dos “fórmulas” en una.

Nota. Elaboración propia

Actividad 4: Esta actividad tiene como propósito continuar y reforzar las habilidades relacionadas con las fases del “ver”, “decir” y “registrar” mediante los procesos de generalización, en este caso se utiliza un material concreto, que el estudiante manipula según las indicaciones y observa lo que pasa (véase figura B4).

Figura B4

Doblez de la tira de papel de la actividad 4



- ❖ Toma la tira de papel y dóblala por la mitad, uniendo los dos extremos de la tira realizando la marca respectiva. Al desdoblar la tira de papel observarás que ésta queda dividida en dos partes de igual forma y tamaño.
- ❖ Ahora realiza dos veces consecutivas la acción anterior, es decir, dóblala por la mitad uniendo los extremos y a continuación dobla otra vez por la mitad. Sin desdoblar la tira de papel, haz una predicción del número de partes en las cuales quedó dividida la tira de papel.
- ❖ Desdobla la tira de papel completamente y comprueba si la predicción que realizaste fue acertada.
- ❖ Realiza el mismo ejercicio doblando 3, 4 y 5 veces la tira de papel y anota lo que vayas observando cada vez que hagas un nuevo doblez.
- ❖ ¿En cuántas partes quedará dividida la tira de papel si realizas la acción inicial siete veces consecutivas?
- ❖ Explica cómo podemos predecir el número total de espacios para 7, 8, ..., n pliegues.
- ❖ ¿En cuántas partes quedará dividida la tira de papel si realizas la acción inicial 100 veces consecutivas?
- ❖ Explica cómo encontraste la respuesta de la pregunta anterior.
- ❖ Encuentra una expresión o fórmula que te permita hallar el número de partes en que se divide la tira de papel después de realizar, de manera consecutiva, n veces la acción inicial.

Nota. Extraído de Gonzáles y Velandia (2017)

El análisis de la actividad 4 se presenta en la siguiente tabla B4:

Tabla B4

Análisis de la actividad 4 del PG10

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
Al mostrar un avance significativo en la actividad anterior, se planteó una nueva con la finalidad de continuar desarrollando las fases del ver, decir y registrar el patrón. a) Ver el patrón: Esta fase se evidencia en la cuarta y quinta indicación en la que los estudiantes trabajan individualmente, estos deberán doblar 3, 4 y 5 veces la tira de papel y anotar en cuántas partes quedó dividida la tira, luego, se les pregunta en cuántas partes quedó dividida la tira si se le dobla siete veces consecutivas; con ello se busca que los estudiantes observen y se den cuenta de lo que pasa cada vez que se dobla la tira. b) Decir cuál es el patrón: Esta fase se evidencia en la sexta indicación, donde se pide a los estudiantes que a partir de lo que pudieron observar en las indicaciones anteriores, expliquen a través de palabras cómo pueden predecir el número total de espacios para 7, 8, ..., "n" pliegues. Luego de ello, se pide a los estudiantes encontrar el número de partes que se	Como se mencionó, esta actividad estaba pensada para reforzar la etapa del ver, decir y registrar de Mason et al. (1985), utilizando un objeto concreto (la tira de papel) la cual le permite al estudiante manipular, señalar y observar. Claramente, también se evidencian las etapas de Radford para esta actividad. a) Etapa de la generalización fáctica: Esta etapa se manifiesta en las cuatro primeras indicaciones, en la que los estudiantes manipulan el objeto concreto, doblan por la mitad y unen los extremos una y otra vez, luego observan las divisiones e indican en cuántas partes se dividió la tira después de doblarla varias veces de forma consecutiva. b) Etapa de la generalización contextual: Esta etapa se evidencia en el trabajo grupal que realizaron los estudiantes, pues allí reunidos discutieron sus ideas y estrategias que emplearon para dar respuesta a las indicaciones anteriores. c) Etapa de la generalización simbólica: esta etapa

logran obtener al doblar 100 veces la tira de papel; después de esta indicación, nuevamente se evidencia la fase de “decir cuál es el patrón”, pues se le pide al estudiante explicar cómo encontró la respuesta a la indicación anterior.

c) Registrar el patrón: Esta fase se evidencia en la última indicación, donde se pide a los estudiantes que encuentren una “expresión” o “fórmula”, la cual les permita hallar el número de partes en las que se divide la tira de papel luego de doblar de manera consecutiva “ n ” veces. Con ello se busca que los estudiantes logren establecer una regla general utilizando variables, símbolos y números.

se evidencia a partir de la quinta indicación, donde se pide a los estudiantes doblar siete veces la tira de papel e indicar en cuántas partes quedó dividida, se induce entonces a que el estudiante deje de doblar la tira y establezca una regla general o “fórmula” que le permita encontrar el número de divisiones que se generan después de doblar una cierta cantidad de veces. Lo mismo se ve en la séptima indicación cuando se pide a los estudiantes encontrar la cantidad de partes que se generan después de dividir la tira 100 veces.

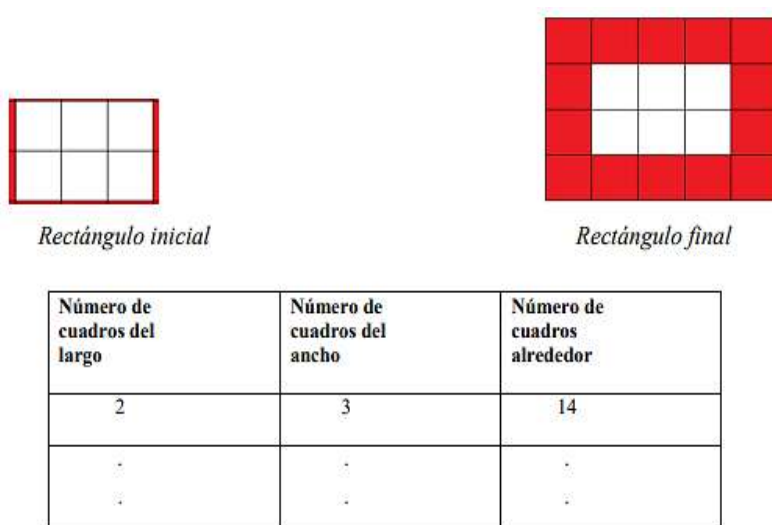
Con respecto a la sexta, y novena indicación, ya básicamente se le pide al estudiante establecer una regla general o “fórmula” empleando la variable “ n ”.

Nota. Elaboración propia

Actividad 5. Bordes. Esta actividad plantea como finalidad que el estudiante exprese la generalidad en lenguaje formal, intermedio o natural y reconozca las formas válidas de expresar un patrón, para posteriormente comprobarlo (véase figura B5).

Figura B5

Gráfica e indicaciones de la actividad 5



1. Hallar la cantidad de cuadros necesarios para rodear un rectángulo formado por 23 cuadros de largo y 30 de ancho
2. Hallar la cantidad de cuadros necesarios para rodear un rectángulo de 150 cuadros de largo y 15 de ancho
3. Completar la tabla realizada en clase con los rectángulos propuestos en el punto 1 y 2.
4. Escribir el proceso para encontrar el número de cuadros alrededor de cualquier rectángulo.
5. Escribir una expresión o fórmula que permita hallar el total de cuadros que se necesitan alrededor del rectángulo. Con cualquier ancho y cualquier largo.

Nota. Extraído de Gonzáles y Velandia (2017)

El análisis de la actividad 5 se presenta en la siguiente tabla B5:

Tabla B5*Análisis de la actividad 5 del PG10*

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
Debido a que la actividad anterior se propuso como una actividad alternativa al planteamiento inicial del conjunto de actividades, y en esta no se lograron los objetivos esperados en términos de la simbolización de la generalidad, se decidió diseñar la presente actividad con el fin de lograr lo que en la anterior no se pudo. a) Ver un patrón: En esta fase los estudiantes trabajan individualmente, al inicio se les pidió a ellos mismos dibujar un rectángulo de 2 cuadros de largo y 3 cuadros de ancho, para luego rodear el rectángulo con cuadros del mismo tamaño, pero de distinto color, planteándose la pregunta de cuántos cuadros necesitan para rodear dicho rectángulo. Sin embargo, los estudiantes tuvieron muchas dudas con respecto al dibujo, así que el profesor tuvo que realizarlo y mostrárselos, de esta forma a todos los estudiantes pudieron observar mejor la figura. Enseguida el profesor les pide dibujar tres rectángulos diferentes y organizar sus resultados en una tabla, esto con el fin de que los estudiantes respondan si es posible encontrar la cantidad de cuadros necesarios para rodear un rectángulo sin necesidad de hacer el dibujo. Pero al darse cuenta de que los estudiantes no lograron establecer relaciones, se les planteó otras preguntas. Las preguntas 1 y 2, piden hallar el número de cuadros necesarios para rodear un rectángulo con 23 cuadros de largo y 30 de ancho, y uno de 150 cuadros de largo y 15 de ancho. Con los resultados obtenidos se completa la tabla realizada en clase, tal cual lo indica la pregunta 3. b) Decir cuál es el patrón: Esta fase se evidencia cuando los estudiantes responden la pregunta 4, donde se les pide escribir el proceso para encontrar el número de cuadros alrededor de cualquier rectángulo, esto lo hacen utilizando el lenguaje natural para explicar cómo es que lograron obtener el número de cuadros. Por ejemplo, al número de cuadros de ancho se le suma 2 y al resultado se le multiplica por 2. Sin embargo, no comunican este patrón con sus compañeros, sino hasta el final de la actividad, por lo que se produce una pequeña variación en el orden de las fases.	a) Etapa de la generalización fáctica: En esta etapa se hizo evidente cómo los estudiantes necesitaron observar la figura del rectángulo compuesta por los cuadros, que en principio tenían que hacerlo ellos, pero el profesor tuvo que mostrárselos, para lograr tener una noción más clara, sin embargo, expresaron a través de gestos la dificultad que tenían para establecer relaciones. Debido a esto, el profesor les propuso crear tres rectángulos de distintos tamaños y colocar los resultados en una tabla, es a partir de aquí donde aparece un tratamiento aritmético, los estudiantes empiezan a utilizar números, lo cual les facilitará identificar alguna regularidad. Posteriormente se plantearon otras preguntas, de las cuales la 1, 2 y 3 proponen que el estudiante halle el número de cuadros necesarios para rodear un rectángulo con 23 cuadros de largo y 30 de ancho, y otro de 150 cuadros de largo y 15 de ancho. El trabajo continúa con el uso de números y registro de sus respuestas en una tabla. b) Etapa de la generalización contextual: En esta etapa los estudiantes responden la pregunta 4, en donde se les pide escribir el proceso seguido para encontrar el número de cuadros alrededor de cualquier rectángulo. Para ello, recurren a las tablas que obtuvieron en la fase anterior, notando así la regularidad de los datos obtenidos, de tal forma que establecen relaciones, formulando hipótesis sobre formas de expresión que los lleven a generalizar y hallar el número de cuadros que rodean un rectángulo con cualquier número de cuadros de largo y ancho. Los estudiantes proponen, por ejemplo: al número de cuadros de ancho se le suma 2 y al resultado se le multiplica por 2. Esto los llevará posteriormente a analizar dichas hipótesis y lograr establecer una regla general. c) Etapa de la generalización simbólica: En esta etapa los estudiantes ya evaluaron sus hipótesis, quedándose con aquella expresión más viable, logrando así definir la regla general, empleando letras y variables, que finalmente les ayudará a obtener la respuesta a cada una de sus preguntas. Por ejemplo, utilizan las letras A, para representar el ancho y L para representar el largo, quedando la fórmula:

c) Registrar un patrón: Esta fase es evidente cuando los estudiantes buscan responder a la pregunta 5, donde se les pide escribir una expresión o fórmula que permita hallar el total de cuadros que se necesitan alrededor de un rectángulo, con cualquier ancho y largo. Para ello, los estudiantes emplean tanto un lenguaje natural como el uso de expresiones simbólicas para expresar la generalidad. Utilizan las letras A para representar el ancho, y L para representar el largo, para finalmente obtener una expresión general, por ejemplo: $(A+2) \times 2 + L \times 2$.

$$(A + 2) \times 2 + L \times 2.$$

d) Prueba de validez de una fórmula: En esta fase a los estudiantes se les pide trabajar de manera grupal. Deben llenar nuevamente la tabla que inicialmente usaron, pero en esta ocasión empleando ya las generalidades que obtuvieron en la fase anterior, y comparando la nueva tabla con las trabajadas en un principio, esto con el fin de validar las fórmulas obtenidas.

Nota. Elaboración propia

Actividad 6: Baldosas I, tiene como finalidad trabajar las fases del Ver, Decir y Registrar, haciendo énfasis en la última (véase figura B6).

Figura B6

Gráfica e indicaciones de la actividad 6

A embaldosar

Pedro es constructor. Embaldosa las entradas de las casas de la urbanización La Colina, utilizando baldosas negras y blancas

Pedro siempre empieza con una fila de baldosas negras.

Luego pone una fila de baldosas blancas a continuación de las negras.

Y luego pone 2 baldosas blancas en cada extremo para finalizar el embaldosado de la entrada.

1 ¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro si empieza con una fila de 8 baldosas negras?

2 ¿Cuántas baldosas blancas usa si empieza con:

a) ¿5 baldosas negras?

b) ¿9 baldosas negras?

Puede escribir sus respuestas a las preguntas 1 y 2 en una tabla como la siguiente:

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
3	→ ...
4	→ ...
5	→ ...
...	→ ...
9	→ ...
...	→ ...

Deje espacio en la tabla para anotar más números.

3

Pedro empieza con 40 baldosas negras.

Luego pone una fila de baldosas blancas a continuación de las negras.

Luego adiciona las baldosas blancas a cada lado. ¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro, en total?

Escriba en la tabla 40 → ...

4 Pedro empieza con 100 baldosas negras. ¿Cuántas baldosas blancas necesita? Escriba estos datos en la tabla.

5 ¿Puede encontrar el número de baldosas blancas cuando conoce el número de baldosas negras?

¿Existe alguna regla que usa para encontrar el número de baldosas blancas? Escribala.

Nota. Extraído de Gonzáles y Velandia (2017)

El análisis de la actividad 6 se presenta en la siguiente tabla B6:

Tabla B6

Análisis de la actividad 6 del PG10

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
a) Ver un patrón: En esta fase la actividad se realizó de forma individual, los estudiantes ven la secuencia de figuras que se plantea y una breve descripción de ellas. Luego de eso, se les plantea a los estudiantes las preguntas 1 y 2 (¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro si empieza con una fila de 8 baldosas negras?, ¿Y si se empieza con 5 o 9 baldosas negras?) y los resultados se organizan en una tabla. Luego en las preguntas 3 y 4 se les pide escribir en la tabla cuántas baldosas blancas se necesita si se empieza con 40 y 100 baldosas negras. b) Decir cuál es el patrón: En esta etapa los estudiantes responden a la pregunta 5 donde se les pregunta si se puede encontrar el número de baldosas blancas cuando conocen el número de baldosas negras, esto lo hacen a partir de los resultados obtenidos en la fase anterior, logrando describir el patrón usando un lenguaje natural. Es decir, lo hacen de forma verbal, por ejemplo: Al número de baldosas blancas se le suma 4 y se obtiene el resultado. Sin embargo, no comunican este patrón con sus compañeros, sino hasta el final. Además, se observa una variación en la secuencia de las fases. c) Registrar un patrón: En esta etapa los estudiantes responden a la última pregunta donde se pide identificar si existe alguna regla para encontrar el número de baldosas negras. Luego de encontrar el patrón de formación a partir de los datos colocados en la tabla y expresarlo en lenguaje natural, logran expresarlo en lenguaje algebraico formal, por ejemplo: $N + 4$, donde "N" representa a las baldosas negras, permitiéndoles así hallar la regla general que se les pidió. d) Prueba de validez de una fórmula: En esta etapa los estudiantes buscaron comprobar las generalidades obtenidas a través de una socialización, donde se expusieron distintas formas para expresar la generalidad. Comparan sus trabajos, y concluyen que son varias expresiones las que pueden ser válidas. Se identificó a aquellos estudiantes que tuvieron mayor dificultad para generalizar, y se les pidió que expongan cómo finalmente lograron dar respuesta a las preguntas, siendo esta una buena estrategia ya que les permite consolidar su aprendizaje.	a) Etapa de la generalización fáctica: En esta etapa los estudiantes observan detenidamente la secuencia de figuras que se plantea, además de una breve descripción de ellas, tratando de expresar de forma aritmética respuestas a las preguntas 1 y 2 donde se les pide hallar cuántas baldosas blancas usa Pedro si empieza con una fila de 8 baldosas negras, y si se empieza con 5 o 9 baldosas negras. Los resultados numéricos son plasmados en una tabla. Asimismo, en las preguntas 3 y 4 se les pide escribir en la tabla cuántas baldosas blancas se necesitan si se empieza con 40 y 100 baldosas negras. Sin embargo, se dan cuenta que a medida que el número de baldosas negras es mayor, el procedimiento se vuelve más tedioso. b) Etapa de la generalización contextual: En esta etapa los estudiantes desarrollan la pregunta 5, donde se les pide determinar si se puede encontrar el número de baldosas blancas cuando se conoce el número de baldosas negras, para lo cual algunos estudiantes empiezan a deducir que el número de baldosas blancas será igual a las negras, pero sumándole 4. En cambio, otros dicen que se tiene que tomar el número de baldosas negras y multiplicarlo por 2, luego sumarle 4 de las esquinas y se restan las baldosas negras. Estas son hipótesis, que al final permitirán que se establezca una regla general. c) Etapa de la generalización simbólica: En esta etapa los estudiantes ya emplean un lenguaje alfanumérico, letras y números, para expresar una regla general que les permita responder a la última pregunta planteada, la cual pide establecer una regla que permita hallar el número de baldosas blancas a partir de las negras, pudiendo utilizarse para un número cualquiera, por ejemplo: $N + 4$, donde "N" representa a las baldosas negras. De esta forma obtienen la regla general.

Nota. Elaboración propia

Actividad 7: “El inventario”, tiene como finalidad buscar que los estudiantes hagan uso de la letra para representar cantidades, que, aunque los procesos se mantengan, dichas cantidades pueden variar dependiendo del contexto que se presente (véase figura B7).

Figura B7

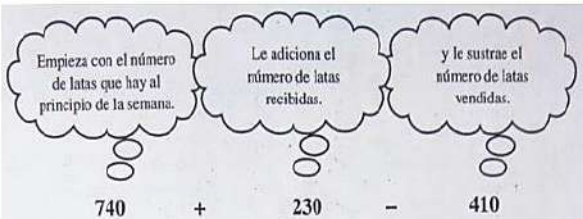
Actividad 7 “El inventario”



El administrador de un supermercado tiene que hacer el inventario de mercancías al final de cada semana.

Pregunta 1. Al principio de una semana había 740 latas de Coca Cola en el supermercado. Durante la semana se recibieron 230 nuevas latas de la distribuidora de Coca Cola, y 410 latas fueron vendidas.
¿Cuántas latas de Coca Cola había en el supermercado al final de la semana?

Pregunta 2. Al principio de otra semana, durante una época de calor, había 3800 latas en el supermercado. 1200 nuevas latas fueron recibidas durante la semana, y 2700 fueron vendidas.
¿Cuántas latas de Coca Cola había al final de la semana?



Los números cambian de semana a semana, pero el administrador hace la misma clase de cálculos con esos números cada vez.

¿Qué expresión sencilla escribiría, que permita identificar los cálculos que el administrador realiza al final de cada semana?

Los números cambian de semana a semana. ¿Podemos usar un nombre para representar números que cambian?

Nota. Extraído de Gonzáles y Velandia (2017)

El análisis de la actividad 7 se presenta en la siguiente tabla B7:

Tabla B7

Análisis de la actividad 7 del PG10

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
a) Ver un patrón: En esta fase los estudiantes responden a las preguntas 1 y 2, donde se les proporciona unos datos y se les pide determinar cuántas latas de Coca Cola había en el supermercado al final de la semana. Además, de analizar las preguntas, se presentan unas nubes que explican la situación inicial y describen el cálculo que tiene que hacer el administrador del supermercado cada semana, en este caso se observa: $740 + 230 - 410$. b) Registrar un patrón: En esta fase los estudiantes desarrollan la pregunta del primer ítem: “¿qué expresión sencilla escribiría, que permita	a) Etapa de la generalización fáctica: En esta primera etapa el estudiante responde la pregunta 1: Al principio de una semana había 740 latas de Coca Cola en el supermercado. Durante la semana se recibieron 230 nuevas latas de la distribuidora de Coca Cola, y 410 latas fueron vendidas. ¿Cuántas latas de Coca Cola había en el supermercado al final de la semana? empleando un lenguaje aritmético, a través de la operación: $740 + 230 = 970 - 410 = 560$ y la pregunta 2: Al principio de otra semana, durante la época de calor, había 3800 latas en el supermercado. 1200 latas fueron recibidas durante la semana, y 2700 fueron vendidas. ¿Cuántas latas de Coca Cola había al final de la semana?, escribiendo la siguiente

identificar los cálculos que el administrador realiza al final de cada semana?”. Para ello, se analiza el cálculo que realiza el administrador del supermercado y los resultados obtenidos anteriormente, para establecer relaciones que permitan identificar una regularidad, y de esta manera se pudo llegar a una regla general, por ejemplo: $(N + M) - Z$, donde N representa el número de latas al principio de semana, M representa el número de latas nuevas y Z representa el número de latas vendidas.

Se puede observar que no cuenta con las fases de Decir un patrón y Evaluar la validez de un patrón, por lo que no cumple con todas las fases propuestas por Mason et al. (1985). Esto se debe principalmente a que esta actividad tiene como fin introducir la noción de variable a los estudiantes.

operación: $3800 + 1200 = 5000 - 2700 = 2300$.

Cabe señalar que hay un predominio de lo numérico, sin poder pasar aún a otro tipo de expresión.

b) Etapa de la generalización contextual: No se evidencia.

c) Etapa de la generalización simbólica: En esta etapa, a partir del cálculo que realiza el administrador del supermercado y los resultados obtenidos anteriormente, se logra llegar a una regla general: $(N + M) - Z$, donde N = el número de latas al principio de semana, M = el número de latas nuevas y Z = el número de latas vendidas; respondiendo de esta manera a la pregunta del primer ítem.

Se puede observar que no se evidencia la Etapa de Generalización contextual, debido a que la regularidad la presentan en la actividad y solo se tendría que expresar con símbolos.

Nota. Elaboración propia.

Actividad 8: Tiene como finalidad que los estudiantes potencien más su trabajo con las letras como variables y empiecen a operar con ellas (véase figura B8).

Figura B8

Actividad 8 “A embaldosar”

A embaldosar
(Segunda parte²⁰)

¿Recuerda la actividad de Pedro el constructor, quien embaldosaba las entradas de las casas?

¿Se acuerda? Podemos calcular el número de baldosas blancas si conocemos el número de baldosas negras.

Número de baldosas blancas = Número de baldosas negras + 4

Vamos a observar la tabla que muestra el número de baldosa negra y el número de baldosas blancas usadas en las entradas.

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas
3	7
4	8
5	9
...	...
10	14
...	...
n	$n + 4$

Llamamos:
 n al número de baldosas negras y
 b al número de baldosas blancas.

Pedro quiere saber cuántas baldosas se usan, en total, para la entrada de cualquier casa.

Número de baldosas negras	Número de baldosas blancas	Número de baldosas negras más número de baldosas blancas
3	3+4	3+3+4
4	4+4	4+4+4
5	5+4	5+5+4
...	...	...
10	10+4	10+10+4
...	...	...
n	$n+4$	$n+n+4$

Veamos que es lo mismo que decir: 2 veces 3, más 4.

Decida si representa adecuadamente la expresión 2 veces 3, más 4.

¿En $2 \times 3 + 4$, para este caso, qué operación hay que hacer primero?

¿Qué tenemos que usar para indicar qué operación se hace primero? Explique*.

Una vez que haya establecido la necesidad de usar paréntesis, termine de llenar la siguiente tabla:

Número de baldosas negras más número de baldosas blancas usadas en una entrada	
$3 + 3 + 4$ $4 + 4 + 4$ $\vdots$	$\rightarrow (2 \times 3) + 4$ $\vdots$

Ahora trate de establecer lo que sucede en los siguientes casos:

$1 + 1 = 2 \times 1$	$1 + 1 + 1 =$
$2 + 2 =$	$2 + 2 + 2 =$
$3 + 3 =$	$3 + 3 + 3 =$
$4 + 4 =$	$4 +$
$\vdots$	
$10 + 10 =$	
$\vdots$	
Cualquier número +	
$n +$	

Escriba ejemplos de otros casos, como los anteriores, en donde se pueda establecer una expresión general (para cualquier número).

Nota. Extraído de Gonzáles y Velandia (2017)

El análisis de la actividad 8 se presenta en la siguiente tabla B8:

Tabla B8

Análisis de la actividad 8 del PG10

Relación con la teoría de Mason, Graham, Pimm y Gower	Relación con la teoría de Radford
Esta actividad es continuación de la actividad “A Embaldosar” a) Ver un patrón: En esta fase los estudiantes recuerdan lo que se vio en la primera parte de esta actividad y observan unas tablas con datos, donde se expresa la generalidad a la que se llegó en la actividad 6 “A Embaldosar”, pero ahora se pide hallar el número de baldosas totales. b) Decir un patrón: En esta fase los estudiantes tienen que buscar otras formas de representar lo mismo que está escrito en las tablas, por ejemplo, en vez de $3 + 3 + 4$, se dice, <i>2 veces 3, más 4</i>. Esto se hace con el fin de verificar si realmente es correcto lo que se está planteando. Luego con las preguntas ¿En $2 \times 3 + 4$, para este caso, qué operación hay que hacer primero? y ¿Qué tenemos que usar para indicar qué operación se hace primero?, se intenta que los estudiantes tengan claro en qué orden trabajar una regla general. c) Registrar el patrón: En esta fase los estudiantes usan las expresiones obtenidas de la tabla anterior para poder plantearlo de otra forma, usando los paréntesis y números. Luego se les pide establecer lo que sucede en distintos casos, como, por ejemplo: $1 + 1 = 2 \times 1$, $2 + 2 = 2 \times 2$, etc. hasta que se les pide hallar una expresión para cualquier número, es allí donde se introduce la letra n, que vendría a ser la variable que representa el número, y así se logra expresar de forma general ambos casos. En el primero, sumando dos veces el mismo número, es decir, $n + n$, que vendría a ser igual a $2n$ y en el segundo, sumando 3 veces el mismo número, es decir, $n + n + n$, que es igual a $3n$. Si bien se pide escribir algunos otros ejemplos, en donde se pueda establecer una expresión general en el caso de cualquier número, no se logra evidenciar la fase de Evaluar la validez del patrón, por lo que no se estaría cumpliendo con todas las fases propuestas por Mason et al. (1985)	a) Etapa de la generalización fáctica: En esta etapa los estudiantes observan aquellas regularidades que ya se trabajaron anteriormente y es por medio de números organizados en tablas que se puede ver las relaciones entre los datos. En esta actividad se propone hallar el número total de baldosas, por lo que se procede sumando el número de baldosas negras y las blancas que se obtuvieron en la primera parte (actividad 6). b) Etapa de la generalización contextual: En esta etapa los estudiantes deciden si se están representando adecuadamente las expresiones que les plantean, por ejemplo, si $2 \times 3 + 4$, es igual a decir <i>2 veces 3, más 4</i>. Además, se les pide expresar el número total de baldosas usando los paréntesis y la multiplicación. Posteriormente se proponen otros casos, donde se ve claramente que hay una regularidad en la secuencia, por ejemplo, $1 + 1 = 2 \times 1$, $2 + 2 = 2 \times 2$, $3 + 3 = 2 \times 3$, etc. c) Etapa de la generalización simbólica: En esta etapa les piden a los estudiantes hallar la expresión general que permita representar los casos con cualquier número, para ello se utiliza la letra n, que vendría a ser la variable que representa cualquier número, lográndose este objetivo en ambos casos. En el primero, sumando dos veces el mismo número, es decir, $n + n$, que es lo mismo que $2n$ y en el segundo, sumar 3 veces el mismo número sería, $n + n + n$, que es igual a $3n$.

Viabilidad y limitaciones de la propuesta

De acuerdo con los autores de la propuesta Gonzáles y Velandia (2017), se pudo evidenciar una mejora en gran parte de los estudiantes en relación con sus procesos de generalización de patrones, además, lograron trabajar dicha generalidad desde diversos contextos, tanto matemáticos (numéricos y geométricos), así como situaciones relacionadas a lo cotidiano. Es por ello que, la propuesta resultó pertinente para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Respecto a las limitaciones, se ha observado una serie de dudas de los estudiantes, los cuales en un principio no terminaban de entender el por qué era tan importante llegar a una generalización, ya que el docente insistía constantemente en llegar a plantear una regla general, restándole importancia a los procesos previos como el Ver y Decir el patrón, lo cual ocasionaba que el docente tuviera que plantearse de manera inmediata nuevas actividades para retomar dichas etapas.

En relación con lo planteado por Mason et al. (1985), se logró identificar que solamente en la actividad 7, los estudiantes no lograron cumplir con la fase de Decir cuál es el patrón, ya que no lograron comunicar sus resultados a través de un lenguaje natural, sino que omitieron esta fase registrando directamente a través del lenguaje algebraico el patrón o regla general. Además, en las actividades 1, 2, 7 y 8 no llegaron a cumplir con la fase de Prueba de Validez de la fórmula ya que no comprobaron la regla general a la que se había llegado en la fase previa, que es Registrar el patrón.

En relación con lo planteado por Radford se logró identificar que solo en la actividad 7, los estudiantes no lograron cumplir con la etapa de la Generalización contextual, ya que pasan directamente de usar el lenguaje numérico a establecer la regla general a través del lenguaje algebraico.

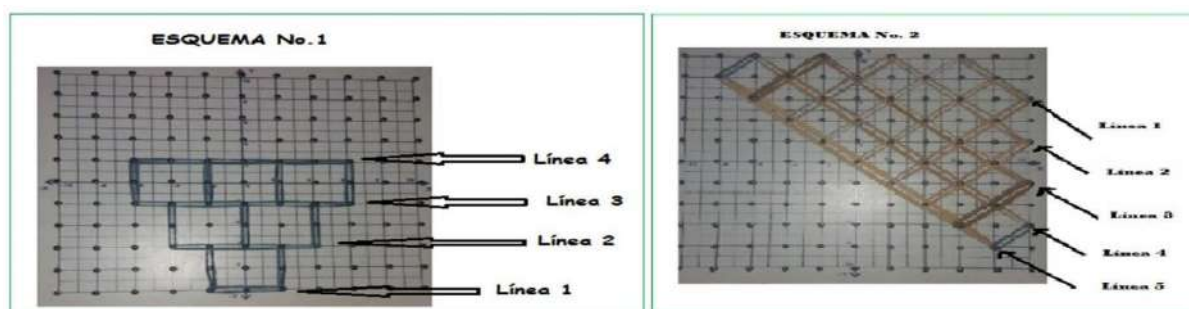
A partir del análisis general de esta propuesta se puede decir que en la mayoría de las actividades se ha cumplido tanto con las fases propuestas por Mason et al. (1985) y las etapas propuestas por Radford, lo cual permitió que se desarrolle el pensamiento algebraico a través de los procesos de generalización en el 75% de los estudiantes con los cuales se trabajó. Teniendo en cuenta que en un inicio solo un 25% del total, lograba llegar a la generalidad; se hace evidente el gran avance obtenido a partir de la ejecución de cada una de las actividades. Cabe resaltar que fue beneficioso para los estudiantes realizar una socialización al finalizar algunas actividades, ya que se buscaba que aquellos estudiantes que habían presentado dificultades logren exponer el procedimiento que habían seguido y de esta manera se les permitía afianzar sus conocimientos.

Apéndice C. Actividad 3, Actividad 4, Actividad 5 y Actividad 6 del PG6

En todas las actividades propuestas, el objetivo fue el desarrollo de procesos de generalización a partir de la manipulación del geoplano cuadrado, a través de habilidades y procesos de visualización. Según el estudio de las actividades 3, 4, 5 y 6, se concluye que el análisis realizado se puede generalizar para toda la serie de actividades propuestas. Las actividades 1, 3, 4, 5 y 6 presentan la misma estructura que las actividades trabajadas (actividad 1 y actividad 2); estas son presentadas en función de las figuras a representar, las cuales varían en la forma; lo que lleva a especificar, por parte de los investigadores, los valores de las variables o constantes a encontrar, así como el orden en el que se presenta cada apartado (presentación de figuras, tabla, justificación). Aun así, cabe resaltar los cambios que en cierta medida se consideran relevantes, por ejemplo, en cuanto al nivel de complejidad de las figuras planteadas. En la actividad 3, se presentan dos esquemas (véase figura C1), el primero que se puede concebir tanto de manera vertical como de manera horizontal, mientras que en el segundo esquema se presenta de manera oblicua.

Figura C1

Actividad propuesta N° 3

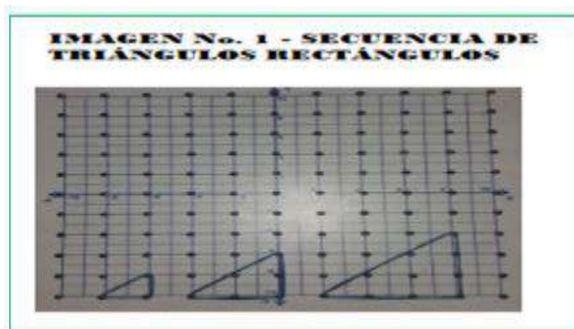


Nota. Extraído de Luque y Mena (2016)

La actividad 4 (véase figura C2) propone una figura geométrica conocida, se trata de un triángulo rectángulo, que, en este caso, según la secuencia de figuras, varían en cuanto al área

Figura C2

Secuencia de triángulos de la actividad N° 4

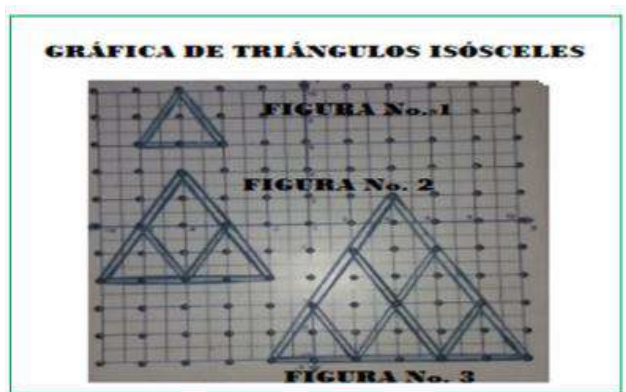


Nota. Extraído de Luque y Mena (2016)

En la actividad 5 (véase figura C3) se proponen figuras compuestas por triángulos y rombos, lo cual añade un grado de dificultad respecto a la actividad anterior.

Figura C3

Gráfica de triángulos de la actividad N° 5

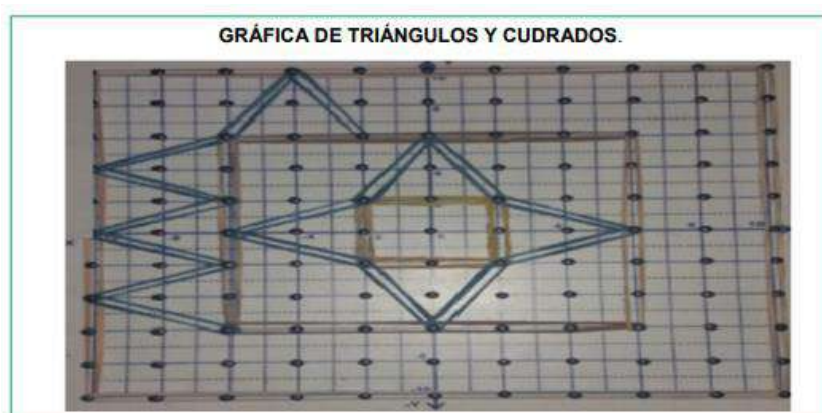


Nota. Extraído de Luque y Mena (2016)

En la actividad 6 (véase figura C4), el gráfico presentado está compuesto por triángulos y cuadrados, lo cual supone una combinación de las actividades 1 y 4.

Figura C4

Gráfica de la actividad N° 6



Nota. Extraído de Luque y Mena (2016)

Se puede evidenciar, que los apartados referidos al registro de datos, y de justificar el patrón identificado, siempre son constantes en todas las actividades, lo que varía es lo que se pide hallar en cuanto a la observación de las figuras, esto porque cada actividad propone una figura diferente. Además, la cantidad de casillas llenas mostradas como ejemplos, a medida que las actividades avanzan, tienen una variación en número. Esto retaría al estudiante a proponer sus datos, sin que antes se le proporcione un ejemplo.

Apéndice D. Encuesta para conocer la disponibilidad de medios tecnológicos

Antes de empezar

El siguiente formulario tiene como fin conocer la disponibilidad y uso de medios tecnológicos por parte de los estudiantes participantes.

Nombre del participante:

Tu respuesta

¿A qué institución educativa pertences?

Tu respuesta

Sección:

- ☐ A
- ☐ B
- ☐ C
- ☐ D

Para acceder a las sesiones de clase, puedo hacerlo mediante (puede marcar más de una opción):

- ☐ Laptop
- ☐ Computadora
- ☐ Celular
- ☐ Tablet
- ☐ Otro

¿Conoces el programa informático Excel?

- ☐ SI
- ☐ NO

¿Ha utilizado el programa informático Excel?

- ☐ SI
- ☐ NO

Apéndice E. Cuestionario final sobre la aplicación de las actividades virtuales

Nombre de la alumna: _____

	Totalmente satisfactorio	Satisfactorio	Indiferente	Insatisfactorio	Totalmente insatisfactorio
1. ¿La explicación del uso de los siguientes recursos tecnológicos empleados resultó entendible?					
a) Geoplano virtual					
b) Excel					
c) Google Forms					
d) Google Sites					
2. ¿Los siguientes recursos virtuales utilizados en las sesiones de clase han sido oportunos para el área de matemática?					
a) Geoplano virtual					
b) Excel					
c) Google Forms					
d) Google Sites					
3. Te sientes motivado cuando se usan recursos tecnológicos durante la sesión de clase.					
4. ¿La secuencia de las actividades trabajadas durante las sesiones de clase te pareció adecuada?					
5. El ambiente de trabajo y las relaciones con mis compañeras a través de salas pequeñas en Zoom resultaron motivadoras.					
6. La retroalimentación brindada por los docentes durante las sesiones fue de ayuda para el logro de los aprendizajes.					
7. ¿Consideras que el tiempo destinado para el desarrollo de las actividades fue suficiente?					
8. ¿Piensas que los aprendizajes logrados en esta sesión los podrás aplicar					

en tu vida cotidiana?					
9. ¿Los objetivos definidos en cada sesión se han cumplido?					

10. ¿Consideras que el tema abordado en sesiones virtuales ha resultado motivador? O ¿consideras que sería mejor abordar el tema en sesiones presenciales?, ¿Por qué?



Apéndice F. Actividades aplicadas para el desarrollo del pensamiento algebraico utilizando el geoplano virtual

Link al sitio web donde se encuentran las actividades:

<https://sites.google.com/view/generalizamos-patrones/inicio>



Apéndice G. Puntaje obtenido según el criterio 1: Objetivos de las investigaciones

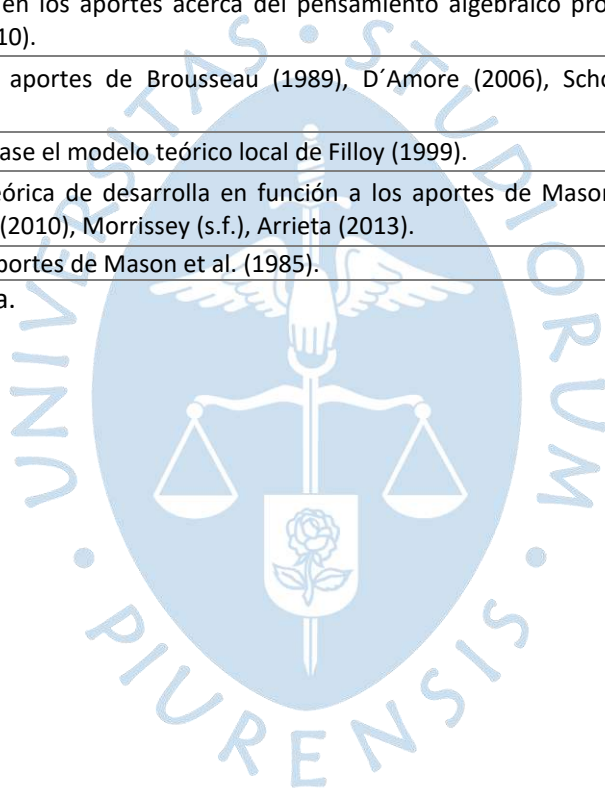
Código	Objetivo general	Puntaje
PG1	Estudiar las dificultades que los estudiantes presentan en el acceso al pensamiento algebraico vía procesos de generalización.	2.5
PG2	Describir los procesos de generalización realizados por los estudiantes de 11 a 13 años mediados por el reconocimiento de patrones y sus representaciones, en situaciones asociadas a contextos algebraicos.	4
PG3	Proponer una secuencia de actividades con el fin de introducir a los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Rural La Granja del Municipio de Zipaquirá, al significado de variable usando como recurso la generalización en un contexto geométrico.	4
PG4	Mejorar la comprensión del lenguaje algebraico mediante el diseño e implementación de una propuesta metodológica con miras a favorecer la interiorización de los conceptos propios del grado octavo de la I.E Barrio Paris.	2
PG5	Analizar la emergencia de diversos recursos o medios semióticos en estudiantes de grado séptimo y los procesos de objetivación que se desarrollan cuando se abordan tareas de generalización de patrones.	3
PG6	Diseñar una cartilla para profesores, donde se use el Geoplano Cuadrado como instrumento articulador para potencializar el proceso de generalización.	5
PG7	Proponer una secuencia de actividades didácticas a partir del reconocimiento de regularidades y patrones en diferentes situaciones, que potencien el desarrollo del pensamiento variacional.	3
PG8	Observar las tendencias cognitivas que presenta el estudiante cuando se encuentra en la búsqueda del n -ésimo término de una sucesión figurativa tanto lineal como cuadrática y cómo proceden para llegar a generalizar el comportamiento que tiene el patrón matemático.	3
PG9	Desarrollar una propuesta para el desarrollo de habilidades en el proceso de generalización para los estudiantes de grado octavo del Colegio Bachillerato Patria a partir del diseño de una aplicación para dispositivos Android como mediador.	5
PG10	Describir y analizar la implementación de una experiencia de aula relacionada con la iniciación al álgebra escolar, desarrollada con estudiantes de grado octavo (entre 13 y 14 años) de una institución escolar del municipio de Mosquera (Colombia).	4

Nota. Elaboración propia.

Apéndice H. Puntaje obtenido según el criterio 2: Teoría en que se basan las investigaciones

Código	Teoría en la que se basa.	Puntaje
PG1	El marco teórico se fundamenta con la propuesta de Mason et al. (1985) acerca de los procesos de generalización.	5
PG2	Se basa en la teoría estructural funcional planteada por Duval (2017), la propuesta de Mason (1996) acerca de los procesos de generalización en el álgebra, la taxonomía modificada de generalizaciones reflejadas de Trujillo (2010), y en los aportes del pensamiento algebraico propuesto por Radford (2010).	5
PG3	El fundamento teórico se basa en los aportes del Grupo Azarquel (1993), fases del proceso de generalización (Ver, Describir y Escribir).	1
PG4	Se basa en los principios del aprendizaje significativo de Moreira (2005).	1
PG5	Toman como marco de referencia la Teoría de la Objetivación Radford, (2003, 2005, 2006, 2008a, 2008b, 2010, 2012, 2013), Vergel (2014).	5
PG6	Se fundamenta en los aportes acerca del pensamiento algebraico propuesto por Radford (2010).	5
PG7	Se basa en los aportes de Brousseau (1989), D'Amore (2006), Schoenfeld (1992).	1
PG8	Se toma como base el modelo teórico local de Filloy (1999).	1
PG9	La estructura teórica de desarrolla en función a los aportes de Mason et al. (1985), Radford (2010), Morrissey (s.f.), Arrieta (2013).	5
PG10	Se basa en los aportes de Mason et al. (1985).	5

Nota. Elaboración propia.



Apéndice I. Puntaje obtenido según el criterio 3: Secuencia de actividades trabajadas en cada investigación

Código	Secuencia de Actividades	Puntaje
PG1	En la secuencia de actividades se describe el estudio en tres etapas: en la primera etapa se aplica un cuestionario inicial y entrevista ad-hoc, luego en la segunda etapa se va detallando el desarrollo de la secuencia didáctica en aspectos como: descripción, aplicación, análisis y efectos en los estudiantes; por último, en la tercera etapa se aplica un cuestionario final presentando una descripción, aplicación y análisis correspondiente al estudio.	3
PG2	El trabajo propone una serie de tareas, a través de las cuales se puede demostrar el proceso de generalización de los estudiantes en el contexto del álgebra. Se plantean seis tareas: la tarea cero o tarea de indagación, diseñada para determinar cómo los estudiantes encuentran generalizaciones de patrones y cómo los representan; con la primera tarea, se describe el uso que los estudiantes le dan a la letra al momento de encontrar la generalidad de un patrón y su forma de operarla; con la segunda tarea, se evidencian los procesos de generalización, sin inducir el uso de la letra; en la tercera tarea, se describen las maneras como los estudiantes encuentran y representan la generalidad de un patrón por medio de la relación entre cantidades; en la cuarta tarea, se describe la forma como los estudiantes encuentran y representan la generalidad de un patrón desde lo concreto a lo abstracto, y en la tarea cinco, se describen las maneras como los estudiantes representan y relacionan la generalidad del patrón planteada en esta tarea con la obtenida en la tarea anterior.	5
PG3	En la investigación se muestra los pasos que siguen los estudiantes al momento de observar figuras de secuencias geométricas determinando regularidades, acorde a su percepción, cómo las describen, cómo es el razonamiento seguido y logro de dichas regularidades, que permiten determinar correlaciones a través de las partes de la figura que conlleva a expresar en un lenguaje algebraico dichos razonamientos, encontrando expresiones algebraicas equivalentes.	5
PG4	En un primer momento se hizo entrega a cada uno de los estudiantes de una hoja con definiciones y ejemplos acerca del concepto de álgebra, lenguaje algebraico y su utilidad, con la finalidad que los estudiantes logren comprender y entender a través de la lectura dichos conceptos. En un segundo momento se desarrolla una reunión para averiguar acerca de lo que se comprendió de la lectura, en donde el docente cumple el rol de mediador, va realizando preguntas buscando generar discusión respecto a las definiciones y ejemplos, al final interviene esclareciendo las ideas y llegando a un consenso sobre el significado del lenguaje algebraico. En el tercer momento el docente propone realizar una actividad con la finalidad de reforzar los conocimientos. Respecto al cuarto momento el docente presenta de forma magistral los primeros conceptos del álgebra, tales como: término algebraico, coeficiente, monomios, binomios y polinomios. El quinto momento se basa en la contextualización por parte de los estudiantes, que se lleva a cabo bajo la realización y presentación del mapa conceptual de la terminología algebraica, dando respuesta a lo que propone Moreira en su teoría basada en el aprendizaje significativo crítico, donde uno de los objetivos es la progresión y jerarquización del conocimiento.	3
PG5	Se trabajan dos tareas propuestas a los estudiantes de grado séptimo y el desarrollo de la actividad matemática producida por ellos. La primera tarea trata de una secuencia figural con apoyo tabular; en ella se presenta una serie de figuras de cubos que van aumentando de manera ascendente, donde el estudiante, con el acompañamiento del profesor, tiene que encontrar la variación del número de cubos entre las figuras de posición consecutiva, razonamiento que le servirá para hallar el patrón. En la tarea 2 se presenta una secuencia numérica, también con apoyo tabular. La secuencia va aumentando en forma ascendente (5, 9, 13, 17 ...). Esta actividad se desarrolla en grupos y con el acompañamiento del docente van determinando el valor numérico	2

	correspondiente al término 30. Tomando como base este razonamiento los estudiantes logran identificar la regularidad de la secuencia y posteriormente la deducción de la fórmula.	
PG6	Se proporciona a cada grupo de estudiantes un geoplano. Utilizando bandas elásticas, se construyen, en el geoplano cuadrado, tres imágenes que conforman una serie de cuadrados, las cuales son figuras propuestas por el profesor. Se especifica el significado de los términos de constante y variable. Primero, se plantea una pregunta en relación al concepto de constante con la secuencia de cuadrados, planteando algunas alternativas que los estudiantes han de evaluar. Luego, se les pide completar con cantidades numéricas las casillas que se encuentren vacías en una tabla, según lo que observan en el geoplano. Se entiende que el estudiante tenía que identificar, por ejemplo; el número total de puntillas presentes en el lado del cuadrado en la figura 1, figura 2, figura 3, ..., figura 20, figura 100, figura n; el número total de puntillas alrededor del cuadrado de la figura 1, figura 2, y así sucesivamente; se pidió también el número de puntillas alrededor del cuadrado, número total de espacios por cada lado del cuadrado, y el número total de espacios que había en los cuatro lados del cuadrado. Para terminar, se les pide a los estudiantes que escriban para cada una de las variables el proceso mental que siguieron para hallar el patrón y los resultados numéricos para cada una de las casillas de la tabla. Luego de desarrollar las actividades propuestas, los estudiantes expusieron sus conjeturas respecto a sus resultados.	5
PG7	La secuencia de actividades de este documento busca desarrollar en los estudiantes el razonamiento por inducción, a través de los procesos de generalización. Se evidencian situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización, además se presentan sucesiones icónicas, tabulares y geométricas. El autor considera que cada actividad propuesta debe indicar su objetivo, metodología, aprendizajes esperados, materiales, descripción de la situación problemática, estrategia de evaluación y explicitar alguna actividad complementaria si la tuviera.	3
PG8	Se presenta una sucesión cuadrática, en la que hay cuatro figuras completas, y la consigna es completar la figura cinco y seis a partir de las figuras anteriores, además de explicar cómo se encontraron los valores, así como determinar una expresión algebraica que represente el comportamiento de dicha sucesión.	5
PG9	Se muestran actividades correspondientes a la generalización matemática las cuales son la base y aportan con gran contenido para el desarrollo de los objetivos principales de la investigación. Siguiendo este razonamiento, se evidencia que hay un desarrollo de orden gráfico y conceptual en el que se muestran diferentes etapas; en cada una de ellas se desarrolla de manera explícita o implícita el proceso de generalización en relación al propósito de enseñanza y aprendizaje. De acuerdo al marco estructural y su articulación con la educación en las matemáticas se propone seis actividades. 1. Suma de impares. 2. Suma de triangulares. 3. Suma pendular. 4. Suma de cubos. 5. Suma de pares. 6. Suma de múltiplos. En las animaciones incorporadas en la aplicación móvil GeneMath y realizadas con el GeoGebra muestran actividades correspondientes a la generalización matemática en: suma pendular, suma de impares, suma de triangulares y suma de cubos. En la parte final, se hace un análisis sobre las dudas que se generan en los estudiantes debido a las animaciones presentadas.	3
PG10	Se proponen ocho actividades que los estudiantes deben observar, para luego encontrar el patrón de las secuencias gráfico-numéricas. En estas actividades se especifican las fases de Mason et al. (1985) que se desarrollarán; por ejemplo, en la primera se desarrollan las fases de ver un patrón y decir el patrón, luego dependiendo del progreso de los estudiantes, se modifica o adapta la siguiente actividad para reforzar las fases anteriores o desarrollar otras. Las actividades que se desarrollan en	5

esta propuesta metodológica son:

1. Secuencia de cuadros.
2. Secuencia de números
3. Actividad del mercado 1
4. Dobleces
5. Bordes
6. Baldosas I
7. El inventario
8. Embaldosar segunda parte

Nota. Elaboración propia.



Apéndice J. Puntaje obtenido según el criterio 4: Resultados obtenidos

Código	Resultados	Puntaje
PG1	Los resultados del análisis de la investigación permiten identificar las deficiencias que los estudiantes van teniendo en el desarrollo de las actividades en los procesos de generalización, se evidencia que hay casos en que los estudiantes no llegan a concretar la tercera y cuarta etapa que proponen Mason et al. (1985). Se estimó que el 40% de estudiantes aproximadamente logra ver el patrón e intenta comunicarlo a los demás. El 60% de estudiantes restantes presentan dificultades desde la percepción del patrón. Asimismo, no se aprecia un manejo adecuado del álgebra, pues los estudiantes desarrollan las actividades con operaciones basados en la aritmética. Se observa que algunos estudiantes van subiendo de nivel en la conceptualización matemática: cinco pasan de un nivel medio al alto, otro pasa de un nivel bajo a alto y solo uno no cambia de nivel y permanece en el nivel bajo.	4
PG2	Se destaca como importante dentro del trabajo en el aula el trabajo individual, ya que con este trabajo los estudiantes tienen un primer acercamiento a cada situación planteada en las tareas propuestas, en donde se evidenció que, movilizan habilidades y conocimientos previos y los ponen en juego para sustentar los procesos realizados y encontrar la solución a las situaciones planteadas, a medida que se avanza en la aplicación de las tareas los procesos individuales estaban mejor justificados ya que los estudiantes ven necesario que los demás integrantes de su grupo entiendan los procesos de solución. Por otro lado, el trabajo en grupo fue de mucha importancia en el desarrollo del proceso de investigación, ya que durante las discusiones los estudiantes reconocen equivalencias semánticas, logran hacer transformaciones de conversión, además de llegar a consensos tanto en los procesos realizados para encontrar una regla general común entre los estudiantes en la secuencia de patrones planteados en cada tarea, así como, en encontrar la forma apropiada de representarla. De forma general, el grupo de estudiantes que se tomó como grupo focal para la investigación, mejoró su desempeño académico no solo en el área de matemáticas, si no de forma general, ahora bien, como se menciona anteriormente la forma de argumentar mejoró notoriamente y entender que lo diferente no implica un error. Además, las interacciones de los estudiantes en los diferentes grupos, el juego de roles que cada uno tomó sin un direccionamiento específico y la autorregulación, hicieron, en conjunto, que las actividades fueran desarrolladas con mucha seriedad y responsabilidad, lo anterior se evidencia en las producciones y las entrevistas realizadas a los estudiantes. En cuanto al papel del docente en el aula de matemáticas, está claro que no debe ser simplemente el expositor de la clase, sino que debe ser un mediador además de cuestionar todo lo que hace y lo que dice el estudiante, no para validar o no una respuesta, sino, para hacer preguntas orientadoras con las que los estudiantes van encontrando un camino adecuado para encontrar una solución a una situación determinada.	5
PG3	Con relación a los seis grupos en los que se dividió la clase, se observó que algunos de ellos no lograron lo que se esperaba, pero 3 grupos que decidieron tomar caminos distintos lograron obtener expresiones equivalentes. Finalmente, se concluye que a través de los procesos de generalización se puede acercar al estudiante al uso de las letras y manejo del lenguaje simbólico, planteando actividades dentro de diferentes contextos. Además, los estudiantes logran establecer relaciones entre la aritmética, la geometría y el álgebra.	3
PG4	En la lectura presentada en el primer momento, se encontraron grandes dificultades en la interpretación del recorrido de problemas geométricos al lenguaje algebraico. Las actividades grupales presentadas en la propuesta favorecieron el trabajo colaborativo, logrando solucionar una de las mayores dificultades conceptuales, establecer una diferencia entre múltiplo y potencia, que se evidenció tanto en la indagación como en la fase de caracterización. Por otra parte, luego de la reunión e intervención del docente, en la actividad de afianzamiento, se evidenció que el 85,56 % de las relaciones que establecieron con el ejercicio de apareamiento fueron realizadas correctamente, la mayor dificultad se presentó en las expresiones que involucran a un elemento anterior	4

	y posterior o consecutivo de una determinada cantidad. En la presentación y exposición de los mapas conceptuales, los estudiantes lograron ordenar, representar y efectuar conceptualizaciones. De esta manera, es evidente que se logró corregir las concepciones previas al estudio de las operaciones algebraicas, mediante la exposición de cada mapa ante el grupo y su manera de entender las definiciones.	
PG5	En el desarrollo de la Tarea 1 se evidencia la variedad de recursos empleados en el proceso de la actividad perceptual de los estudiantes, tales como gestos, señalamientos con el lápiz, dibujos auxiliares y el ritmo, etc. Este primer proceso permitió que los estudiantes identificaran los elementos visibles y ocultos de las figuras presentadas en la secuencia de la tarea, lo que a la vez permitió que se establecieran relaciones geométricas y numéricas entre dos términos consecutivos intentando determinar una regularidad en la secuencia. Posteriormente, se empezó a plantear de manera aritmética las relaciones encontradas, sin embargo, en esta tarea no se logró evidenciar el planteamiento simbólico del patrón, por lo cual las generalizaciones alcanzadas fueron solo aritméticas. Como resultado de la Tarea 2 se identificaron medios semióticos y procesos de objetivación muy parecidos a los que se observaron en la primera tarea, pero esta vez en una secuencia numérica con apoyo tabular donde se establecieron relaciones entre el número de un término y el valor numérico asociado a ese término, evidenciándose que todas las etapas del proceso de generalización que propone Radford se han desarrollado, las etapas de generalización factual, contextual y simbólica. Sin embargo, se observa una falta de claridad y detalles específicos.	3
PG6	Las actividades que los estudiantes realizan acerca de la generalización posibilitan que el estudiante desarrolle una serie de habilidades tales como elaborar conjeturas, predecir supuestos resultados en problemas que se les presenten, así como ordenar de forma sistemática los datos del mismo, lo que les posibilita hallar rápida y eficazmente relaciones en un determinado conjunto de elementos. A la vez, se fomenta que cada situación sea vista de una manera global.	3
PG7	A partir del estudio de la historia del lenguaje simbólico y del significado de la variable, se logró comprender mejor las distintas dificultades a las cuales se enfrentan los estudiantes al empezar el estudio del álgebra, como consecuencia de no haber llegado a la comprensión del lenguaje simbólico. A su vez se hizo evidente que dicha comprensión no se da de manera inmediata, sino que se deben presentar situaciones que motiven su construcción. Además, se afirma que, el uso de la variable se consolida haciendo cambios en su simbología y en el contexto.	5
PG8	En esta investigación se concluyó que no todos los estudiantes pueden observar la regularidad presente en la serie de figuras o números, es decir, lo que varía en una figura o número de su antecesor. Cuando el patrón era propuesto con figuras, los estudiantes podían identificarlo mejor, pues según los arreglos en las mismas, permitía una visión más clara de la regularidad. El trabajar con series de figuras le permite al estudiante proponer conjeturas y de alguna forma iniciar su formación en el álgebra, pues utiliza expresiones que lo acercan a la simbolización. Los estudiantes, entonces, expresan el patrón, realizan el registro numérico de la variación del patrón, y proponen una expresión que describa cómo se comporta. Además, el estudiante propone sus propias estrategias cuando trabaja sucesiones.	3
PG9	De acuerdo a los resultados se puede observar que la aplicación GeneMath es una aplicación muy sencilla de manejar, su dinamismo favorece a que los estudiantes desarrollen eficientemente sus habilidades de generalización matemática. Respecto a los estudiantes se evidencia que hay una gran disposición por promover estas herramientas digitales para el aprendizaje significativo del álgebra, GeneMath tuvo un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes, se observó como el uso de herramientas tecnológicas pueden facilitar la comprensión y ahondar en conceptos propios de la matemática. Sin embargo, es necesario e importante analizar los 12 comentarios de los estudiantes acerca del aplicativo, ya que esto permite mejorar en aspectos de estructuras y conceptos matemáticos.	3
	En suma, este aplicativo como propuesta educativa, sirve como una alternativa	

innovadora en el aula de clase, su uso beneficia tanto a estudiantes en su comprensión y a los profesores a dinamizar nuevas formas de conceptualizar el proceso de generalización, y al logro de sus objetivos, logrando una enseñanza de calidad. Por último, este aplicativo tiene un impacto positivo en el desarrollo formativo y académico, genera curiosidad, lo que permite que se estructuren nuevos estilos de aprendizaje y por consiguiente nuevas metodologías de enseñanza.

PG10	En los resultados obtenidos se evidenció que hubo un considerable incremento en el porcentaje de estudiante que logró reconocer un patrón y expresarlo mediante el lenguaje natural, intermedio o simbólico; ya que, se pasó de un 25% en la primera actividad, a cerca del 75% después de la actividad 6. Por otra parte, la gran mayoría encuentra el patrón de formación general y lo simboliza en lenguaje algebraico formal, es por ello que se los clasificó en el Nivel 7, es decir, se evidenció que la aplicación de la propuesta hasta este punto permitió que la gran mayoría de los estudiantes sea capaz de expresar la generalidad, en diferentes situaciones y contextos, con lenguaje algebraico formal.	5
-------------	--	---

Nota. Elaboración propia.

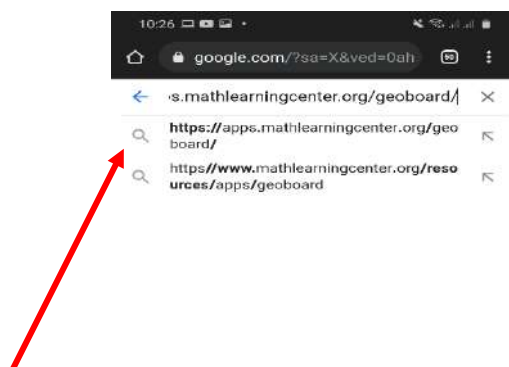


Apéndice K. Guía de uso del geoplano virtual: "Geoboard".

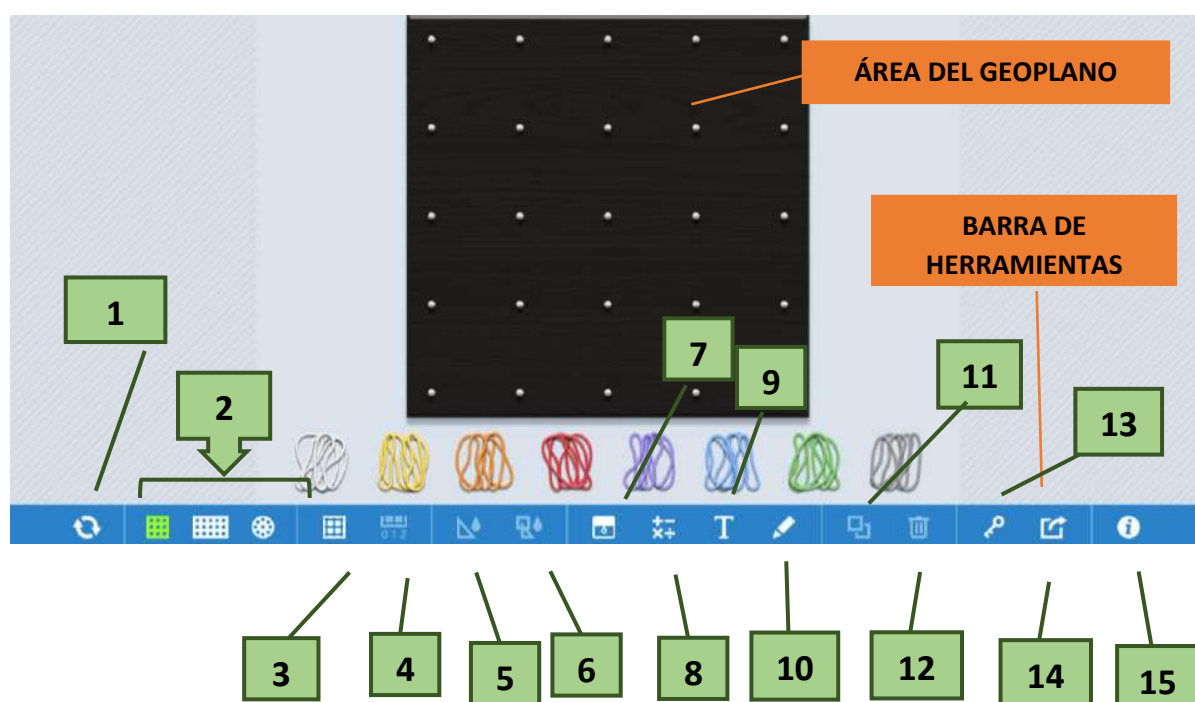
Para celular:

1. Primero se debe acceder al siguiente enlace

<https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/> desde el navegador de su celular.



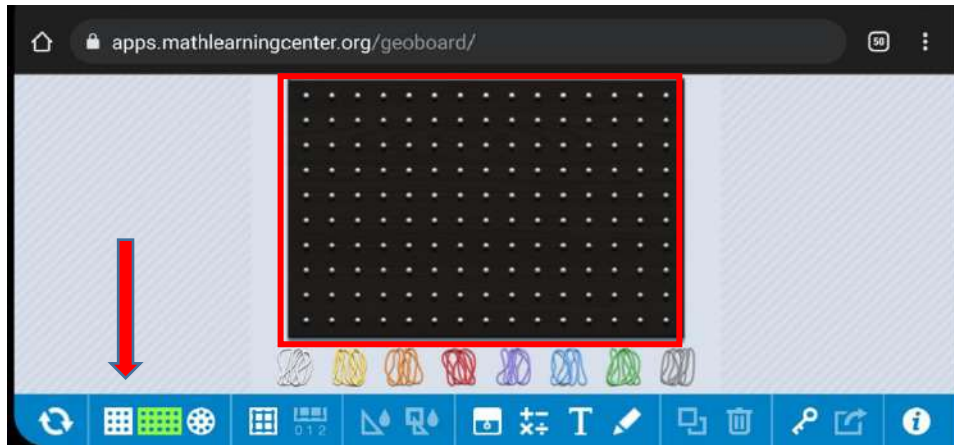
2. Una vez que ingresen al enlace, les aparecerá el menú principal:



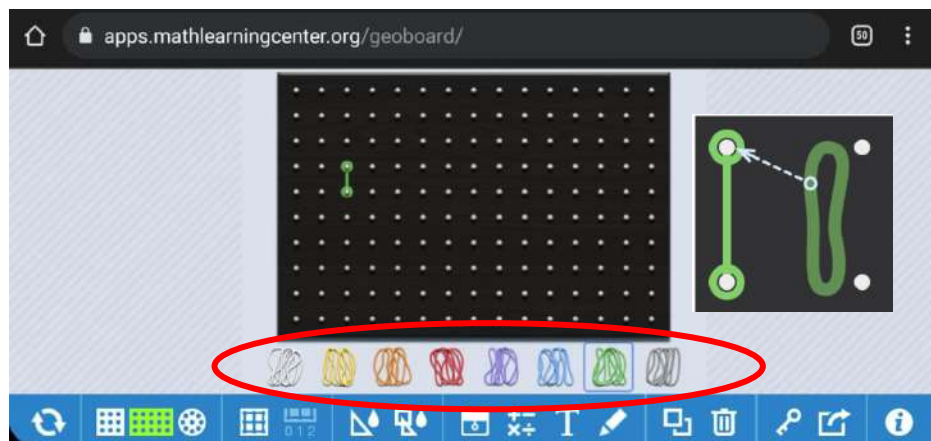
El nombre, atajo y descripción de cada una de estas herramientas se encuentra en la siguiente tabla:

N°	HERRAMIENTA	ATAJO	DESCRIPCIÓN
1	Comenzar de nuevo	Esc	Limpie el espacio de trabajo o vuelva a cargar el código compartido.
2	Forma del tablero	1,2,3	Elija tablero cuadrado, rectángulo grande o circular.
3	Red	GRAMO	Muestre líneas de cuadrícula en tableros.
4	Número de cuadrícula	Norte	Muestre números a lo largo de los ejes x e y.
5	Herramienta de relleno	F	Rellenar o rellenar las bandas seleccionadas.
6	Completar toda la herramienta	A	Llene o desvele todas las bandas del tablero.
7	Herramienta de cubierta	H	Agregue una cubierta de tamaño variable para ocultar o mostrar marcos y contadores.
8	Herramienta de texto matemático	Mi	Abra un teclado para crear expresiones y ecuaciones. El uso del teclado para agregar números y símbolos también funciona. Consejo: toca dos veces tu texto para editarlo.
9	Herramienta de escritura	T	Ingrese texto usando su teclado. Consejo: toca dos veces tu texto para editarlo.
10	Herramientas de dibujo	W	Abra u oculte las herramientas de dibujo.
11	Duplicar	D	Duplicar elementos seleccionados.
12	Basura	Retroceso, borrar	Eliminar elementos seleccionados.
13	Compartir código	K	Abra el trabajo compartido usando un código.
14	Cuota	S	Comparta su trabajo con una imagen, un enlace o un código.
15	Información	!	Ver instrucciones y otra información sobre esta aplicación.

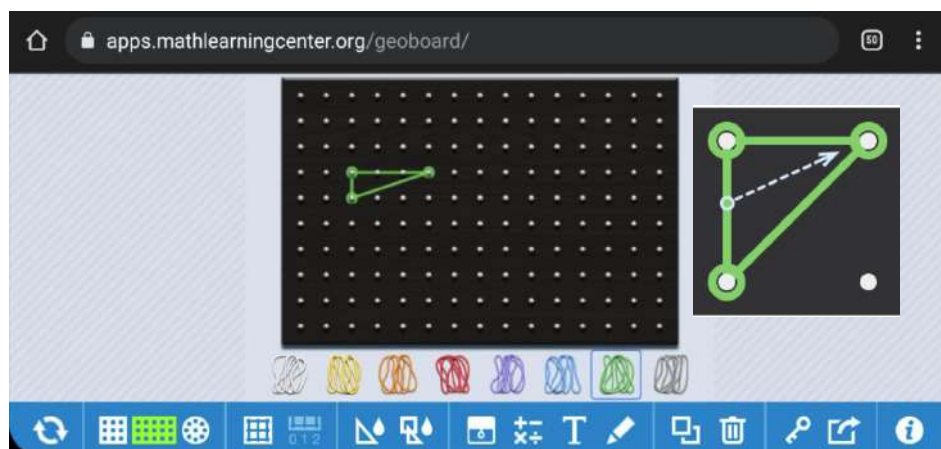
3. Una vez conocidas cada una de las funciones de las herramientas del menú principal, deberán seleccionar la Forma de tablero 2, que será aquella con la cual trabajaremos.



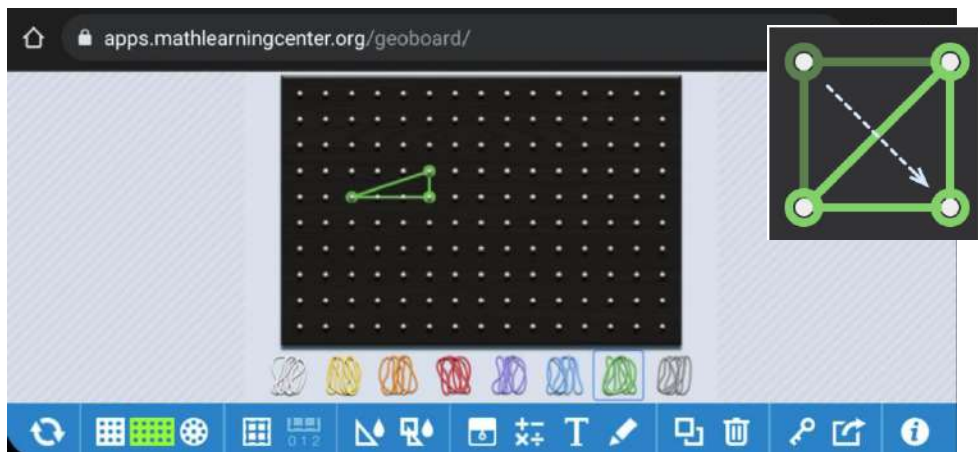
4. Para agregar una banda en el geoplano, se arrastra y suelta una de las bandas en el tablero.



5. Si deseas crear un nuevo vértice, sólo arrastra desde una línea.

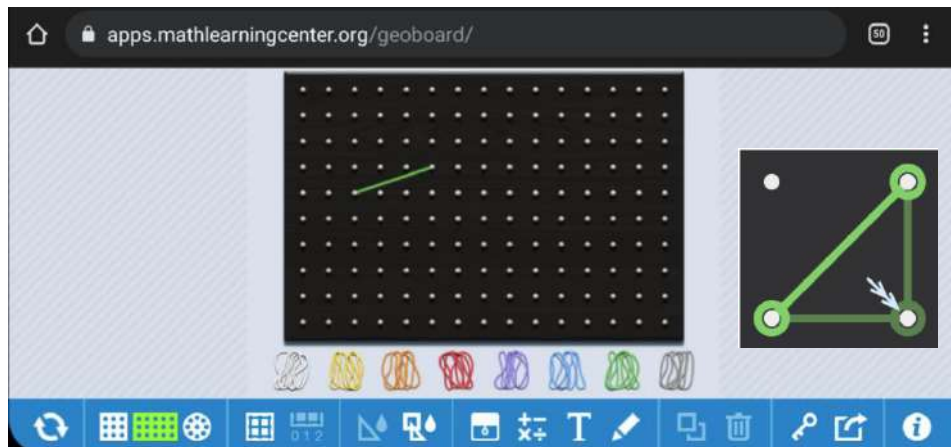


6. Si deseas mover uno de los vértices, sólo tienes que arrastrarlo de una clavija a otra.

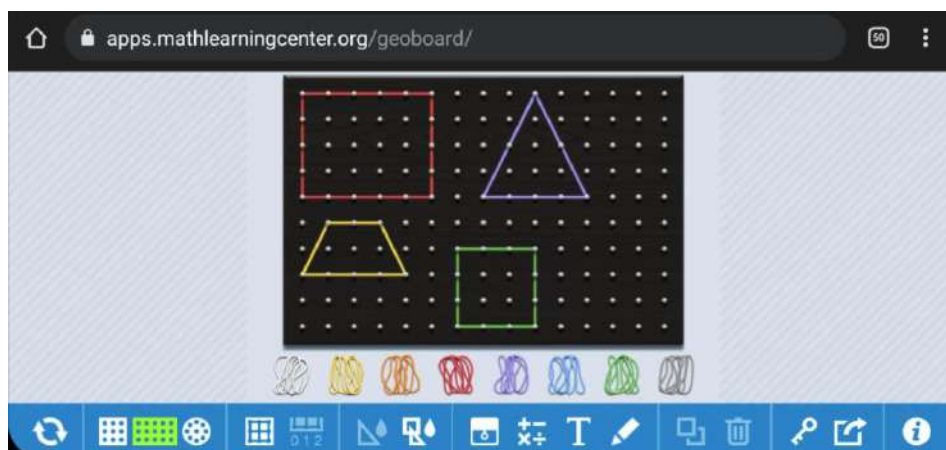


7.

Si quieres eliminar un vértice sólo tócalo dos veces.

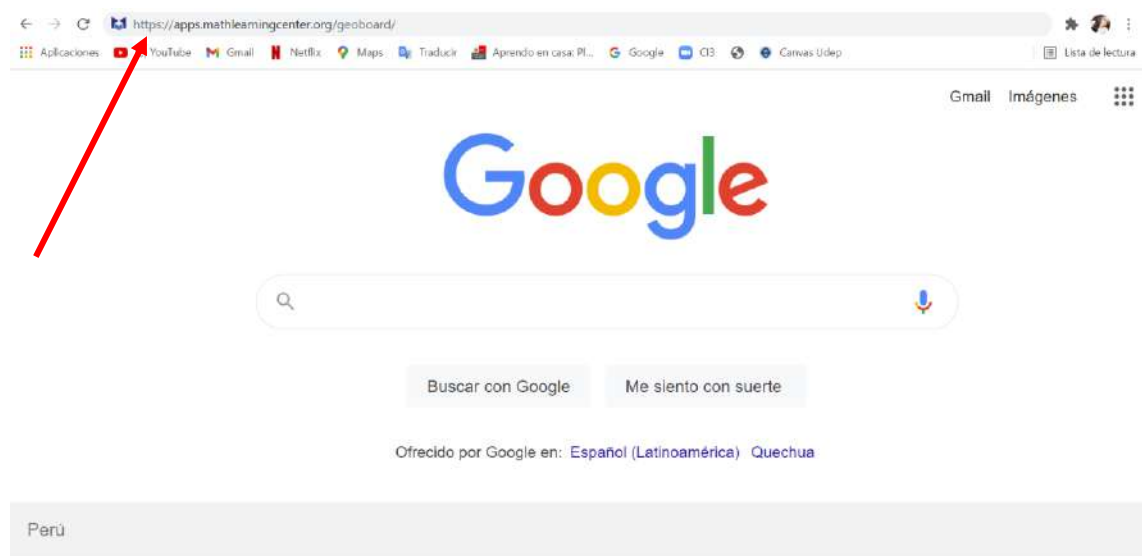


8. De esta manera, podrás formar distintas figuras geométricas dentro del geoplano, seleccionando la banda del color que desees utilizar.

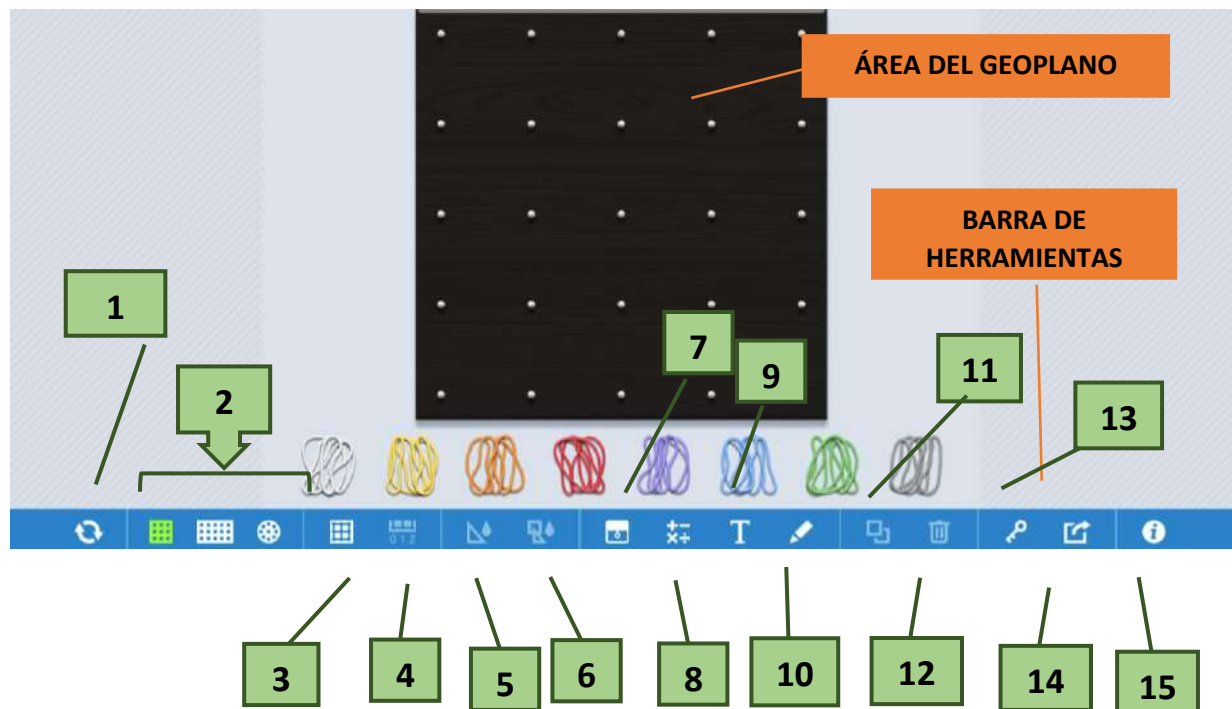


Para laptop:

1. Primero se debe acceder al siguiente enlace
<https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/> desde su navegador.

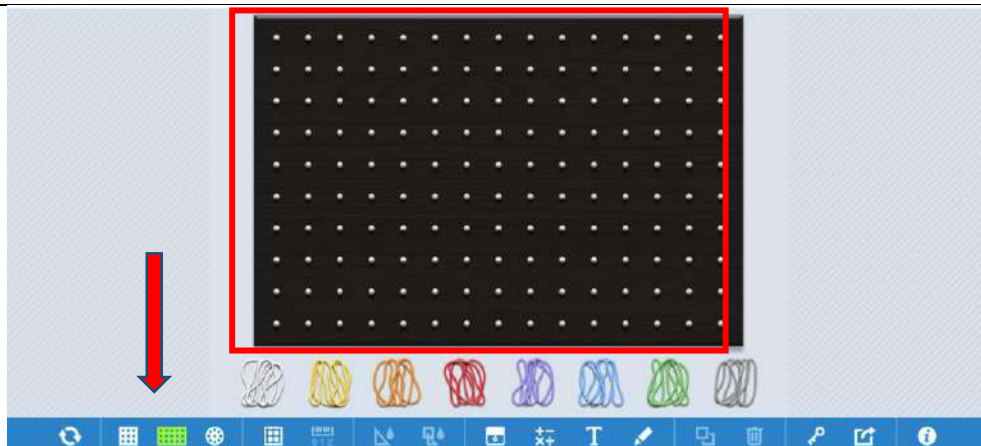


2. Una vez que ingresen al enlace, les aparecerá el menú principal:

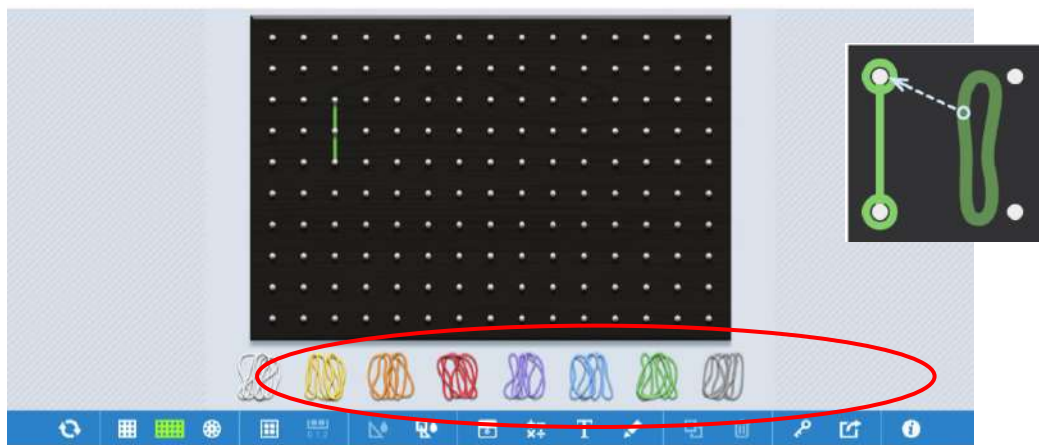


El nombre, atajo y descripción de cada una de estas herramientas se encuentra en la siguiente tabla:

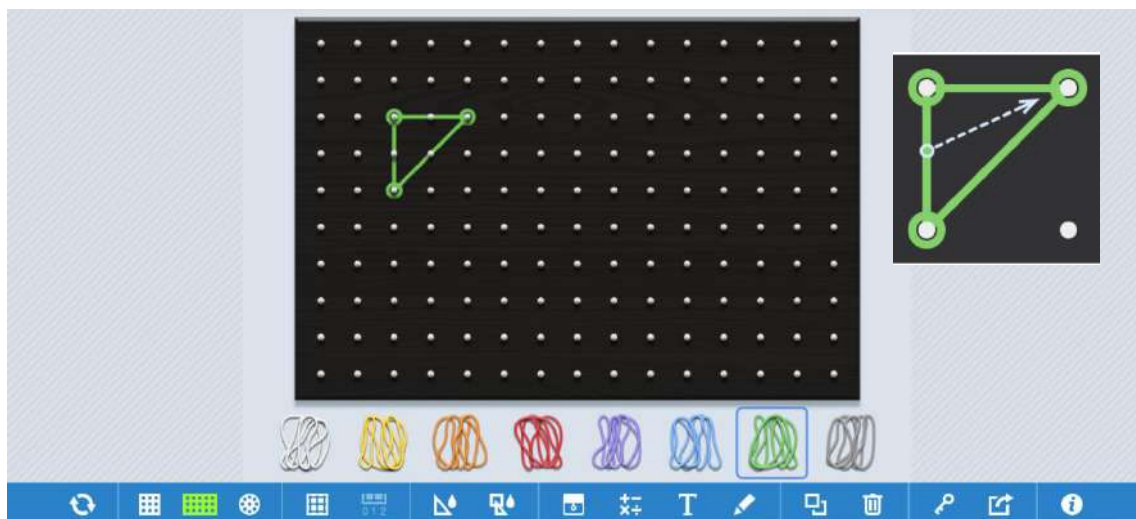
N°	HERRAMIENTA	ATAJO	DESCRIPCIÓN
1	Comenzar de nuevo	Esc	Limpie el espacio de trabajo o vuelva a cargar el código compartido.
2	Forma del tablero	1,2,3	Elija tablero cuadrado, rectángulo grande o circular.
3	Red	GRAMO	Muestre líneas de cuadrícula en tableros.
4	Número de cuadrícula	Norte	Muestre números a lo largo de los ejes x e y.
5	Herramienta de relleno	F	Rellenar o rellenar las bandas seleccionadas.
6	Completar toda la herramienta	A	Llene o desvele todas las bandas del tablero.
7	Herramienta de cubierta	H	Agregue una cubierta de tamaño variable para ocultar o mostrar marcos y contadores.
8	Herramienta de texto matemático	Mi	Abra un teclado para crear expresiones y ecuaciones. El uso del teclado para agregar números y símbolos también funciona. Consejo: toca dos veces tu texto para editarlo.
9	Herramienta de escritura	T	Ingresa texto usando su teclado. Consejo: toca dos veces tu texto para editarlo.
10	Herramientas de dibujo	W	Abra u oculte las herramientas de dibujo.
11	Duplicar	D	Duplicar elementos seleccionados.
12	Basura	Retroceso, borrar	Eliminar elementos seleccionados.
13	Compartir código	K	Abra el trabajo compartido usando un código.
14	Cuota	S	Comparta su trabajo con una imagen, un enlace o un código.
15	Información	I	Ver instrucciones y otra información sobre esta aplicación.
3. Una vez conocidas cada una de las funciones de las herramientas del menú principal, deberán seleccionar la Forma de tablero 2, que será aquella con la cual trabajaremos.			



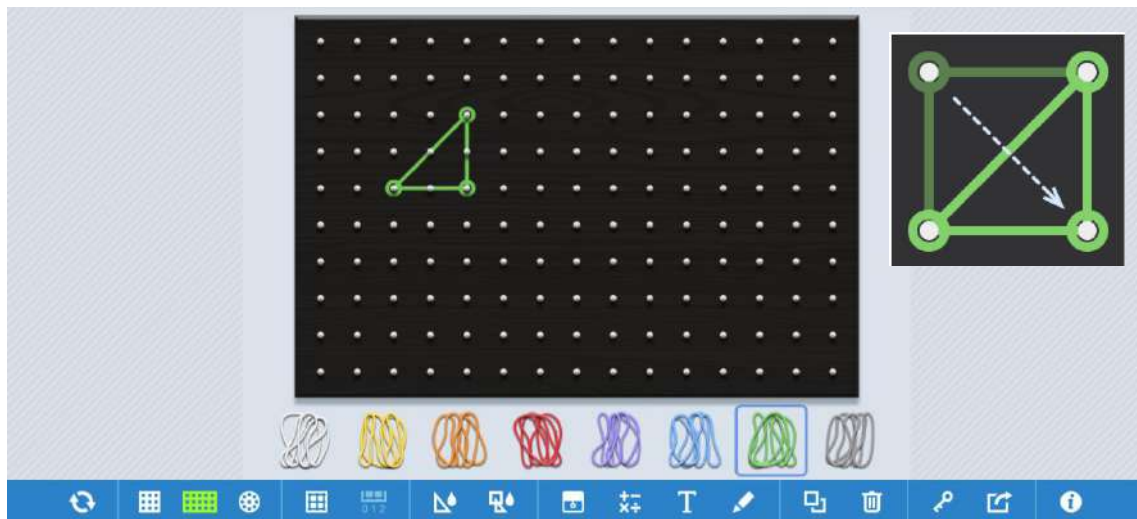
4. Para agregar una banda en el geoplano, se arrastra y suelta una de las bandas en el tablero.



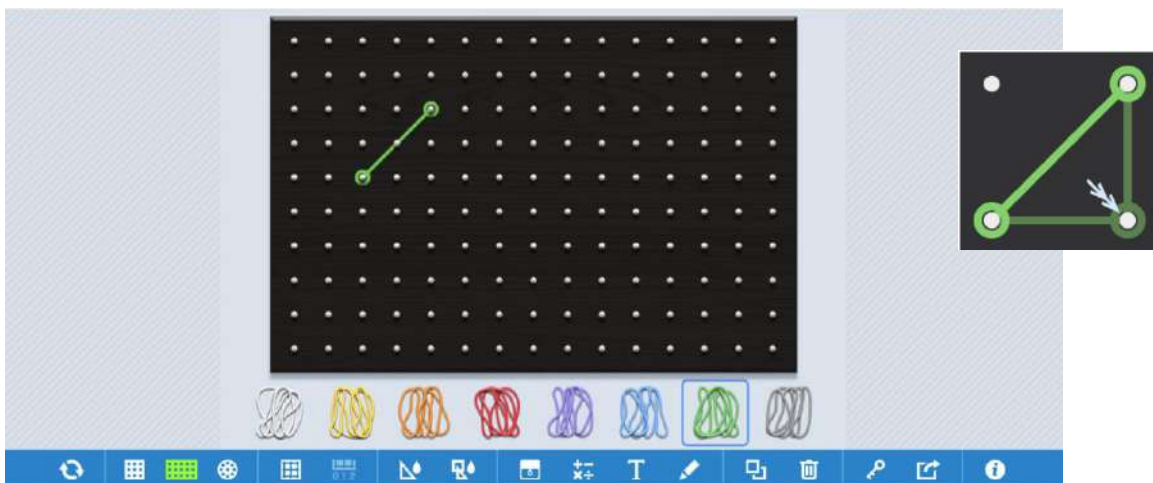
5. Si deseas crear un nuevo vértice, sólo arrastra desde una línea.



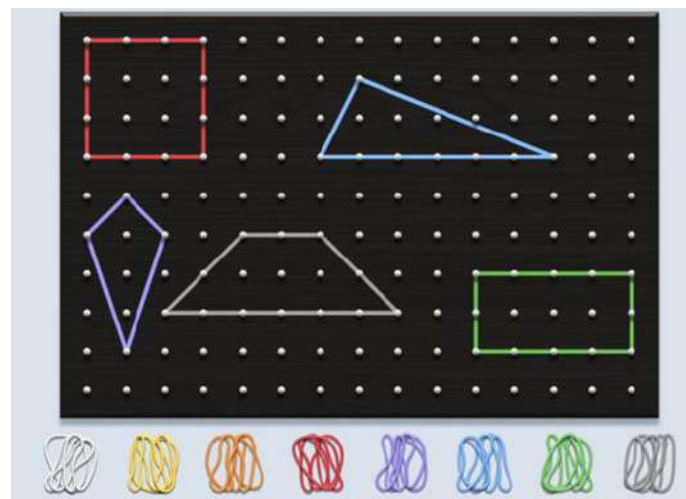
6. Si deseas mover uno de los vértices, sólo tienes que arrastrarlo de una clavija a otra.



7. Si quieres eliminar un vértice sólo tócalo dos veces.



8. De esta manera, podrás formar distintas figuras geométricas dentro del geoplano, seleccionando la banda del color que desees utilizar.



Apéndice L. Sesiones de clase sobre procesos de generalización

**SESION DE APRENDIZAJE:
A GENERALIZAR PATRONES**

I.- Datos Informativos:

Docente: Diego Alcas Zapata y Lady Rafael Febres
 Área: Matemática
 Grado: 2° de secundaria
 Fecha: 15/11/2021

II.- PROPÓSITOS DE APRENDIZAJE, CRITERIOS, EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

COMPETENCIA/Capacidad	DESEMPEÑOS PRECISADOS	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	INSTRUMENTO DE VALORACION
RESUELVE PROBLEMAS REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO • Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas. • Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. • Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. • Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	• Establece relaciones entre datos, regularidades, valores desconocidos, y las transforma a expresiones algebraicas. • Expresa de forma simbólica y verbal, su comprensión sobre la regla general de los patrones. • Selecciona y combina procesos de generalización para determinar la regla general que defina un patrón. • Plantea y justifica afirmaciones sobre la regularidad identificada, así como la regla general hallada.	Las estudiantes resuelven la situación problemática empleando procesos de generalización.	Lista de cotejo

COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS	
Gestiona su aprendizaje de manera autónoma - Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas - Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje Convive y participa democráticamente - Delibera sobre asuntos públicos	
Enfoques Transversales	Valores/acciones observables
Enfoque Ambiental	Justicia y solidaridad - Emitir opinión de sus acciones y actitudes que impactan al medio ambiente su actuar en beneficio de las personas

III.- Momentos de la sesión:

MOMENTOS	ESTRATEGIAS	TIEMPO
	El docente inicia la sesión saludando a las estudiantes, seguidamente, se establecen algunos acuerdos de convivencia para el desarrollo de las actividades que se han propuesto. A continuación, se presentan algunos ejemplos. • Mantener el micrófono apagado, salvo que la alumna este participando. • Respetar la opinión de sus compañeros. • Mantener una participación activa y un vocabulario adecuado al momento de expresarse. • Respetar e tiempo estipulado para cada una de las actividades. <u>Motivación</u> Como motivación el docente presenta un fragmento de vídeo que muestra una situación en la que se pide hallar regla general ante un patrón dato. [Video (0:07 – 0:35): https://www.youtube.com/watch?v=zwK8i1Bi8iY&ab_channel=MathUniverse]	

Problematización

Lucero, quien cursa el 2° grado de una institución educativa en Piura, es una estudiante que le gusta aprender nuevas cosas navegando por Internet. Cierta día, encontró una página web que simula el funcionamiento de un geoplano. Recordó que su profesora de matemáticas quiso trabajar una actividad en el área de álgebra, pero no contaba con el material necesario para hacerlo, pues se requería del uso de muchos geoplanos como material manipulativo. Lucero desea mostrarle a su profesora la funcionalidad de este geoplano virtual, para ello quiere resolver una actividad denominada “¡A generalizar patrones!”. La actividad presenta un patrón geométrico en el que se pide hallar la regla general que describa el comportamiento de algunas de sus peculiaridades. ¡Ayudemos a Lucero a resolver la actividad!

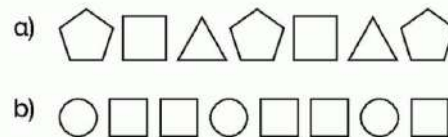
Para la comprensión de la situación, el docente fomenta la participación de las estudiantes a través de la lectura a la situación presentada. Luego de esto, propone: ¿De qué trata la situación planteada?, ¿Qué nos están pidiendo realizar?, ¿Qué pasos debemos seguir para dar respuesta a lo que pide la situación? Se escuchan las respuestas y se contrastan con la situación presentada, para llegar así a un acuerdo general. Además, el docente explica lo referido a generalización.

Saberes previos

Luego de que las estudiantes tengan clara la situación y lo que esta pide, el docente recoge los saberes previos, para ello presenta los siguientes ejercicios.

- ① Hallar «x»:
4 ; 7 ; 10 ; 13 ; x
- ② ¿Qué número continúa?
42 ; 38 ; 34 ; 30 ; ...
- ③ Hallar «x»:
8 ; 16 ; 32 ; 64 ; x

- ① Dibuja las tres formas que siguen para continuar el patrón.

**Propósito y organización**

Luego de que el docente ha escuchado atentamente a las estudiantes y se hayan discutido las respuestas, se presenta el propósito de la sesión: “En la sesión de hoy realizaremos procesos de generalización y procesos de visualización tomando como material didáctico el geoplano virtual”.

Desarrollo	PROCESOS DIDÁCTICOS: Comprensión del Problema Para la familiarización y comprensión del problema el docente propone lo siguiente: • Acceder al geoplano virtual a través de https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/, se pide que interactúen con las funciones que presenta el sitio web. • Luego de que las estudiantes hayan tenido un primer acercamiento al material didáctico virtual, el docente explica la guía de uso. • Posteriormente se presenta la actividad: https://sites.google.com/view/generalizamos-patrones/actividad-1 Búsqueda y ejecución de estrategias Entendida la situación y teniendo en cuenta qué es lo que deben hacer las estudiantes, se les pide buscar alguna estrategia para posteriormente ejecutarla y dar solución a lo que la situación pide. Luego, se forman grupos de trabajo. A partir de ello, se plantean las siguientes cuestiones: • ¿Qué debemos hacer para dar respuesta a la situación planteada? • ¿Cómo formamos el patrón indicado? • ¿Cómo llevamos el registro de datos? • ¿De qué forma encontramos la regla general pedida? Socialización de Representaciones (de lo concreto a lo simbólico) Luego de haber planteado la regla general que define cada particularidad de las figuras, los resultados son compartidos con todas las estudiantes. Reflexión y Formalización A partir de los datos obtenidos en los pasos anteriores, se trabajan las siguientes cuestiones: ¿Dónde tuvimos dificultades y qué podemos hacer para mejorarlas? ¿Cómo aplicamos los procesos de generalización para dar respuesta a la situación?	70 min
------------	--	--------

Cierre

Evaluación y Metacognición

- El docente evalúa la solución de la situación problemática con una lista de cotejo:

Criterios de evaluación	SI	NO
- Establece relaciones entre datos, regularidades, valores desconocidos, y las transforma a expresiones algebraicas.		
- Expresa de forma simbólica y verbal, su comprensión sobre la regla general de los patrones.		
- Selecciona y combina procesos de generalización para determinar la regla general que defina un patrón.		
- Plantea y justifica afirmaciones sobre la regularidad identificada, así como la regla general hallada.		

Se dialoga con las estudiantes a partir de las siguientes preguntas:
¿Qué hemos aprendido el día de hoy?
¿Qué dificultades has tenido?

10 min

IV.-Materiales y recursos:

Laptop, diapositivas PPT, YouTube

SESIÓN DE APRENDIZAJE:
“UTILIZAMOS EL GEOPLANO VIRTUAL PARA DETERMINAR PATRONES”

I.- Datos Informativos:

Docente: Diego Alcas Zapata y Lady Rafael Febres

Área: Matemática

Grado: 2° de secundaria

Fecha: 18/11/2021

II.- PROPÓSITOS DE APRENDIZAJE, CRITERIOS, EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

COMPETENCIA/Capacidad	DESEMPEÑOS PRECISADOS	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE	INSTRUMENTO DE VALORACION
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio - Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas. - Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. - Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. - Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y	• Establece relaciones entre datos, regularidades, valores desconocidos, y las transforma a expresiones algebraicas. • Expresa de forma simbólica y verbal, su comprensión sobre la regla general de los patrones. • Selecciona y combina procesos de generalización para determinar la regla general que defina un patrón. • Plantea y justifica afirmaciones sobre la regularidad identificada, así como la regla general hallada.	Las estudiantes resuelven la situación problemática empleando procesos de generalización.	Lista de cotejo

equivalencia.			
COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS			
Gestiona su aprendizaje de manera autónoma - Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas - Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje Convive y participa democráticamente - Delibera sobre asuntos públicos			
Enfoques Transversales	Valores/acciones observables		
Enfoque Ambiental	Justicia y solidaridad - Emitir opinión de sus acciones y actitudes que impactan al medio ambiente su actuar en beneficio de las personas		

III.- Momentos de la sesión:

Momentos	ESTRATEGIAS	TIEMPO
Inicio	<u>Propósito y organización</u> El docente inicia la sesión dando la bienvenida a las estudiantes y presenta los aprendizajes esperados relacionados a las competencias, las capacidades y desempeños. Luego, señalan el propósito de la sesión: “Realizamos procesos de generalización por medio de habilidades y procesos de visualización, tomando como material didáctico el <i>Geoplano virtual</i>” Además, presentan los siguientes acuerdos de convivencia y promueve su cumplimiento: ✓ Mantener el micrófono apagado, salvo que la alumna este participando. ✓ Respetar la opinión de sus compañeras. ✓ Mantener una participación activa y un vocabulario adecuado al momento de expresarse. ✓ Respetar el tiempo estipulado para cada una de las actividades. <u>Motivación y saberes previos</u> Para rescatar los conocimientos previos y al mismo tiempo motivar a las alumnas, ellas ingresarán a la plataforma de QUIZZIZ, donde responderán algunas preguntas relacionadas a lo visto en sesión anterior. https://quizizz.com/join	30 minutos

Las preguntas se encuentran en la parte final de este documento.

Problematización

Sofía y Lorena, dos alumnas de 2do grado de secundaria, se encuentran armando escuadras en forma de L de distintos tamaños, utilizando sus geoplanos. Ambas armaron 5 y 3 escuadras respectivamente. Si Sofía le dice a Lorena que, si continúan armando escuadras, siguiendo la misma secuencia, su escuadra número 100 será igual a la escuadra número 50 que ella tenga. ¿Será cierta esta afirmación? ¿Existe alguna forma de verificarlo sin armar todas las escuadras?

SOFÍA

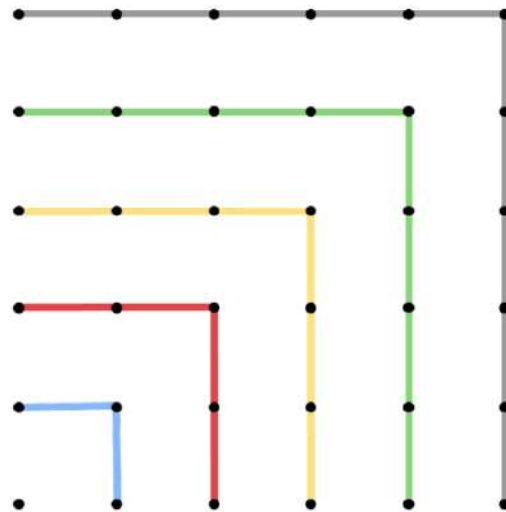


IMAGEN 1

LORENA

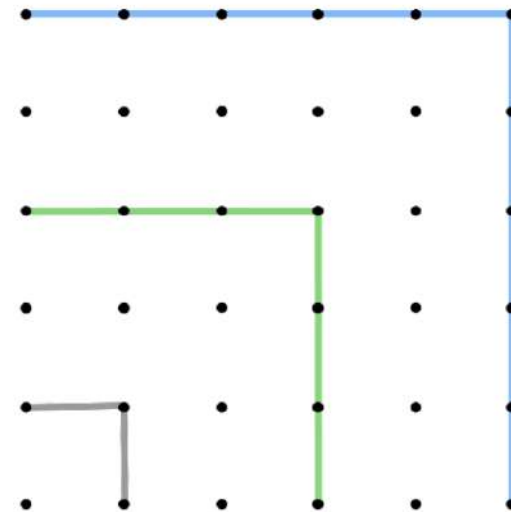


IMAGEN 2

Desarrollo	<u>Gestión y acompañamiento de la competencia</u> <i>PROCESOS DIDÁCTICOS:</i> <i>Comprensión del Problema</i> Las alumnas analizan la situación problemática. El docente pregunta: - ¿Qué entienden de la situación? - ¿Qué nos piden determinar? - ¿Qué procedimientos o pasos debemos seguir? <i>Búsqueda y ejecución de estrategias</i> 1. Utilizamos el geoplano virtual para construir las secuencias de las escuadras de Sofía y Lorena. 2. Completamos una tabla con los datos del número de puntillas que forman las escuadras y el número de espacios entre las puntillas que se obtienen siguiendo la secuencia, tanto para Sofía (IMAGEN 1) como para Lorena (IMAGEN 2). 3. Encontramos el patrón o regularidad de cada secuencia. 4. Respondemos a la situación problemática <i>Socialización de Representaciones (de lo concreto a lo simbólico)</i> ➤ El docente pide a las alumnas que ingresen a la plataforma de Google Sites https://sites.google.com/view/generalizamos-patrones/actividad-2 , donde encontrarán esta actividad y los pasos a seguir para resolver la situación problemática. ➤ Las alumnas podrán utilizar el geoplano virtual desde la misma página de Google Sites o acceder a este mediante el siguiente enlace: https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/ ➤ El docente da indicaciones para que las alumnas trabajen de forma individual y completen la siguiente tabla:	75 minutos
------------	---	------------

A partir de las indicaciones brindadas previamente, completar la siguiente *tabla N°. 2*:

LETRAS \ FIGURAS		1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	100	n
P	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA EN LA FIGURA 1.	3	5	7							41		$2n + 1$
Q	NÚMERO DE ESPACIOS ENTRE UNA PUNTILLA Y OTRA EN TODA LA ESCUADRA. EN LA FIGURA 1.	2	4	6				49		100			
R	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE SE ENCUENTRAN ENTRE DOS ESCUADRAS CONSECUTIVAS. EN LA FIGURA 2.	5	9	13						41			
S	NÚMERO DE PUNTILLAS QUE FORMAN CADA ESCUADRA. EN LA FIGURA 2.	3	7	11								399	

 *al dar click sobre la tabla te redireccionará a un documento excel en el que podrás plasmar tus respuestas.

Reflexión y Formalización

- El docente le pedirá a las alumnas que ingresen los patrones o regularidades obtenidas en la tabla en un formulario de Google: <https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSeM0gfLDDfdq9IjjjqOie9Y4mBa-UXJaVliWCXGlpRLMbPTA/viewform>

	8. Escriban al frente de cada letra: P, Q, R, S, con sus propias palabras, el patrón o regularidad que encontraron, para ir obteniendo los resultados numéricos en cada una de las casillas vacías para cada fila de la tabla No. 2. "Generalización para secuencia de escuadras en el geoplano".  ladyrafael2017@gmail.com (no compartidos)  Cambiar de cuenta P: Tu respuesta Q: Tu respuesta R: Tu respuesta S: Tu respuesta Enviar Borrar formulario	
	Finalmente se responde a la situación problemática y se reflexiona sobre ella.	

Cierre

Evaluación y Metacognición

- El docente evalúa la solución de la situación problemática con una lista de cotejo:

Criterios de evaluación	SI	NO
- Establece relaciones entre datos, regularidades, valores desconocidos, y las transforma a expresiones algebraicas.		
- Expresa de forma simbólica y verbal, su comprensión sobre la regla general de los patrones.		
- Selecciona y combina procesos de generalización para determinar la regla general que defina un patrón.		
- Plantea y justifica afirmaciones sobre la regularidad identificada, así como la regla general hallada.		

Finalmente, se realiza la metacognición, donde las alumnas responderán las siguientes preguntas:

- ¿Qué aprendimos en esta sesión?

- ¿Cómo lo aprendimos?

- ¿Qué dificultades tuve durante el desarrollo de la sesión?

- ¿Podemos utilizar lo aprendido en la vida cotidiana?

15 minutos

IV.-Materiales:

✓ Diapositivas.

Preguntas QUIZZ

Preguntas Quizziz:

1. Según lo visto en clase, una secuencia es...

- a) Norma que permite que un conjunto de elementos pertenezca a la secuencia
- b) Figuras que al tener las mismas características son agrupadas en el mismo conjunto
- c) Grupo de elementos que se organiza u ordena de una manera especial, en que todos cumplen una condición.

2. Según lo visto en clase, un patrón es...

- a) Norma que permite que un conjunto de elementos pertenezca a la secuencia
- b) Figuras que al tener las mismas características son agrupadas en el mismo conjunto
- c) Grupo de elementos que se organiza u ordena de una manera especial, en que todos cumplen una condición.

3. Determine el patrón de la siguiente secuencia numérica:

1,3,5,7,9,11, ...

- a) Sumar 3 al número anterior
- b) Sumar 2 al número anterior.
- c) Multiplicar por 2 el número anterior

4. ¿Cuántos palitos tendrá el paso 4?



Figura 1

Figura 2

Figura 3

- a) 12
- b) 10
- c) 9
- d) 8

5. ¿Cuál es la relación entre el número de triángulos y las figuras ?



Figura 1

Figura 2

Figura 3

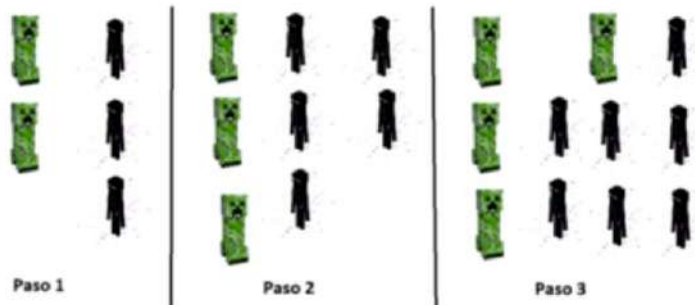
- a) Hay que sumar 2 triángulos a cada figura siguiente.
- b) La cantidad de triángulos es la misma que el número de figura.
- c) Los triángulos son cada vez menos a medida que se va avanzando con las siguientes figuras.

6. Marque todos los números que pertenezcan a la siguiente secuencia:

1,2,4,6,8,10, ...

- a) 12
- b) 18
- c) 16
- d) 15
- e) 21

7. ¿Cuál es el patrón en la siguiente imagen? Explica el procedimiento que ha seguido para encontrarlo.



Respuesta: -----

8. En la secuencia 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27 ... ¿cuál sería el término 99?

- a) 392
- b) 384
- c) 400
- d) 386

Apéndice M. Rúbricas de evaluación del Test 1

[illegible]

Apéndice N. Rúbrica de evaluación del Test 2

[illegible]