



UNIVERSIDAD  
DE PIURA

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Modelos estadísticos de crecimiento de los langostinos en  
una piscifactoría**

Tesis para optar el Título de  
Ingeniero Industrial y de Sistemas

**Ana Luisa Cubas Córdova**

**Asesor:**  
**Dr. Ing. Ismael Sánchez Rodríguez-Morcillo**

**Piura, abril de 2020**





Este trabajo ha sido auspiciado y financiado por el CONCYTEC, el FONDECYT y el Banco Mundial a través del “Proyecto de Mejoramiento y Ampliación de los Servicios del Sistema Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica 8682PE”, bajo el contrato 49-2018.



**GRUPO BANCO MUNDIAL**



## Resumen Analítico-Informativo

### **Modelos estadísticos del crecimiento de los langostinos en una piscifactoría**

**Ana Luisa Cubas Córdova**

**Asesor: Dr. Ing. Ismael Sánchez Rodríguez-Morcillo**

**Tesis.**

**Título de Ingeniero Industrial y de Sistemas**

**Universidad de Piura. Facultad de Ingeniería.**

**Piura, Abril de 2020**

**Palabras claves:** modelos / estadística / regresión / langostinos / piscifactorías / acuicultura

**Introducción:** El sector acuícola ha experimentado un importante crecimiento en las últimas décadas. En el Perú, el cultivo de langostinos en piscifactorías se realiza en los departamentos de Tumbes y Piura, siendo una de las especies con mayor volumen e ingresos de exportación. El cultivo de langostino se realiza en estanques, en los que es posible controlar algunas de las variables que intervienen en su crecimiento, con el fin de alcanzar el mayor peso de cosecha. Es necesario contar con herramientas que permitan obtener una estimación confiable del peso que tendrá durante su cultivo, a fin de mejorar la toma de decisiones sobre la producción.

**Metodología:** Se realizó la construcción y evaluación de los modelos de crecimiento del langostino. Se utilizaron los modelos de crecimiento de Gompertz, von Bertalanffy, Logístico y Brody, ampliamente utilizados para describir el crecimiento de especies biológicas. Posteriormente se incluyó un modelo polinomial. El ajuste de la data a los modelos se realizó con métodos de estimación basados en los algoritmos de Levenverg-Marquardt, Gauss-Newton, y mínimos cuadrados. Los modelos se evaluaron comparando su coeficiente de determinación corregido. Los cálculos se realizaron con el software Octave.

**Resultados:** Se obtuvieron modelos estadísticos de crecimiento que permiten estimar el crecimiento de los langostinos durante su cultivo, utilizando los datos del peso ganado en las semanas previas. Los modelos construidos tienen un alto grado de ajuste al crecimiento de los langostinos. La precisión de las estimaciones mejora al utilizar el tiempo y el peso del langostino en las semanas previas como regresores del modelo. La implementación del modelo requiere poca inversión y permite determinar el momento óptimo de cosecha, reduciendo los costos y mejorando la toma de decisiones sobre la producción.

**Conclusiones:** La tesis propone modelos estadísticos que permiten predecir el crecimiento de los langostinos durante su cultivo. La implementación de estos modelos beneficiará al proceso de cultivo del langostino al mejorar la toma de decisiones y permitir determinar el momento óptimo de cosecha.

**Fecha de elaboración del resumen:** 24 de Enero de 2020

## Analytical-Informative Summary

**Modelos estadísticos del crecimiento de los langostinos en una piscifactoría**

**Ana Luisa Cubas Córdova**

**Advisor: Dr. Ing. Ismael Sánchez Rodríguez-Morcillo**

**Tesis.**

**Título de Ingeniero Industrial y de Sistemas**

**Universidad de Piura. Facultad de Ingeniería.**

**Piura, Abril de 2020**

**Keywords:** growth models / statistics / regression / shrimp / fish farms / aquaculture

**Introduction:** Aquaculture sector has experienced an important growth over the past decades. In Peru, Tumbes and Piura regions are the principal locations for shrimp farming, and shrimp is one of the products with the highest export volume and income. Shrimp production takes place in ponds, where is possible to control the variables that affect its growth, in order to increase shrimp harvest weight. It is necessary to have a reliable prediction of shrimp weight during the farming period to improve decision making on the production.

**Methodology:** Shrimp growth models were constructed and evaluated. Growth models used in this study include the models of Gompertz, von Bertalanffy, Logistic and Brody, commonly used for describing biological species. A polynomial model is included afterwards. Model fitting was performed using estimation methods based in Levenverg-Marquardt, Gauss-Newton and least squares algorithms. The models were evaluated by comparing their adjusted coefficient of determination. All the calculations were done in Octave software.

**Results:** Statistical growth models for shrimp growth estimation during its farming were obtained, using data of the shrimp weight in the previous weeks. The models demonstrated good fit to the data of shrimp growth. Using shrimp weight in the previous weeks and time as variables increased the accuracy of the models. The implementation of the model requires low investment, and it will allow reducing production costs, to determine the optimal time for harvest and to improve decision making over the farming process.

**Conclusions:** This thesis gives statistical growth models to predict shrimp growth during its farming. The implementation of these models will benefit the shrimp farming process by improving decision-making and determine the optimal time of harvest.

**Summary date:** January 24, 2020

## Tabla de contenido

Introducción.....	1
Capítulo 1. Acuicultura de langostinos.....	3
1.1. Acuicultura en el mundo .....	3
1.2. Acuicultura en el Perú.....	4
1.3. Acuicultura de langostinos .....	5
1.3.1. Producción de langostinos en el mundo.....	6
1.3.2. Producción de langostinos en el Perú.....	7
1.4. Producción de langostino en piscifactorías .....	8
1.4.1. Planificación de la producción .....	8
1.4.2. Compra de larva .....	8
1.4.3. Recepción de larva .....	8
1.4.4. Aclimatación .....	8
1.4.5. Precría.....	8
1.4.6. Engorde .....	9
1.4.7. Cosecha .....	9
1.5. Problemas en el control del crecimiento de los langostinos.....	9
Capítulo 2. Curvas de crecimiento .....	11
2.1. Modelos de crecimiento .....	11
2.1.1. Modelo de Gompertz.....	11
2.1.2. Modelo de Brody.....	12
2.1.3. Modelo de Von Bertalanffy.....	13
2.1.4. Modelo Logístico .....	14
2.2. Modelos de regresión lineal y no lineal.....	16
2.2.1. Modelo de regresión lineal.....	16
2.2.2. Modelo de regresión no lineal.....	17
2.3. Algoritmos de estimación no lineal.....	18

2.3.1.	Método de descenso por gradiente .....	19
2.3.2.	Método de la región de confianza .....	19
2.3.3.	Método de Gauss Newton .....	19
2.3.4.	Método de Levenberg-Marquardt .....	20
Capítulo 3.	Modelización del crecimiento de los langostinos .....	21
3.1.	Modelo determinista global.....	22
3.1.1.	Algoritmos de estimación.....	22
3.1.2.	Linealización de los modelos .....	23
3.1.3.	Construcción de los modelos.....	23
3.1.4.	Comparación de los modelos .....	30
3.2.	Modelos basados en el peso de semanas previas .....	33
3.2.1.	Modelos utilizando el peso de la semana 1 .....	33
3.2.2.	Modelo utilizando el peso de las 3 primeras semanas.....	60
3.2.3.	Modelo utilizando el peso de las 5 primeras semanas.....	68
3.2.4.	Modelos utilizando los pesos de n semanas previas .....	75
3.3.	Implementación del modelo .....	79
3.3.1.	Costo de implementación .....	79
3.3.2.	Beneficios esperados .....	80
Conclusiones.....		83
Referencias bibliográficas .....		85

## Índice de Figuras

Figura 1. Producción mundial de la acuicultura al 2016. ....	3
Figura 2. Producción acuícola por departamento. ....	4
Figura 3. Principales especies cultivadas. ....	5
Figura 4. <i>Litopenaeus vannamei</i> . ....	6
Figura 5. Producción acuícola mundial de langostinos. ....	6
Figura 6. Producción mundial de langostinos. ....	6
Figura 7. Producción de langostino blanco en Perú 2007-2016. ....	7
Figura 8. Producción acuícola en Tumbes y Piura en el año 2016. ....	7
Figura 9. Modelo de Gompertz. ....	12
Figura 10. Modelo de Brody. ....	13
Figura 11. Modelo de von Bertalanffy. ....	14
Figura 12. Modelo Logístico. ....	15
Figura 13. Modelos de crecimiento. ....	15
Figura 14. Peso de los langostinos por semana. ....	21
Figura 15. Estimación del modelo de Gompertz. ....	24
Figura 16. Error de predicción del modelo de Gompertz. ....	24
Figura 17. Estimación del modelo de Brody. ....	25
Figura 18. Error de predicción del modelo Brody. ....	26
Figura 19. Estimación del modelo von Bertalanffy. ....	26
Figura 20. Error de predicción del modelo von Bertalanffy. ....	27
Figura 21. Estimación del modelo Logístico. ....	27
Figura 22. Error de predicción del modelo Logístico. ....	28
Figura 23. Modelo WLS determinista. ....	29
Figura 24. Errores de predicción del modelo WLS. ....	30
Figura 25. Comparación de los modelos. ....	32
Figura 26. Modelo Gompertz dividiendo por el peso de la semana 1. ....	34

Figura 27. Errores de predicción del modelo Gompertz. ....	34
Figura 28. Modelo Gompertz restando el peso de la semana 1. ....	35
Figura 29. Errores de predicción del modelo Gompertz. ....	35
Figura 30. Modelo Gompertz con peso de la semana 1 como regresor. ....	36
Figura 31. Errores de predicción del modelo Gompertz. ....	37
Figura 32. Precisión por semana del modelo Gompertz. ....	37
Figura 33. Modelo Brody dividiendo por el peso de la semana 1. ....	38
Figura 34. Errores de predicción del modelo Brody. ....	39
Figura 35. Modelo Brody restando el peso de la semana 1. ....	39
Figura 36. Errores de predicción del modelo Brody. ....	40
Figura 37. Modelo Brody con el peso de la semana 1 como regresor. ....	40
Figura 38. Errores de predicción del modelo Brody. ....	41
Figura 39. Precisión por semana del modelo Brody. ....	42
Figura 40. Modelo von Bertalanffy dividiendo por el peso de la semana 1. ....	42
Figura 41. Errores de predicción del modelo von Bertalanffy. ....	43
Figura 42. Modelo von Bertalanffy restando el peso de la semana 1. ....	43
Figura 43. Errores de predicción del modelo von Bertalanffy. ....	44
Figura 44. Modelo von Bertalanffy con el peso de la semana 1 como regresor. ....	45
Figura 45. Errores de predicción del modelo von Bertalanffy. ....	45
Figura 46. Precisión por semana del modelo von Bertalanffy. ....	46
Figura 47. Modelo Logístico dividiendo por el peso de la semana 1. ....	46
Figura 48. Errores de predicción del modelo Logístico. ....	47
Figura 49. Modelo Logístico restando el peso de la semana 1. ....	48
Figura 50. Errores de predicción del modelo Logístico. ....	48
Figura 51. Precisión por semana del modelo Logístico. ....	49
Figura 52. Errores de predicción del modelo Logístico. ....	49
Figura 53. Precisión por semana del modelo Logístico. ....	50
Figura 54. Modelo WLS dividiendo por el peso de la semana 1. ....	51
Figura 55. Error de predicción del modelo WLS. ....	51
Figura 56. Modelo WLS con diferencia del peso de semana 1. ....	52
Figura 57. Errores de predicción del modelo WLS. ....	53
Figura 58. Modelo WLS con $t$ y $y_1$ como regresores aditivos. ....	53
Figura 59. Errores de predicción del modelo WLS. ....	54

Figura 60. Gráficos de residuos del modelo WLS.....	55
Figura 61. Modelo WLS con $t$ y $y_1$ como regresores multiplicativos.....	55
Figura 62. Gráficos de residuos del modelo WLS.....	56
Figura 63. Errores de predicción del modelo WLS.....	57
Figura 64. Precisión por semana del modelo WLS.....	57
Figura 65. Modelo de predicción del crecimiento a partir de la semana 2.....	59
Figura 66. Análisis de normalidad de residuos en la semana 2.....	59
Figura 67. Análisis de normalidad de residuos en la semana 5.....	60
Figura 68. Análisis de normalidad de residuos en la semana 10.....	60
Figura 69. Modelo WLS utilizando los pesos de las 3 primeras semanas.....	61
Figura 70. Residuos vs valores previstos y Residuos vs semana.....	62
Figura 71. Error de predicción del modelo.....	62
Figura 72. Precisión del modelo.....	63
Figura 73. Modelo utilizando los pesos de las 3 primeras semanas.....	64
Figura 74. Gráficos de residuos.....	64
Figura 75. Error de predicción del modelo.....	65
Figura 76. Precisión del modelo.....	65
Figura 77. Predicción del crecimiento a partir de la semana 4.....	66
Figura 78. Análisis de normalidad de residuos en la semana 4.....	67
Figura 79. Análisis de normalidad de residuos en la semana 7.....	67
Figura 80. Análisis de normalidad de residuos en la semana 11.....	68
Figura 81. Modelo con $t$ y el peso de las 5 semanas como regresores.....	68
Figura 82. Gráficos de residuos.....	69
Figura 83. Error de predicción del modelo.....	69
Figura 84. Precisión del modelo.....	70
Figura 85. Modelo con los pesos hasta la semana 5 como regresores.....	70
Figura 86. Gráficos de residuos del modelo.....	71
Figura 87. Error de predicción del modelo.....	71
Figura 88. Precisión del modelo.....	72
Figura 89. Modelo de predicción del crecimiento desde la semana 6.....	73
Figura 90. Análisis de normalidad de residuos de la semana 6.....	73
Figura 91. Análisis de normalidad de residuos de la semana 7.....	74
Figura 92. Análisis de normalidad de residuos de la semana 20.....	74

Figura 93. Análisis de normalidad de residuos de la semana 20 .....	75
Figura 94. Modelo de predicción del crecimiento desde la semana 11. ....	76
Figura 95. Análisis de normalidad de residuos de la semana 11 .....	76
Figura 96. Análisis de normalidad de residuos de la semana 16.....	77
Figura 97. Análisis de normalidad de residuos de la semana 20.....	77
Figura 98. Modelo de predicción del crecimiento desde la semana 16. ....	78
Figura 99. Análisis de normalidad de residuos en la semana 16.....	78
Figura 100. Análisis de normalidad de residuos en la semana 20.....	79



## Índice de Tablas

Tabla 1. Linealización de los modelos .....	23
Tabla 2. $R^2_{adj}$ según modelo y método de estimación .....	30
Tabla.3. Estimación de parámetros de modelos de crecimiento según modelo .....	31
Tabla 4. Estimación del modelo WLS .....	32
Tabla 5. Precisión de los modelos de crecimiento.....	58
Tabla 6. Precisión de los modelos WLS.....	58
Tabla 7 Precisión del modelo de predicción con datos de peso hasta la semana 3. ....	66
Tabla 8. Precisión del modelo con los pesos hasta la semana 5.....	72
Tabla 9. Inversión estimada.....	80
Tabla 10. Incremento del factor de conversión .....	80
Tabla 11. Pérdidas incurridas (US\$) por extender el cultivo de langostino .....	81
Tabla 12. Utilidad operativa de una empresa exportadora de langostinos. ....	82



## **Introducción**

El langostino es una especie que crece en climas cálidos, en aguas con temperatura entre 20° y 29°C. Su producción proviene principalmente de la pesca de captura y la acuicultura. El Perú posee un alto potencial para la producción de langostino, en particular los departamentos de Tumbes y Piura, donde actualmente se realiza su cultivo.

La crianza de langostinos en acuicultura suele realizarse en piscinas o tanques. La ventaja de este método es que pueden controlarse algunas de las variables que afectan su crecimiento, como la temperatura y la cantidad de alimento suministrado. Sin embargo, existen otras variables que no pueden ser controladas.

Una alternativa para monitorear el crecimiento de los langostinos es el uso de modelos estadísticos de crecimiento. La mayoría de estos modelos tienen su origen en la modelización del crecimiento de la población humana, siendo luego utilizados en diferentes campos de estudio, que incluyen el crecimiento de especies biológicas.

Con un modelo de crecimiento correctamente ajustado es posible obtener una predicción del peso promedio del langostino en función de una o más variables que afectan su crecimiento. Modelos de crecimiento comúnmente empleados en biología son los modelos de Brody, Gompertz, Von Bertalanffy y Logístico. Estudios previos han demostrado buenos resultados al ajustar estos modelos al crecimiento de peces y otras especies.

En este estudio se evaluarán los modelos de crecimiento antes mencionados y un modelo polinomial, para ajustarlos al crecimiento del langostino, en términos de peso promedio semanal, por un periodo de veintidós semanas, desde la siembra hasta el momento de la cosecha.



## Capítulo 1

### Acuicultura de langostinos

En este capítulo se expone la situación actual de la acuicultura a nivel mundial y nacional.

#### 1.1. Acuicultura en el mundo

Desde 1980, la contribución de la acuicultura a la producción mundial de peces ha incrementado gradualmente hasta llegar a representar el 46.8% de la producción en el año 2016. Actualmente, la acuicultura es el sector de la producción de alimentos con mayor crecimiento. (FAO, 2018).

La actividad acuícola tiene dos variantes: continental y marítima, de acuerdo al entorno en el que se realiza el cultivo. La acuicultura continental se realiza en agua dulce, generalmente en estanques excavados o tanques. Predomina la cría de peces de aleta y otras especies, como crustáceos, en menor cantidad. Mientras que la acuicultura marítima se realiza en el mar o en zonas adyacentes, como estanques o lagunas con compuerta. Las principales especies cultivadas de esta forma son los moluscos con concha.

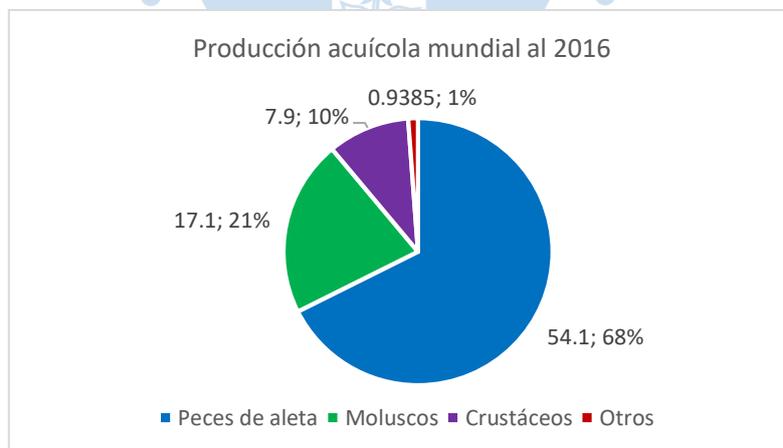


Figura 1. Producción mundial de la acuicultura al 2016.

Fuente: elaboración propia a partir de FAO (2018)

En el 2016 se alcanzó una producción de 80 millones de toneladas de pescado comestible, sin incluir plantas acuáticas. Esto significó una producción de 54.1 millones de toneladas de peces de aleta, 17.1 millones de toneladas de moluscos y 7.9 millones de toneladas de

crustáceos. (Ver Figura 1). El 64,2% de la producción acuícola de ese año provino de la acuicultura continental. (FAO, 2018).

## 1.2. Acuicultura en el Perú

La producción acuícola en el Perú se basa en el cultivo de langostinos, concha de abanico, trucha y tilapia. Se trata de un sector con gran potencial de desarrollo por la variedad de recursos hidrobiológicos, de procedencia marina y otros peces amazónicos, y por las condiciones de clima a lo largo del territorio nacional. (FAO, 2005)

En la costa predomina el cultivo de langostino, en los departamentos de Tumbes y Piura. El registro de la producción acuícola por departamentos del 2016, ubica a Tumbes como el principal productor de camarón blanco y a Piura en la producción de conchas de abanico. En la sierra, predomina el cultivo de trucha, principalmente en los departamentos de Junín y Puno. (Produce Perú, 2017)

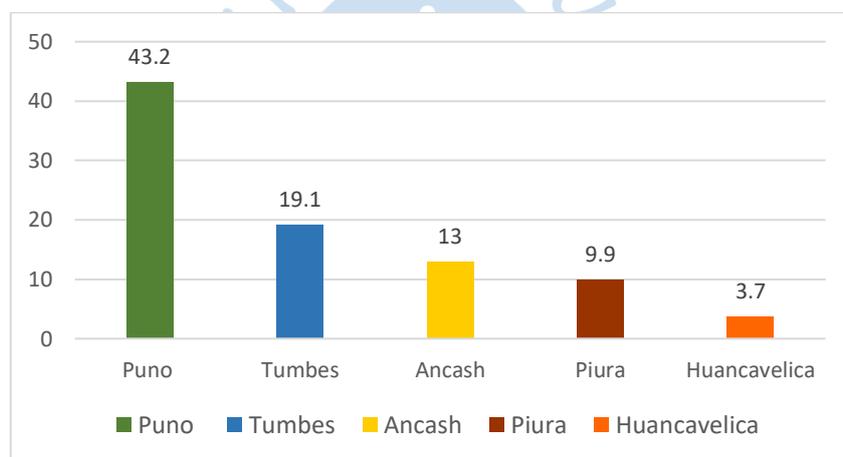


Figura 2. Producción acuícola por departamento.

Fuente: Elaboración propia a partir de Produce Perú (2017).

En 2016, los principales departamentos de producción acuícola fueron Puno, Tumbes, Ancash, Piura y Huancavelica (ver Figura 2). La producción de ese año fue liderada por Puno, con 43 290 toneladas de volumen cosechado. (Produce Perú, 2017)

En el año 2016 el volumen de cosecha fue de 100 191 TM. Las principales especies cosechadas fueron trucha, concha de abanico, langostino, y tilapia, representando el 52%, 20.9%, 20.4%, y 2.9% respectivamente (ver Figura 3). La producción de conchas de abanico y langostinos se redujo en 8.9% y 7.9% respectivamente, con respecto al año anterior. (Produce Perú, 2017)

Del 2007 al 2016, la acuicultura continental ha venido incrementando su participación en el volumen total nacional. En 2007 representó el 23,6% de la cosecha, y en el 2016 alcanzó el 58,7%, superando el volumen proveniente de la maricultura. (Produce Perú, 2017)

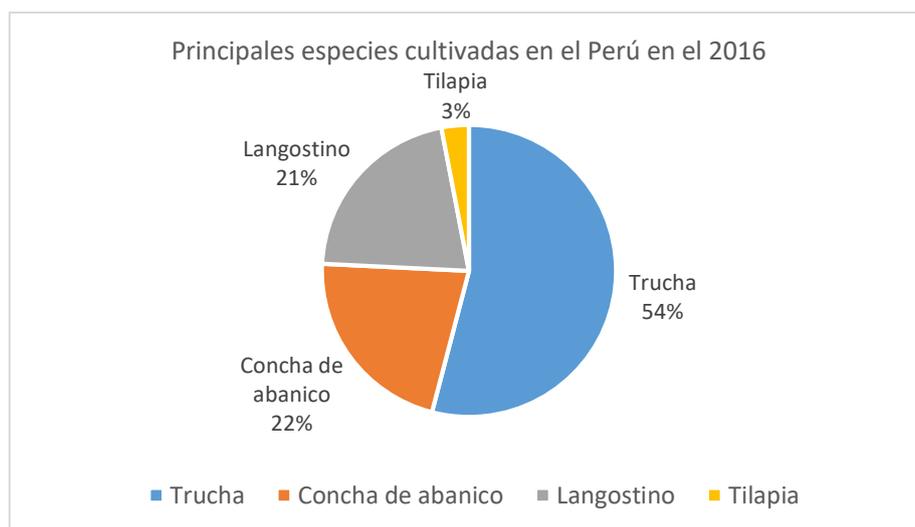


Figura 3. Principales especies cultivadas.

Fuente: Elaboración propia a partir de Produce Perú (2017)

Con respecto a la producción de congelados provenientes de la acuicultura, el principal producto es el langostino, que representó el 68,7% del total de la producción en 2016. Del 2007 a 2016, el langostino fue el principal producto hidrobiológico procesado, seguido por la concha de abanico y la trucha. (Produce Perú, 2017)

El 50% de la producción acuícola peruana es para consumo interno. Las ventas en volumen fueron de 56 750 toneladas en el año 2016. De ese volumen, el 95,8% corresponde a la cosecha proveniente de la acuicultura continental. El producto con mayor volumen en ventas en 2016 fue la trucha. (Produce Perú, 2017)

En cuanto a exportaciones, el producto con mayor volumen de exportación y mayor valor de ingresos es el langostino, seguido de la concha de abanico. Las exportaciones de langostino fueron de 130 millones US\$ FOB en el 2016, con un volumen de 20 062 TMB. En el periodo 2007-2016, el langostino y la concha de abanico fueron las especies de mayor volumen y valor de exportación. Los principales destinos de exportación incluyen a los Estados Unidos, Francia y España. (Produce Perú, 2017).

### 1.3. Acuicultura de langostinos

El langostino o camarón patiblanco, *Litopenaeus vannamei* (Figura 4), es nativo de la costa oriental del Océano Pacífico, desde Sonora, México al Norte, hacia Centro y Sudamérica hasta Tumbes en Perú, en aguas cuya temperatura es normalmente superior a 20 °C durante todo el año. (FAO, 2006)

En su ambiente natural el langostino alcanza hasta 50 g de peso. En producción acuícola se suele cosechar después de 3 o 4 meses al alcanzar un peso de 22g. (Ministerio de la Producción, 2009)

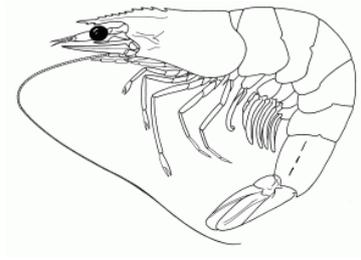


Figura 4. *Litopenaeus vannamei*.

Fuente: FAO (2006)

### 1.3.1. Producción de langostinos en el mundo

Desde 1980 la producción acuícola de langostino con fines comerciales ha crecido notablemente (Figura 5). En los países de América Latina, la producción ha mostrado una tendencia de rápido crecimiento en los años de presencia del fenómeno de El Niño, y declives con la aparición de enfermedades en los años más fríos por el fenómeno de La Niña. De los países asiáticos, China ha destacado en la producción de *Penaeus vannamei*. (FAO, 2006).

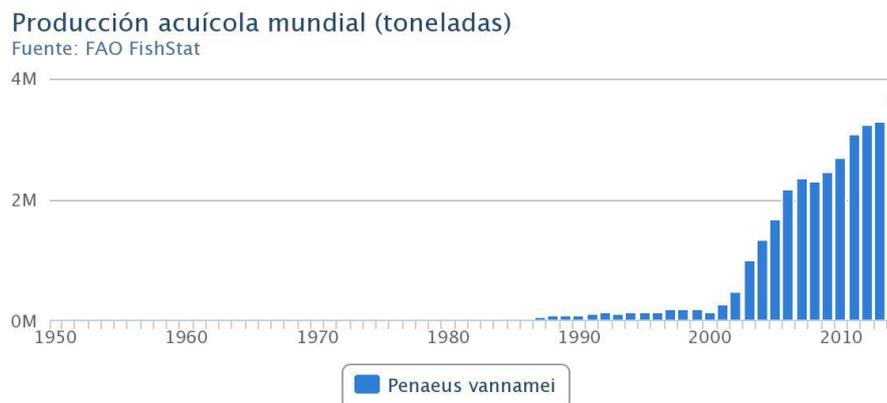


Figura 5. Producción acuícola mundial de langostinos.

Fuente: FAO FishStat

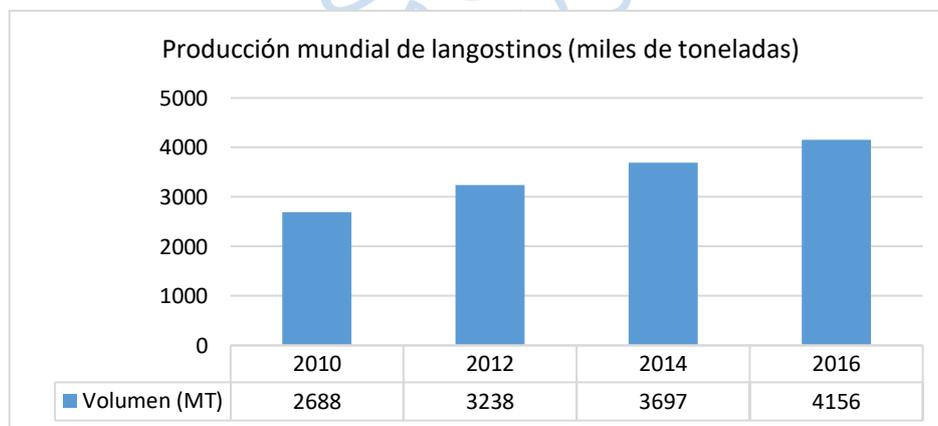


Figura 6. Producción mundial de langostinos.

Fuente: FAO (2018)

La producción mundial de langostinos alcanzó un volumen de 4,16 millones de toneladas en el año 2016, como se muestra en la Figura 6. (FAO, 2018)

### 1.3.2. Producción de langostinos en el Perú

La producción de langostino blanco en el Perú ha seguido una tendencia creciente, alcanzando su valor máximo en el año 2015 con 22 183 toneladas de langostino (Figura 7). En el año 2016 la producción de langostino se redujo un 7.9% con respecto a la producción del año anterior. (FAO, 2018)

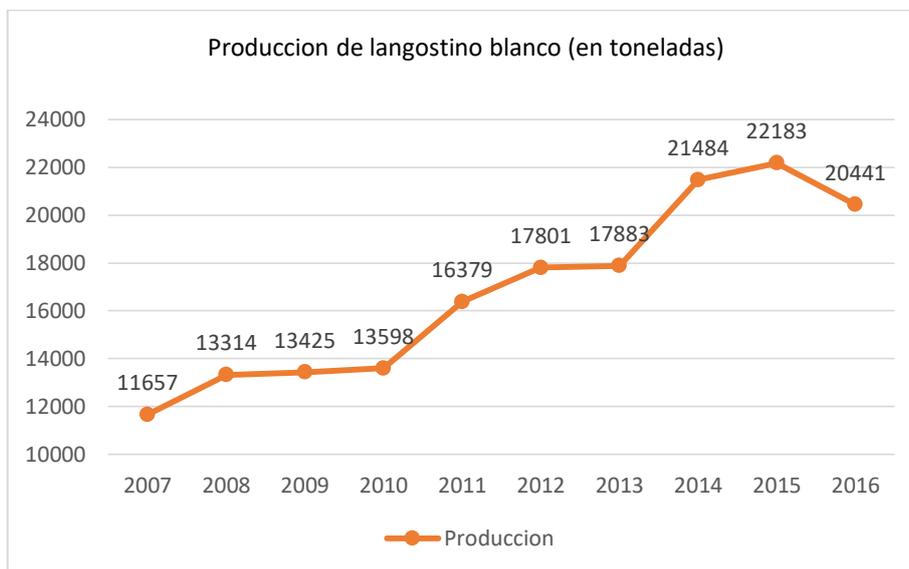


Figura 7. Producción de langostino blanco en Perú 2007-2016.

Fuente: Elaboración propia a partir de Produce Perú (2017)

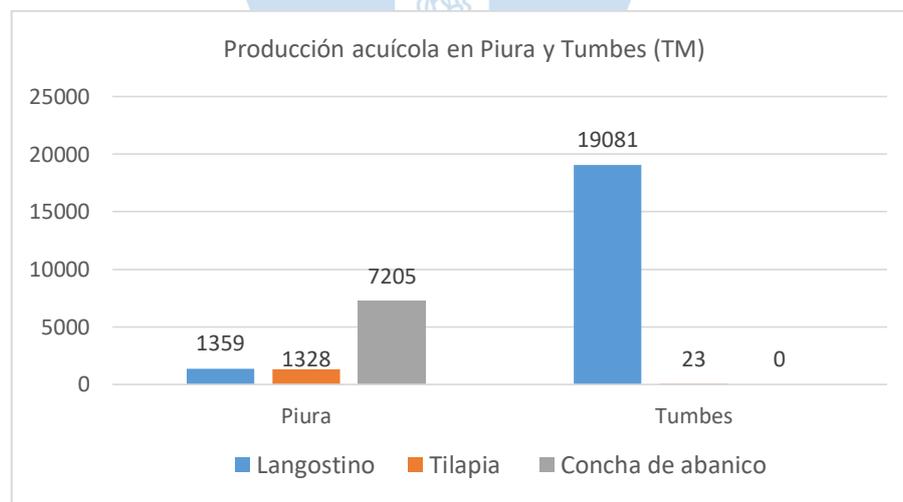


Figura 8. Producción acuícola en Tumbes y Piura en el año 2016.

Fuente: elaboración propia a partir de Produce Perú (2017).

Tumbes y Piura son los principales departamentos productores de langostino. En el año 2016 se cosecharon 1 359 TM en Piura y 19 081 TM en Tumbes (Figura 8).

#### **1.4. Producción de langostino en piscifactorías**

Las piscifactorías de langostinos en el Perú se encuentran ubicadas principalmente en los departamentos de Tumbes y Piura. En este apartado se detallan las etapas de la crianza de los langostinos de una piscifactoría en Piura, con base en León-Caminatti (2017).

##### **1.4.1. Planificación de la producción**

La planificación se realiza entre los meses de mayo y junio, para realizar la producción entre julio y mayo. Se consideran factores como la cantidad de larva a comprar, cantidad de alimento a suministrar, fechas tentativas de siembra, densidad de siembra y biomasa a cosechar (León-Caminatti, 2017).

##### **1.4.2. Compra de larva**

El insumo principal para la producción son las larvas de langostino o nauplios. Estas son generalmente importadas de Ecuador. Aunque se cuenta con la tecnología para su producción, a los productores les resulta más económico importarlas. (Produce Perú, 2009)

Además de las larvas, se realiza la compra del alimento o pienso suministrado a los nauplios. Este es el insumo más costoso. (Produce Perú, 2009)

##### **1.4.3. Recepción de larva**

Se reciben las semillas o nauplios en fundas plásticas. Se registra el total de nauplios recibidos, y se mide la temperatura, salinidad, oxígeno, pH. Además, se realizan análisis químicos y microbiológicos (León-Caminatti, 2017).

##### **1.4.4. Aclimatación**

Los nauplios se colocan en tanques (raceways) en los que se controla la temperatura del agua para la aclimatación de las larvas. Esta etapa se busca disminuir la salinidad del agua y lograr que las larvas se adecúen al agua dulce. Dura entre 8 y 12 días.

A diario se controla el oxígeno, temperatura y pH. El objetivo es obtener larvas resistentes al cambio a un medio con menor control. El control de temperatura en el agua de los raceways sirve además como control de virus WSSV, eliminando su posible presencia.

La alimentación de los nauplios en esta etapa se basa en artemia salina y alimento balanceado durante los primeros días. Posteriormente, la proporción de artemia se disminuye gradualmente hasta que se solo se le suministre alimento balanceado.

##### **1.4.5. Precria**

En esta etapa, que dura de 25 a 30 días, el langostino alcanza un peso entre 0.7-1 g. Se realizan controles diarios de consumo de alimento. (León-Caminatti, 2017).

Los parámetros del agua como el nivel de oxígeno, temperatura y transparencia, también son medidos diariamente. El nivel de PH se registra una vez por semana, obteniendo un valor mínimo en la mañana y un valor máximo en la tarde. (León-Caminatti, 2017).

#### **1.4.6. Engorde**

La etapa de engorde dura de 130 a 180 días. Su objetivo es alcanzar el peso comercial de los langostinos. El crecimiento en peso se controla una vez por semana.

Para no perjudicar el crecimiento del langostino, se controlan los niveles de NH<sub>3</sub> y NH<sub>4</sub> mediante el sifoneo de las piscinas, y el nivel de algas, realizando recambios de agua.

#### **1.4.7. Cosecha**

Se realiza después de los 3 o 4 meses, cuando los langostinos han alcanzado un peso de alrededor de 22g.

### **1.5. Problemas en el control del crecimiento de los langostinos**

Uno de los principales problemas en el cultivo del langostino es el control adecuado de las variables que intervienen en su crecimiento. Algunas de estas variables son la temperatura, el nivel de oxígeno, el nivel de pH y la cantidad de alimento suministrado.

Las piscinas de cultivo se encuentran al aire libre, así que la temperatura del agua depende de la temperatura ambiente. El nivel de oxígeno y el nivel de pH se regulan mediante el uso de aireadores y cambiando el agua de las piscinas. La cantidad de alimento suministrada se determina en base al peso ganado por los langostinos semanalmente.

Es importante seguir la frecuencia de medición de las variables para contar con una base de datos de la cual disponer información de manera oportuna, de lo contrario se dificulta el análisis de la información por la falta de datos.

A medida que los langostinos alcanzan su madurez, se van formando jerarquías en la población. Como consecuencia, los langostinos que tienen mayor peso crecerán a mayor velocidad que los langostinos más pequeños. Esto afectaría la cantidad de alimento suministrado a cada piscina, ya que los langostinos más grandes alcanzarían rápidamente su peso máximo y seguirían consumiendo alimento, elevando los costos de producción. Este problema puede solucionarse planificando adecuadamente la densidad de siembra y reorganizando la población a lo largo del cultivo. (Araneda, M., Hernandez, J., Gasca Leyva, E. & Vela, M., 2013)

La calidad de los nauplios cultivados afecta el volumen de la cosecha. Es por esto que los nauplios adquiridos pasan por varios análisis químicos y microbiológicos, para asegurar su calidad. Los nauplios se producen en laboratorios, modificando sus características para hacerlos

más resistentes y que alcancen un mayor peso. Existe oferta de nauplios a nivel nacional para cubrir al menos el 30% de la demanda. Sin embargo, en la mayoría de piscifactorías se prefiere importarlos, por la facilidad de obtener una semilla con certificación de calidad. (Produce Perú, 2009)



## Capítulo 2

### Curvas de crecimiento

El objetivo de este capítulo es presentar los modelos de crecimiento y métodos de estimación que se utilizarán para construir los modelos de predicción.

#### 2.1. Modelos de crecimiento

En la acuicultura, los modelos de von Bertalanffy y Gompertz son comúnmente utilizados para describir el crecimiento de peces y especies marinas (Araneda et al., 2013). Otros modelos, como el polinomial, logístico y exponencial, también han sido considerados apropiados para describir una curva de crecimiento de langostino (Yu et al. 2006).

Para el presente caso, el cultivo comercial de los langostinos se realiza antes de que alcancen todo su crecimiento potencial, por lo que no se observa realmente toda su curva de crecimiento. Es interesante, por tanto, analizar cómo se comportan este tipo de modelos.

Los parámetros de crecimiento varían por especie, pero también pueden variar dentro de la misma especie, debido a factores como las condiciones ambientales o el sexo del individuo. Cada combinación de parámetros resulta en una curva de crecimiento distinta. Generalmente para una especie se puede usar el mismo modelo de crecimiento con una determinada combinación de parámetros (Sparre, 2018).

Hay parametrizaciones que se prefieren sobre otras por tener mayor facilidad en la interpretación de sus parámetros. Se ha escogido trabajar con los modelos de crecimiento de Gompertz, von Bertalanffy, Brody, y Logístico, con las re parametrizaciones propuestas por Gbangboche, Glele-Kakai, Salifou, Albuquerque y Leroy (2006).

##### 2.1.1. Modelo de Gompertz

Este modelo fue propuesto por Benjamin Gompertz en 1825 para ajustar la relación entre el ratio de mortalidad humana y la edad. Ha sido ampliamente utilizado en biología para describir desde el crecimiento de animales, como plantas, aves y peces, hasta el crecimiento de bacterias y tumores en animales.

Una de las primeras aplicaciones a data biológica fue realizada por Davidson, en el crecimiento en masa de ganado. También ha sido empleado para describir el crecimiento de bivalvos por Weymoth, McMillin, and Rich (1931). (Tjørve KMC. y Tjørve E., 2017)

Existen numerosas reparametrizaciones del modelo de Gompertz, utilizadas en diferentes campos de estudio. Una de ellas, utilizada en biología, es la siguiente:

$$W_t = Ae^{-Be^{-Kt}}$$

Donde  $W_t$  es el peso esperado en función del tiempo.  $A$  es el valor de la asíntota superior, o peso promedio de los individuos en su edad adulta,  $B$  es un valor relativo de la asíntota  $A$ , y  $K$  representa un coeficiente de crecimiento, que afecta la forma de la curva. El parámetro  $K$  alcanza su valor máximo en el punto de inflexión de la curva.

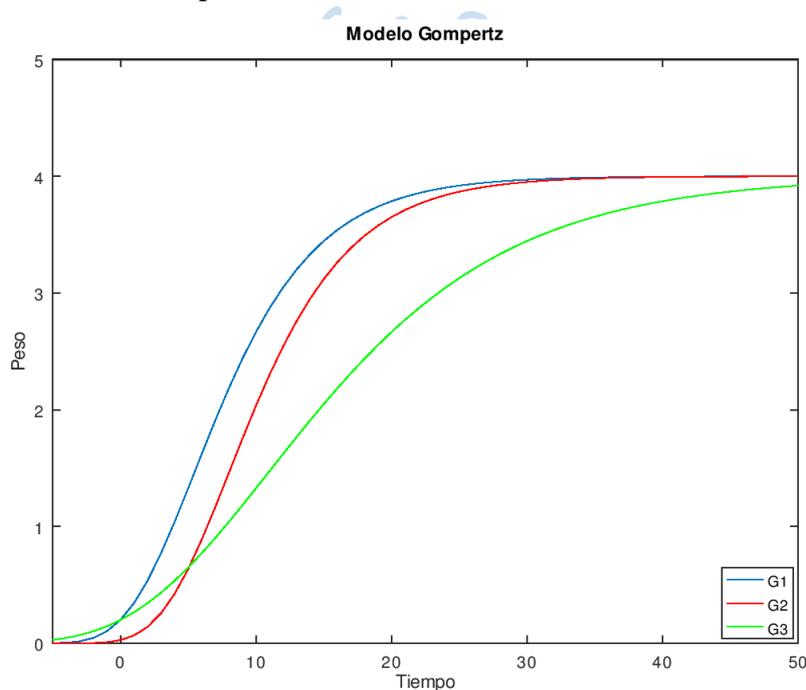


Figura 9. Modelo de Gompertz.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 9 se muestran curvas del modelo Gompertz. La curva G1 tiene valor de asíntota  $A=4$ ,  $B=3$  y  $K=0.2$ . El efecto de  $B$  sobre el modelo se puede observar en la curva G2 ( $B=5$ ), La curva se desplaza hacia la derecha sin afectar su forma. El efecto de  $K$  en el modelo se observa en G3: un menor valor ralentiza el crecimiento y cambia su curvatura.

### 2.1.2. Modelo de Brody

El modelo de Brody ha sido empleado previamente para describir el crecimiento de ganado ovino. (Gbangboche, A. et al., 2008)

Al contrario de los modelos de Gompertz, von Bertalanffy y Logístico, el modelo de Brody no presenta un punto de inflexión. Una re parametrización del modelo:

$$W_t = A(1 - Be^{-kt})$$

En la que  $W_t$  representa el peso del langostino en el tiempo  $t$ , expresado en semanas.  $A$  es el límite asintótico del peso cuando  $t$  tiende al infinito, e indica el peso promedio que alcanzan los langostinos en su madurez.  $B$  indica la proporción del peso asintótico que se ganará después de nacer.  $K$  es un coeficiente de crecimiento que sirve como medida de la tasa de crecimiento. Un valor alto de  $K$  indica una madurez temprana.

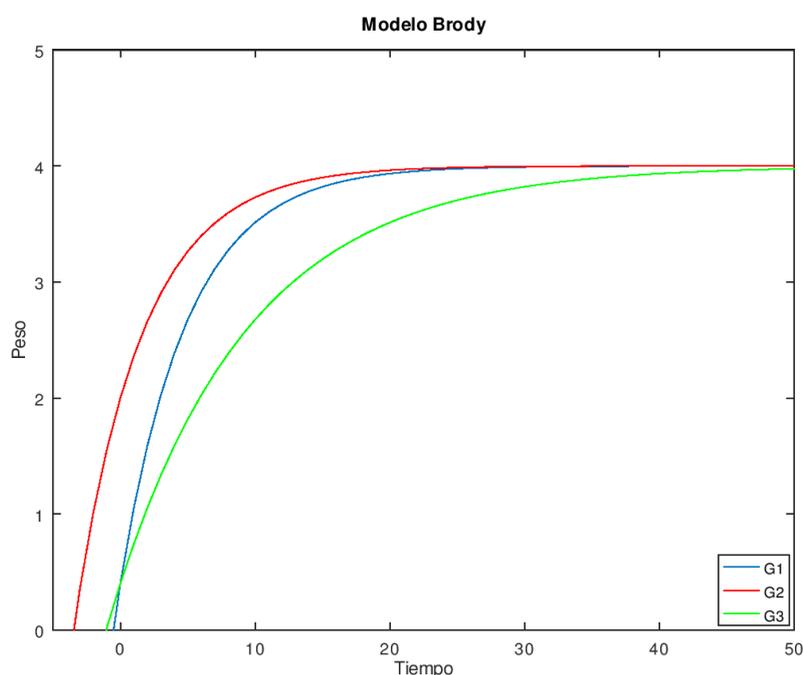


Figura 10. Modelo de Brody.

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 10 se muestra una curva de crecimiento de Brody, G1, con valor de asíntota  $A=5$ ,  $B=0.9$  y  $K=0.2$ . Con un menor valor de  $B$ , la curva se desplaza hacia la izquierda sin afectar su forma, alcanza mayores valores de crecimiento más pronto, como se observa en la curva G2. Cuando se disminuye el valor de  $K$ , el crecimiento se hace mucho más lento y tarda en alcanzar su peso asintótico, como en la curva G3.

### 2.1.3. Modelo de Von Bertalanffy

El modelo de Von Bertalanffy (1934), así como la mayoría de modelos de crecimiento, se basa en el modelo de crecimiento de Putter (1920). El modelo se ajusta a la mayoría de peces y otras especies marinas.

El modelo propuesto inicialmente describe el crecimiento individual, expresado en términos de talla (en términos de longitud o peso del individuo) y edad. Una de las parametrizaciones del modelo es la siguiente:

$$W_t = A(1 - Be^{-Kt})^3$$

En el modelo, A representa el peso máximo o asintótico. En términos biológicos, se refiere a la edad promedio de peces muy adultos. K representa la tasa o ratio de crecimiento hacia el peso asintótico. En especies que alcanzan rápidamente el peso máximo, el valor de K es más alto, y la curva es más pronunciada. (Sparre, 2018). El valor de B es un coeficiente de la asíntota.

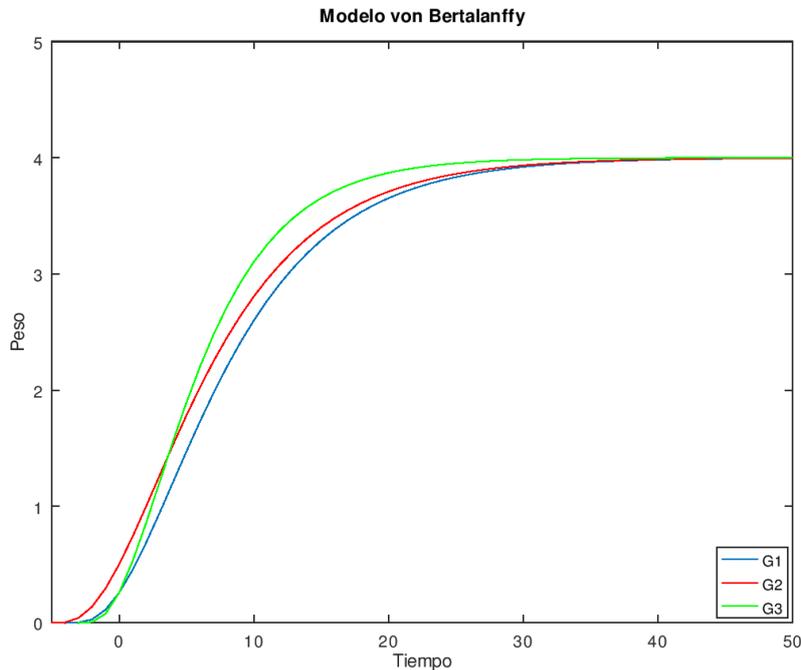


Figura 11. Modelo de von Bertalanffy.

Fuente: elaboración propia

En la Figura 11 se muestra una curva de crecimiento de von Bertalanffy, G1, con valor de asíntota  $A=4$ ,  $B=0.6$  y  $K=0.15$ . Con un menor valor de B la curva se desplaza hacia la izquierda sin alterar su forma (curva G2), mientras que con un mayor valor de K, su curvatura cambia y se alcanza más rápido la asíntota (curva G3).

#### 2.1.4. Modelo Logístico

El modelo Logístico o de Verhulst, fue propuesto por el matemático holandés P.F. Verhulst para explicar el crecimiento poblacional. El modelo establece que una población no puede crecer sin límite, debido a que los recursos del ambiente son limitados. Una población tiende a crecer con gran velocidad hasta cierto punto, en el que el crecimiento se desacelera.

El modelo logístico es asintótico. Se caracteriza por tener forma sigmoidea o en forma de “S”: al inicio crece de forma exponencial y luego sigue un crecimiento logarítmico. Una reparametrización del modelo utilizada en el crecimiento biológico está representada por  $W_t$ .

$$W_t = \frac{A}{1 + B e^{-Kt}}$$

Donde  $W_t$  es el peso en el tiempo  $t$ .  $A$  es el valor de la asíntota, o valor máximo al que tienden a crecer los individuos en su etapa adulta.  $B$  es un valor relativo de la asíntota, y  $K$  es un coeficiente de crecimiento.

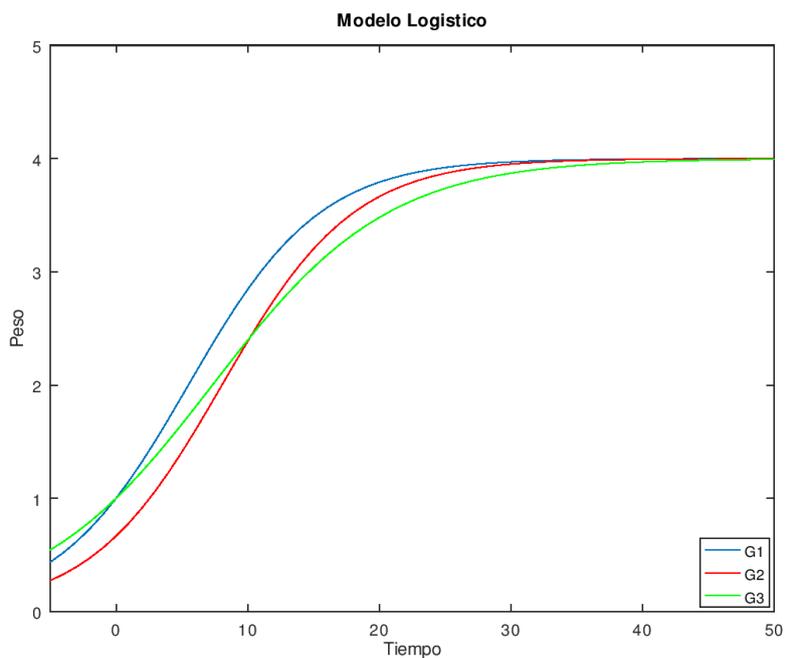


Figura 12. Modelo Logístico.

Fuente: elaboración propia.

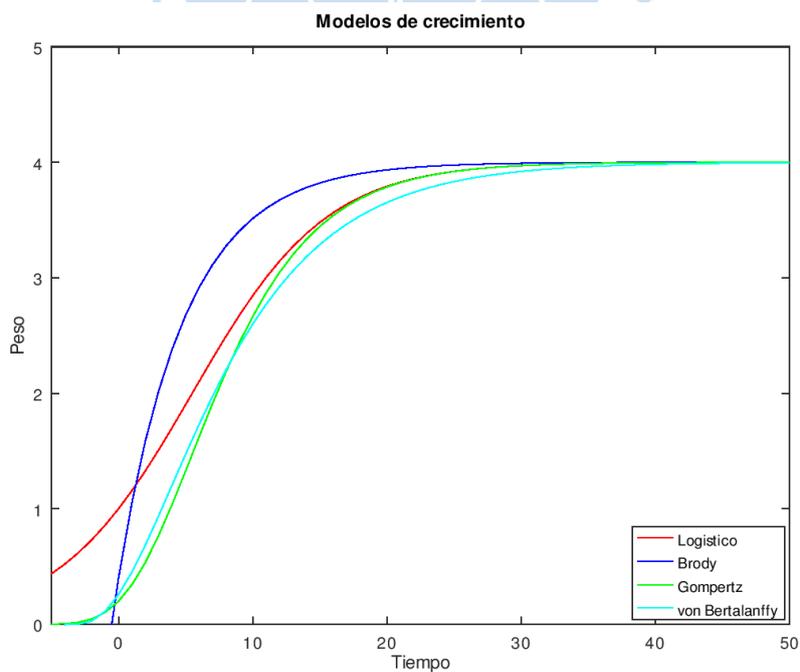


Figura 13. Modelos de crecimiento.

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 12 se muestra una curva de crecimiento del modelo logístico, G1, con valor de asíntota  $A=4$ ,  $B=3$  y  $K=0.20$ . La curva G2 muestra el efecto de incrementar el valor de B, y en la curva G3 se refleja el efecto de un menor valor de K.

En la Figura 13 se comparan los modelos de crecimiento para un mismo valor de asíntota.

## 2.2. Modelos de regresión lineal y no lineal

A continuación se describen los modelos de regresión lineal y no lineal, que son la base de los modelos desarrollados.

### 2.2.1. Modelo de regresión lineal

El modelo de regresión simple es un modelo lineal que explica el comportamiento de “y” para determinados valores de “x”. Consiste en una recta que predice el valor de una variable respuesta y a partir de una variable explicativa x, y de un término de error e. Su forma general se escribe como:

$$y_i = a + bx_i + e_i$$

Se define el valor de la predicción como  $\hat{y}_i$ .

$$\hat{y}_i = a + bx_i$$

El término  $e_i$  se conoce como término de error o error de predicción y es igual a la diferencia entre el valor que predice el modelo y el valor observado. Representa la parte de  $y_i$  que no es explicada por  $x_i$  o la influencia de otras variables no contempladas en el modelo.

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Para los casos en que se tiene más de una variable explicativa, el de modelo de regresión ya no estrictamente una recta, sino más bien un hiperplano (Sánchez, s/f). El modelo de regresión múltiple se escribe de forma general como:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + e_i$$

Donde la variable  $y_i$  es explicada por un conjunto de variables  $x_{ki}$  y un término de error  $e_i$ .

La variable  $y_i$  es aleatoria. Su carácter aleatorio se debe a que posee un componente fijo,  $\hat{y}_i$ , y un componente aleatorio,  $e_i$ . La parte fija,  $\hat{y}_i$ , es el valor que predice el modelo.

$$\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}$$

Se asume que  $e_i$  es una variable aleatoria, la cual sigue una distribución normal con media igual a cero y varianza igual a  $\sigma^2$ . Esta varianza es constante para todas las observaciones.

La variable  $y_i$  sigue una distribución normal, con media igual a  $E(y_i)$ , y desviación estándar  $\sigma$ .

$$E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}$$

El modelo de regresión se puede escribir en su forma matricial:

$$Y = X\beta + e$$

En la que  $\beta$  es un vector que contiene los coeficientes del modelo. Los coeficientes  $\beta$  miden la contribución marginal de  $x_i$ , es decir, la influencia de cada variable  $x_i$  sobre el modelo, cuando el resto permanece constante.

El problema de regresión lineal es la estimación de los parámetros, o del vector parámetro  $\beta$ . Se puede resolver con el método de mínimos cuadrados, el cual busca la solución al problema de minimizar  $S(\beta)$ .

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

Para evaluar el ajuste del modelo, se calcula el coeficiente de determinación  $R^2$ . Este coeficiente mide el grado de dispersión de los valores observados con respecto al modelo. Valores cercanos a 1 indican un mayor grado de ajuste del modelo. Una mayor dispersión indica que el modelo no es representativo del comportamiento de  $y$  con respecto a  $x$ .

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Uno de los inconvenientes al utilizar el coeficiente  $R^2$ , es que este mejora al introducir nuevas variables, sean o no significativas. Para eliminar este efecto se utiliza el coeficiente de determinación corregido  $\bar{R}^2$ . Donde  $\hat{\sigma}_R^2$  es la varianza residual y,  $\hat{\sigma}_y^2$  es la cuasivarianza de  $y$ .

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}_R^2}{\hat{\sigma}_y^2}$$

### 2.2.2. Modelo de regresión no lineal

La forma general de un modelo de regresión no lineal está dada por:

$$y_i = f(x_i; \beta) + \varepsilon_i$$

Donde  $f$  es una función no lineal en sus parámetros y se asume que  $\varepsilon_i$  sigue una distribución normal de media igual a cero y desviación igual a  $\sigma^2$ . El valor de  $y$  que predice el modelo está dado por:

$$\hat{y} = f(x_i; \beta)$$

El método de mínimos cuadrados busca minimizar la suma de los cuadrados del error representados por la función  $S(\beta)$ .

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; \beta)]^2$$

Linealizando  $f(x_i; \beta)$  en el punto  $\beta_k$ , se obtiene el sistema lineal:

$$f(\beta_k) + J(\beta_k)d = 0$$

$$d = \beta - \beta_k$$

Donde  $J(\beta_k)$  es la matriz Jacobiano de  $S$  en el punto  $\beta_k$ . Si la matriz Jacobiano de  $S(\beta)$ , es singular o no invertible, el problema de optimización se reemplaza por el problema de mínimos cuadrados lineales (Cornejo Zúñiga & Rebolledo Vega, 2016):

$$\min_{d \in \mathbb{R}} \| f(\beta_k) + J(\beta_k)d \|^2$$

### 2.3. Algoritmos de estimación no lineal

Los algoritmos de estimación no lineal resuelven el problema de minimizar la suma de cuadrados de los errores mediante soluciones basadas en métodos iterativos, que les permiten converger al valor mínimo.

En el problema de mínimos cuadrados no lineales, la función objetivo es una suma de cuadrados:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m r_j(x)^2 = \frac{1}{2} r(x) \cdot r(x)$$

Donde  $r_j(x)$  es la función residual. Su derivada es el Jacobiano  $J(x)$ .

En los problemas de estimación no lineal, también son utilizados los métodos de minimización para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, conociendo que el valor mínimo de la función es cero. (Wolfram, s/f)

La mayoría de los métodos de minimización local de una función  $f$  se basan en un modelo cuadrático:

$$q_k(p) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p$$

En el que el índice  $k$  se refiere al paso iterativo  $k$ . El modelo de Newton calcula la matriz Hessiana:

$$B_k = \nabla^2 f(x_k)$$

Sin embargo otros métodos usan aproximaciones de la matriz Hessiana, que son más fáciles de calcular.

Se calcula un valor de paso  $s_k$  para minimizar el modelo. El paso debe satisfacer el sistema de ecuaciones lineales:

$$B_k s_k = -\nabla f(x_k)$$

El método de Newton es útil cuando la función  $f$  es suave y cuando el punto  $x_k$  está lo suficientemente cerca de un mínimo local, para que garantice que la siguiente secuencia converja al mínimo:

$$x_{k+1} = s_k + x_k$$

Sin embargo, en una búsqueda típica, el valor de inicio pocas veces está cerca de un mínimo. Existen métodos para controlar el paso del algoritmo, los más utilizados son el algoritmo de búsqueda lineal y el algoritmo de la región de confianza.

### 2.3.1. Método de descenso por gradiente

Este método converge bien para problemas con función objetivo simple. Es útil en problemas en los que se tiene miles de parámetros.

El método va actualizando los valores de los parámetros en la dirección opuesta al gradiente de la función objetivo. A partir de un punto de inicio en  $x_k$ , la función se mueve a otro punto, en la dirección de máximo descenso que está dada por el negativo del gradiente de la función en ese punto.

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

El valor de  $\alpha_k$  es el tamaño del paso, o la cantidad en que decrece la función en ese paso. Su valor se selecciona de tal forma que minimice la función:

$$\phi_k(\alpha) = f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

De tal forma que:

$$f(x_{k+1}) < f(x_k)$$

### 2.3.2. Método de la región de confianza

El método de la región de confianza resuelve problemas de mínimos cuadrados no lineales, haciendo referencia a un modelo de la función objetivo. Generalmente se trata de la aproximación de Taylor de la función alrededor del punto  $x_k$ . El método confiará en el modelo solo en una vecindad del punto  $x_k$  (Cornejo Zúñiga & Rebolledo Vega, 2016).

Se escoge un radio  $\Delta_k$  dentro del cual se confía en que el modelo cuadrático  $q_k(p)$  sea representativo de la función. Luego se resuelve el mínimo de  $q_k(p)$  condicionado a

$$\|p\| \leq \Delta_k$$

Esta restricción limita el tamaño del paso desde  $x_k$  hasta  $x_{k+1}$ . El subproblema de la región de confianza es hallar el valor del paso. Si  $x_k$  está suficientemente cerca de un mínimo y el modelo es bueno, la convergencia es rápida. Se hacen ajustes del radio, cuando se encuentra una aproximación, ya que al comienzo el mínimo va a estar en los límites de la región de confianza.

### 2.3.3. Método de Gauss Newton

Es un método para minimizar una función objetivo de suma de cuadrados. Asume que la función objetivo es aproximadamente cuadrática en los parámetros cercanos a la solución

óptima. En problemas de tamaño moderado, converge con mayor rapidez que el método del descenso por gradiente.

El método de Gauss Newton calcula la función residual y su derivada. Usa el modelo cuadrático  $q_k$ . A diferencia del método de Newton, Gauss-Newton no usa la matriz Hessiana completa para el modelo cuadrático, en vez de eso, usa una aproximación  $B_k$ .

$$B_k = J_k^T J_k$$

De tal forma que el paso  $p_k$  se calcula con la fórmula:

$$J_k^T J_k p_k = -\nabla f_k = -J_k^T r_k$$

El método de Gauss-Newton se escribe como:

$$x_{k+1} = x_k - (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T r_k$$

Una forma de ver el método de Gauss-Newton es en términos de mínimos cuadrados. Resolver el paso de Gauss-Newton es lo mismo que resolver un método de mínimos cuadrados lineales, así que aplicar el método de Gauss Newton es igual a aplicar una secuencia de ajustes por mínimos cuadrados lineales a una función no lineal. (Wolfram, s/f)

#### 2.3.4. Método de Levenberg-Marquardt

Es una técnica iterativa utilizada para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales. Ajustar una curva a una serie de datos mediante la minimización de la suma de cuadrados de los errores entre los datos observados y la función.

El método de Levenberg-Marquardt es una combinación de dos métodos de minimización: el método del gradiente y el método de Gauss-Newton. El método del gradiente consiste en reemplazar iterativamente los parámetros por el valor en la dirección opuesta al gradiente de la función. El método de Gauss-Newton reduce la suma de los cuadrados de los errores asumiendo que la función es cuadrática localmente y encontrando el mínimo de la función cuadrática.

Dependiendo del valor  $i$  inicial, el algoritmo se comporta de una u otra forma: Si los parámetros están alejados del valor óptimo, el algoritmo se comporta como el método del descenso por gradiente y en el caso en que estén cerca al óptimo, se comporta como el método Gauss-Newton. (Gavin, H., 2017)

Levenberg (1944) y Marquard (1963) sugirieron calcular la dirección  $p = x - x_k$ , mediante la solución del problema:

$$\min_{p_k \in \mathbb{R}} \| f(x_k) + J(x_k)p \| ; \text{ s. a. } \|p\| \leq \Delta_k$$

Donde  $\Delta_k > 0$  es el radio de la región de confianza. (Cornejo Zúñiga y Rebolledo Vega, 2016).

### Capítulo 3

#### Modelización del crecimiento de los langostinos

El objetivo de la tesis es obtener modelos de crecimiento que permitan predecir el crecimiento de los langostinos de una piscifactoría.

Se cuenta con información de pesos de langostino del cultivo de 229 piscinas en un periodo de 22 semanas.

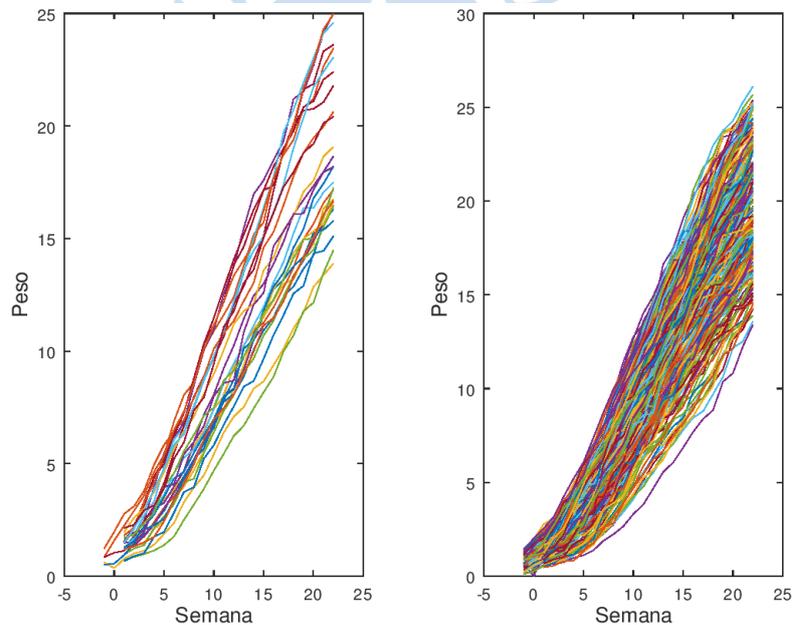


Figura 14. Peso de los langostinos por semana.

Fuente: elaboración propia

En la Figura 14, cada línea representa el peso promedio de los langostinos de una piscina. En una piscina todos los langostinos tienen la misma fecha de siembra, por lo que la variabilidad será muy baja.

Cada piscina sigue una trayectoria de crecimiento diferente. Por tanto, podría decirse que cada piscina sigue su propio patrón o modelo de crecimiento. Sin embargo, ajustar un modelo diferente para cada piscina, de forma individual, no es práctico.

La utilidad de un modelo de crecimiento en este tipo de instalaciones está en su capacidad de predecir el crecimiento de las semanas siguientes a cada medición, y así ayudar en la toma

de decisiones. Por consiguiente, si se tuviese que esperar a que culmine la cosecha para obtener dicho modelo, éste ya no sería de utilidad. No obstante, se utilizará el desempeño de estos modelos individuales como referencia en la evaluación de las diferentes alternativas de modelización.

El objetivo de esta tesis es, por tanto, construir un modelo que permita predecir el crecimiento de los langostinos de una piscina para las próximas semanas. Para construir dicho modelo se dispondrá de la base de datos histórica del crecimiento de otras piscinas, así como del crecimiento de la piscina de referencia hasta la semana actual.

### **3.1. Modelo determinista global**

El objetivo de este apartado es obtener un modelo del crecimiento de los langostinos considerando únicamente el tiempo de cultivo como regresor del modelo. Para la construcción de este modelo utilizó la totalidad de los datos.

Se estimaron los parámetros para cada uno de los modelos de crecimiento estudiados: Gompertz, von Bertalanffy, Brody y Logístico. En adición, se construyó un modelo de estimación por mínimos cuadrados ponderados.

Finalmente, se evaluó el ajuste de la data a cada modelo para identificar los métodos con mejor ajuste.

#### **3.1.1. Algoritmos de estimación**

Para la estimación de los parámetros de los modelos se consideraron tres métodos de estimación: el método de mínimos cuadrados lineales y los métodos de estimación de las funciones `nlinfit` y `lscurvefit` de Octave.

##### **3.1.1.1. Mínimos cuadrados lineales.**

Este método tiene como base la regresión lineal por mínimos cuadrados. Se requiere que la función sea lineal en sus parámetros.

Los mínimos cuadrados lineales solo permiten estimar los términos  $a$  y  $b$  del modelo, por lo que se modificó el algoritmo para que estime también el valor de  $A$ .

El mecanismo del algoritmo es el siguiente: primero se obtienen los parámetros  $B$  y  $K$  para un valor de  $A$ , luego se van probando diferentes valores de  $A$ , y finalmente se selecciona aquel que minimiza la varianza de los residuos.

##### **3.1.1.2. Función `nlinfit` de Octave**

Se utiliza la función `nlinfit` de Octave, la cual se basa en el algoritmo de Levenberg Marquardt para estimar parámetros de funciones no lineales.

### 3.1.1.3. Función lsqcurvefit de octave

Se utiliza la función lsqcurvefit de Octave, la cual se basa en el algoritmo de la región de confianza.

### 3.1.2. Linealización de los modelos

El método de estimación lineal requiere que la función sea lineal en sus parámetros, por lo que los modelos de Gompertz, Brody, von Bertalanffy y Logístico fueron “linealizados” para obtener la forma  $y = a + bt$

Los resultados de cada modelo se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Linealización de los modelos

Modelo	Linealización
Gompertz	$\ln\left(\ln\left(\frac{W_t}{A}\right)\right) = \ln(-B) - kt$
Brody	$\ln\left(1 - \frac{W_t}{A}\right) = \ln B - kt$
Von Bertalanffy	$\ln\left(1 - \left(\frac{W_t}{A}\right)^3\right) = \ln(B) - kt$
Logístico	$\ln\left(\frac{A}{W_t} - 1\right) = \ln B - kt$

Fuente: elaboración propia

El término  $W_t$  viene dado por los pesos observados de los langostinos y el término  $A$  es la asíntota a la que converge el peso de los langostinos. Es importante escoger un valor de  $A$  lo suficientemente alto, debido a que influye en la precisión del modelo.

### 3.1.3. Construcción de los modelos

En este apartado se muestran los resultados de ajustar la data para cada modelo en Octave.

#### 3.1.3.1. Modelo de Gompertz

En la Figura 15 se comparan las curvas obtenidas con cada método de estimación. La curva LS-1 (en color rojo) corresponde al método de estimación lineal y las curvas NLS-1 y NLS-2 (en color azul y verde) corresponden a los modelos obtenidos con métodos de estimación no lineal.

Se observa que las curvas NLS-1 y NLS-2 se superponen. Esto ocurre debido a que las funciones nlinfit y lsqcurvefit convergen a los mismos valores. Por lo tanto estiman valores similares de los parámetros  $A$ ,  $B$  y  $K$ , y su coeficiente de determinación es el mismo. El valor de  $R^2_{adj}$  de los modelos NLS-1 y NLS-2 supera al del método LS-1, por lo tanto, los métodos de estimación no lineal son más precisos que el método de mínimos cuadrados lineales.

Los modelos NLS-1 y NLS-2 también presentan similar error de predicción. Su valor tiende a aumentar con el tiempo, sobre todo en las últimas semanas. Este comportamiento en el error de predicción se debe a que cada piscina tiene su propio patrón de crecimiento, pero con el modelo construido se obtiene una única curva para todas las piscinas. Debido a ello en algunas piscinas el error de predicción es muy alto.

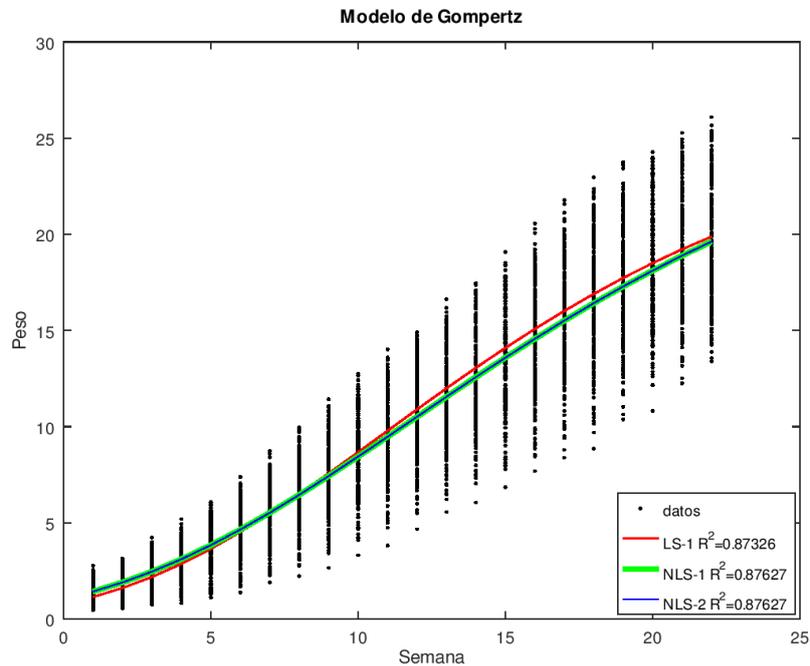


Figura 15. Estimación del modelo de Gompertz.

Fuente: Elaboración propia.

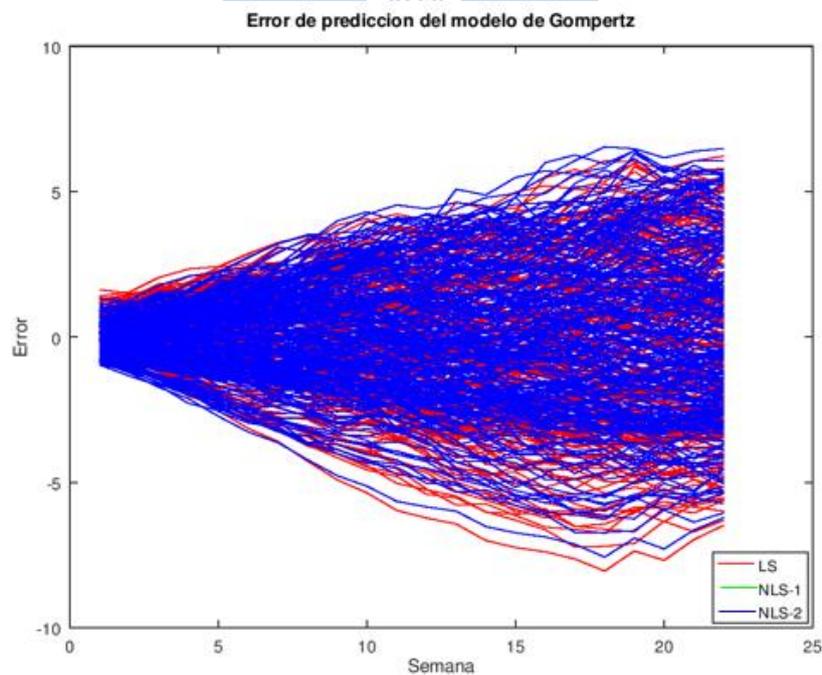


Figura 16. Error de predicción del modelo de Gompertz.

Fuente: elaboración propia

En la Figura 16 se muestra el error de predicción del modelo estimado. Se observa que las curvas del error de NLS-1 y NLS-2 se superponen.

### 3.1.3.2. Modelo de Brody

En la Figura 17, se observa que la curva obtenida con el método LS-1 no se ajusta al comportamiento de los datos. Este modelo incluso estima valores negativos en las primeras semanas. En cambio, los métodos de estimación no lineal presentan mejor ajuste a la data, con un mayor valor de  $R^2_{adj}$ .

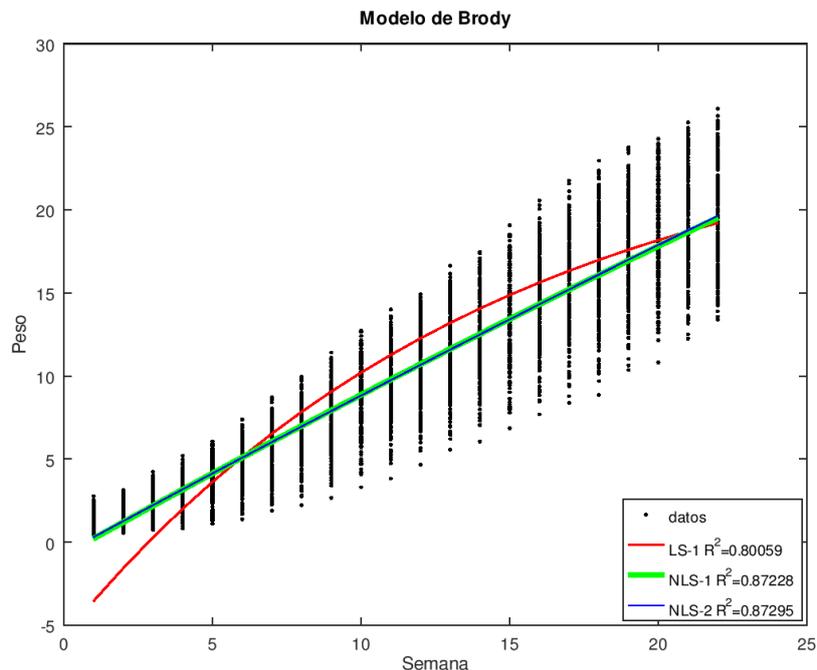


Figura 17. Estimación del modelo de Brody.

Fuente: elaboración propia

Ambos modelos no lineales siguen el crecimiento global de los datos, aunque se observa que su curvatura es menos pronunciada, casi lineal.

La desviación de la predicción en el modelo LS-1 se puede apreciar mejor en el gráfico de residuos de la Figura 18.

### 3.1.3.3. Modelo de von Bertalanffy

La estimación del modelo de von Bertalanffy se muestra en la Figura 19. En la curva LS-1 se observa la forma sigmoidea característica del modelo de von Bertalanffy.

En las curvas NLS-1 y NLS-2 se observa una curvatura menos pronunciada. Aun así, su coeficiente de determinación indica la estimación no lineal tiene un mejor ajuste a la data que el del modelo de estimación lineal.

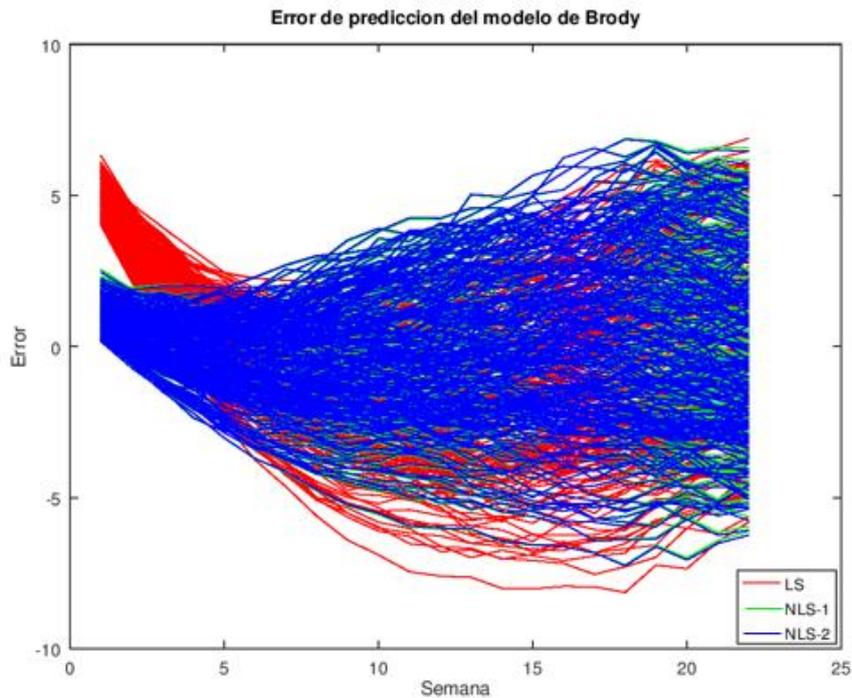


Figura 18. Error de predicción del modelo Brody.

Fuente: elaboración propia

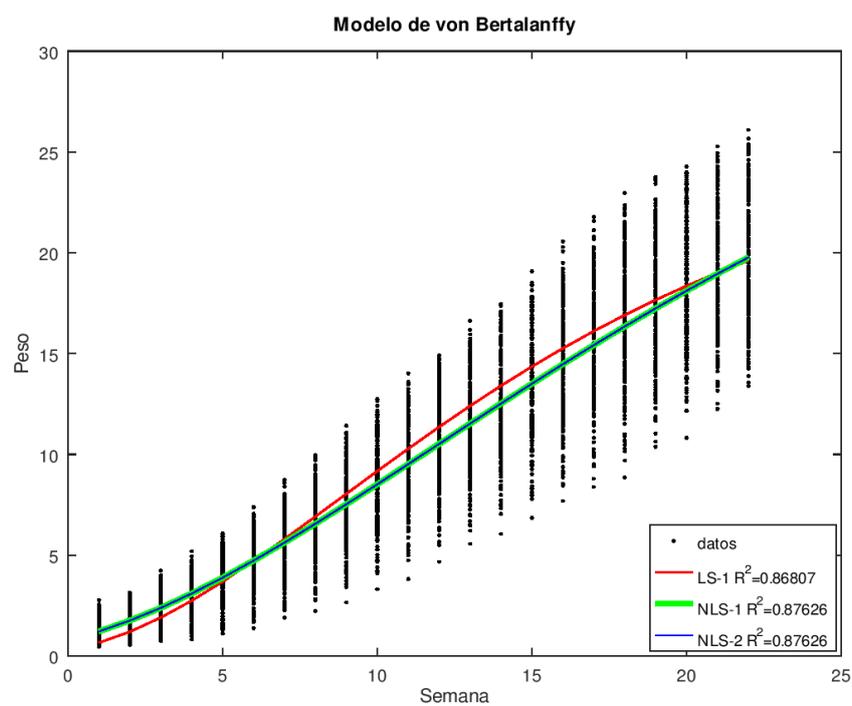


Figura 19. Estimación del modelo von Bertalanffy.

Fuente: elaboración propia

El error de predicción es mayor en el método LS-1, según se observa en la Figura 20.

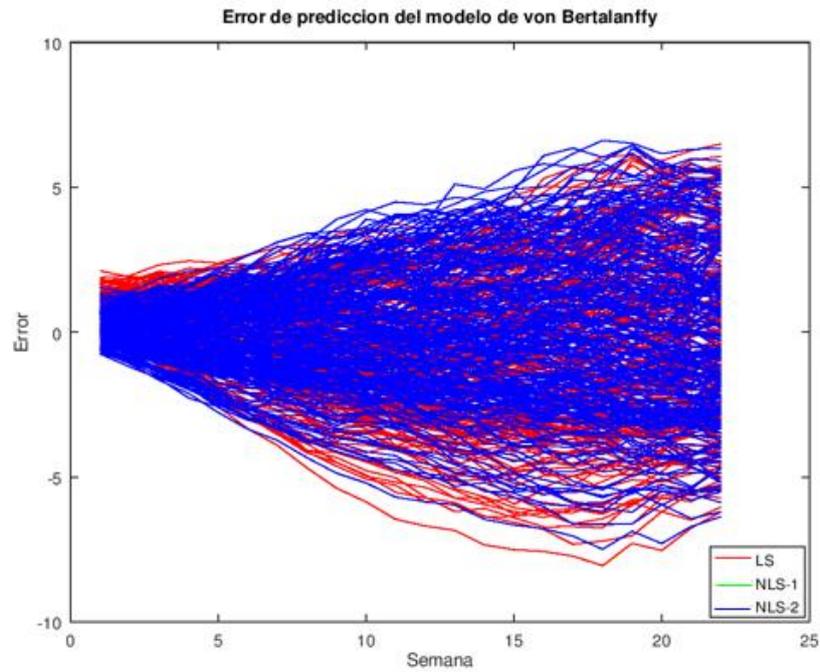


Figura 20. Error de predicción del modelo von Bertalanffy.

Fuente: elaboración propia

### 3.1.3.4. Modelo Logístico

En la Figura 21 se puede observar que la curva estimada con mínimos cuadrados lineales tiene una forma exponencial, lo cual no sigue la forma esperada del modelo Logístico. A pesar de que tiene un valor alto en su coeficiente de determinación, gráficamente no se ajusta a la tendencia de crecimiento de los datos.

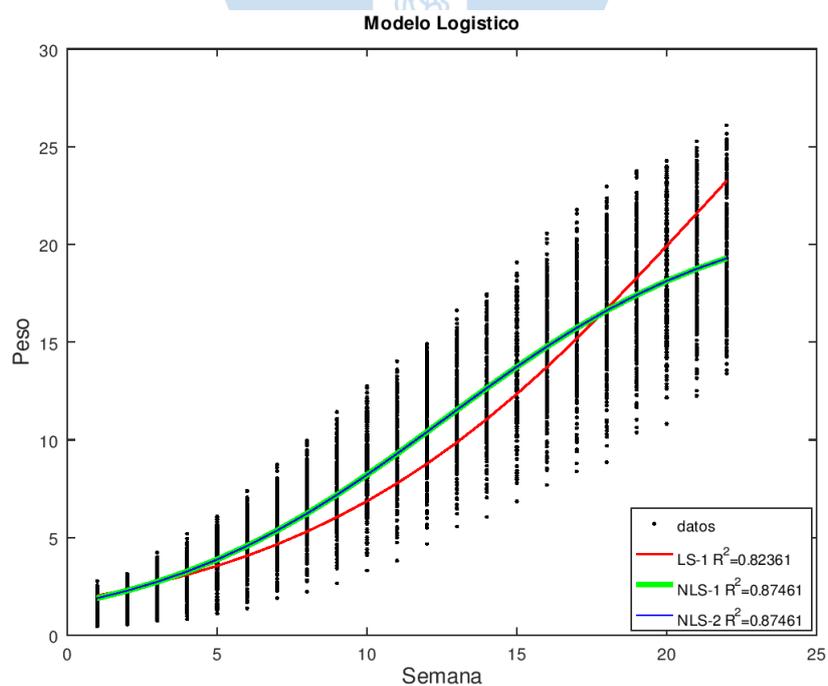


Figura 21. Estimación del modelo Logístico.

Fuente: Elaboración propia

Con los métodos de estimación no lineal NLS-1 y NLS-2 se obtiene la curvatura sigmoidea característica del modelo Logístico. El ajuste de los datos es mejor para los métodos de estimación no lineal.

La Figura 22 muestra el error de predicción del modelo según método de estimación. Se observa que el valor es mayor para el método de estimación LS-1.

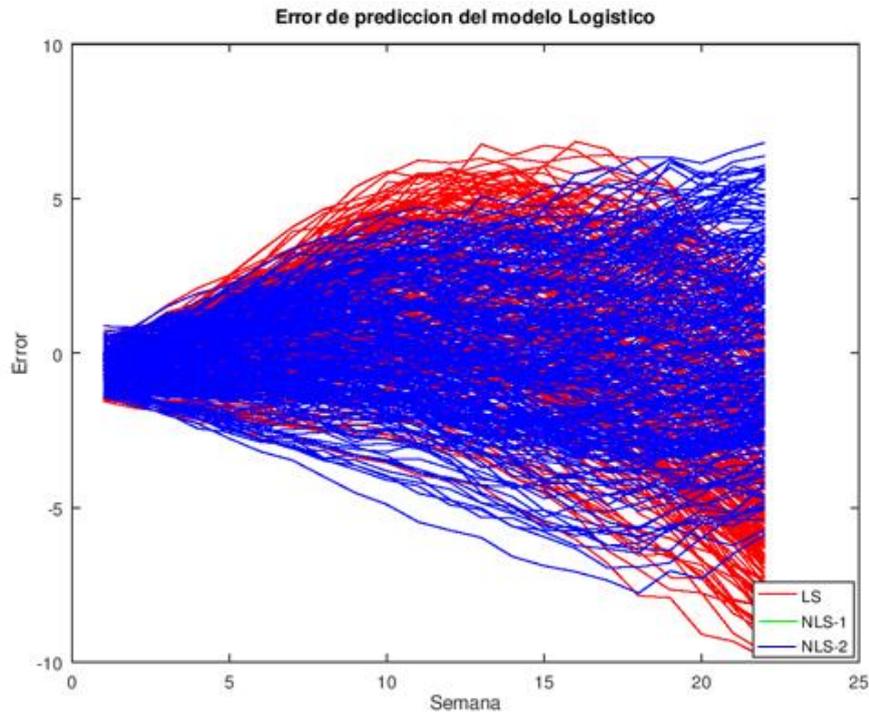


Figura 22. Error de predicción del modelo Logístico.

Fuente: elaboración propia

### 3.1.3.5. Modelo polinomial estimado por mínimos cuadrados ponderados

La estimación WLS (de sus siglas en inglés, weighted least squares) es una variante de la estimación de mínimos cuadrados ordinarios (OLS) para el caso en el que haya heterocedasticidad en los residuos.

Como puede apreciarse en las figuras anteriores, los datos de crecimiento para el conjunto de piscinas muestran heterocedasticidad en función de la semana. A medida que aumenta la semana aumenta la varianza. En estos casos, aplicar OLS no es eficiente, siendo WLS técnica apropiada.

Si denominamos  $X$  a la matriz de regresores y  $Y$  a la variable respuesta, el modelo de regresión se escribiría como

$$Y = X\beta + u,$$

Donde  $u$  es el término de error que, al igual que  $\beta$ , no es observable. La estimación del vector  $\beta$  usando OLS sería

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Y la estimación (predicción) del término de error sería el vector de residuos  $e$ :

$$e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$$

Si se aplica OLS cuando hay heterocedasticidad, las observaciones que estén sujetas a mayor varianza tendrían más peso en la estimación  $\hat{\beta}$ , lo que reduce la precisión de las estimaciones. Intuitivamente, es como si estuviésemos usando menos datos. Para evitarlo, se deben ponderar las observaciones de forma inversa a su varianza. En el método WLS, el estimador es

$$\hat{\beta} = (X'WX)^{-1}X'WY.$$

Donde  $W$  es una matriz diagonal de  $n \times n$ , donde  $n$  es la longitud de  $Y$ . La diagonal de  $W$  contiene la inversa de la varianza de los residuos del modelo. Para conseguir esta matriz, se aplica el método en dos etapas. En una primera etapa se construye una matriz de pesos diagonal  $W_0$  basada en la varianza de  $Y$  de cada semana, obteniéndose los residuos  $e_0$ :

$$e_0 = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}_0$$

Con

$$\hat{\beta}_0 = (X'W_0X)^{-1}X'W_0Y.$$

Finalmente, se calcula la varianza de  $e_0$  en cada piscina, y su inversa se utiliza en la matriz diagonal  $W$  que se usa en la segunda etapa para obtener el  $\hat{\beta}$  definitivo.

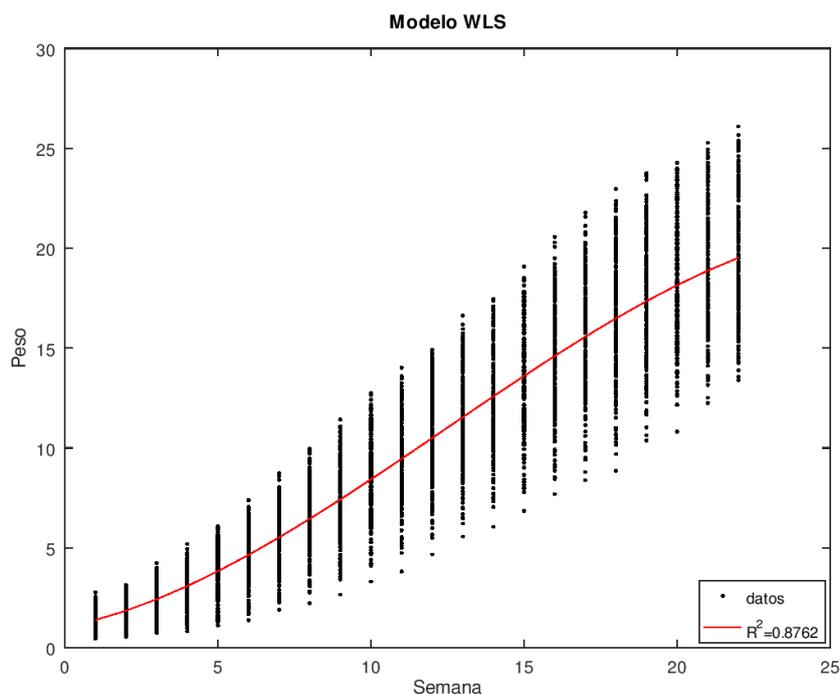


Figura 23. Modelo WLS determinista.

Fuente: elaboración propia

El modelo determinista depende únicamente de una variable o regresor, en este caso el tiempo, y de un término independiente. Para el modelo se ha propuesto la siguiente combinación de parámetros:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + e_i$$

En la Figura 23 se muestra el modelo obtenido, el cual presenta un buen ajuste al crecimiento observado de los langostinos.

El gráfico de residuos se muestra en la Figura 24.

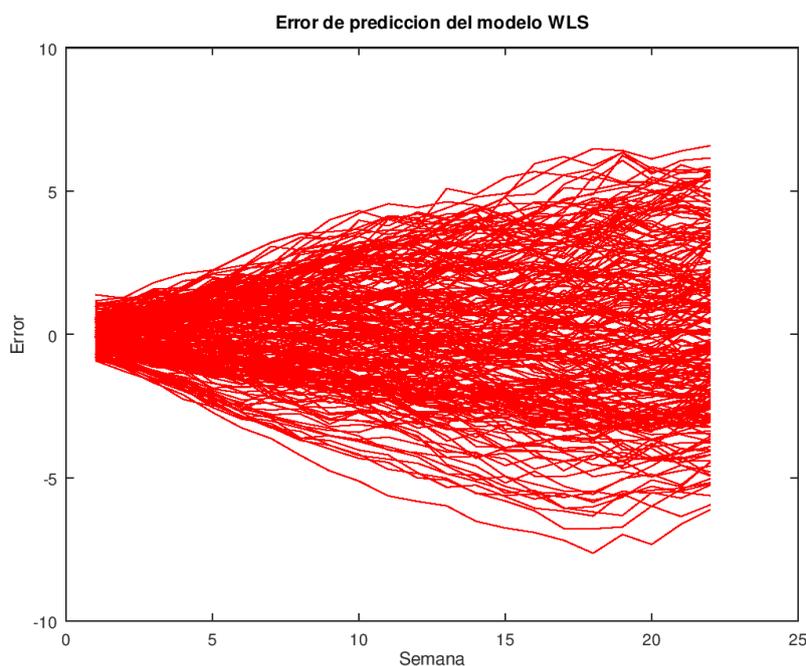


Figura 24. Errores de predicción del modelo WLS.

Fuente: elaboración propia.

### 3.1.4. Comparación de los modelos

En este apartado se comparan los modelos y los métodos de estimación, según su valor de  $R^2_{adj}$ . En la Tabla 2 se resumen los valores de  $R^2_{adj}$  para cada uno de los modelos de crecimiento.

Tabla 2.  $R^2_{adj}$  según modelo y método de estimación

Método	Brody	Gompertz	Bertalanffy	Logístico
LS-1	0.80059	0.87326	0.86807	0.82361
NLS-1	0.87228	0.87627	0.87626	0.87461
NLS-2	0.87295	0.87627	0.87626	0.87461

Fuente: elaboración propia

El coeficiente de determinación es mayor para los modelos obtenidos con métodos de estimación no lineales, para los cuatro modelos estudiados.

Se observa la diferencia es mínima entre los métodos no lineales, por lo que en adelante para la estimación no lineal se utilizará únicamente el método NLS-2.

El método LS-1 no es un buen estimador de los parámetros. Esto se evidencia sobre todo en los modelos de Brody y Logístico, en los que se obtuvo un menor valor de  $R^2_{adj}$  y una curva poco representativa del modelo.

En la Tabla 3 se detallan los valores estimados de los parámetros A, B y K, y el valor del coeficiente de determinación de cada modelo de crecimiento.

Tabla.3. Estimación de parámetros de modelos de crecimiento según modelo

Modelos	A	B	K	$R^2$	$S_R^2$
Brody	204.05	1.0033	0.00475	0.87295	4.9967106
Gompertz	28.07	3.2944	0.10086	0.87627	4.8662517
Bertalanffy	34.68	0.7178	0.06525	0.87626	4.8666436
Logístico	22.1	13.072	0.20441	0.87461	4.9316123

Fuente: elaboración propia.

Los valores estimados de A van desde 28.07 hasta 204.05. El modelo de Brody es el que estima el valor más alto de A. El menor valor lo obtuvo el modelo Logístico. El valor de B se encuentra entre 0.7178 y 13.072. El modelo de von Bertalanffy obtuvo el menor valor, mientras que el mayor fue el del modelo Logístico.

El valor de K va de 0.00475 hasta 0.20441. El valor más alto lo obtuvo el modelo Logístico. Esto indica un crecimiento acelerado de los langostinos. Por el contrario, el modelo de Brody obtuvo un valor de 0.004, lo que indica un crecimiento lento.

El valor del coeficiente de determinación  $R^2$  se encuentra entre 0.87295 y 0.87627. Lo cual indica que los cuatro modelos, en general, tienen un buen ajuste a la data. El valor de  $R^2$  más alto se obtuvo con el modelo de Gompertz, seguido del modelo von Bertalanffy.

Lo mismo sucede con el valor de la varianza residual  $S_R^2$ . Un menor valor indica una mejor aproximación a los parámetros del modelo. En este caso el modelo de Gompertz tiene el menor  $S_R^2$ . El segundo mejor es el modelo de von Bertalanffy.

El modelo WLS consigue tener un buen grado de ajuste, con un valor de  $R^2_{adj}$  cercano a los modelos de Gompertz y von Bertalanffy. Los parámetros del modelo WLS no pueden compararse con los de los modelos previos, ya que no tienen la misma interpretación. Sus valores estimados se muestran en la Tabla 4.

Gráficamente, las curvas de los modelos Gompertz, WLS y von Bertalanffy son las más cercanas al promedio de los datos, como se observa en la Figura 25.

Tabla 4. Estimación del modelo WLS

Parámetro	Valor estimado
$\beta_0$	1.0263
$\beta_1$	0.30032
$\beta_2$	0.060164
$\beta_3$	-0.0016186
$R^2_{adj}$	0.87620
$S_R^2$	4.8691

Fuente: elaboración propia.

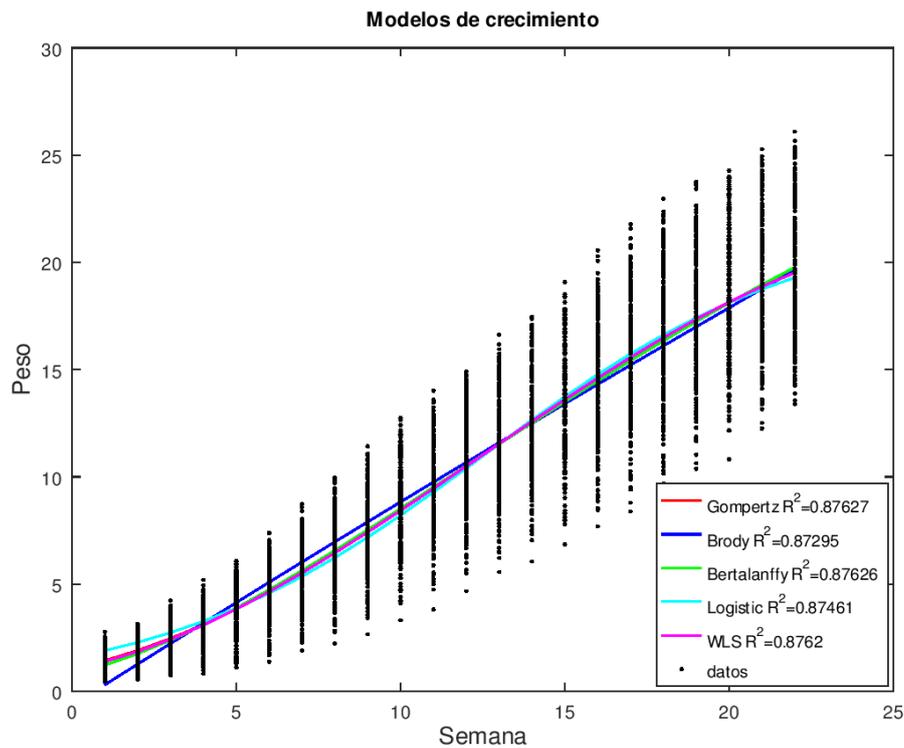


Figura 25. Comparación de los modelos.

Fuente: elaboración propia.

Se puede afirmar que el modelo de Gompertz es el que tiene mejor ajuste a los datos, ya que obtiene el mayor valor de  $R^2_{adj}$ , y la curva del modelo logra seguir la tendencia de crecimiento de los datos.

Los modelos WLS y von Bertalanffy también demuestran tener un buen ajuste al crecimiento global de los langostinos. Los modelos de Brody y Logístico obtuvieron un menor ajuste, aunque en general, su valor de  $R^2_{adj}$  es bastante bueno.

Es importante resaltar que los resultados obtenidos no pueden generalizarse a otros conjuntos de datos, por lo que, para evaluar el crecimiento de langostinos cultivados en condiciones distintas, se debe realizar nuevamente el ajuste de los modelos a la data.

Como ya se ha mencionado, mientras los langostinos crecen se observa que la variabilidad se incrementa. El valor del error de predicción del modelo determinista global es mayor a medida que los langostinos alcanzan su madurez. Por lo tanto, la precisión del modelo no es constante, y se deteriora a medida que los langostinos crecen. Este resultado es intuitivo, pues el modelo sólo está recogiendo el crecimiento medio de todas las piscinas, y estas tienen un comportamiento que va divergiendo a lo largo de las semanas.

Los modelos estimados son deterministas, en este caso dependen únicamente del tiempo. Sin embargo, existen otros factores que influyen en su crecimiento. Por lo tanto, se considera la adición de más variables en el modelo.

### 3.2. Modelos basados en el peso de semanas previas

En este apartado se estimarán los parámetros para modelos que incorporan los pesos de semanas previas. El objetivo es obtener un modelo que permita predecir el crecimiento de los langostinos de una piscina, cuando han transcurrido “n” semanas de cultivo y se cuenta con los datos de crecimiento de dichas semanas.

El modelo determinista es de utilidad antes de iniciar el cultivo de los langostinos, ya que permite conocer su patrón de crecimiento sin requerir datos adicionales, aunque con precisión limitada. A medida que van transcurriendo las semanas, se puede utilizar el peso registrado en la última semana para mejorar las predicciones de crecimiento de las semanas siguientes.

#### 3.2.1. Modelos utilizando el peso de la semana 1

Se han considerado tres formas de incluir el peso de los langostinos en el modelo: dividiendo los pesos semanales por el peso en la semana 1, restando a los pesos semanales el peso de la semana 1, y agregando el peso de la semana 1 como regresor del modelo.

##### 3.2.1.1. Modelo de Gompertz

Se ajustaron los modelos mencionados basados en el modelo de Gompertz.

##### - Modelo condicionado al peso semanal entre el peso de la semana 1

El modelo no utiliza el peso semanal, sino ratios de crecimiento respecto al peso en la semana 1. El modelo a estimar sería:

$$\frac{W_t}{W_1} = Ae^{-Be^{-Kt}},$$

Donde la estimación se realiza con los datos de todas las piscinas. Se estima, por tanto, un único modelo. Los parámetros estimados  $\hat{A}$ ,  $\hat{\beta}$  y  $\hat{K}$  serían los mismos para todas las piscinas. Sin embargo, este modelo permite obtener una predicción del peso basada en una curva diferente para cada piscina:

$$\hat{W}_t = W_1 \times Ae^{-Be^{-Kt}}$$

En la Figura 26 se muestra como esta modelización permite obtener una curva para cada piscina, a diferencia del modelo determinista que proporciona una única curva. A la derecha, se muestran las curvas  $\widehat{W}_t$  y el total de los datos. Se observa que gran parte de las curvas está por encima de los datos observados.

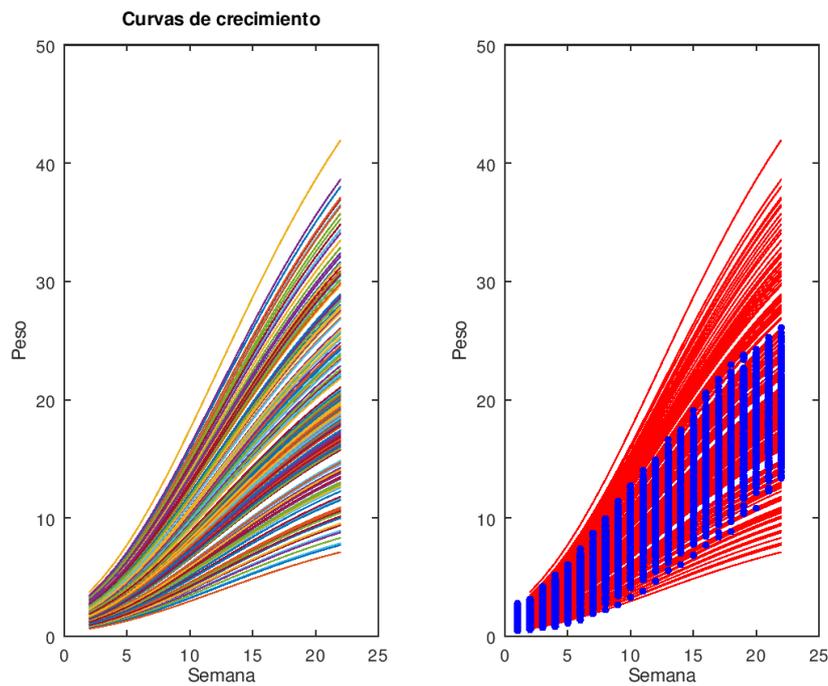


Figura 26. Modelo Gompertz dividiendo por el peso de la semana 1.

Fuente: elaboración propia

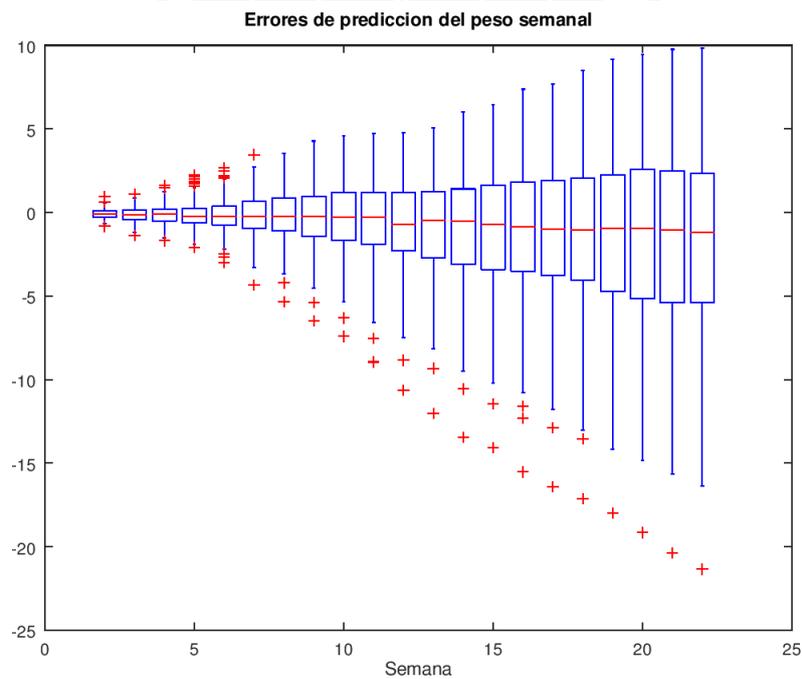


Figura 27. Errores de predicción del modelo Gompertz.

Fuente: elaboración propia

El error de predicción se incrementa, como se puede observar en la Figura 27. Los errores siguen siendo heterocedásticos. Su distribución no es simétrica, y en las últimas semanas predice valores superiores a los datos observados. En las últimas semanas, algunas piscinas tienen un valor de error muy alto.

- **Modelo condicionado a la diferencia entre el peso semanal y de la semana 1**

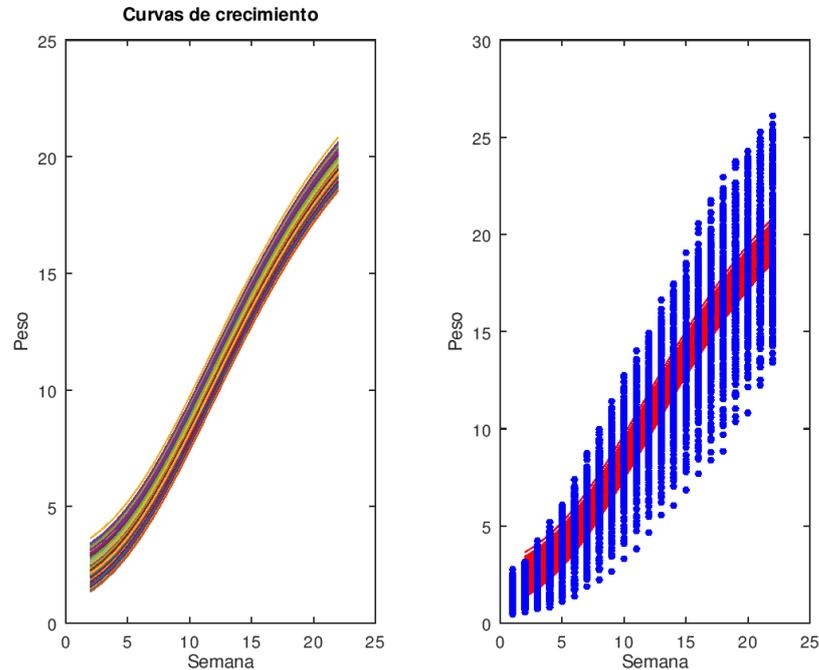


Figura 28. Modelo Gompertz restando el peso de la semana 1.

Fuente: elaboración propia

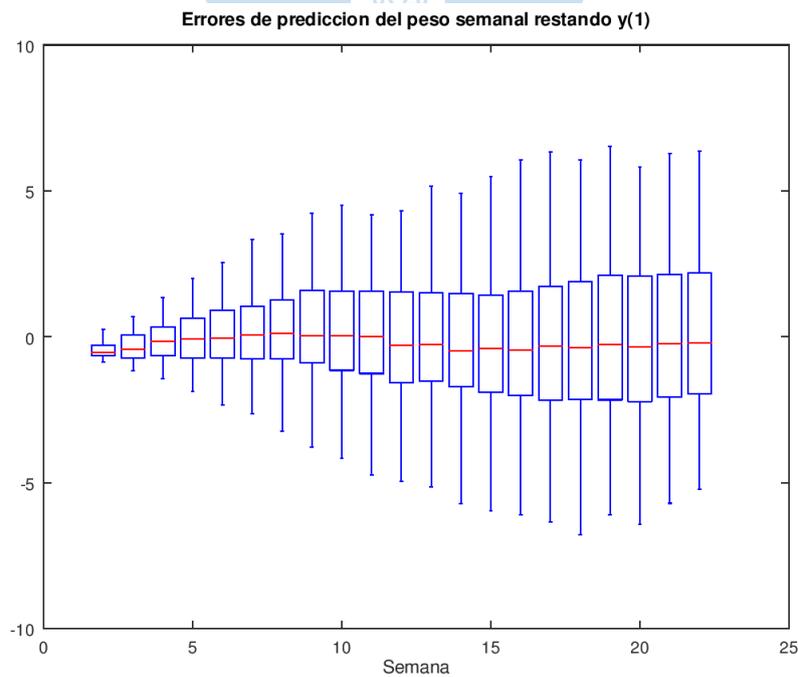


Figura 29. Errores de predicción del modelo Gompertz.

Fuente: elaboración propia

El modelo utiliza las diferencias entre el peso semanal y el peso en la semana 1. El modelo a estimar sería:

$$Y = (W_t - W_1) = Ae^{-Be^{-Kt}},$$

Al igual que en el caso anterior, aunque se usen todos los datos para obtener unas mismas estimaciones  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{K}$ , para todas las piscinas, al despejar  $W_t$  se obtiene una curva para cada piscina (Figura 28).

$$\hat{W}_t = W_1 + Ae^{-Be^{-Kt}}$$

En promedio, el error de predicción es menor en comparación con el modelo que usa ratios, según se observa en la Figura 29.

- **Modelo utilizando el peso de la semana 1 como regresor**

El modelo utiliza el peso de la semana 1 como regresor, junto con el tiempo en semanas. El modelo es:

$$W_t = Ae^{-Be^{-(K_1t + K_2W_1)}}$$

En la Figura 30 se observa que se obtiene una curva por cada piscina. Este modelo se comporta mejor que los anteriores, logrando cubrir la mayor parte de los datos reales de crecimiento.

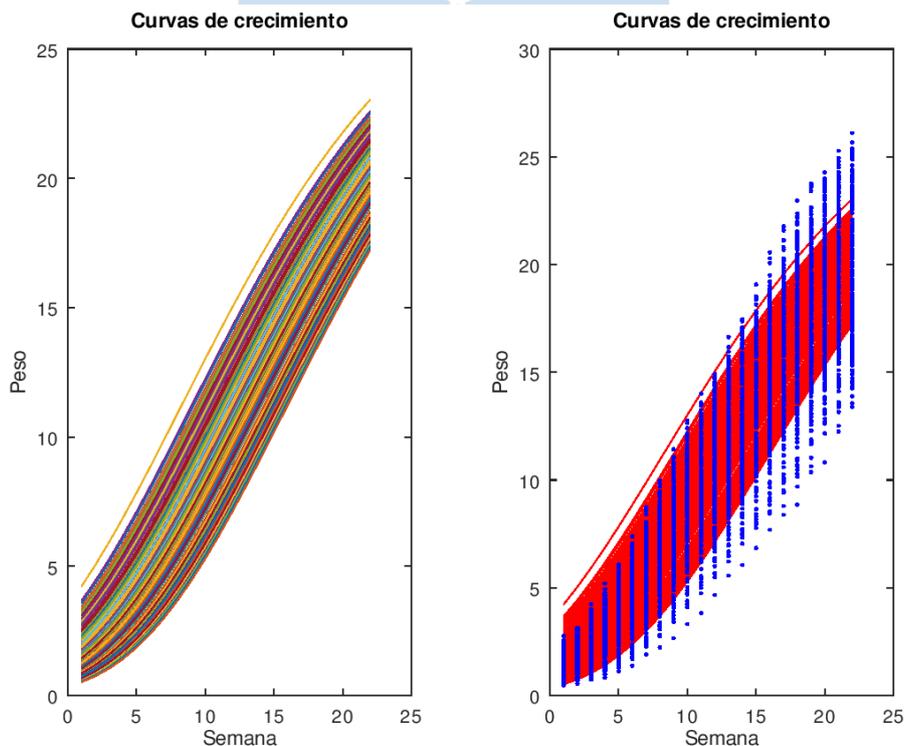


Figura 30. Modelo Gompertz con peso de la semana 1 como regresor.

Fuente: elaboración propia

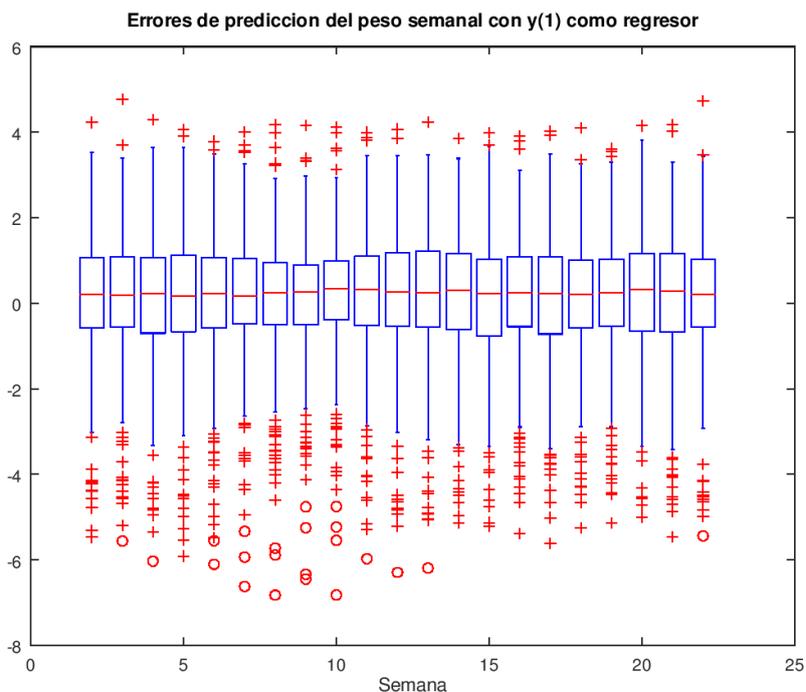


Figura 31. Errores de predicción del modelo Gompertz.

Fuente: elaboración propia

El error de predicción del modelo se encuentra distribuido de forma aleatoria alrededor de su valor esperado, cero. Se puede apreciar en el diagrama de caja de la Figura 31 que el error se encuentra disperso sin seguir una tendencia.

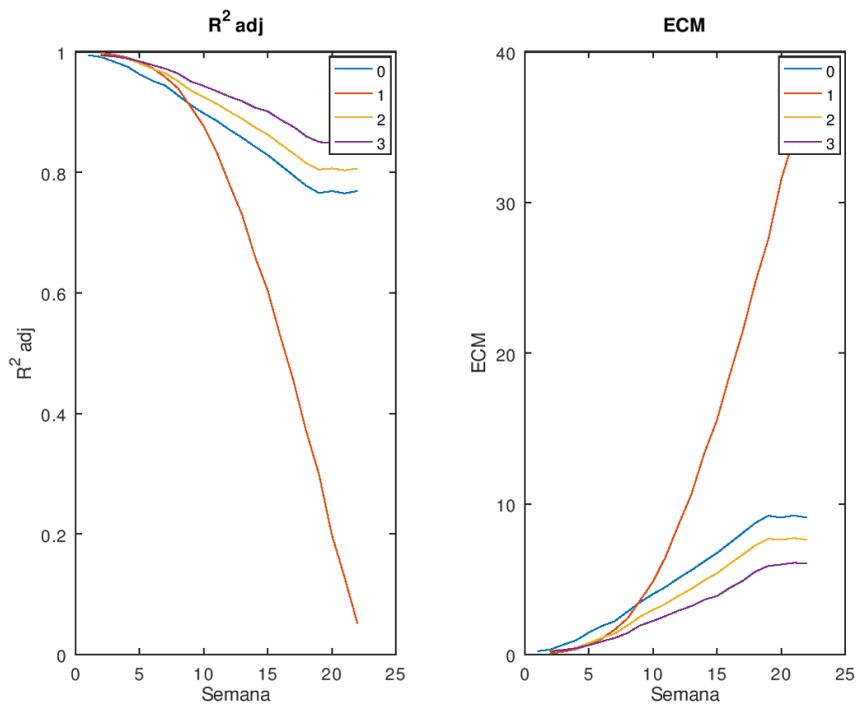


Figura 32. Precisión por semana del modelo Gompertz.

Fuente: elaboración propia

En la Figura 32 se muestra cómo varía la precisión por semana con cada modelo construido. El modelo 0 es el determinista, el modelo 1 es el basado en el ratio con  $W_1$ , peso de la semana 1, el modelo 2 se basa en la diferencia con  $W_1$ , y el modelo 3 es el que usa  $W_1$  como regresor.

El modelo que incorpora el peso de la semana 1 como diferencias ayuda a mejorar la precisión del modelo (curva 2). Cuando el peso se incorpora como ratios (curva 1), la precisión empeora. Finalmente, el modelo que utiliza el peso de la semana 1 como regresor tiene un mejor comportamiento entre semanas (curva 3).

### 3.2.1.2. Modelo de Brody

#### - Modelo condicionado al peso semanal dividido por el peso de la semana 1

El modelo es el siguiente:

$$\frac{W_t}{W_1} = A(1 - Be^{-kt}) \Rightarrow W_t = W_1 \times A(1 - Be^{-kt})$$

El modelo genera una curva por piscina. Para algunas piscinas, el modelo predice valores muy por encima de los datos observados según se observa en la Figura 33.

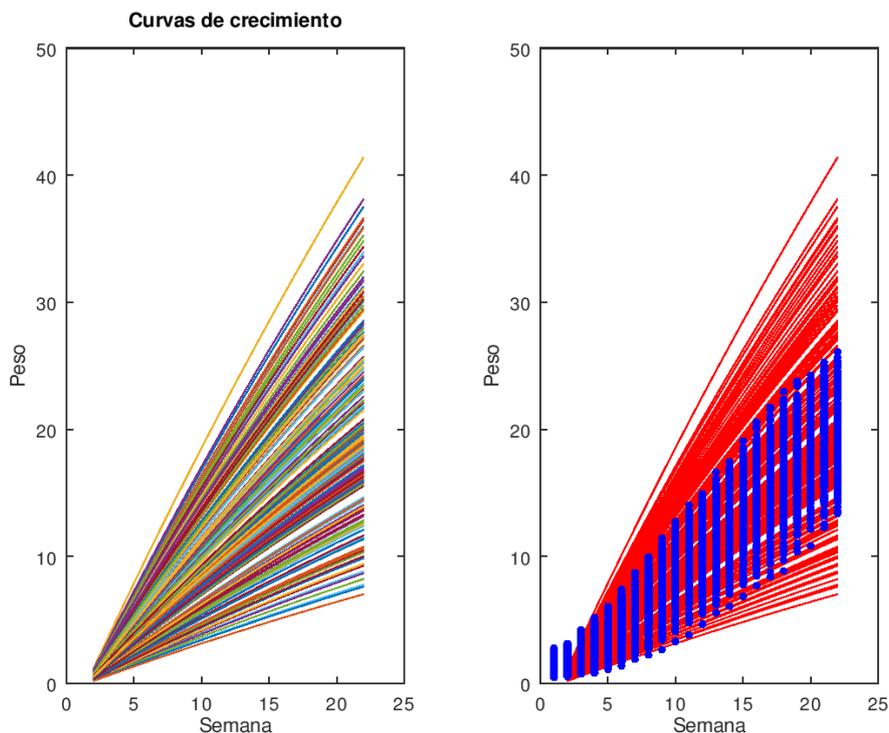


Figura 33. Modelo Brody dividiendo por el peso de la semana 1.

Fuente: elaboración propia

Se tiene mayor dispersión de los errores en la segunda mitad del cultivo, como se observa en la Figura 34. La distribución del error no es simétrica.

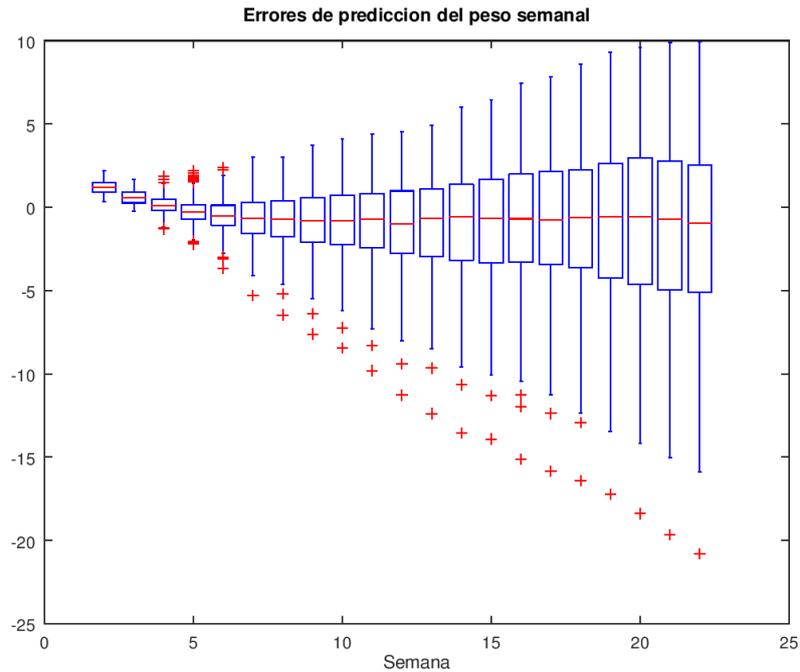


Figura 34. Errores de prediccion del modelo Brody.

Fuente: elaboración propia

- **Modelo condicionado a la diferencia entre el peso semanal y de la semana 1**

En este caso el modelo es el siguiente:

$$W_t = W_1 + A(1 - B e^{-kt})$$

En la Figura 35 se muestran las curvas obtenidas por el modelo.

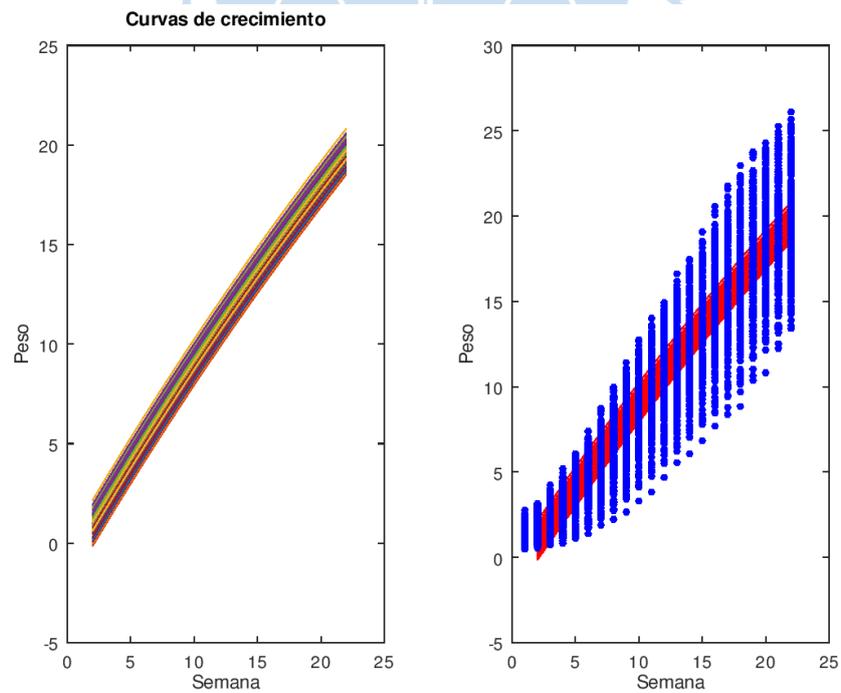


Figura 35. Modelo Brody restando el peso de la semana 1.

Fuente: elaboración propia

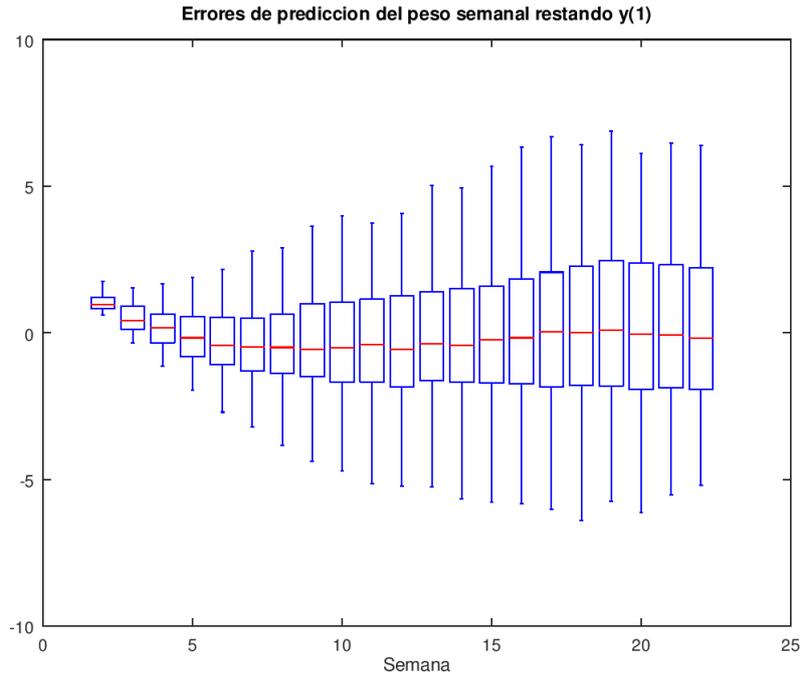


Figura 36. Errores de prediccion del modelo Brody.

Fuente: elaboración propia

El error de prediccion sigue una tendencia decreciente en las primeras semanas, lo cual es contrario a lo esperado del modelo. Su distribucion no es simétrica. (Ver Figura 36)

- **Modelo utilizando el peso de la semana 1 como regresor**

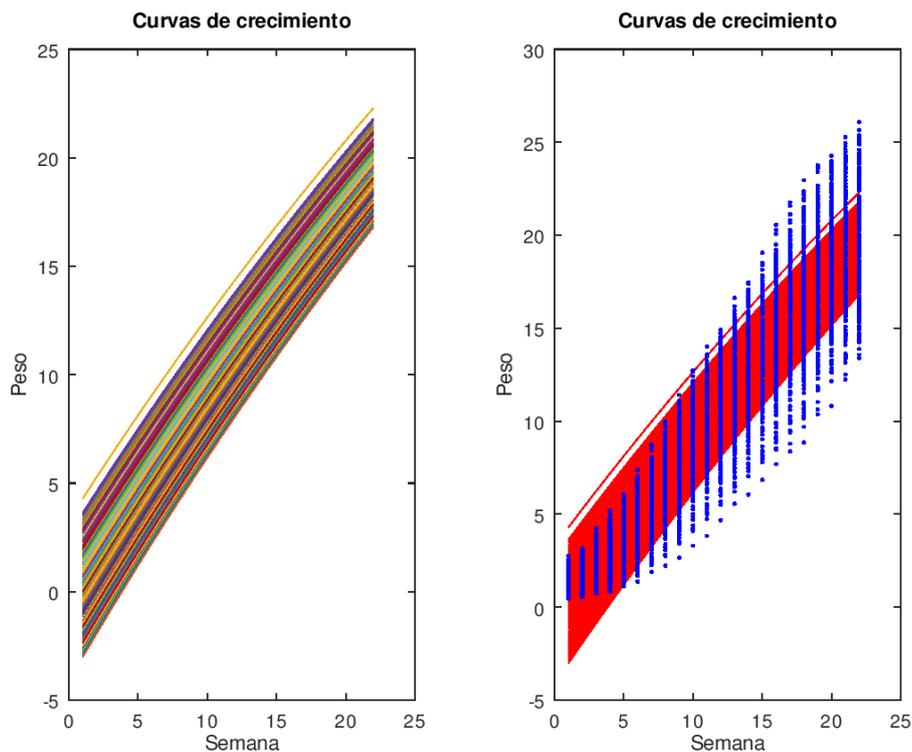


Figura 37. Modelo Brody con el peso de la semana 1 como regresor.

Fuente: elaboración propia

Se construyó el modelo con el peso de la semana 1 como un regresor adicional al tiempo. El modelo es el siguiente:

$$W_t = A(1 - Be^{-(K_1t + K_2W_1)})$$

Se obtiene una curva por cada piscina. El modelo Brody parece tener mayor variabilidad en las primeras semanas, ya que se observa en la Figura 37 que no logra seguir la tendencia de crecimiento de los datos.

En la Figura 38 se muestran los errores de predicción del modelo representados en un diagrama de caja. Se observa que los errores tienen media cero, pero no son simétricos.

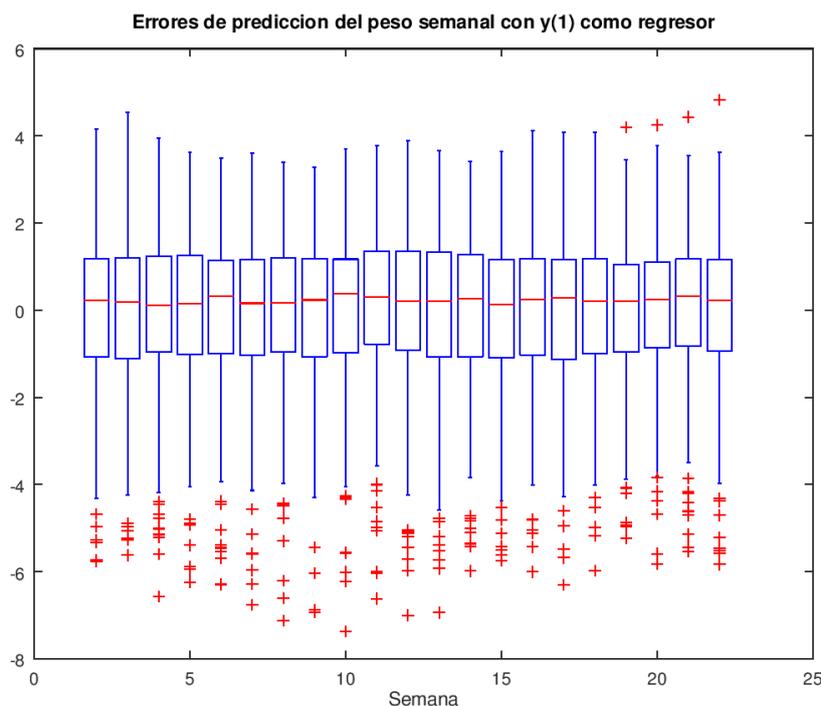


Figura 38. Errores de predicción del modelo Brody.

Fuente: elaboración propia

En la Figura 39 se observa como mejora la precisión de los modelos cuando se añade el peso de la semana 1 de forma aditiva (curva 2) y como regresor (curva 3).

### 3.2.1.3. Modelo de von Bertalanffy

#### - Modelo condicionado al peso semanal dividido por el peso de la semana 1

El modelo que utiliza ratios de crecimiento predice valores muy por encima de los datos observados, según se muestra en la Figura 40.

El gráfico de errores de predicción muestra una curvatura, lo cual indica una no linealidad del modelo. La distribución del error es asimétrica y los valores están más dispersos por debajo de cero (Figura 41).

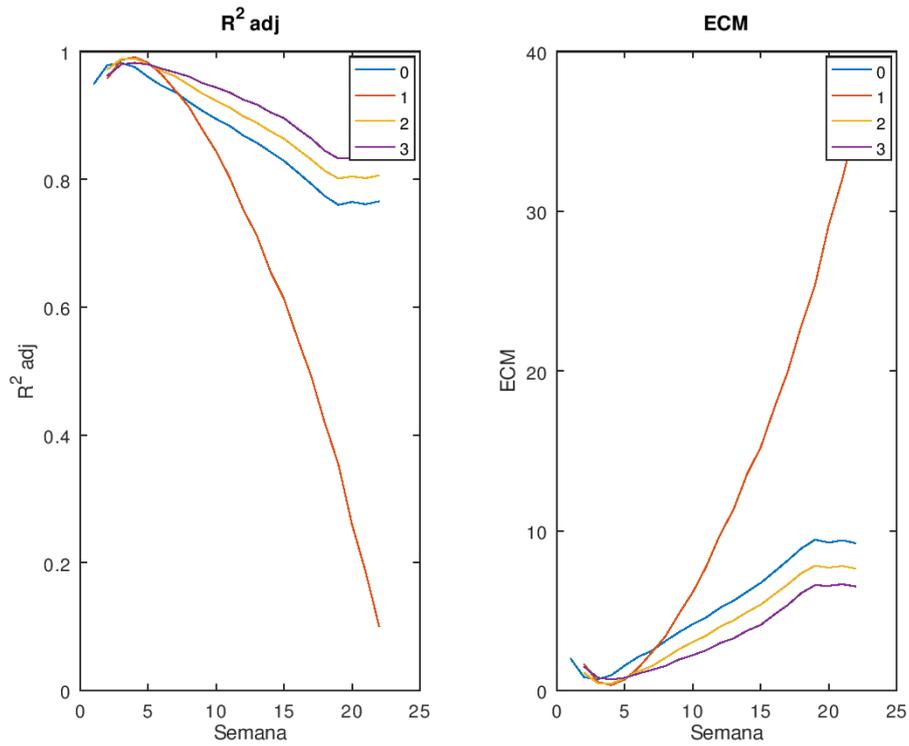


Figura 39. Precisión por semana del modelo Brody.

Fuente: elaboración propia

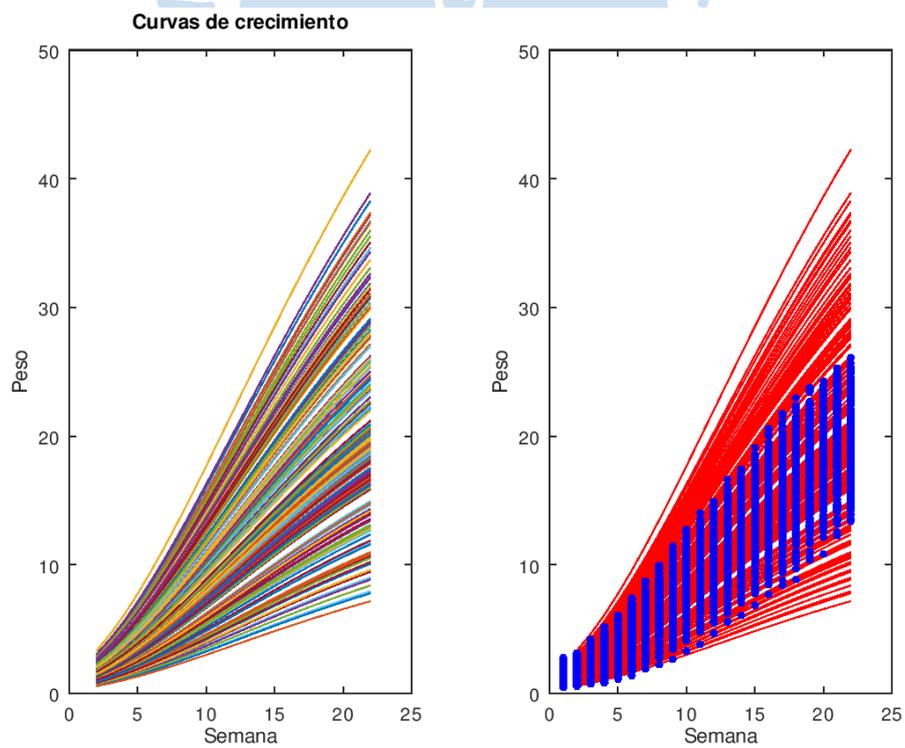


Figura 40. Modelo von Bertalanffy dividiendo por el peso de la semana 1.

Fuente: elaboración propia

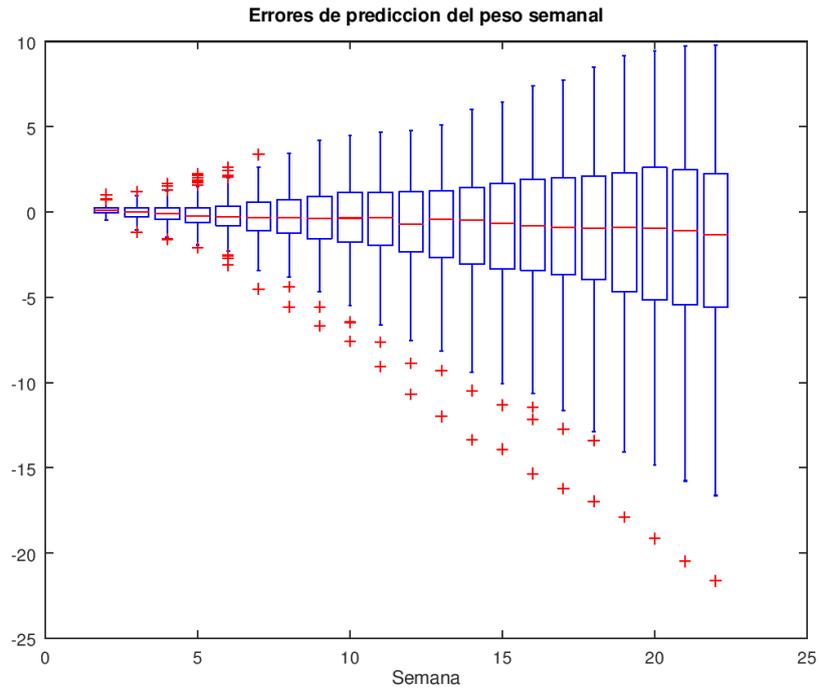


Figura 41. Errores de prediccion del modelo von Bertalanffy.

Fuente: elaboración propia

- **Modelo condicionado a la diferencia entre el peso semanal y de la semana 1**

El modelo es el siguiente:

$$W_t = W_1 + A(1 - Be^{-Kt})^3$$

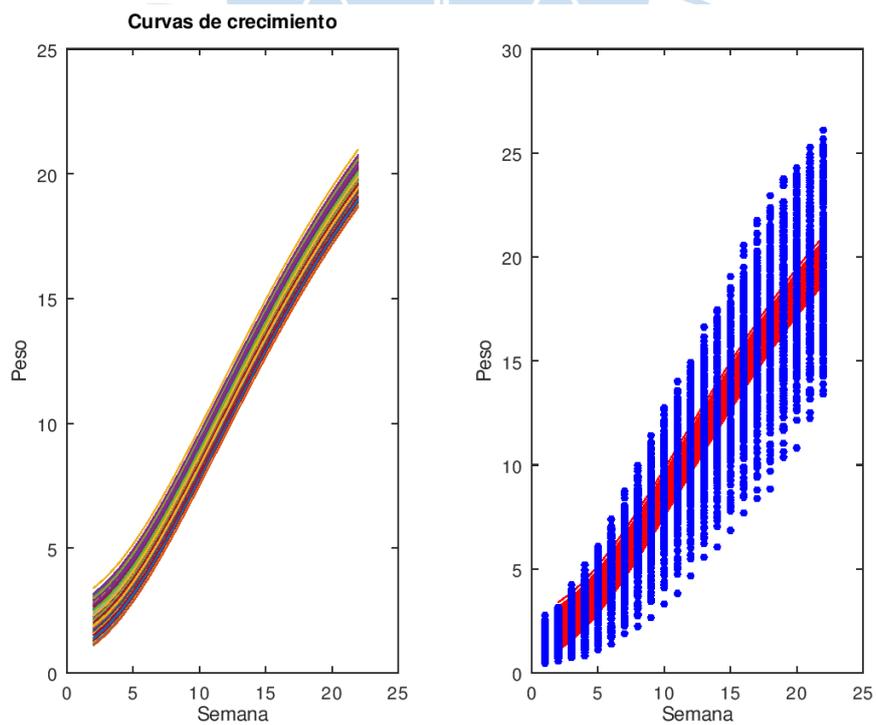


Figura 42. Modelo von Bertalanffy restando el peso de la semana 1.

Fuente: elaboración propia

En la Figura 42 se observa que las curvas del modelo no siguen el crecimiento real de las piscinas.

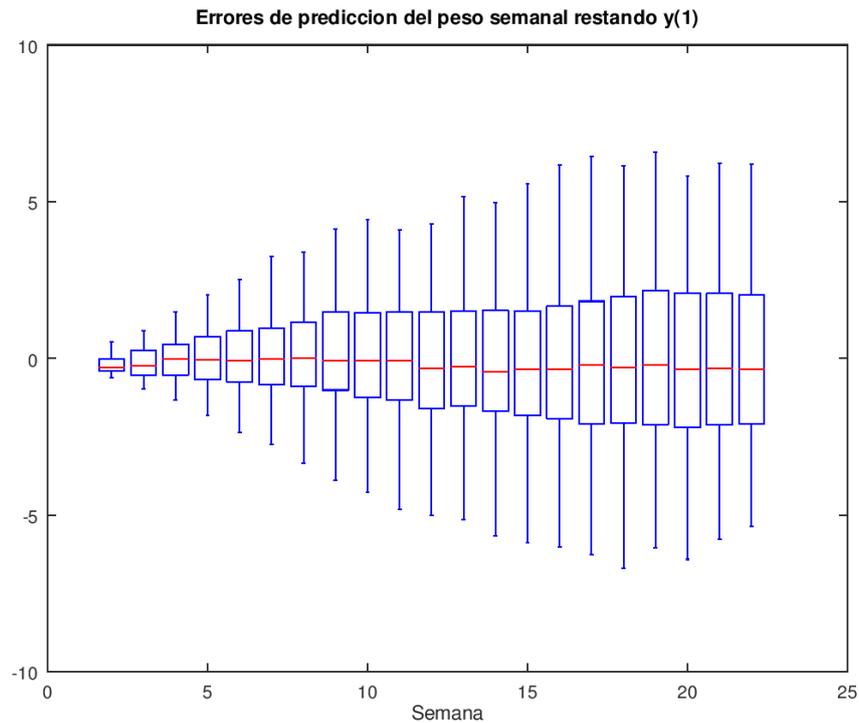


Figura 43. Errores de predicción del modelo von Bertalanffy.

Fuente: elaboración propia

La varianza del error se incrementa con el tiempo. Su distribución es simétrica, como se observa en la Figura 43.

- **Modelo utilizando el peso de la semana 1 como regresor**

El modelo es el siguiente:

$$W_t = A(1 - Be^{-(K_1 t + K_2 W_1)})^3$$

Cuando se agrega el peso de la semana 1 como regresor, el modelo sigue mejor el crecimiento real de los langostinos, pero no lo hace por completo. Se observa el modelo no cubre todas las piscinas. El error de predicción será mayor en las zonas donde el modelo no cubre los datos reales (Figura 44).

La distribución del error de predicción no sigue una estructura definida. Indica que las variables independientes tienen una relación lineal, es lo esperado del modelo de regresión (Figura 45).

En la Figura 46 se compara la precisión por semana de los modelos. El modelo con mayor precisión es el que utiliza el peso de la semana 1 como regresor.

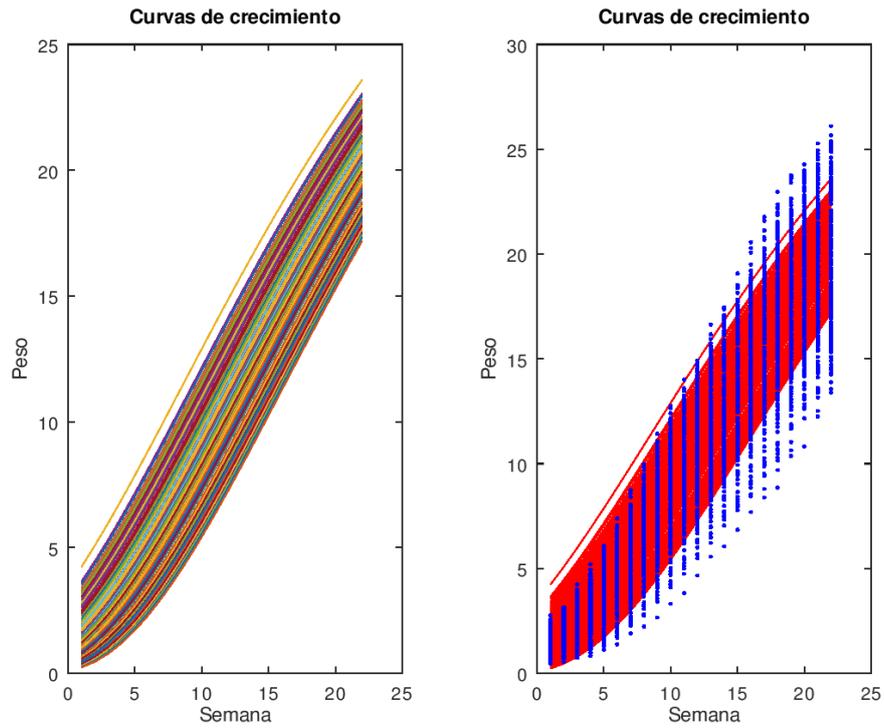


Figura 44. Modelo von Bertalanffy con el peso de la semana 1 como regresor.  
Fuente: elaboración propia.

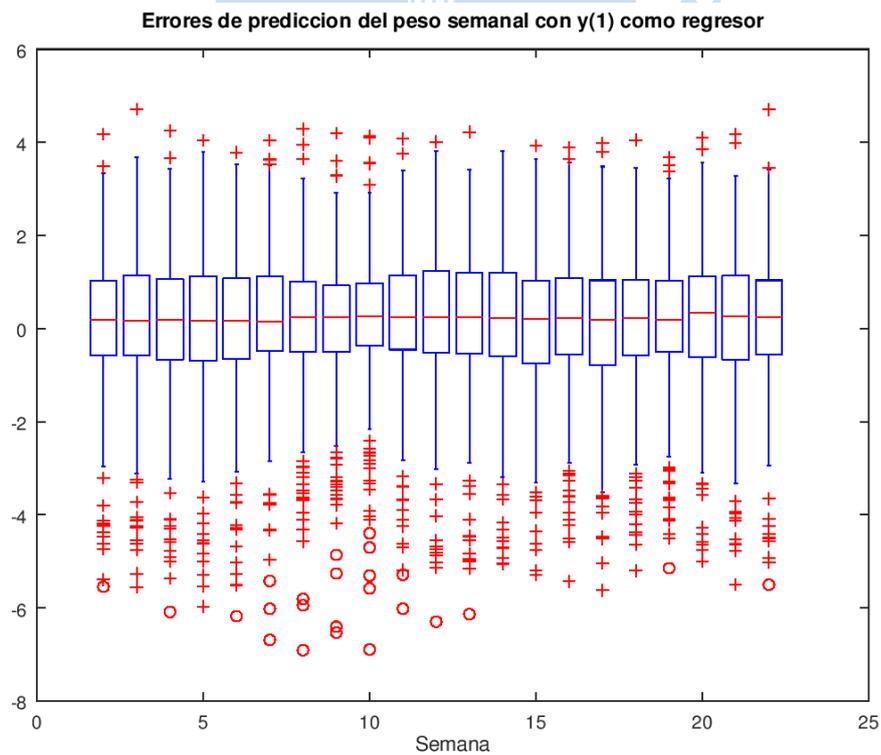


Figura 45. Errores de predicción del modelo von Bertalanffy.  
Fuente: elaboración propia

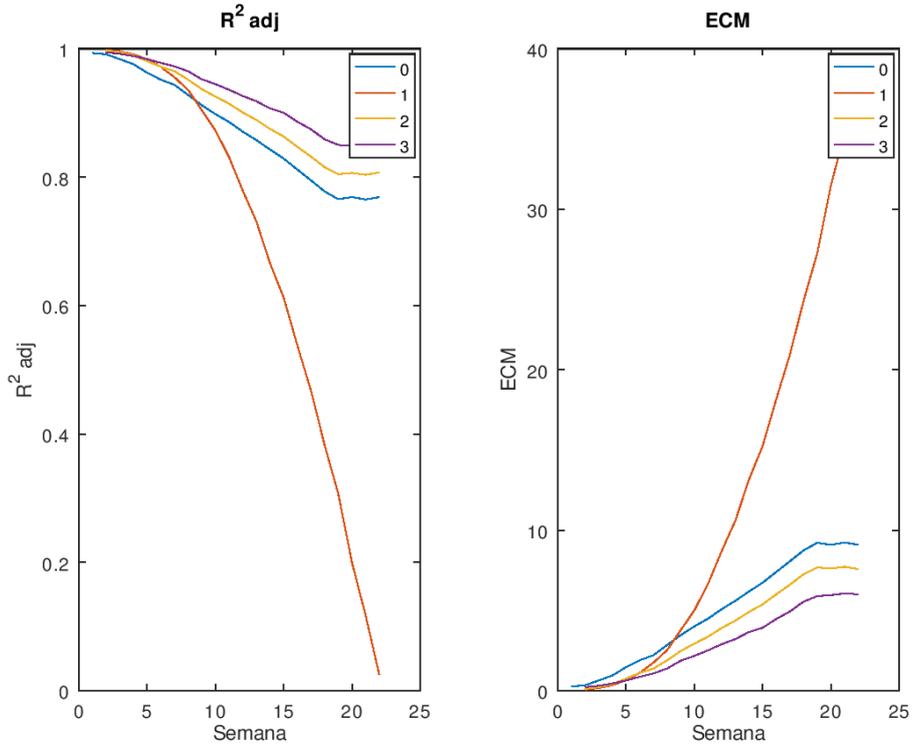


Figura 46. Precisión por semana del modelo von Bertalanffy.

Fuente: elaboración propia

### 3.2.1.4. Modelo Logístico

- **Modelo condicionado al peso semanal dividido por el peso de la semana 1**

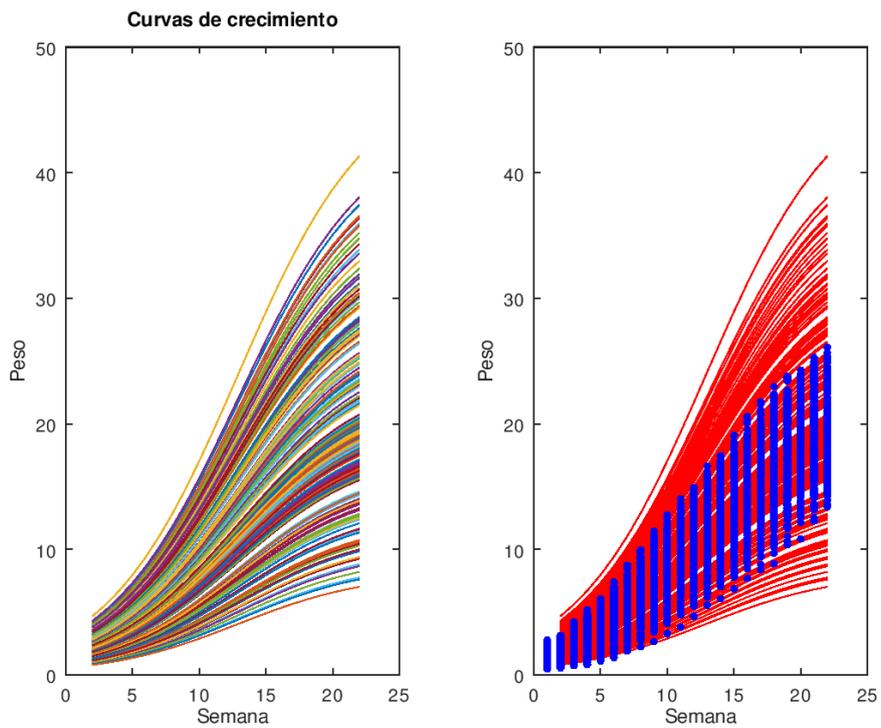


Figura 47. Modelo Logístico dividiendo por el peso de la semana 1.

Fuente: elaboración propia

Al igual que con los modelos anteriores, se puede estimar el siguiente modelo usando todos los datos:

$$\frac{W_t}{W_1} = \frac{A}{1 + Be^{-Kt}}$$

Al despejar  $W_t$  obtenemos una curva para cada piscina (Figura 47):

$$W_t = W_1 \times \frac{A}{1 + Be^{-Kt}}$$

Los errores de predicción de este modelo siguen una distribución asimétrica, y su varianza se incrementa con el tiempo, tal como se muestra en la Figura 48.

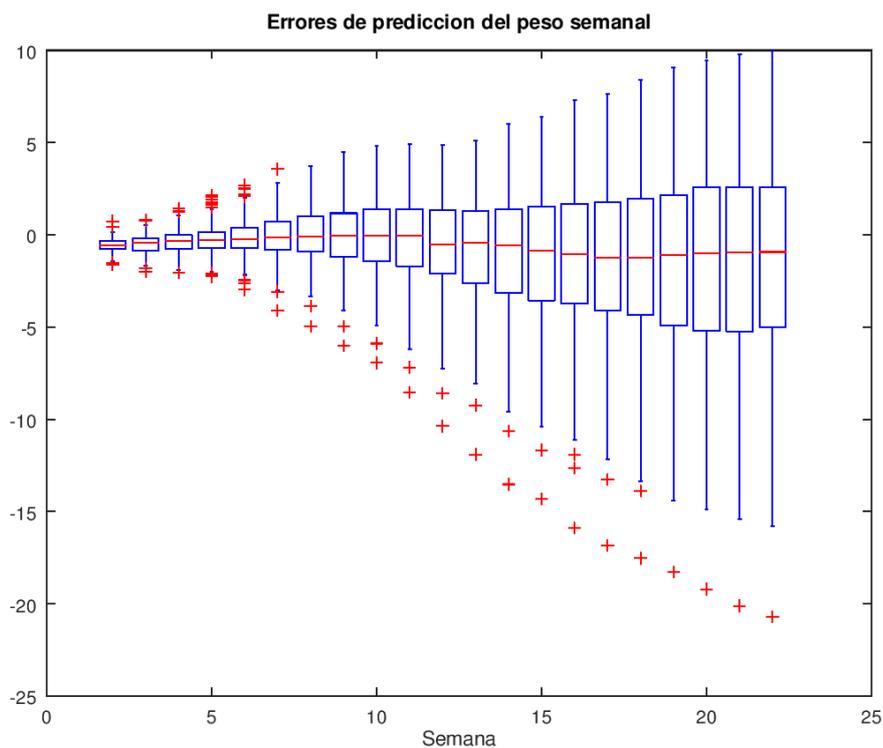


Figura 48. Errores de predicción del modelo Logístico.

Fuente: elaboración propia

#### - Modelo restando el peso de la semana 1

El modelo es el siguiente:

$$Y = W_t - W_1 = \frac{A}{1 + Be^{-Kt}}$$

$$W_t = W_1 + \frac{A}{1 + Be^{-Kt}}$$

La Figura 49 muestra las curvas obtenidas con el modelo. En la Figura 50 se observa que la distribución del error es asimétrica. La precisión del modelo mejora al tomar diferencias entre el peso semanal y el peso de la semana 1.

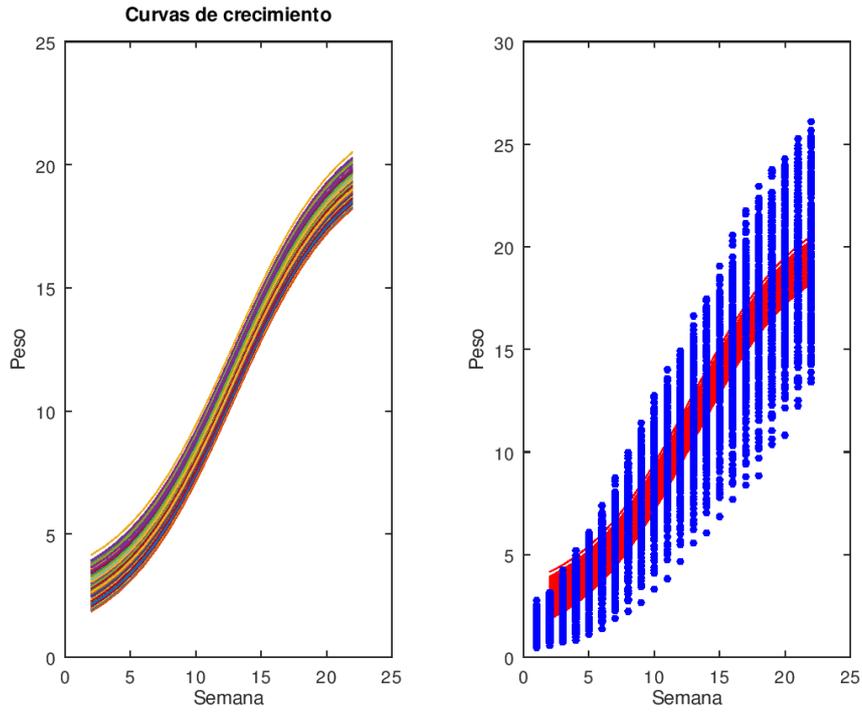


Figura 49. Modelo Logístico restando el peso de la semana 1.

Fuente: elaboración propia

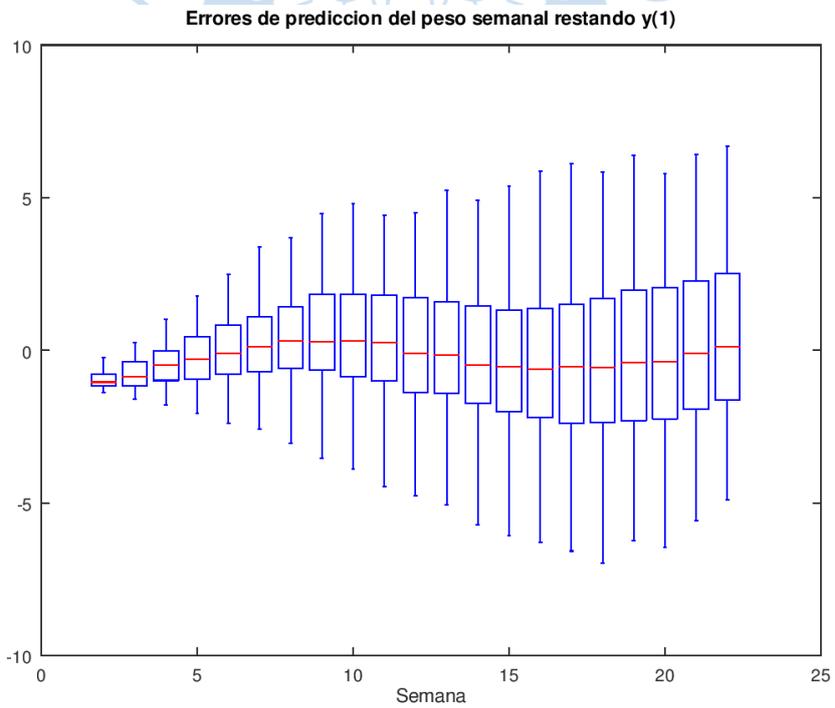


Figura 50. Errores de predicción del modelo Logístico.

Fuente: elaboración propia

- **Modelo tomando el peso de la semana 1 como regresor**

El modelo es el siguiente:

$$W_t = \frac{A}{1 + B e^{-(K_1 t + K_2 W_1)}}$$

Donde  $W_1$  es diferente en cada piscina.

En la Figura 51 se observa que el modelo genera una curva por cada piscina. Las curvas están más cerca de los valores reales de cada piscina que en los modelos previos.

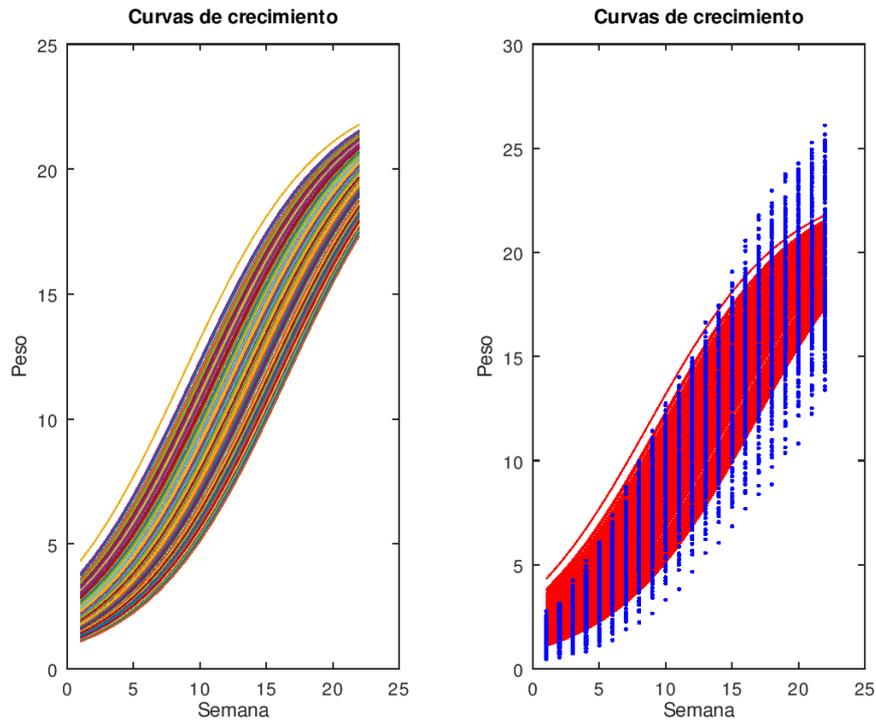


Figura 51. Precisión por semana del modelo Logístico.

Fuente: elaboración propia

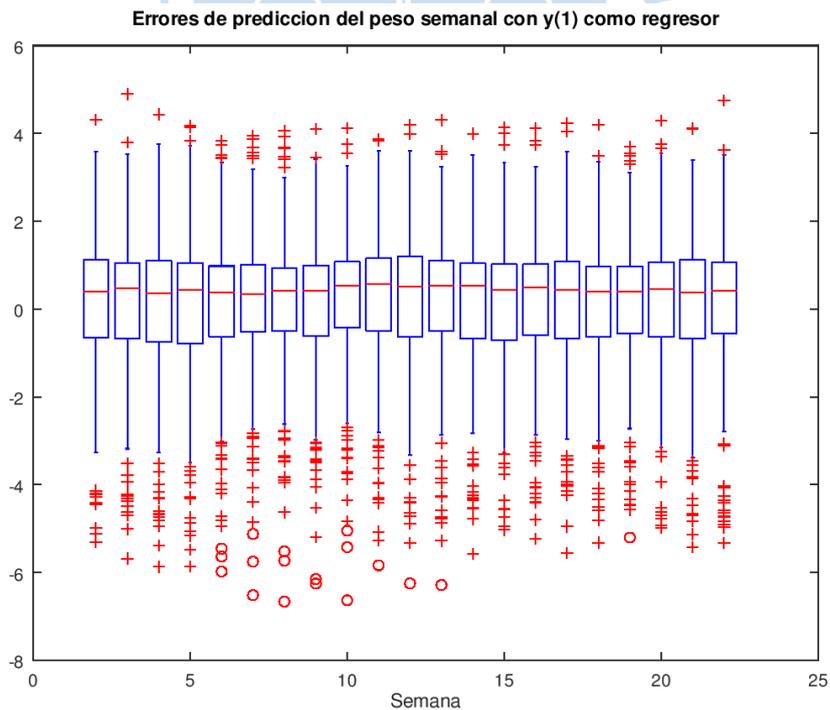


Figura 52. Errores de predicción del modelo Logístico.

Fuente: elaboración propia

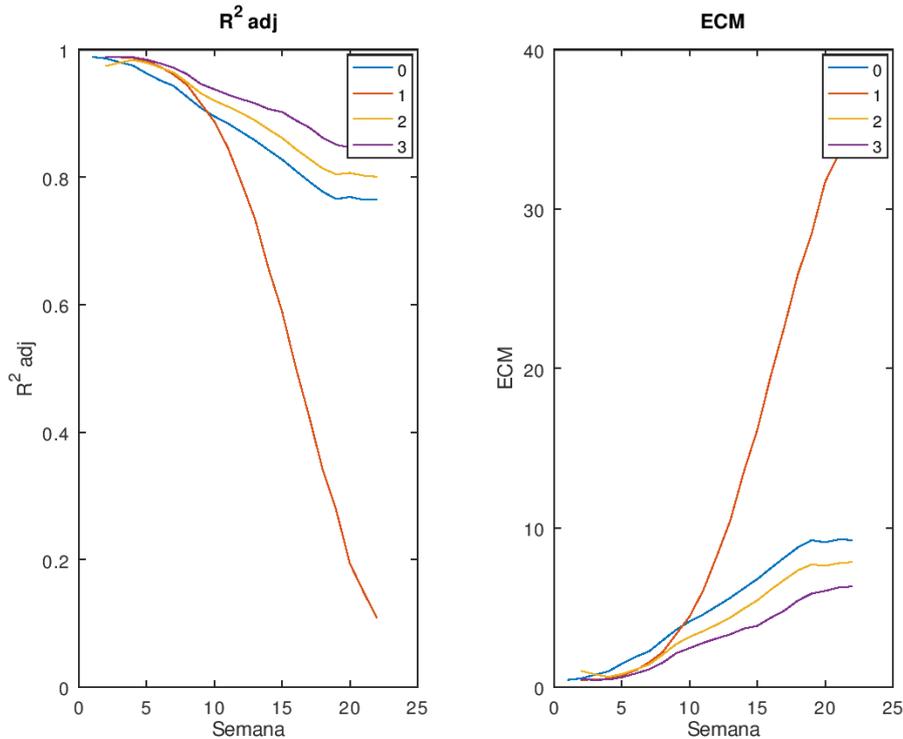


Figura 53. Precisión por semana del modelo Logístico.

Fuente: elaboración propia

En la Figura 52 se observa que la distribución del error no sigue una estructura definida y es asimétrica. La Figura 53 muestra la precisión por semana obtenida por cada modelo.

### 3.2.1.5. Modelo estimado por mínimos cuadrados ponderados

La estimación por mínimos cuadrados ponderados (WLS) es útil cuando existe heterocedasticidad.

#### - Modelo condicionado al peso semanal dividido por el peso de la semana 1

Este modelo considera únicamente al tiempo como regresor. La diferencia con el modelo anterior, es que en vez de utilizar los pesos semanales, se ingresará el valor del ratio de crecimiento respecto a la semana 1. Es decir, el modelo tomará el valor

$$y_i/y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + e_i$$

Donde  $i = 2, 3, \dots, 22$  es la semana.

El modelo predice los valores de los ratios de crecimiento correspondientes a cada semana. Para obtener el valor del peso será necesario multiplicar el valor de la predicción por el peso de la semana 1.

$$\hat{y}_i = y_1 \times (\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3)$$

Como  $y_1$  es diferente en cada piscina, El modelo construido, a diferencia del modelo que solo usa el tiempo, genera una curva para cada piscina. En la Figura 54 se han graficado las

curvas del modelo y los datos reales de crecimiento. Algunas curvas están muy por encima de los datos reales.

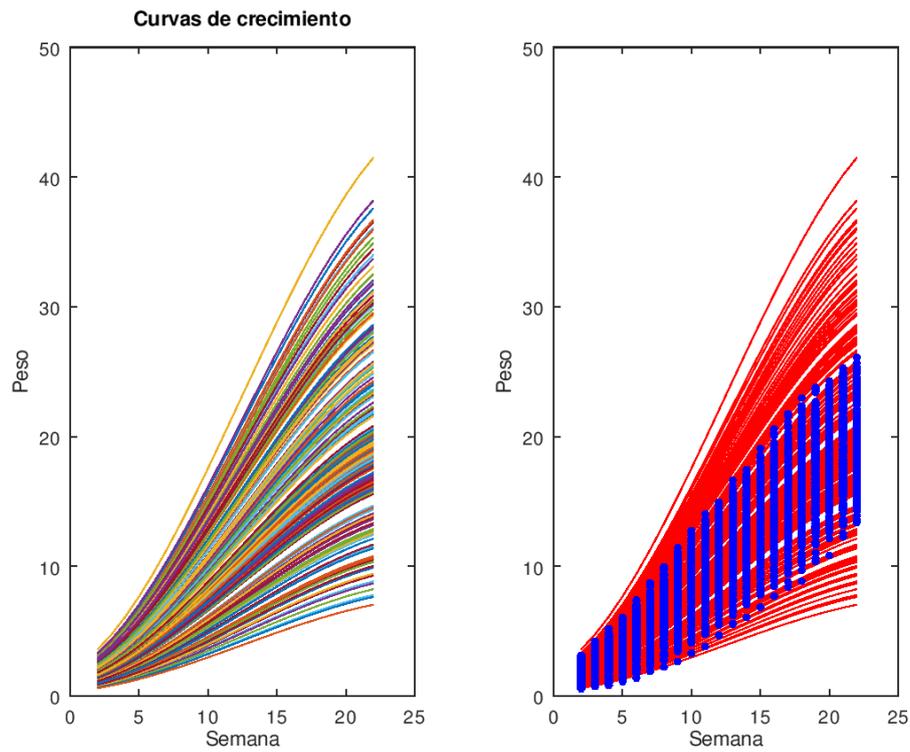


Figura 54. Modelo WLS dividiendo por el peso de la semana 1.

Fuente: elaboración propia.

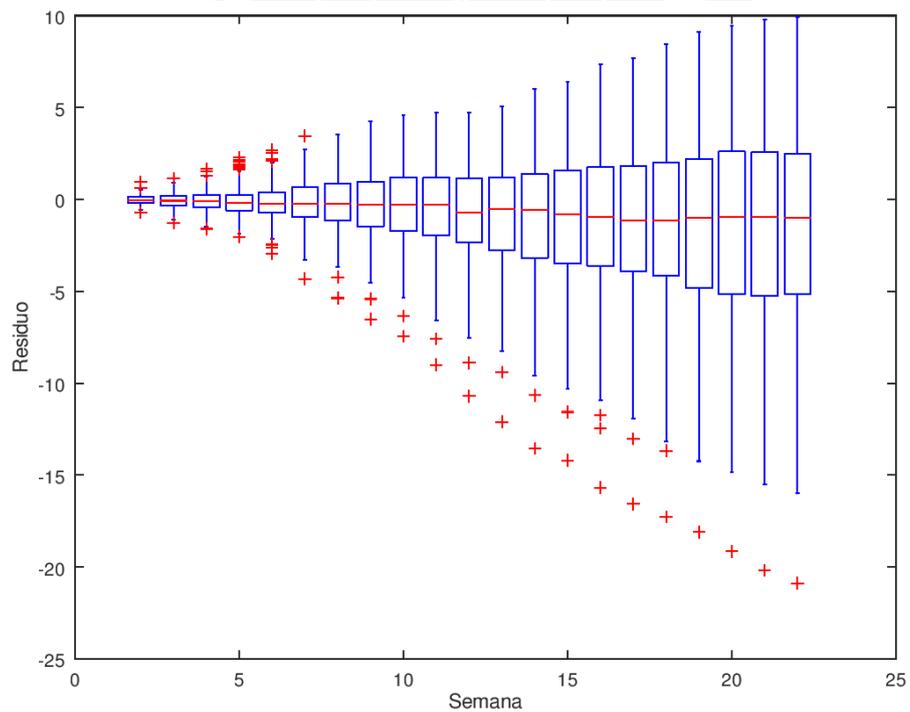


Figura 55. Error de predicción del modelo WLS.

Fuente: elaboración propia.

Se analizó el error de predicción para el modelo. En la Figura 55 se ilustra la distribución del error con un diagrama de caja. Se observa el incremento del error en algunas piscinas. La media de los residuos es cero, pero no hay simetría.

- **Modelo condicionado a la diferencia entre el peso semanal y de la semana 1**

Este modelo utiliza el tiempo como único regresor. Para la construcción del modelo se utilizaron las diferencias entre los pesos semanales y el peso de la semana 1. El modelo es:

$$\hat{y}_i = y_1 + (\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3)$$

Donde  $i = 2, 3, \dots, 22$ .

Será necesario que al valor de la predicción se le adicione el peso de la semana 1 para obtener el valor del peso en la semana  $i$ .

En la Figura 56 se observa que el modelo genera una curva para el crecimiento de cada piscina. Esto es esperado ya que el modelo determinista genera una única curva, y al adicionar el valor del peso de la semana 1, se crea una curva para cada piscina, desplazada verticalmente.

Se observa además, que el modelo no consigue seguir el crecimiento de los langostinos de todas las piscinas.

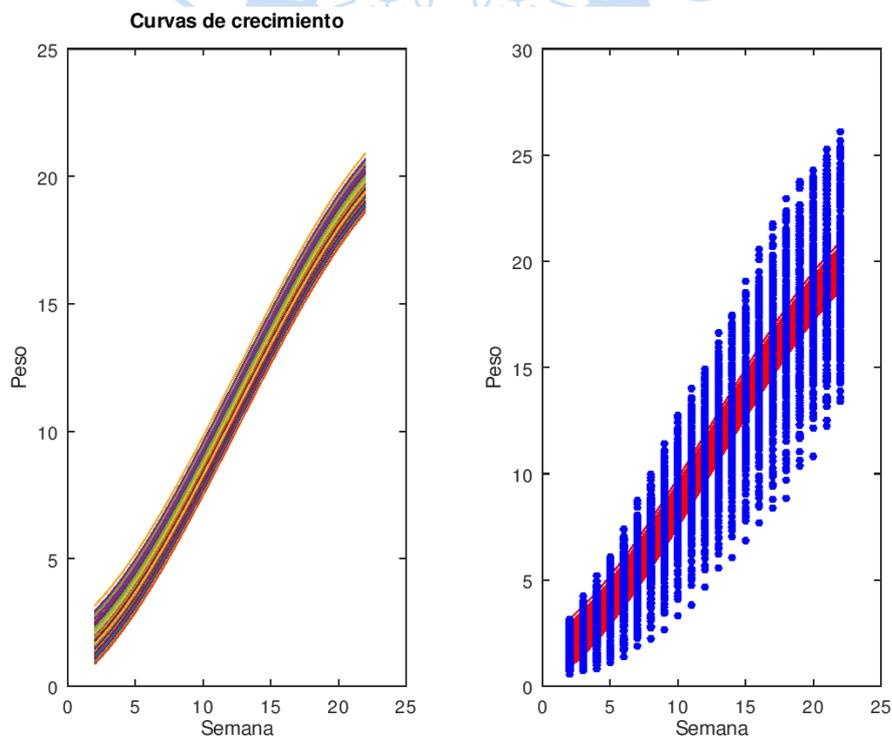


Figura 56. Modelo WLS con diferencia del peso de semana 1.

Fuente: elaboración propia.

El error de predicción del modelo es alto en las últimas semanas debido a que no se logra seguir el crecimiento real de cada piscina. En la Figura 57, se observa que la media de los residuos es cero, y que su distribución es simétrica.

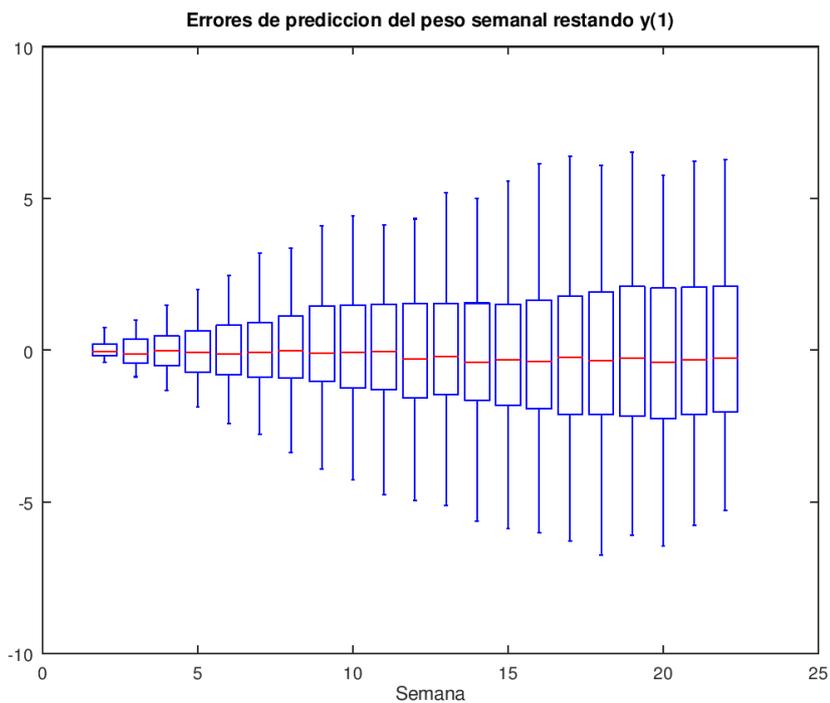


Figura 57. Errores de predicción del modelo WLS.

Fuente: elaboración propia.

- **Modelo utilizando el peso de semana 1 como regresor de forma aditiva**

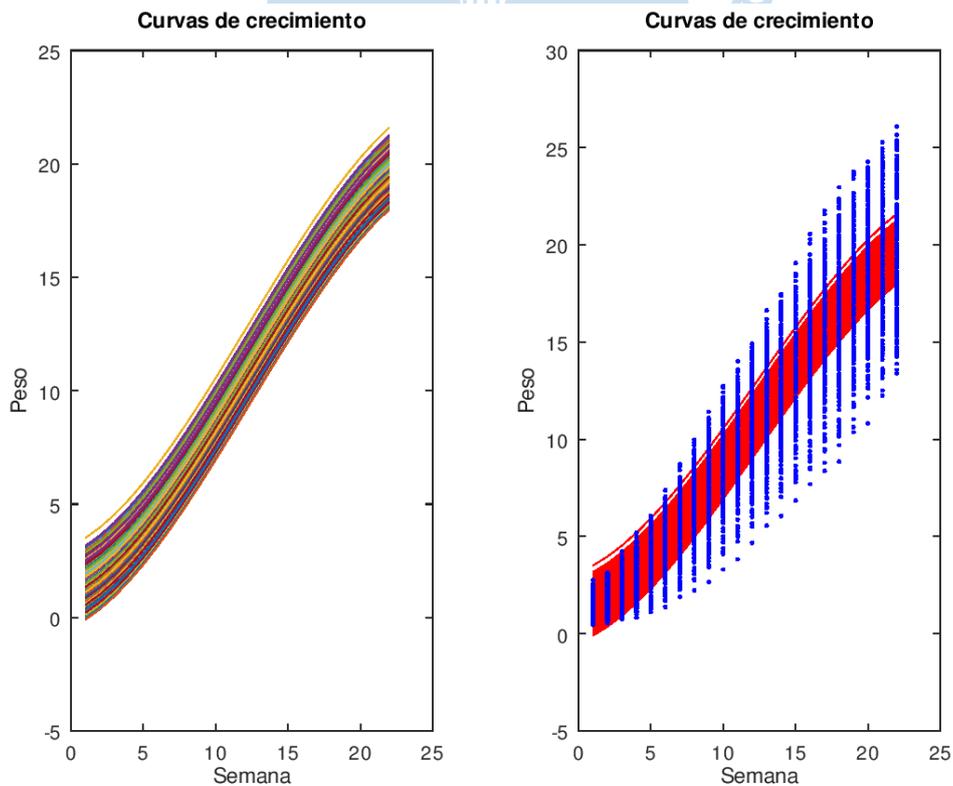


Figura 58. Modelo WLS con  $t$  y  $y_1$  como regresores aditivos.

Fuente: elaboración propia.

Se propone incorporar el peso de la semana 1 como variable independiente. Para esto, se utilizó el siguiente modelo que adiciona el peso de la semana 1,  $y_1$ , al modelo determinista propuesto.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \beta_4 y_1 + e_i$$

Se incluyen términos de diferente orden en esta transformación para facilitar la modelización de la no linealidad del modelo.

El modelo estima los parámetros  $\beta$  y predice el valor del peso de la semana  $i$ , donde:

$$i = 1, 2, \dots, 22$$

En la Figura 58 se muestra el modelo construido y en Figura 59 se muestra la distribución del error de predicción. La media de los errores es cero, lo cual es lo esperado del modelo de regresión.

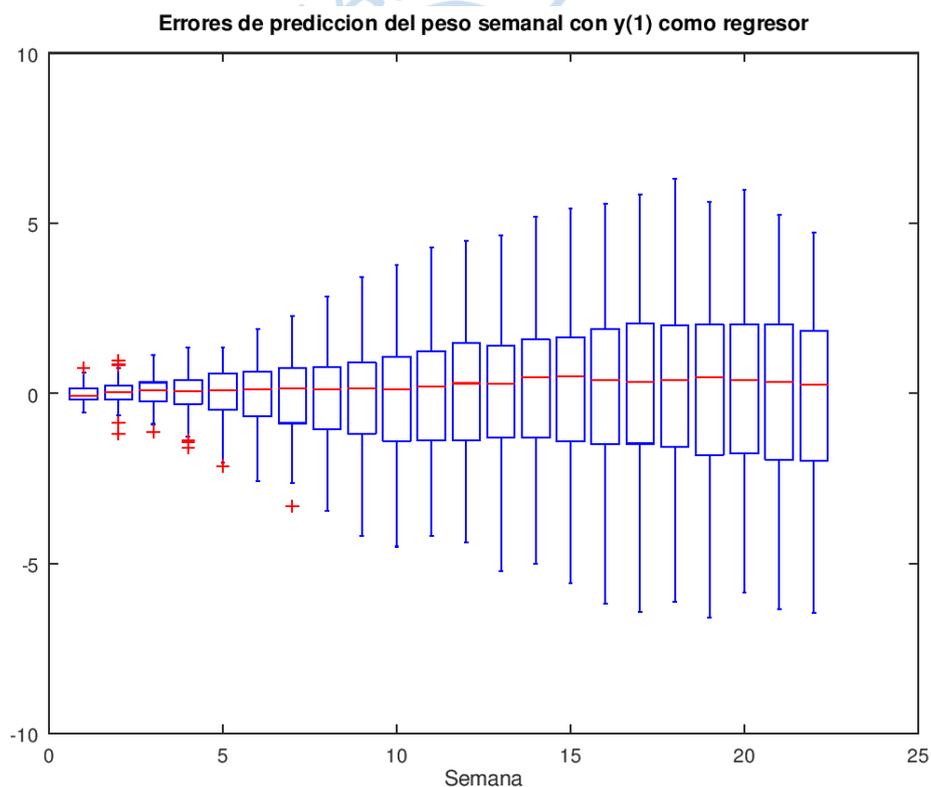


Figura 59. Errores de predicción del modelo WLS.

Fuente: elaboración propia.

El gráfico de residuos vs valores previstos muestra que los residuos están distribuidos de forma aleatoria y no siguen una estructura definida, aparte de la habitual heterocedasticidad. Por esto se puede afirmar que hay linealidad en el modelo.

El gráfico de residuos vs tiempo permite observar que hay simetría en los residuos alrededor de la media  $E(e) = 0$ . (Figura 60)

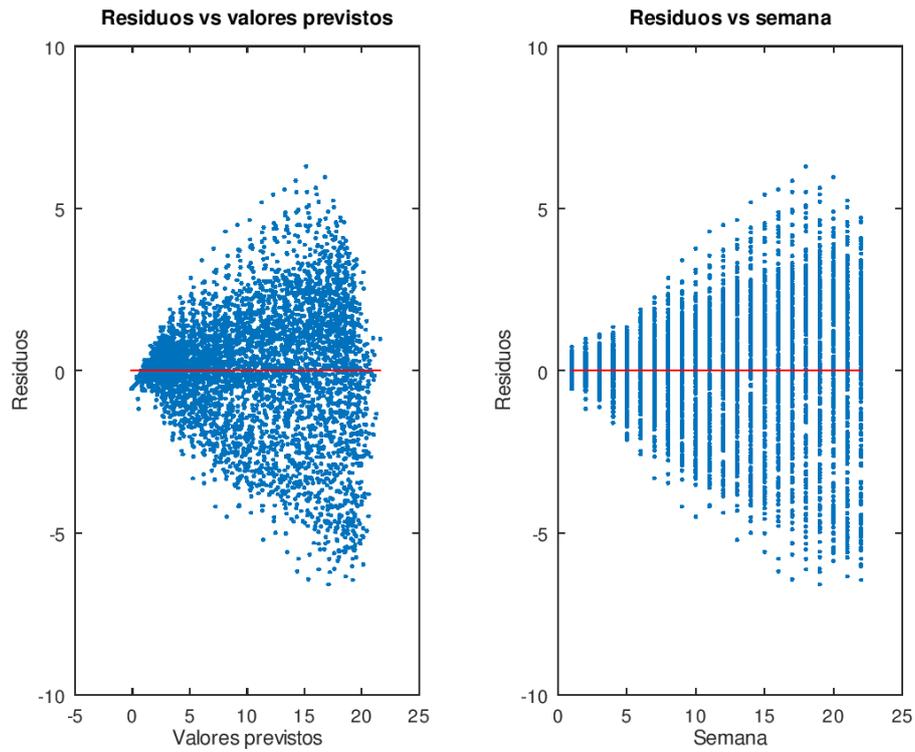


Figura 60. Gráficos de residuos del modelo WLS.

Fuente: elaboración propia.

- **Modelo utilizando el peso de semana 1 como regresor de forma multiplicativa**

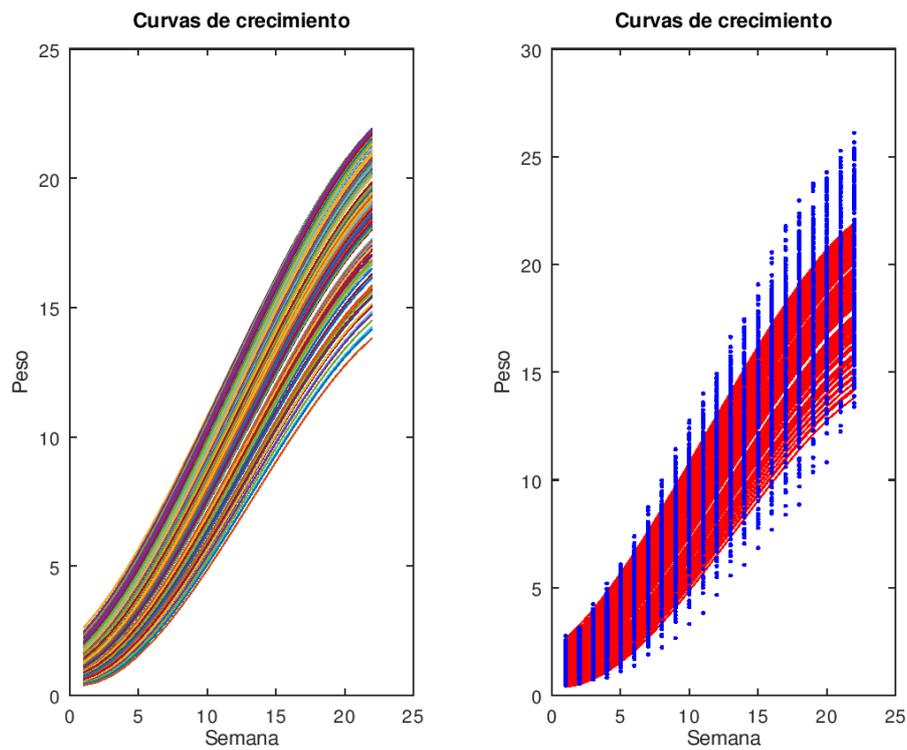


Figura 61. Modelo WLS con  $t$  y  $y_1$  como regresores multiplicativos.

Fuente: elaboración propia.

El modelo propuesto incorpora el tiempo y el peso de la semana 1 como regresores de forma multiplicativa. En la Figura 61 se muestran las curvas obtenidas con este modelo.

El modelo es el siguiente:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \beta_4 y_1 + \beta_5 x_i y_1 + \beta_6 x_i y_1^2 + \beta_7 x_i^2 y_1 + e_i$$

Se incluyen términos de diferente orden en esta transformación para modelizar la no linealidad del modelo.

En el gráfico de residuos vs valores previstos (Figura 62) se muestra que los residuos están distribuidos de forma aleatoria y no siguen una estructura definida.

La Figura 63 muestra la distribución del error de predicción.

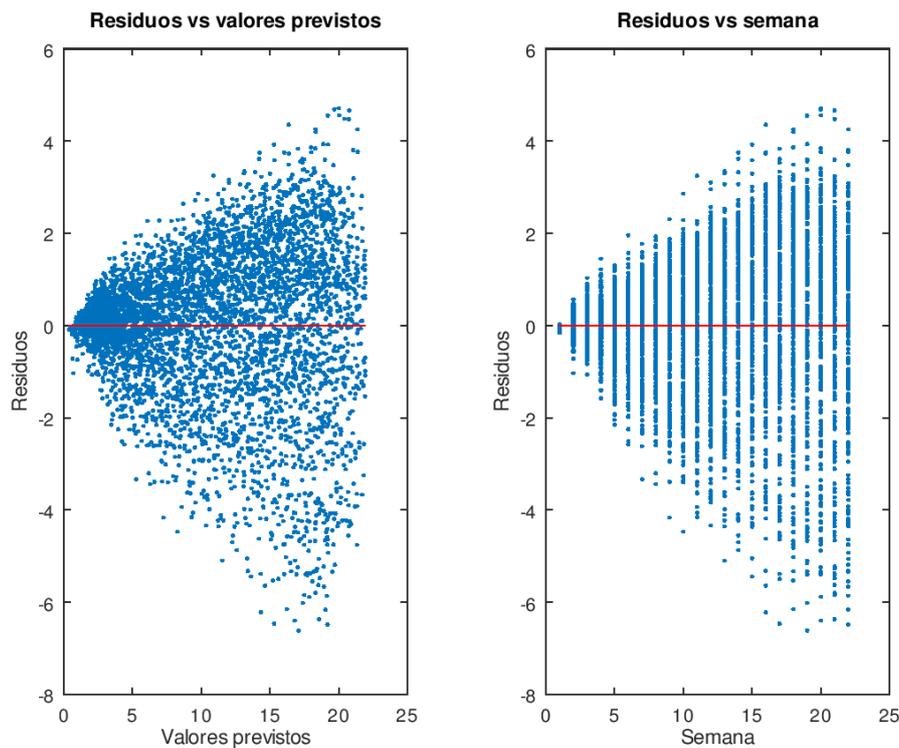


Figura 62. Gráficos de residuos del modelo WLS.

Fuente: elaboración propia.

Con respecto a la precisión del modelo, se analizó el valor del  $R^2_{adj}$  del modelo. En la Figura 64 se comparan las diferentes alternativas usando WLS: (0) determinista, (1) ratio con  $y_1$ , (2) diferencia con  $y_1$ , (3)  $y_1$  como regresor aditivo y (4)  $y_1$  formando un modelo multiplicativo. Se observa que este último modelo es el más preciso.

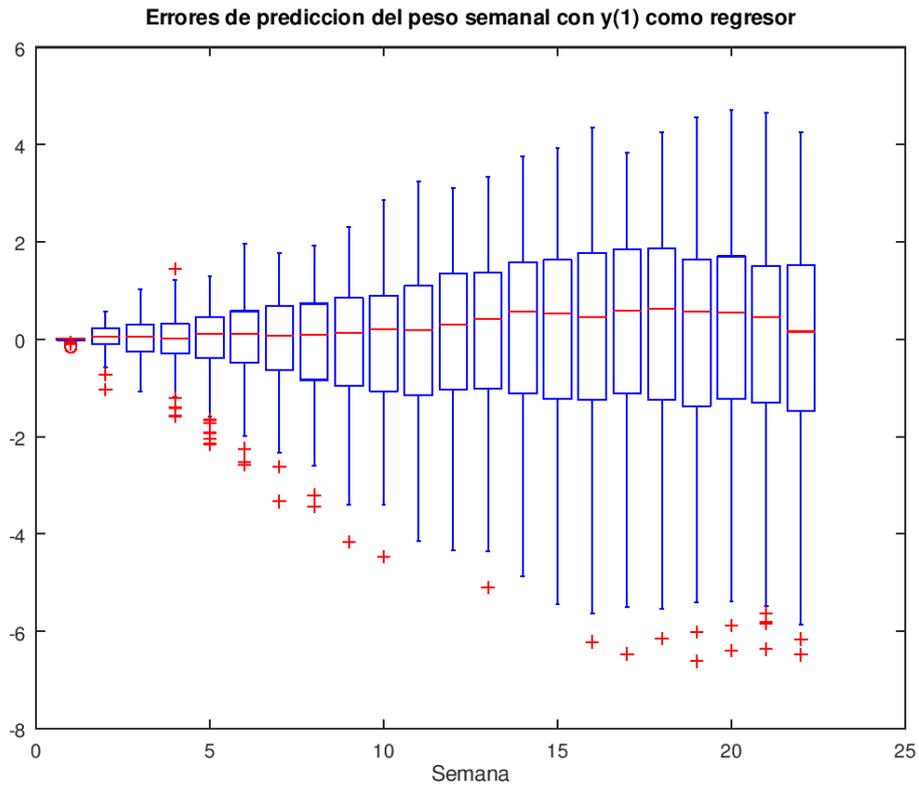


Figura 63. Errores de predicción del modelo WLS.

Fuente: elaboración propia

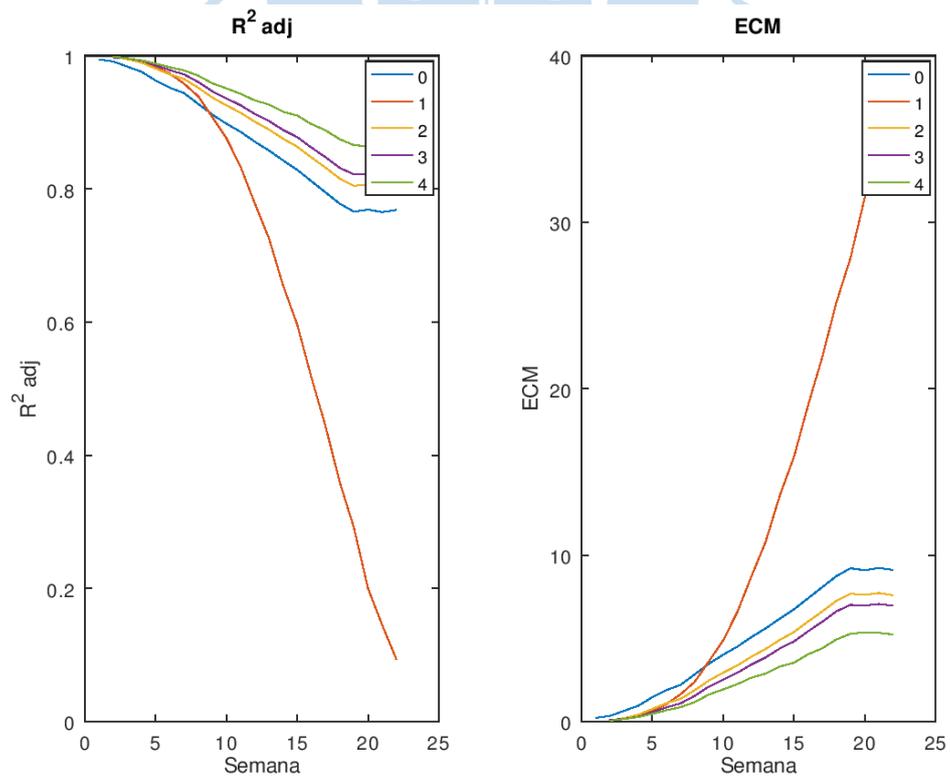


Figura 64. Precisión por semana del modelo WLS.

Fuente: elaboración propia

### 3.2.1.6. Comparación de los modelos

Los valores de  $R^2_{adj}$  de cada modelo se muestran en la Tabla 5. Se observa que la precisión mejora cuando se toma el peso de la semana 1 como regresor.

Tabla 5. Precisión de los modelos de crecimiento.

Modelos	$R^2_{adj}$			
	Gompertz	Brody	Bertalanffy	Logístico
Determinista	0.87627	0.87085	0.87626	0.87461
Utilizando ratios	0.74747	0.74390	0.74751	0.74612
Utilizando diferencias	0.8894	0.88678	0.89011	0.88579
Con t y y1 como regresores	0.92569	0.91457	0.92577	0.92339

Fuente: elaboración propia.

El método de estimación WLS tiene mayor precisión en el modelo que utiliza el tiempo y el peso de la semana 1 como regresores de forma multiplicativa, como se observa en la Tabla 6.

Tabla 6. Precisión de los modelos WLS

Modelo WLS	$R^2_{adj}$
Determinista	0.87620
Utilizando ratios	0.74727
Utilizando diferencias	0.89017
Con t y y1 como regresores aditivos	0.91348
Con t y y1 como regresores multiplicativos	0.93467

Fuente: elaboración propia.

La Figura 65 muestra el modelo de predicción para el caso particular de 2 piscinas. A la izquierda, la predicción de la piscina N°1 y a la derecha, de la piscina N°5. En estos gráficos se han añadido unos intervalos de predicción del 90%, basados en la distribución normal y la raíz del ECM de cada semana. En estos dos casos, tomados como ejemplos, los datos reales están dentro de un intervalo de predicción del 90%.

Se ha efectuado un análisis de normalidad con los tests de Anderson-Darling y de Kolmogorov-Smirnov. Se observa al analizar la normalidad de los residuos del modelo, que en las primeras semanas la distribución del error está más cercana a la normal, pero que al avanzar en el tiempo, los residuos se alejan de una distribución normal, aunque este alejamiento no es excesivo.

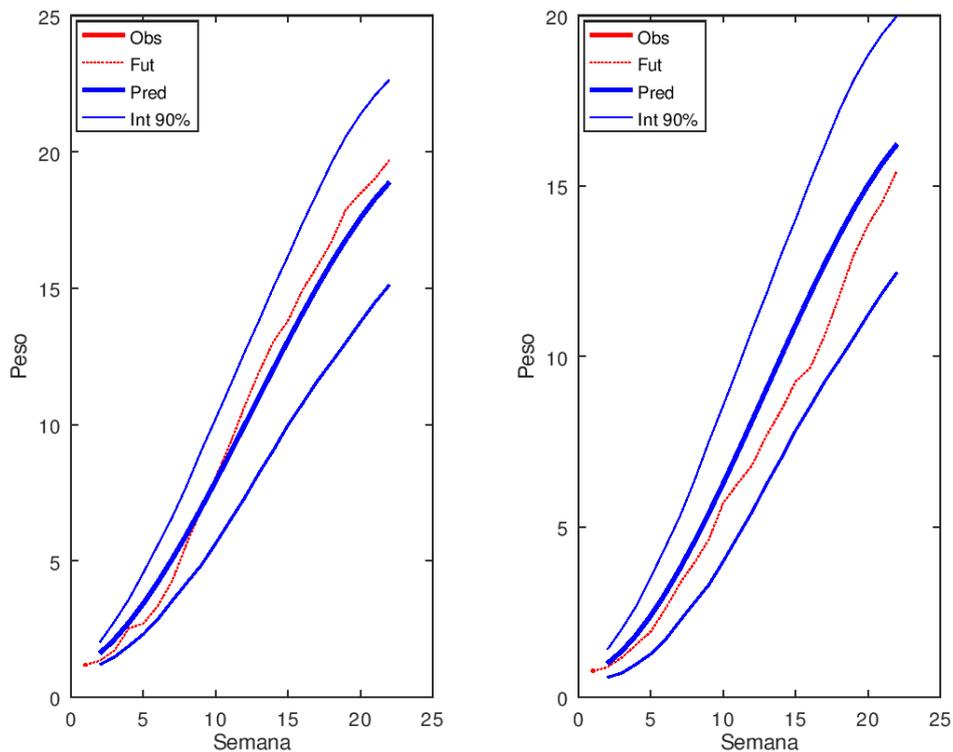


Figura 65. Modelo de predicción del crecimiento a partir de la semana 2  
Fuente: elaboración propia.

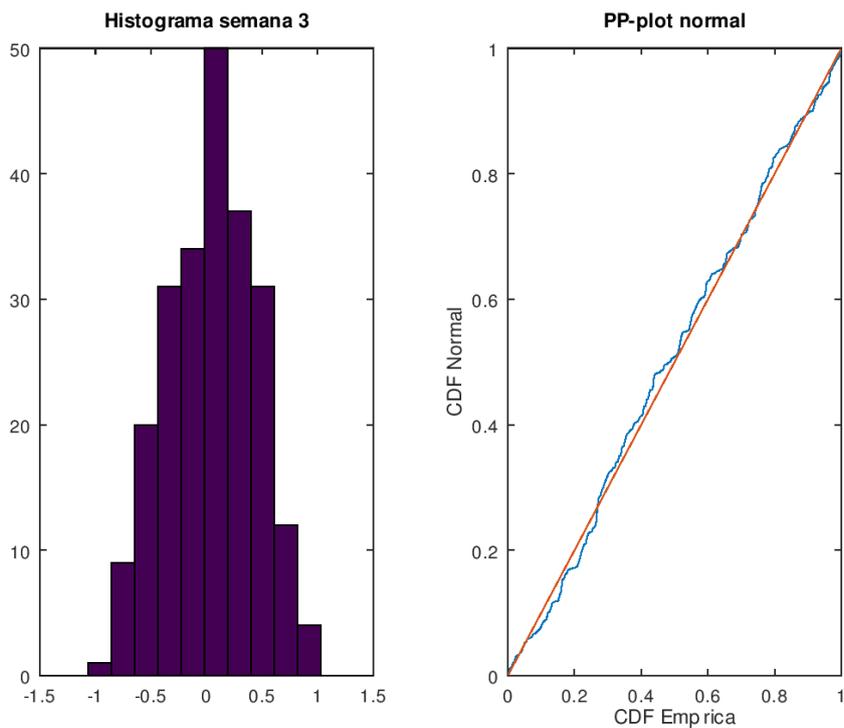


Figura 66. Análisis de normalidad de residuos en la semana 2  
Fuente: elaboración propia.

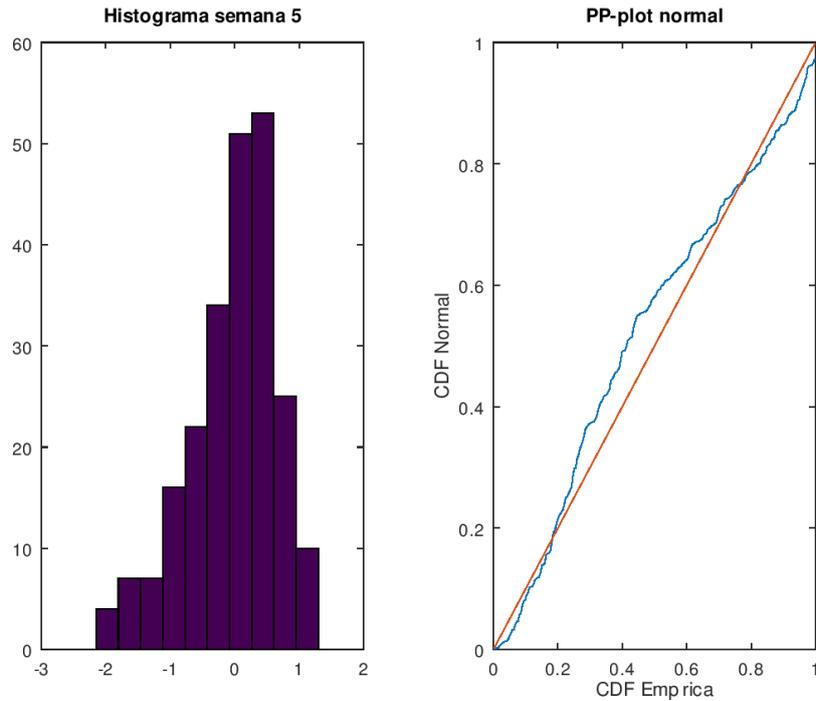


Figura 67. Análisis de normalidad de residuos en la semana 5

Fuente: elaboración propia.

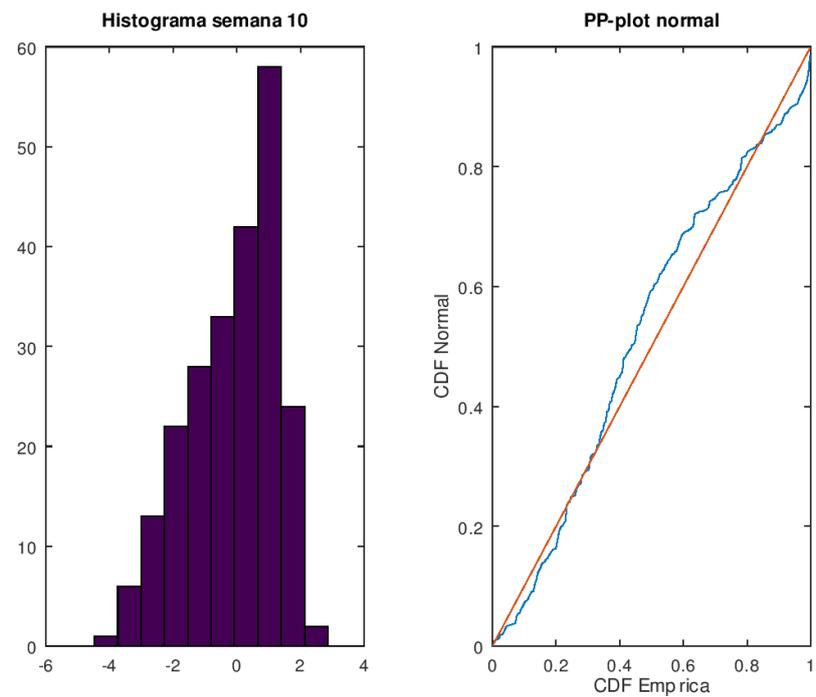


Figura 68. Análisis de normalidad de residuos en la semana 10

Fuente: elaboración propia.

### 3.2.2. Modelo utilizando el peso de las 3 primeras semanas

En este apartado se muestran los resultados de incorporar el peso de las 3 primeras semanas como regresores, además del tiempo de cultivo. El modelo solo se construirá para el

modelo con el que se obtuvo mejor precisión, el cual es el modelo estimado por mínimos cuadrados ponderados, WLS. Se quiere conocer cómo mejora la precisión al incorporar el peso de las siguientes semanas. Cuando ya han transcurrido un número de semanas  $i$ , utilizar los pesos de esas semanas previas para predecir los pesos desde la semana  $i+1$  hasta la 22.

Se han propuesto 2 modelos que incorporan los regresores de forma multiplicativa, pues se observa que la precisión del modelo mejora de esa manera.

### 3.2.2.1. Modelo propuesto N°1

El modelo es el siguiente:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \beta_4 y_1 + \beta_5 y_2 + \beta_6 y_3 + \beta_7 x_i y_1 + \beta_8 x_i y_2 + \beta_9 x_i y_3 + \beta_{10} x_i^2 y_1 + \beta_{11} x_i^2 y_2 + \beta_{12} x_i^2 y_3 + e_i$$

Los regresores del modelo son  $t$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , y  $y_3$ , que son pesos de las tres primeras semanas, en cada piscina. En la Figura 69 se muestran las curvas obtenidas. Aunque se estima un único modelo para todas las piscinas, al particularizar el modelo para cada piscina (para unos valores de  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$  específicos) se obtiene una curva diferente. Se observa que algunas piscinas están alejadas del modelo, por lo que el error de predicción será mayor en esas piscinas.

El gráfico de residuos (Figura 70) permite evaluar el ajuste del modelo de regresión visualmente. Se observa que los residuos están distribuidos aleatoriamente, lo cual indica un buen ajuste del modelo.

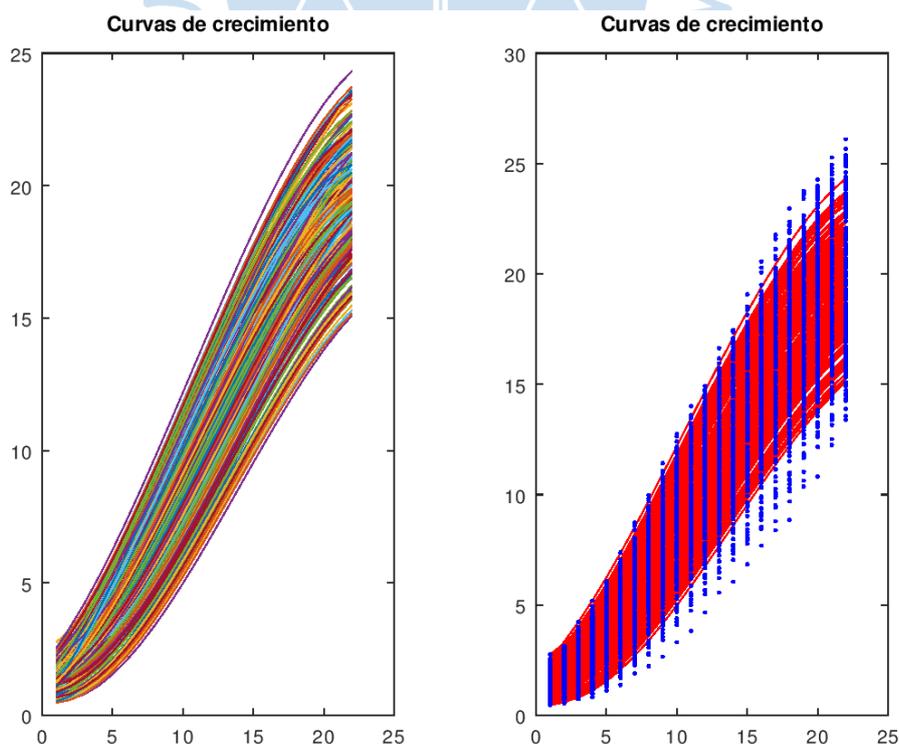


Figura 69. Modelo WLS utilizando los pesos de las 3 primeras semanas.

Fuente: elaboración propia.

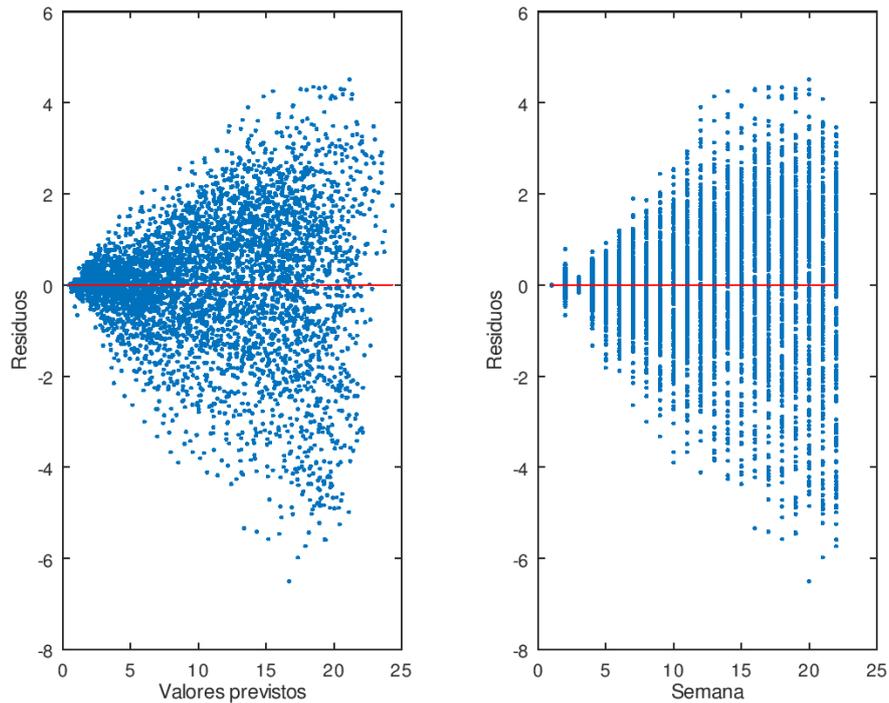


Figura 70. Residuos vs valores previstos y Residuos vs semana.

Fuente: elaboración propia.

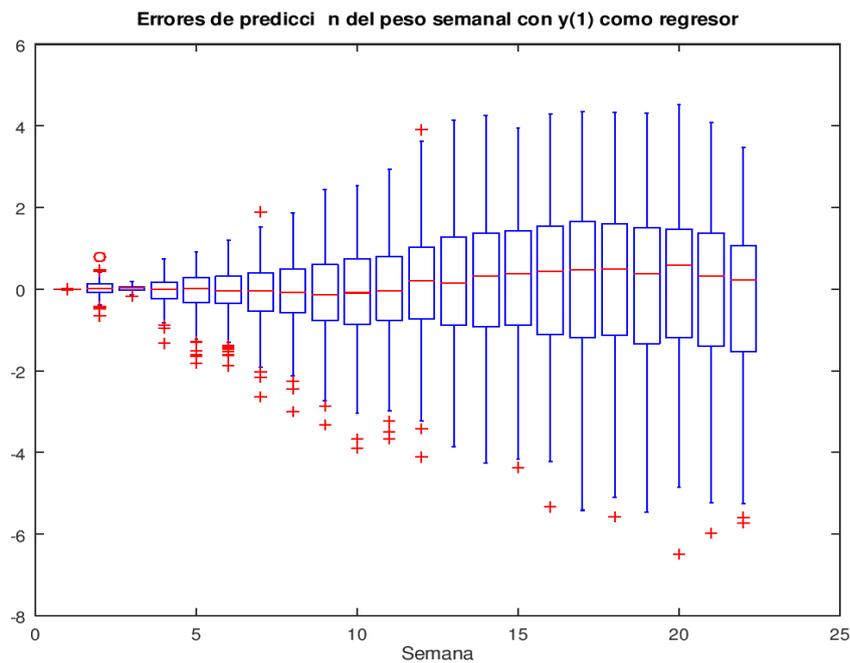


Figura 71. Error de predicción del modelo

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 71 se observa la distribución del error de predicción en un diagrama de caja. El modelo no es simétrico. En las últimas semanas se observa desviación positiva. Por lo tanto, la precisión del modelo es menor en ese periodo.

En la Figura 72 se muestra la precisión del modelo. La curva 1 describe la precisión del modelo construido. Como referencia, se ha graficado la curva 0, correspondiente al modelo determinista. El modelo construido mejora la precisión.

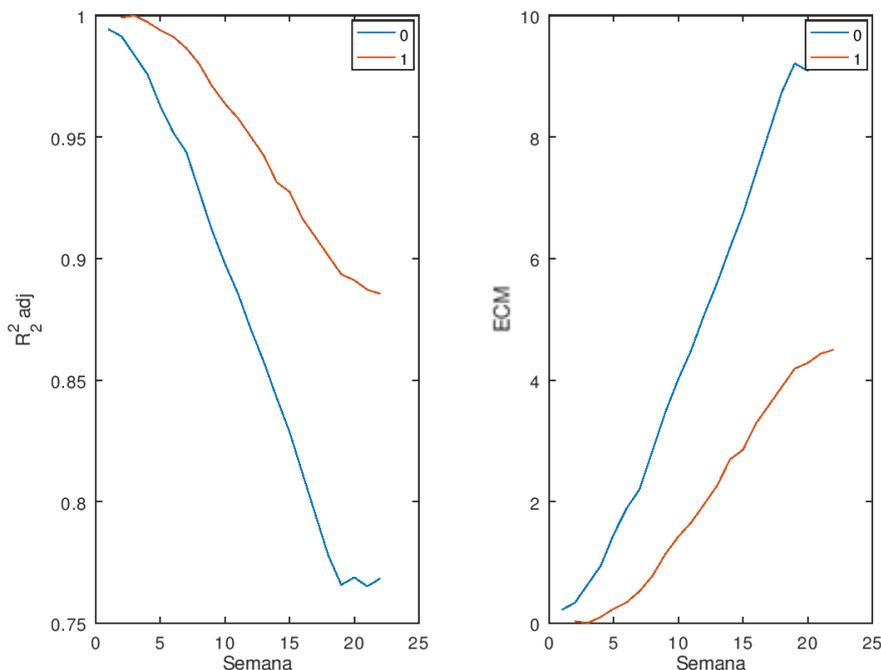


Figura 72. Precisión del modelo.

Fuente: elaboración propia.

### 3.2.2.2. Modelo propuesto N°2

Se propone un segundo modelo que agrega más términos de forma multiplicativa:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + \beta_4 y_1 + \beta_5 y_2 + \beta_6 y_3 + \beta_7 x_i y_1 + \beta_8 x_i y_2 + \beta_9 x_i y_3 \\ + \beta_{10} x_i^2 y_1 + \beta_{11} x_i^2 y_2 + \beta_{12} x_i^2 y_3 + \beta_{13} x_i y_1^2 + \beta_{14} x_i y_2^2 + \beta_{15} x_i y_3^2 + e_i$$

El modelo mejora la precisión de las piscinas de las primeras semanas, con respecto al modelo 1. En la Figura 73 se muestra que en las últimas semanas deja una región de los datos sin cubrir.

En la Figura 74, se observa la distribución aleatoria de los residuos, y que hay linealidad y heterocedasticidad. La distribución de los residuos parece simétrica, lo que viene confirmado por los contrastes de normalidad.

En la Figura 75 se muestra la distribución del error de predicción y en la figura 76, la precisión del modelo.

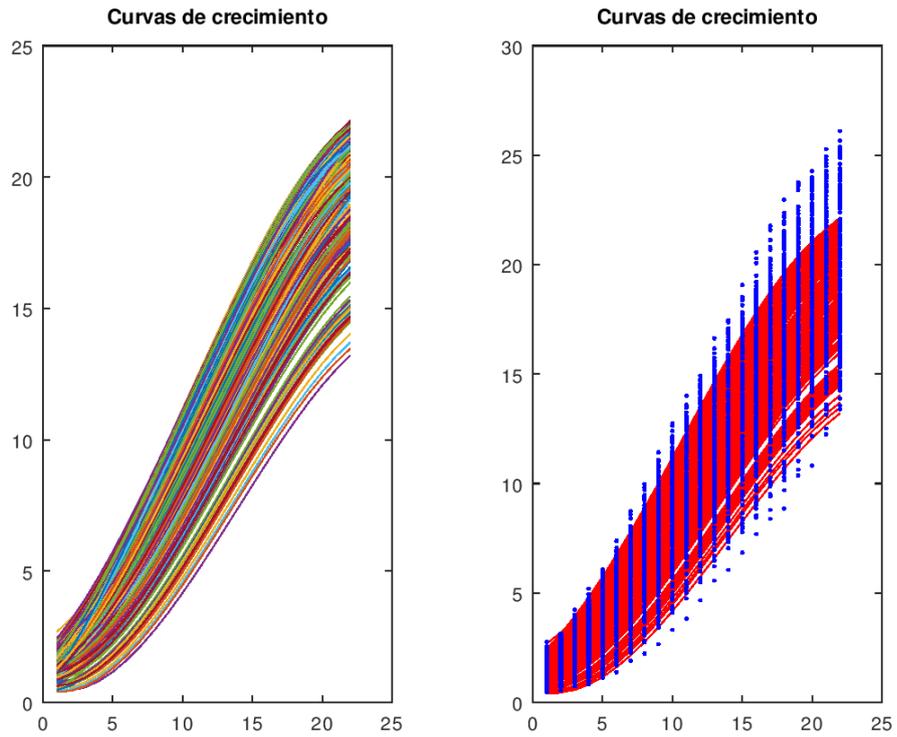


Figura 73. Modelo utilizando los pesos de las 3 primeras semanas.

Fuente: elaboración propia.

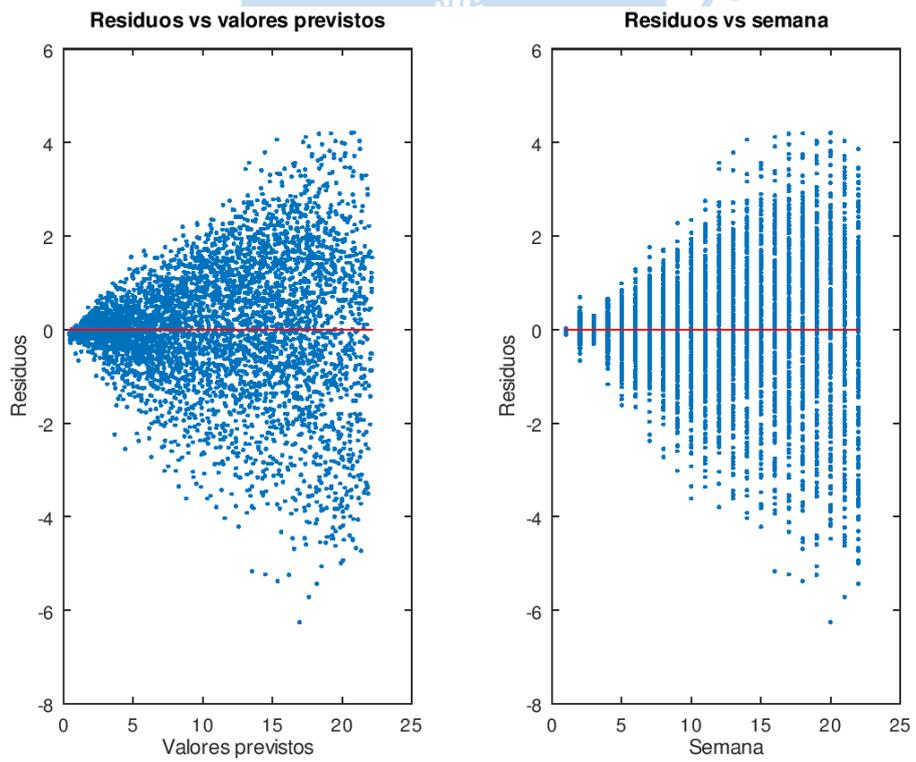


Figura 74. Gráficos de residuos

Fuente: elaboración propia.

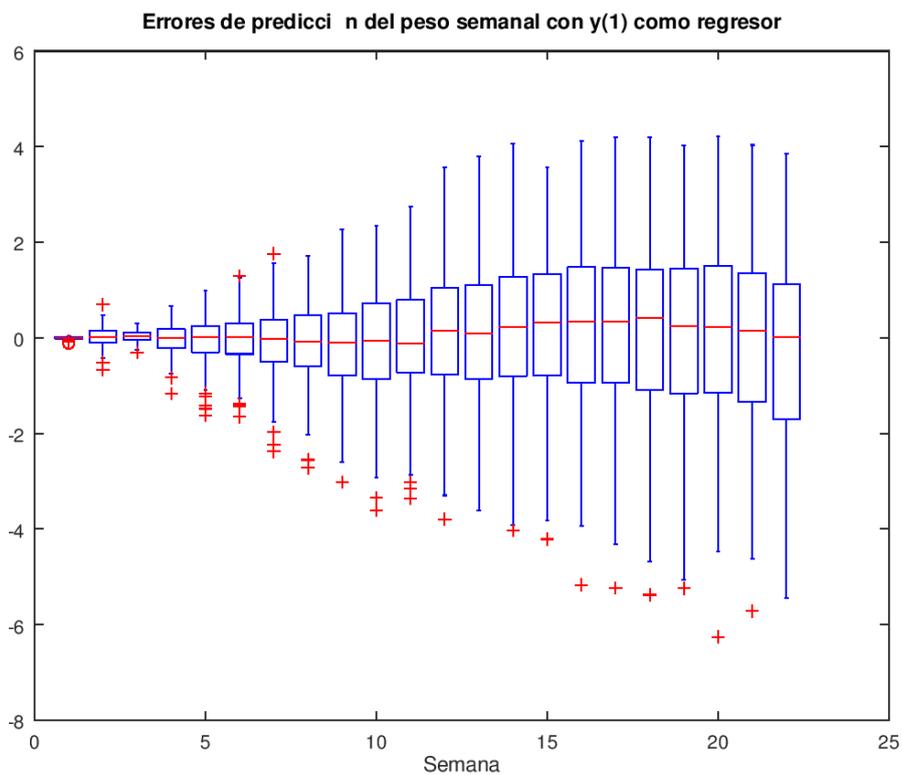


Figura 75. Error de predicción del modelo.

Fuente: elaboración propia.

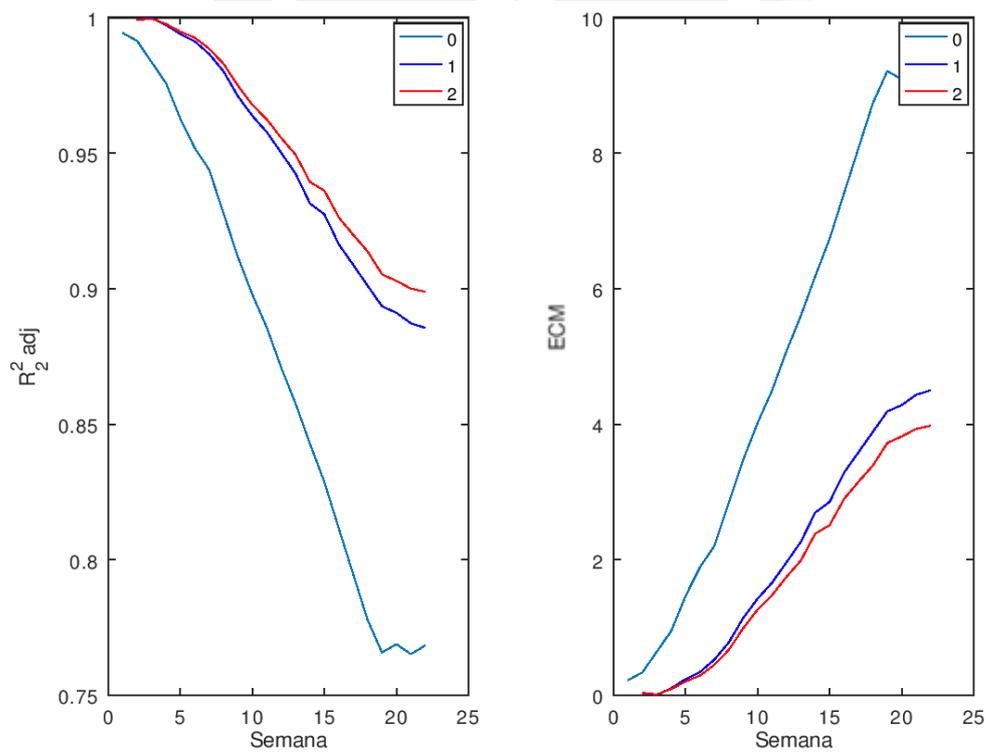


Figura 76. Precisión del modelo.

Fuente: elaboración propia.

Con los dos modelos propuestos se obtiene una predicción confiable, como se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Precisión del modelo de predicción con datos de peso hasta la semana 3.

Modelo	R2adj
Modelo usando solo la variable t	0.87620
Modelo usando t y pesos hasta semana 3 (1)	0.94955
Modelo usando t y pesos hasta semana 3 (2)	0.95542

Fuente: elaboración propia.

Se puede observar que el modelo se hace más preciso en las predicciones cuando se conoce el peso de un mayor número de semanas, tal como se muestra en la Figura 77, y en el análisis de la normalidad de los residuos en la Figura 78.

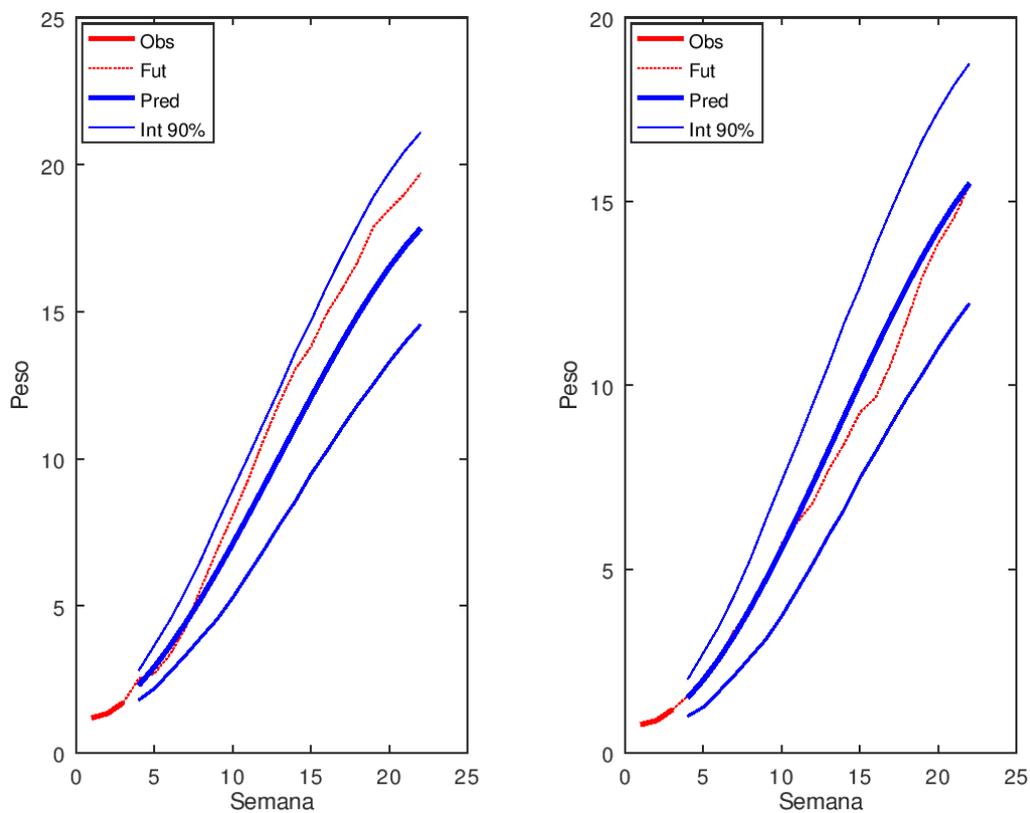


Figura 77. Predicción del crecimiento a partir de la semana 4.

Fuente: elaboración propia.

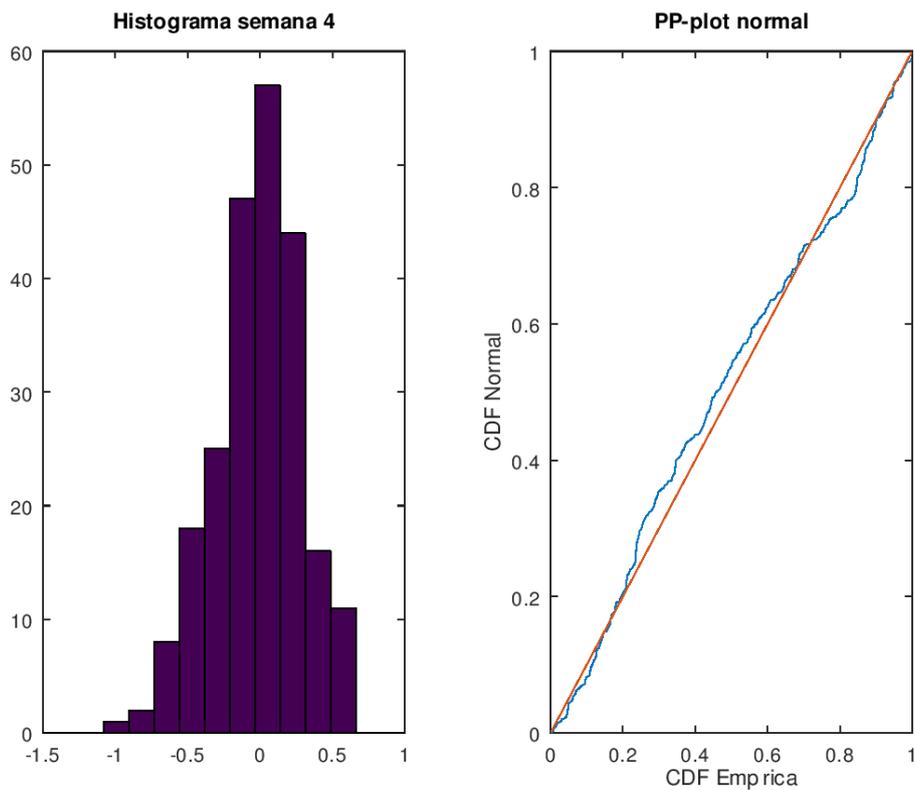


Figura 78. Análisis de normalidad de residuos en la semana 4

Fuente: elaboración propia.

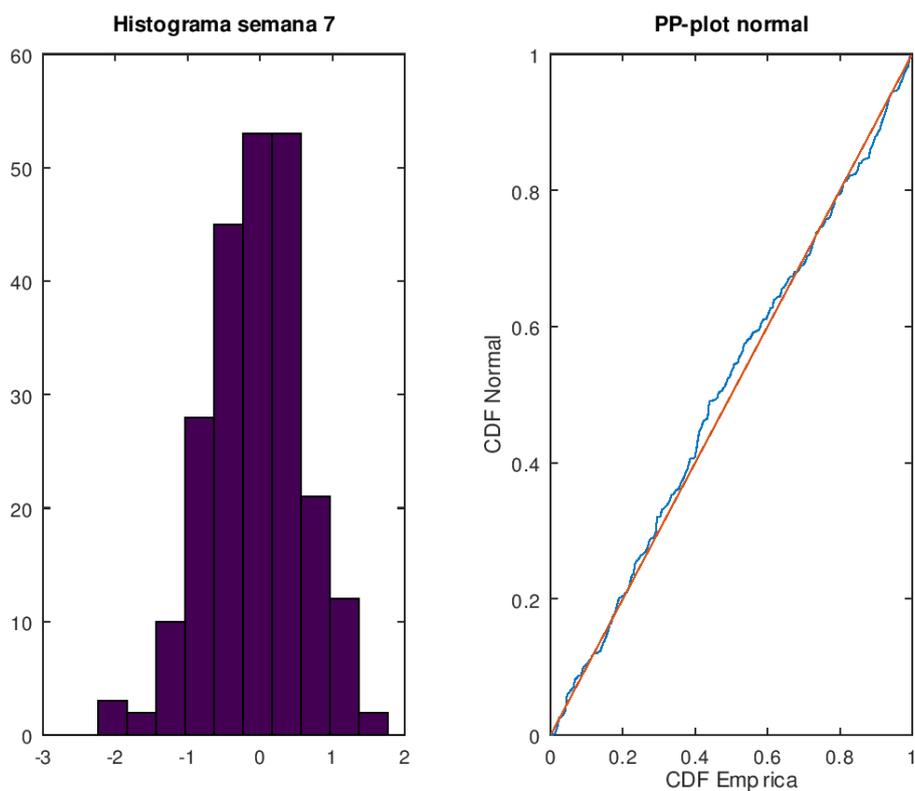


Figura 79. Análisis de normalidad de residuos en la semana 7

Fuente: elaboración propia.

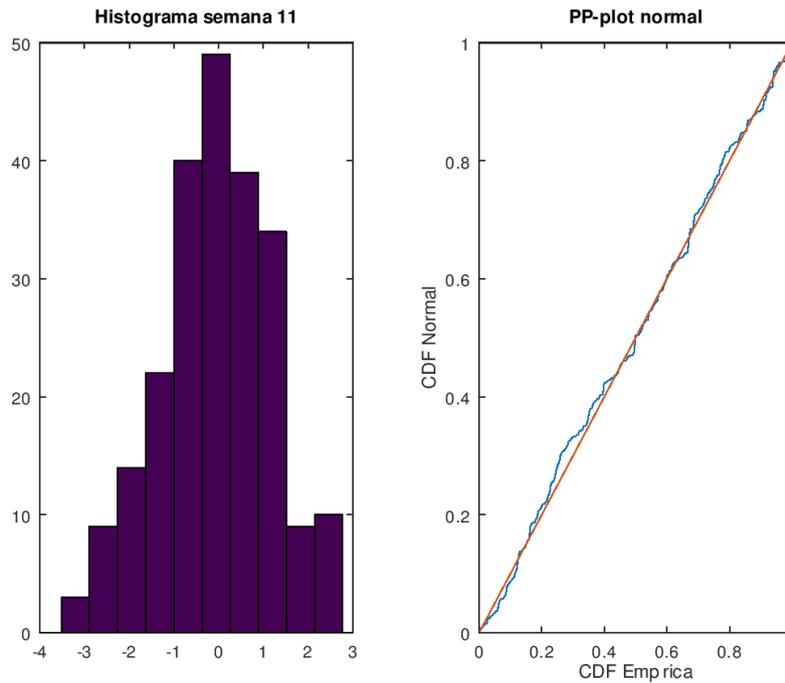


Figura 80. Análisis de normalidad de residuos en la semana 11

Fuente: elaboración propia.

### 3.2.3. Modelo utilizando el peso de las 5 primeras semanas

El objetivo de este apartado es construir un modelo para predecir el peso de los langostinos cuando se encuentran en la semana 5 de cultivo. Con este fin, se agregaron los pesos hasta la semana 5 como regresores del modelo.

#### 3.2.3.1. Modelo propuesto N° 1

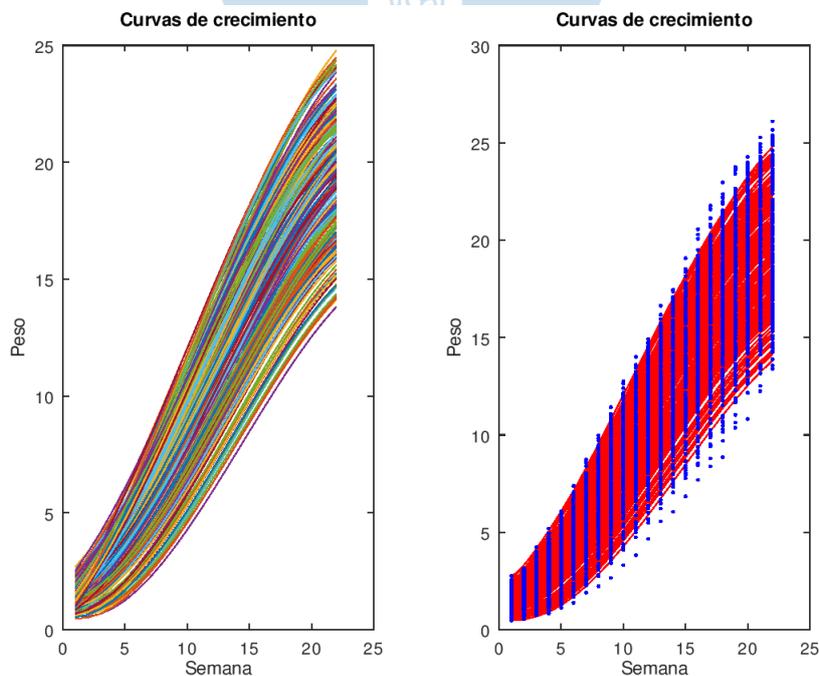


Figura 81. Modelo con  $t$  y el peso de las 5 semanas como regresores.

Fuente: elaboración propia.

La precisión del modelo mejora en las últimas semanas, con respecto al modelo del apartado 3.2.2. Esto puede observarse en la Figura 81, en la que el modelo logra seguir el crecimiento de la mayoría de las piscinas.

Al analizar los gráficos de residuos (Figura 82) se puede ver que la estructura de los residuos es aleatoria, y que además es simétrica. Esto es indicador de un buen ajuste del modelo.

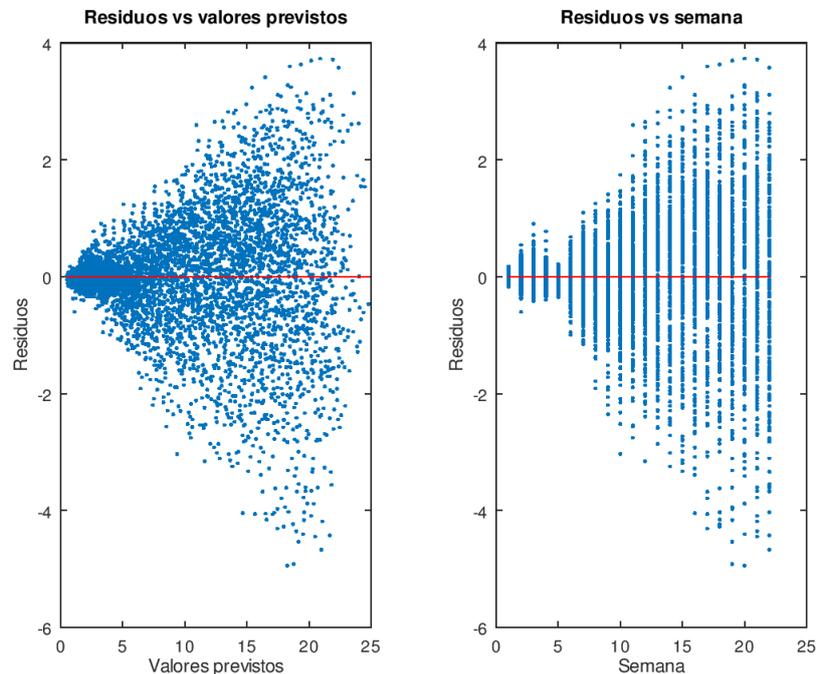


Figura 82. Gráficos de residuos.

Fuente: elaboración propia.

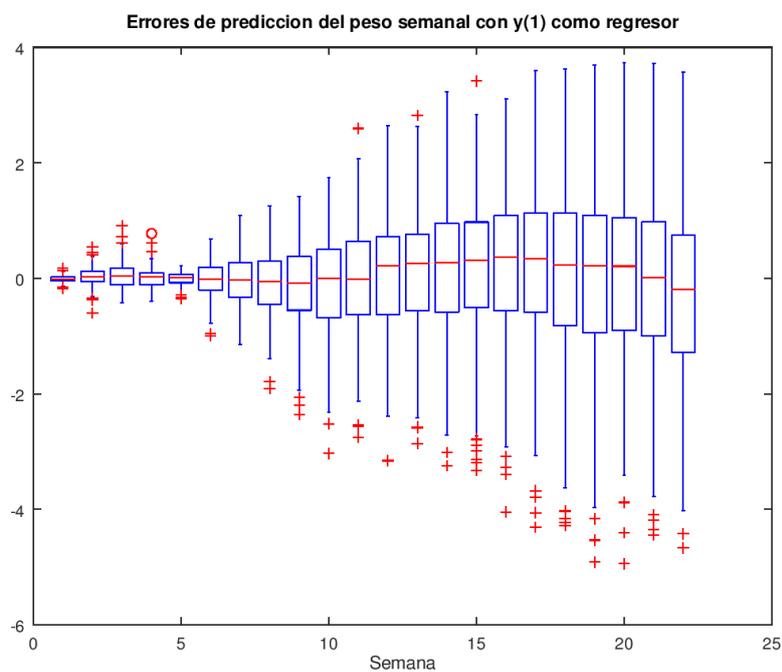


Figura 83. Error de predicción del modelo.

Fuente: elaboración propia.

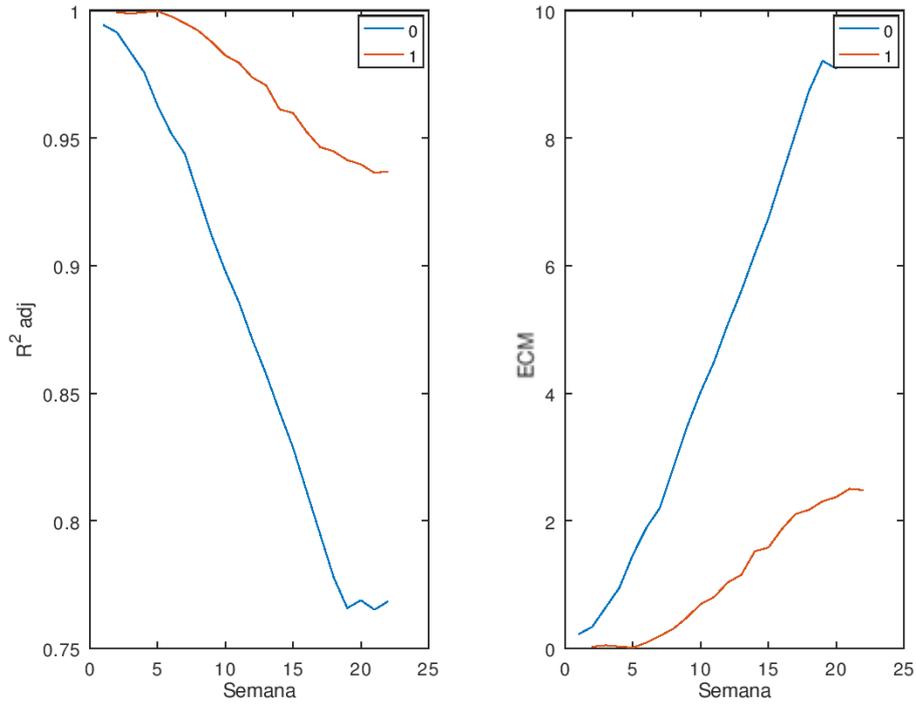


Figura 84. Precisión del modelo

Fuente: elaboración propia.

### 3.2.3.2. Modelo propuesto N°2

Se obtuvieron los siguientes resultados:

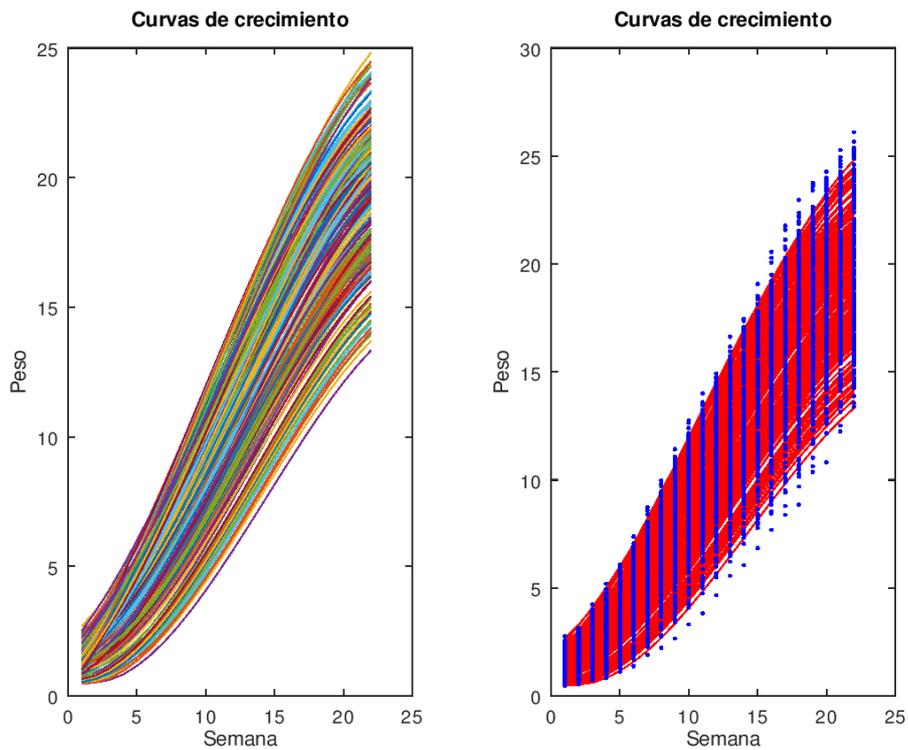


Figura 85. Modelo con los pesos hasta la semana 5 como regresores.

Fuente: elaboración propia.

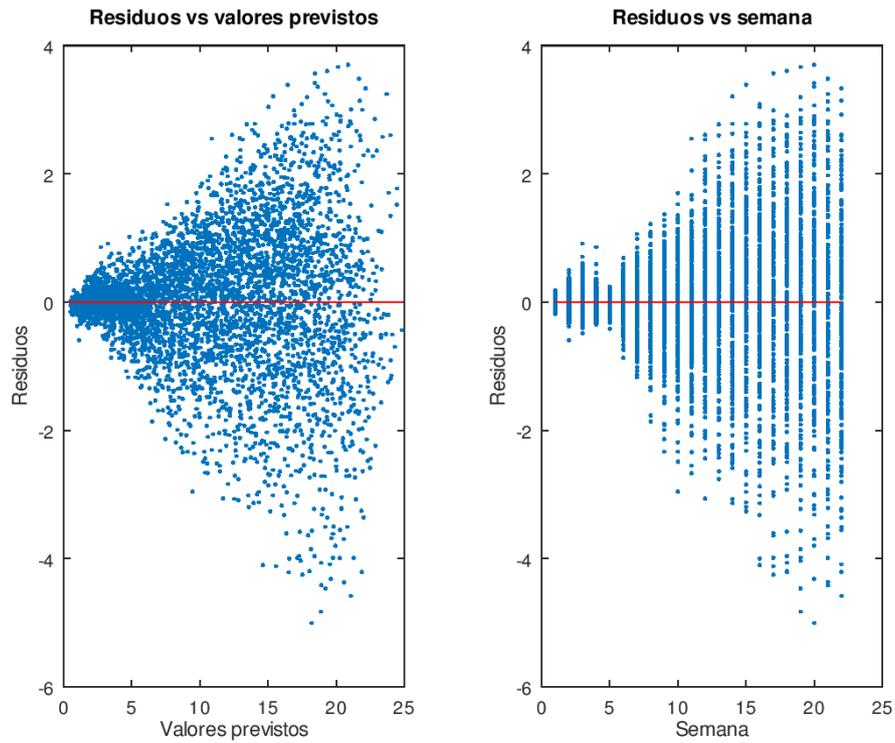


Figura 86. Gráficos de residuos del modelo

Fuente: elaboración propia.

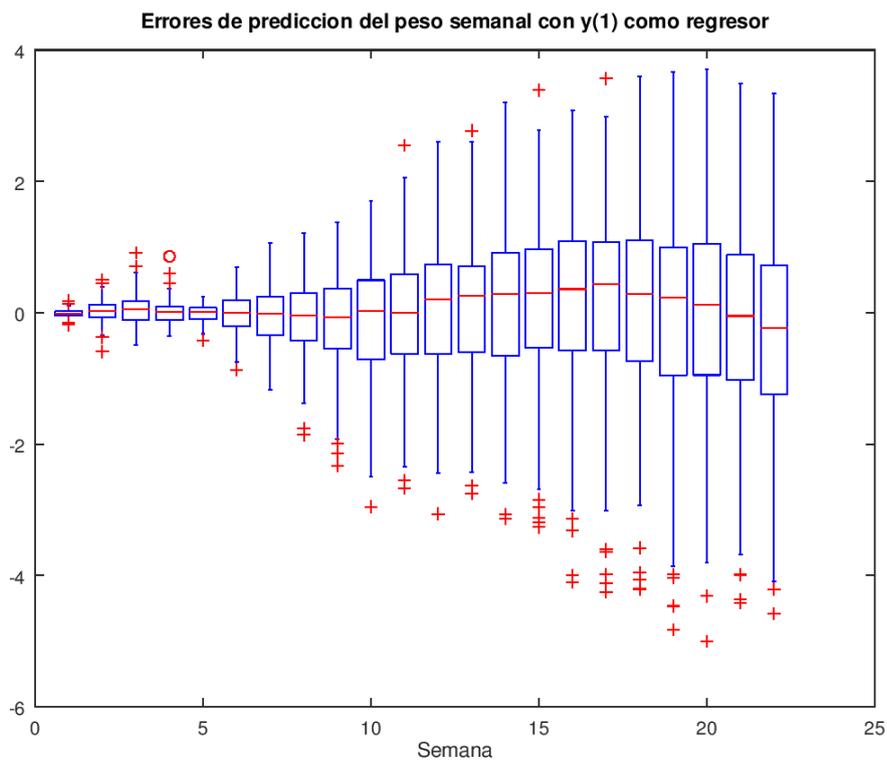


Figura 87. Error de predicción del modelo.

Fuente: elaboración propia.

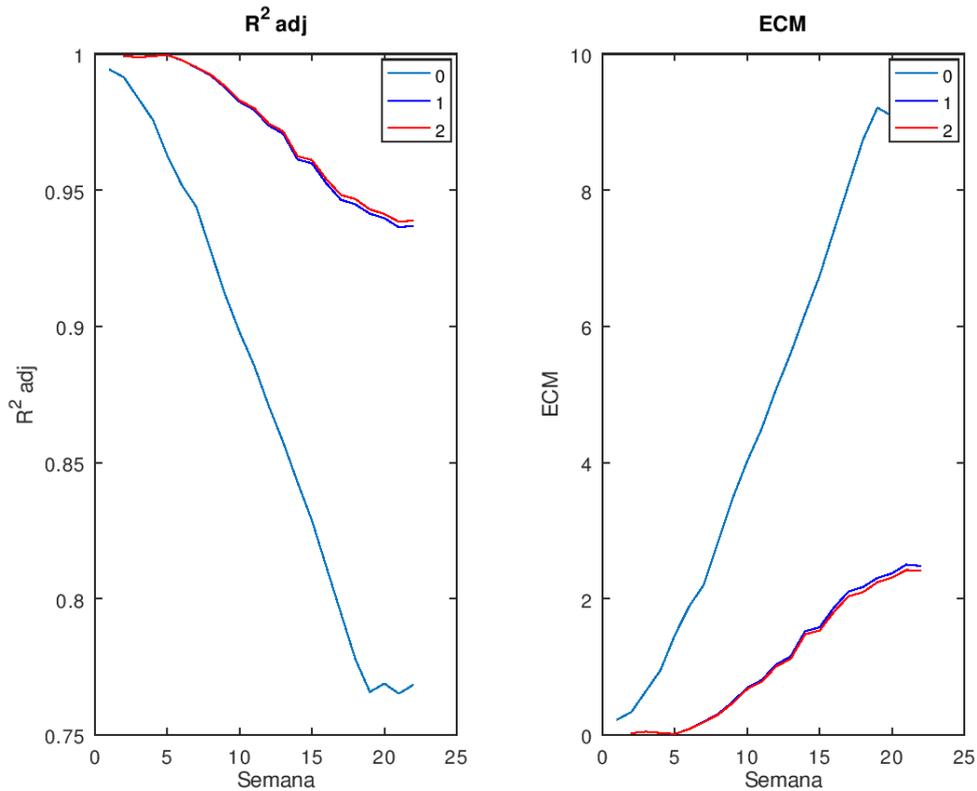


Figura 88. Precisión del modelo.

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 88 se observa que los modelos propuestos tienen una precisión similar. El segundo modelo propuesto mejora ligeramente la precisión por semana como se muestra en la Tabla 8.

Tabla 8. Precisión del modelo con los pesos hasta la semana 5.

Modelo	R2adj
Modelo usando solo t	0.87620
Modelo usando t y pesos hasta semana 5 (1)	0.97237
Modelo usando t y pesos hasta semana 5 (2)	0.97319

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 89 se muestra el modelo estimado para el caso particular de las piscinas 1 y 5. Para la piscina 1 los datos están en el límite del intervalo de predicción.

Los residuos en cada semana siguen una distribución que se aproxima a una normal, como se puede observar en los histogramas de residuos por semana.

En los gráficos de distribución empírica contra distribución esperada (Figura 90), se puede observar que la diferencia entre ambas es mínima, pues los datos se aproximan a la diagonal. Por lo tanto, se acepta la hipótesis nula de normalidad de los residuos.

La distribución normal puede emplearse para construir intervalos de predicción para estimar el peso en una semana “n” cuando se dispone de los pesos hasta la semana “n-1”.

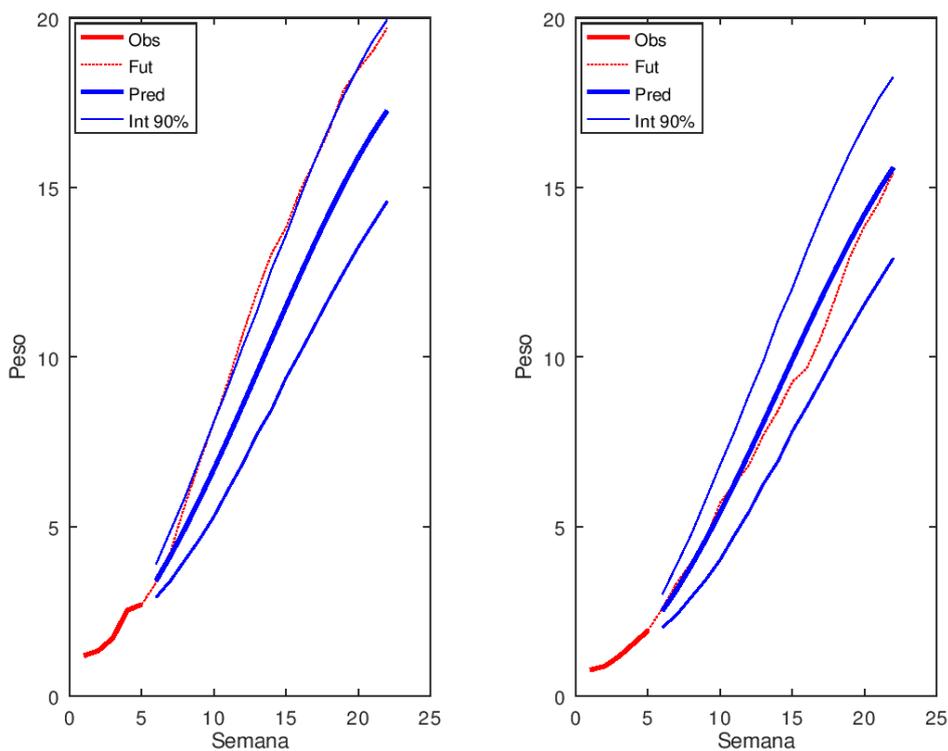


Figura 89. Modelo de predicción del crecimiento desde la semana 6.

Fuente: elaboración propia.

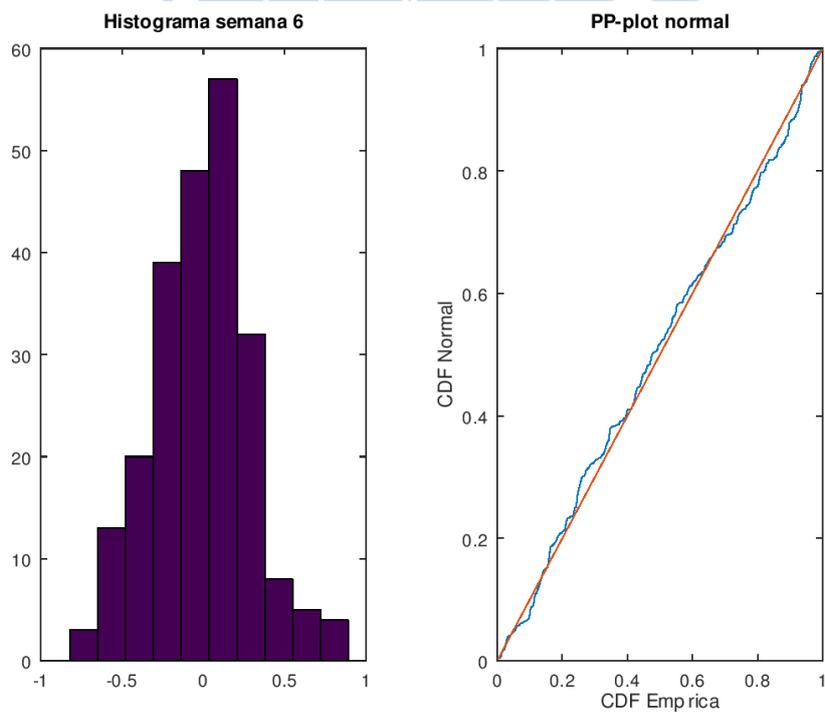


Figura 90. Análisis de normalidad de residuos de la semana 6

Fuente: elaboración propia.

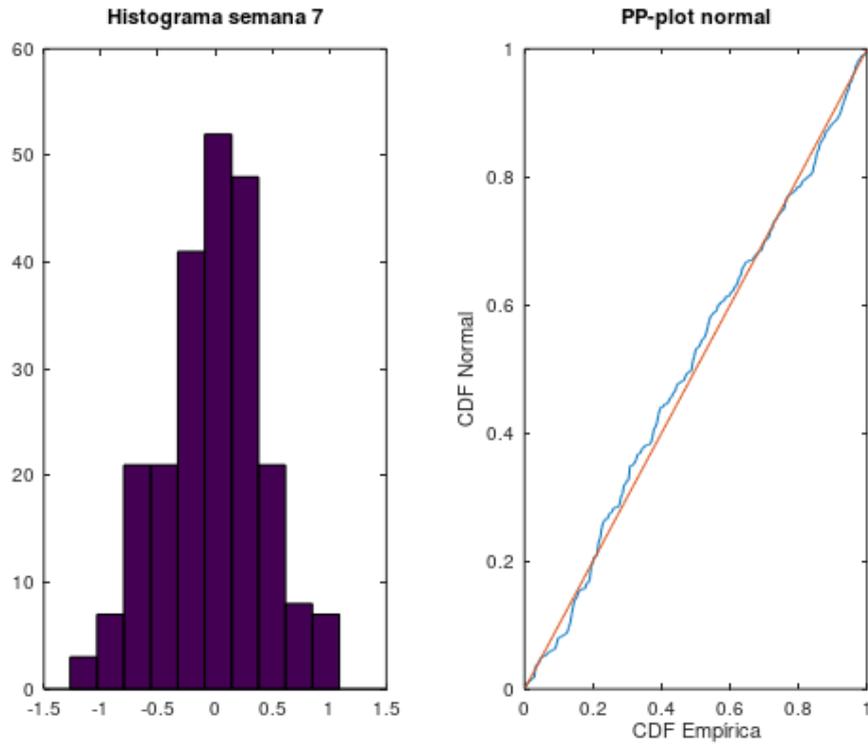


Figura 91. Análisis de normalidad de residuos de la semana 7

Fuente: elaboración propia

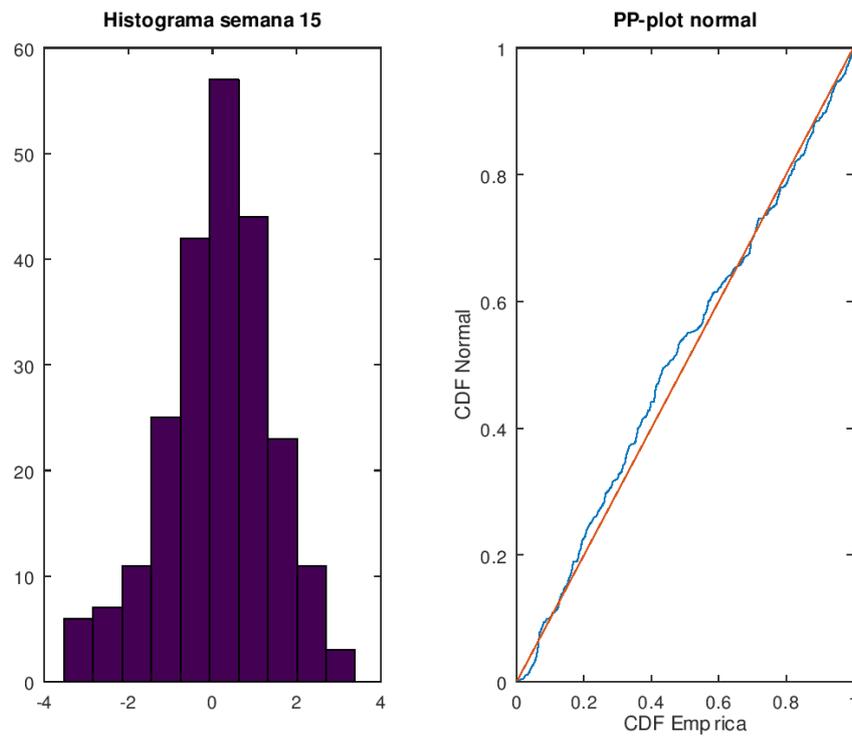


Figura 92. Análisis de normalidad de residuos de la semana 20

Fuente: elaboración propia

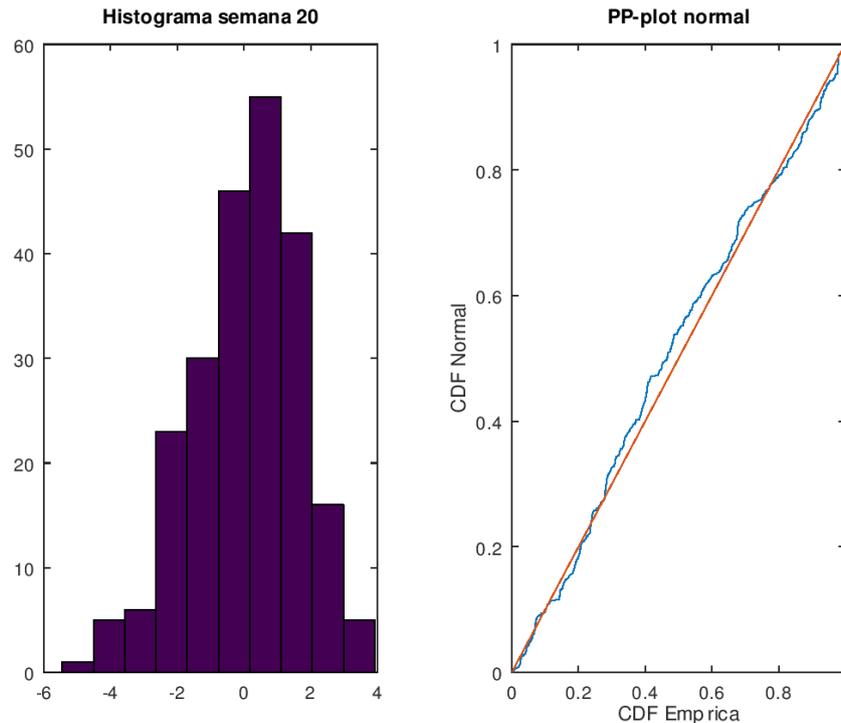


Figura 93. Análisis de normalidad de residuos de la semana 20

Fuente: elaboración propia

### 3.2.4. Modelos utilizando los pesos de $n$ semanas previas

El objetivo de este apartado es construir un modelo que permita predecir el peso de los langostinos cuando han pasado  $n$  semanas y se desea conocer el peso que tendrán los langostinos desde la semana  $n+1$  hasta la semana 22.

Se ha visto que las predicciones se hacen más precisas cuando se conoce el peso de las semanas previas, y que la precisión mejora en las últimas semanas al incorporar el peso de una nueva semana. Se observa además, que el modelo entrega los mismos resultados cuando se ingresa solo el peso de la última semana transcurrida que cuando se utilizan todos los pesos previos. De esta forma el modelo se simplifica ya que se calculan menos parámetros, lo cual es ventajoso en términos de tiempo de cómputo y precisión de las estimaciones.

Cada avance en el tiempo permite que la predicción de la siguiente semana sea más precisa. Se puede observar cómo el intervalo de predicción se hace más pequeño. El modelo estimado se encuentra cada vez más cercano al valor real del crecimiento en esa piscina. Asimismo, se observa que se verifica la normalidad en los residuos por semana.

#### 3.2.4.1. Modelo de predicción cuando se conocen los pesos de 10 semanas

La precisión del modelo mejora al introducir los pesos de las 10 primeras semanas como regresores del modelo, según se puede observar en la figura 94.

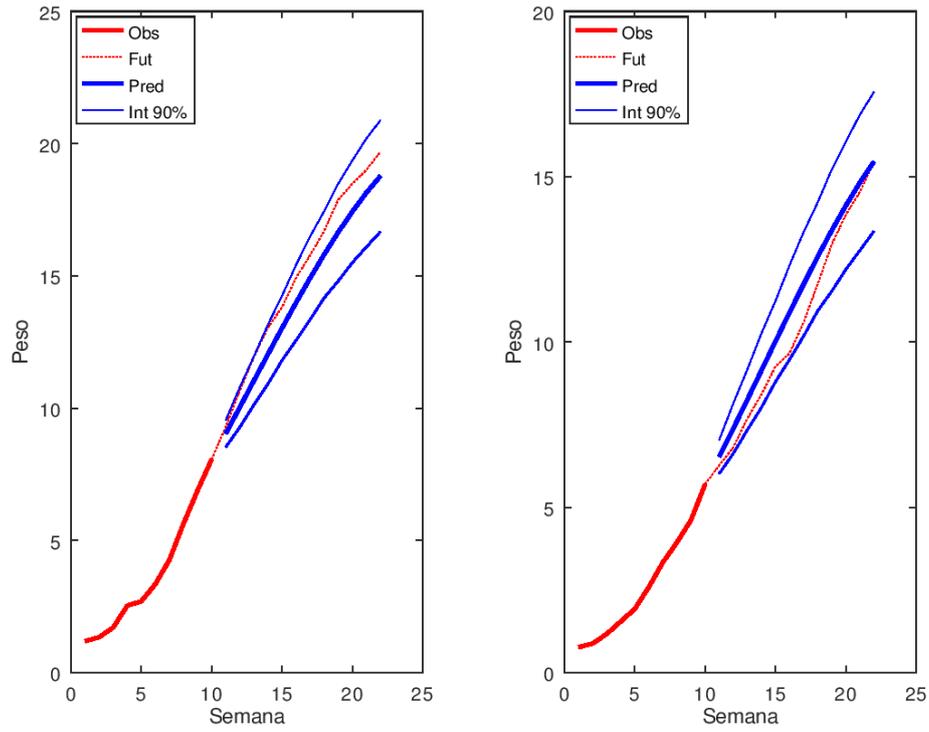


Figura 94. Modelo de predicción del crecimiento desde la semana 11.

Fuente: elaboración propia

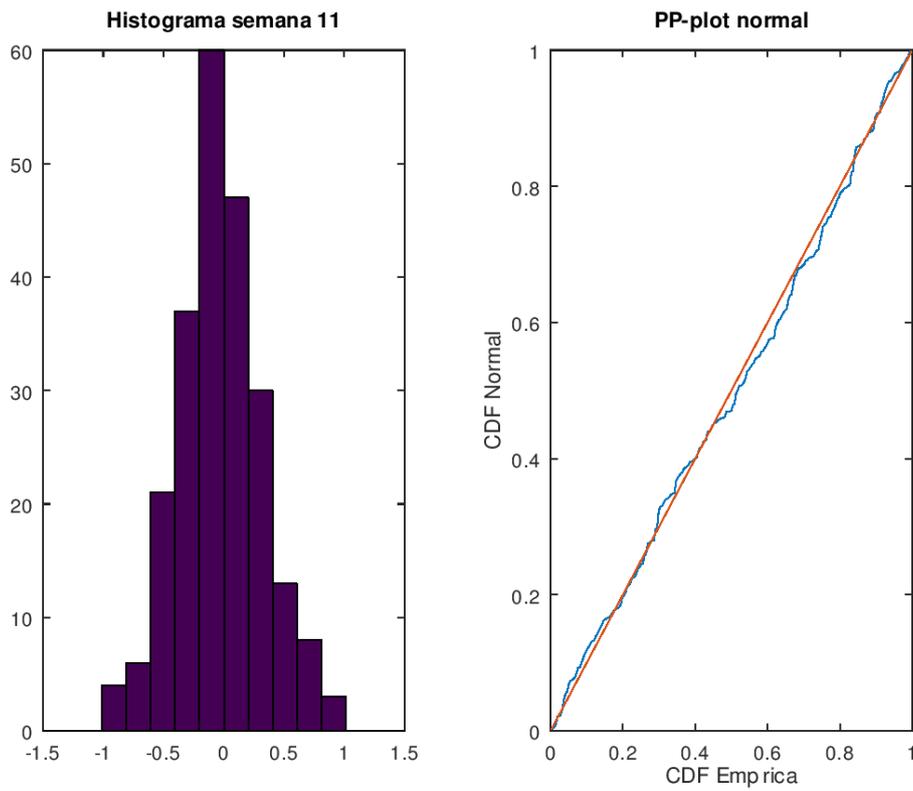


Figura 95. Análisis de normalidad de residuos de la semana 11

Fuente: elaboración propia

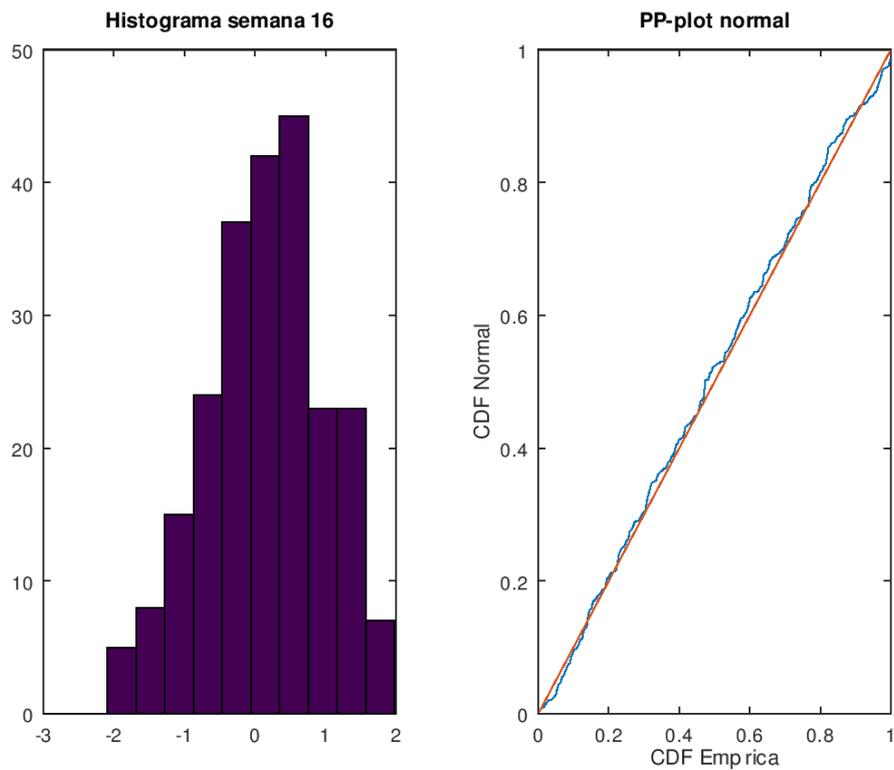


Figura 96. Análisis de normalidad de residuos de la semana 16

Fuente: elaboración propia

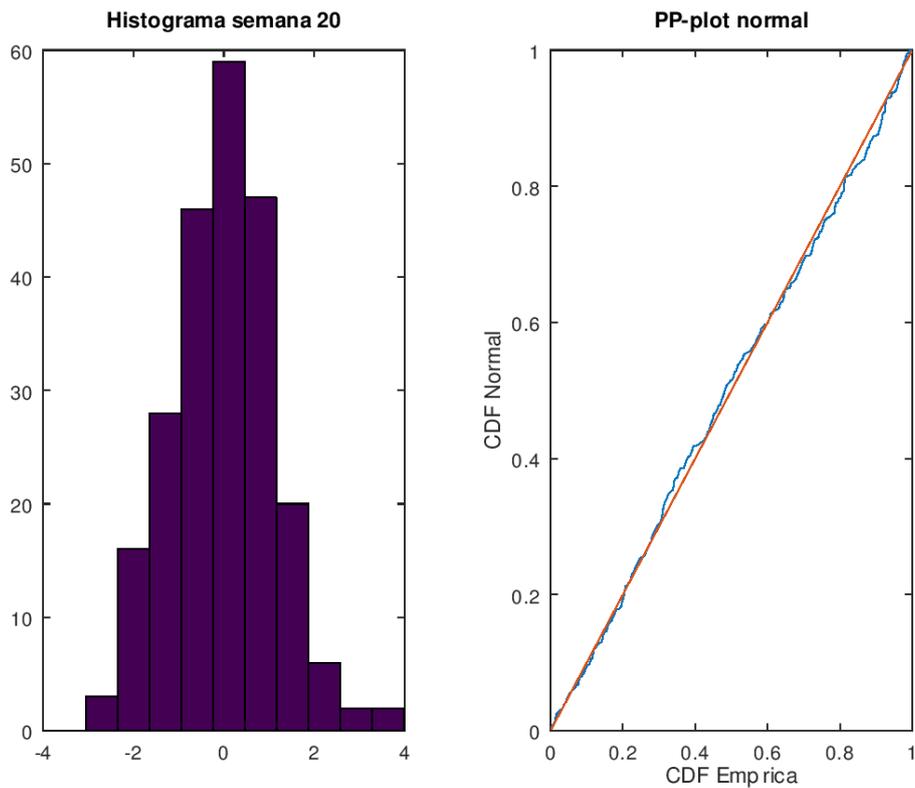


Figura 97. Análisis de normalidad de residuos de la semana 20

Fuente: elaboración propia

### 3.2.4.2. Modelo de predicción cuando se conocen los pesos de 15 semanas

La precisión del modelo mejora al conocer los pesos de las semanas previas, como se muestra en la Figura 98.

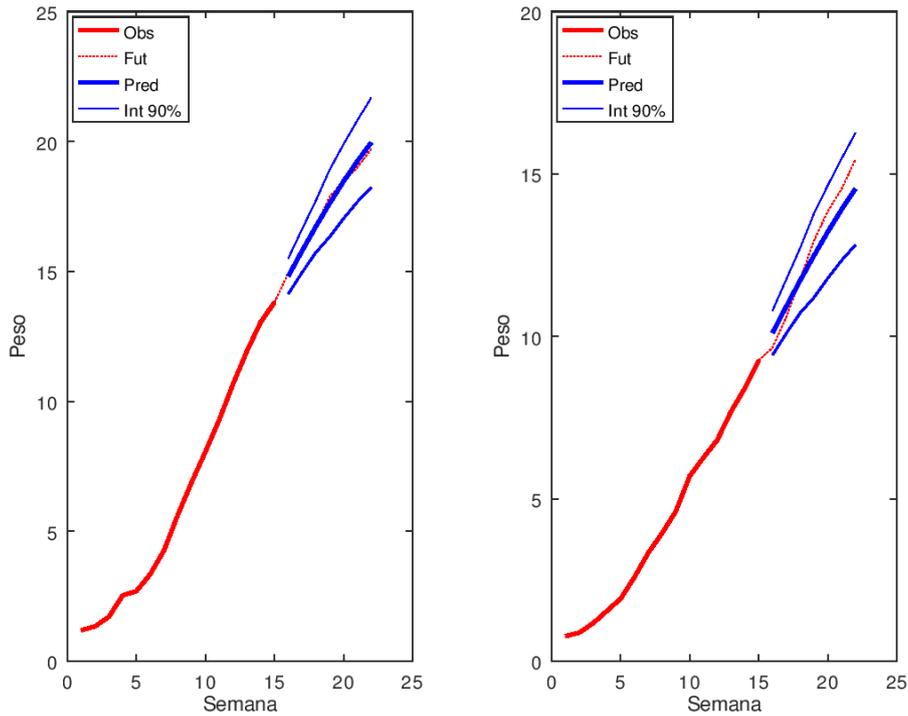


Figura 98. Modelo de predicción del crecimiento desde la semana 16.

Fuente: elaboración propia

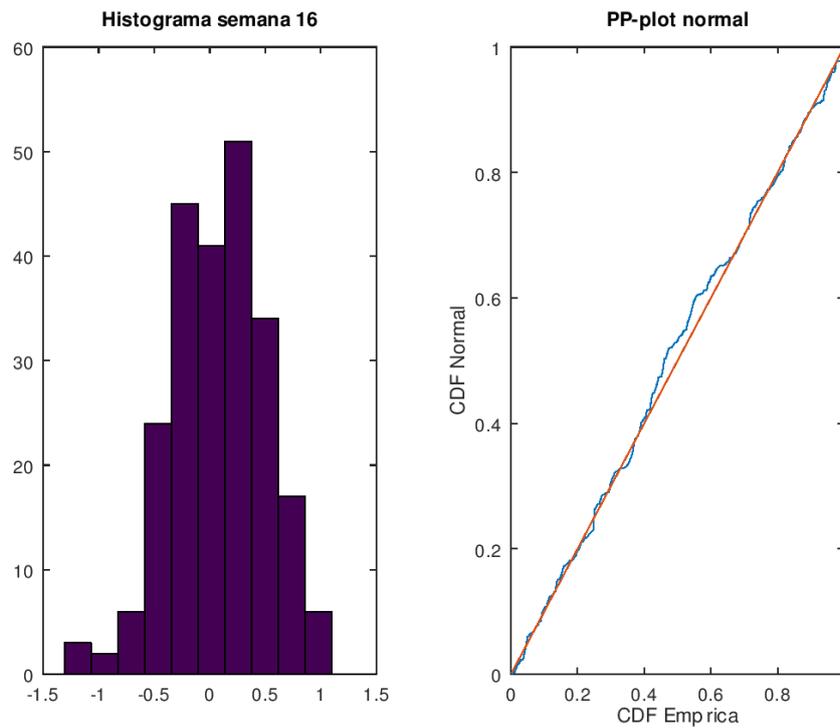


Figura 99. Análisis de normalidad de residuos en la semana 16.

Fuente: elaboración propia

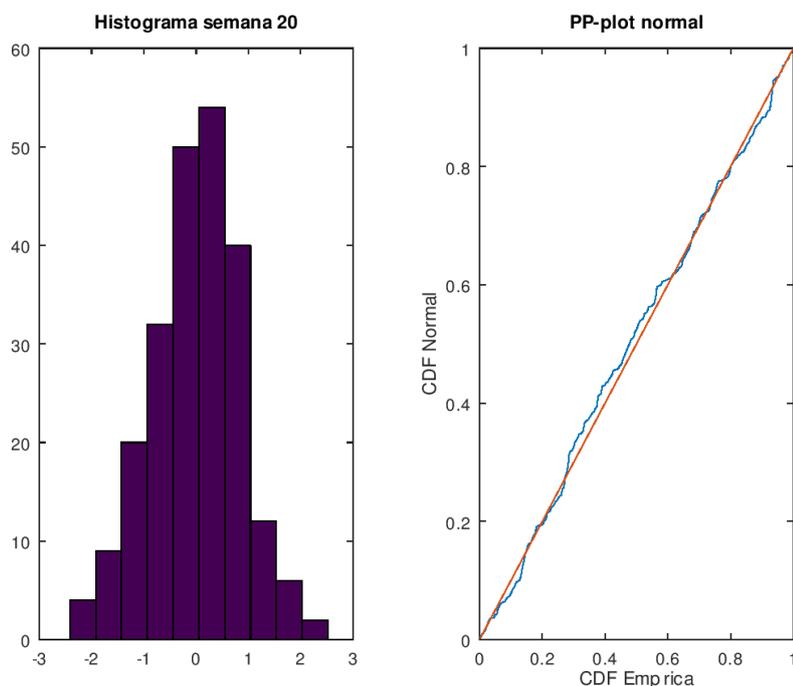


Figura 100. Análisis de normalidad de residuos en la semana 20.

Fuente: elaboración propia

### 3.3. Implementación del modelo

En este apartado se analizarán los requerimientos mínimos para implementar el modelo en una empresa de cultivo y exportación de langostinos. Además se evaluará el costo de esta inversión con respecto a los beneficios esperados del proyecto.

#### 3.3.1. Costo de implementación

Los costos previos a la puesta en marcha del programa son los siguientes:

##### 3.3.1.1. Software Octave

Octave es un software de programación numérica bajo la licencia de la empresa GNU. Tiene alta compatibilidad con Matlab, pero a diferencia de este, Octave es de libre acceso. Puede ser instalado en ordenadores que trabajan con sistemas operativos Windows y macOS.

##### 3.3.1.2. Equipo de cómputo

Se recomienda trabajar con sistemas operativos de 64-bits y memoria RAM de al menos 4 GB, para mayor eficiencia del software y mayor capacidad de almacenamiento de datos.

Se estima que el proceso de registro de datos en el software y generación de los reportes se realizará una vez por semana, por lo que se puede emplear equipo de cómputo existente en la empresa por lo que no se incurriría en gastos por adquisición de este equipo.

##### 3.3.1.3. Capacitación de personal

Se considera la capacitación de un empleado de la empresa en el uso de Octave o Matlab, debido a la mayor oferta de este último.

En el caso de no contar con el equipo y personal requerido para la ejecución el programa, la inversión comprende la adquisición de una PC estacionaria, con las características descritas en la tabla 9, y la capacitación del personal en el manejo del software.

Tabla 9. Inversión estimada

Ítem	Costo estimado (S/)
PC procesador i5 4GB Memoria RAM	3,500.00
Capacitación de 01 empleado	1,500.00
<b>Total</b>	<b>5,000.00</b>

Fuente: elaboración propia.

El costo de operación del programa corresponde al uso del programa para ingresar los datos y modelar la data.

Actualmente el control del peso de los langostinos se realiza la toma de pesos promedio de cada piscina, información que luego se registra en Excel. Con el programa, se agregarán las tareas de ingresar data a Octave y correr el modelo, las cuales toman pocos minutos, dependiendo del rendimiento del procesador.

Cabe resaltar que la ejecución del programa presenta mayor eficiencia al ingresar únicamente el peso de la última semana, por lo que el tiempo de uso del ordenador es menor, además se trata de una tarea que se realiza semanalmente, por lo que no representa un incremento significativo en el costo operativo.

### 3.3.2. Beneficios esperados

La implementación del programa representará un avance con respecto al método actual de registro de la información.

La ejecución del programa permitirá tener una visión general del crecimiento de los langostinos desde la planificación de la producción, influyendo sobre las decisiones de volumen de siembra y cantidad de alimento suministrado.

Durante la etapa de engorde, se podrá ir modelando el crecimiento del langostino con los nuevos registros de peso semanal, y de esta forma tomar decisiones sobre la cantidad de alimento a suministrar en la siguiente semana.

A medida que el langostino alcanza su madurez, el consumo de alimento se incrementa, así como su factor de conversión. El factor de conversión indica la proporción de alimento requerido por kilogramo de langostino. Según esto, prolongar el cultivo del langostino implica incurrir en mayores gastos de alimento balanceado.

Como ejemplo, en la Tabla 10 se muestran los datos de producción de una piscina de 1 Ha con densidad de siembra de 50 langostinos/Ha.

Tabla 10. Incremento del factor de conversión

Semana	Peso promedio (g)	Factor de conversión	Biomasa (kg)	Alimento (kg)	Total alimento (US\$)
0	1.00	-	-	-	17.36
1	1.30	0.76	648.58	493.84	86.80
2	1.50	0.66	746.72	493.84	86.80
3	3.00	0.49	1,490.16	733.84	364.57
4	4.04	0.58	2,002.33	1,168.84	868.02
5	5.01	0.70	2,477.60	1,738.84	1,527.71
6	6.80	0.71	3,355.38	2,373.84	2,262.63
7	7.78	0.81	3,830.43	3,088.84	3,090.14
8	8.85	0.93	4,347.56	4,028.84	4,178.05
9	10.20	1.01	4,999.59	5,028.84	5,460.96
10	11.48	1.09	5,614.44	6,128.84	6,985.15
11	12.83	1.18	6,260.64	7,398.84	8,744.89
12	14.15	1.23	7,075.00	8,728.84	10,587.77
13	14.90	1.33	7,450.00	9,908.84	12,204.79
14	16.20	1.38	8,100.00	11,168.84	13,834.45
15	17.31	1.44	8,655.00	12,458.84	15,429.99
16	17.89	1.49	9,123.90	13,563.84	16,773.43
17	19.00	1.57	9,690.00	15,183.84	18,760.71
18	20.28	1.63	10,342.80	16,893.84	20,991.65
19	21.34	1.67	10,883.40	18,213.84	22,565.24
20	22.15	1.75	11,296.50	19,808.84	24,545.55
21	22.66	1.86	11,556.60	21,543.84	26,949.61
22	22.86	1.98	11,658.60	23,043.84	28,757.75
23	23.40	2.06	11,934.00	24,538.84	30,559.86
24	24.10	2.12	12,291.00	26,008.84	32,331.83
25	24.50	2.31	11,760.00	27,118.84	33,669.85

Fuente: elaboración propia.

Si se considera un costo del alimento balanceado de 1.24 US\$/kg y un precio FOB referencial de 7.84 US\$/kg, se pueden calcular los ingresos por la venta.

Tabla 11. Pérdidas incurridas (US\$) por extender el cultivo de langostino

Escenario	Ingresos por venta	Costo de alimento	Diferencia
Cosecha en semana 22	91,403.42	28,757.75	62,645.68
Cosecha en semana 25	92,198.40	33,669.85	58,528.55
		<b>Diferencia</b>	<b>4,117.13</b>

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo a la tabla 11, al extender el cultivo de langostino después de la semana 22, se reduce la utilidad bruta en US\$ 4,117.13 por Ha, considerando solo la compra de materia prima.

Al cosechar el langostino en la semana 25, se obtiene un mayor volumen de cosecha pero se elevan los costos de materia prima. Además se incurre en mayores gastos de mano de obra directa. La compra de materiales directos y la mano de obra directa representan el mayor porcentaje de los costos de producción (ver Tabla 12).

En la operación del programa, al estimar el peso que puede alcanzar el langostino en la siguiente semana, puede calcularse la cantidad de alimento necesaria, y evaluar si continuar con el cultivo mejorará los ingresos.

Tabla 12. Utilidad operativa de una empresa exportadora de langostinos.

	2018	2017	2016
<b>Ventas</b>			
Al exterior	20,536,673	20,142,985	10,096,802
Locales	66,470	36,153	600,332
<b>Total ventas</b>	<b>20,603,143</b>	<b>20,179,138</b>	<b>10,697,134</b>
<b>Costo de ventas</b>			
Inventario inicial de productos terminados productos en proceso, materias primas y envases y embalajes	18,515,460	16,711,486	13,978,028
Compras de materiales directos	7,746,883	9,369,639	6,808,802
Mano de obra directa	3,913,473	2,767,637	2,722,830
Depreciación	2,785,604	3,262,856	3,278,021
Gastos generales de producción	1,921,869	2,843,284	3,869,177
Costo de producción	16,367,829	18,243,416	16,678,830
Inventario final de productos terminados productos en proceso, materias primas y envases y embalajes	(16,933,388)	(18,515,460)	(16,711,486)
<b>Costo de ventas</b>	<b>17,949,901</b>	<b>16,439,442</b>	<b>13,945,372</b>
<b>Utilidad bruta</b>	<b>2,653,242</b>	<b>3,739,696</b>	<b>-3,248,238</b>
<b>Gastos administrativos</b>	<b>2,040,645</b>	<b>1,233,229</b>	<b>1,321,260</b>
<b>Utilidad operativa</b>	<b>612,597</b>	<b>2,506,467</b>	<b>-4,569,498</b>

Fuente: Elaboración propia a partir de Bolsa de Valores de Lima (2019).

## Conclusiones

1. Se han propuesto modelos de crecimiento para estimar el crecimiento semanal de los langostinos en una piscifactoría. Los modelos propuestos tienen un alto grado de ajuste al crecimiento del langostino
2. Se realizó la comparación de los modelos construidos, entre los que se encuentran el modelo de Gompertz, von Bertalanffy, Brody, Logístico, y polinomial estimado por mínimos cuadrados ponderados (WLS), siendo los modelos WLS y von Bertalanffy los de mayor ajuste a los datos de crecimiento.
3. De los modelos de predicción construidos, el modelo polinomial estimado por mínimos cuadrados ponderados es el que permite obtener mayor precisión en las estimaciones ya que considera la heterocedasticidad de los datos ingresados al modelo.
4. El modelo estimado por WLS permite estimar el peso de los langostinos en las siguientes semanas, así como establecer unos intervalos de predicción en los que se encontrará el peso futuro con una determinada probabilidad.
5. El modelo se ha implementado en código Octave, un lenguaje de programación similar a Matlab. Por lo tanto, es necesario que la persona que opere este modelo conozca el código Octave o Matlab a un nivel básico.
6. La implementación del modelo requiere de una inversión y costos de operación mínimos, considerando que el programa Octave es de libre acceso y que no se requiere de características de cómputo especiales para su instalación.
7. La herramienta propuesta facilitará la gestión de la producción, permitiendo predecir el crecimiento de los langostinos en las siguientes semanas y ayudando a decidir el momento óptimo de cosecha.



### Referencias bibliográficas

- Araneda, M.E., Hernández, J.M., Gasca-Leyva, E. y Vela, M.A. (2013). Growth modelling including size heterogeneity: Application to the intensive culture of white shrimp (*P. vannamei*) in freshwater. *Acuacultural engineering*, 56, 1-12.
- Bolsa de Valores de Lima (2019) Eco Acuícola S.A.C. Estados Financieros Separados al 31 de Diciembre de 2018 Y 2017 y el dictamen de los auditores independientes.
- Cornejo Zúñiga, Ó.; Rebolledo Vega, R. (2016). Estimación de parámetros en modelos no lineales: algoritmos y aplicaciones. *Revista EIA*, 13(25), enero-junio, pp. 81-98. [Online]. Disponible en: DOI: <http://dx.doi.org/10.14508/reia.2016.13.25.81-98>
- FAO (2006) Programa de información de especies acuáticas. *Penaeus vannamei*. Programa de información de especies acuáticas. Texto de Briggs, M. In: Departamento de Pesca y Acuicultura de la FAO [en línea]. Roma. Actualizado 7 April 2006. [Citado 13 December 2018] Recuperado de [http://www.fao.org/fishery/culturedspecies/Penaeus\\_vannamei/es](http://www.fao.org/fishery/culturedspecies/Penaeus_vannamei/es)
- FAO (2018). El Anuario de estadísticas de pesca y acuicultura de la FAO.
- FAO (2018) El estado mundial de la pesca y la acuicultura 2018. Cumplir los objetivos del desarrollo sostenible. Roma. Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO. Recuperado de <http://www.fao.org/3/I9540ES/i9540es.pdf>
- FAO (2005). National Aquaculture Sector Overview. Visión general del sector acuícola nacional - Perú. National Aquaculture Sector Overview Fact Sheets. Texto de Soto Cárdenas, G. I. In: Departamento de Pesca y Acuicultura de la FAO [en línea]. Roma. Actualizado 1 February 2005. [Citado 13 December 2018]. Recuperado de [http://www.fao.org/fishery/countrysector/naso\\_peru/es](http://www.fao.org/fishery/countrysector/naso_peru/es)
- Gbangboche, A. B., Glele-Kakai, R., Salifou, S., Albuquerque, L. G. & Leroy, P. L. (2008). Comparison of non-linear growth models to describe the growth curve in West African Dwarf sheep. *Animal*, 2:7, pp 1003–1012.

- Mendoza, D. (2011) Panorama de la Acuicultura Mundial, en América Latina y el Caribe y en el Perú. Dirección General de Acuicultura, Ministerio de la Producción. Lima, Perú.
- Míguez, S. (2016) Procesos de difusión Logístico y Gompertz. Métodos numéricos clásicos en la estimación paramétrica.
- Ministerio de la Producción (2009) Plan Nacional de Desarrollo acuícola.
- Ministerio de la Producción (2017). Anuario Estadístico Pesquero y Acuícola. Disponible en <http://ogeiee.produce.gob.pe/index.php/shortcode/oe-documentos-publicaciones/publicaciones-anuales/item/775-anuario-estadistico-pesquero-y-acuicola-2016>
- Sánchez, I. (s/f). Introducción a la Regresión Múltiple.
- Sparre, P. (2018) Introduction to Tropical Fish Stock Assessment - Part 1: Manual.
- Tjørve KMC, Tjørve E. (2017). The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family. PLoS ONE 12(6): e0178691. Recuperado de <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0178691>
- Yu, R., Leung P. y Bienfang P. (2006) Predicting shrimp growth: Artificial neural network versus nonlinear regression models.
- Wolfram Language & System Documentation Center. (s/f). Trust Region Methods. Recuperado el 05 de mayo de 2019 de <https://reference.wolfram.com/language/tutorial/UnconstrainedOptimizationTrustRegionMethods.html>
- Wolfram Language & System Documentation Center. (s/f). Gauss-Newton Methods. Recuperado el 05 de mayo de 2019 de <https://reference.wolfram.com/language/tutorial/UnconstrainedOptimizationTrustRegionMethods.html>