CAPÍTULO 16: FUNCIONES – TRIGONOMETRÍA (III)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 16: Funciones – Trigonometría (III)

C. Transformación de sumas en productos

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

23 diapositivas

CAPÍTULO 16

TRIGONOMETRÍA

C. Transformación de sumas en productos

C. Transformación de sumas en productos

TEOREMA XVI-4

$$sen p + sen q = 2 sen \frac{p+q}{2} . \cos \frac{p-q}{2}$$

$$sen p - sen q = 2 \cos \frac{p+q}{2} . sen \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} . \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 sen \frac{p+q}{2} . sen \frac{p-q}{2}$$

C. Transformación de sumas en productos

DEMOSTRACIÓN

$$\boxed{senp + senq = 2sen\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}}$$

Del teorema XVI-1

sen (a + b) = sen (a) . cos (b) + cos (a) . sen (b)
sen (a - b) = sen (a) . cos (b) - cos (a) . sen (b)

Sumando ambas igualdades, tenemos:

sen (a + b) + sen (a - b) = 2 sen (a) . cos (b)

Si llamamos p = a + b ; entonces: a = (p + q)/2
q = a – b b = (p – q)/2

sen (p) + sen (q) = 2 sen [(p + q)/2] . cos [(p – q)/2]

C. Transformación de sumas en productos

DEMOSTRACIÓN

$$\boxed{senp - senq = 2\cos\frac{p+q}{2}.sen\frac{p-q}{2}}$$

Del teorema XVI-1

sen (a + b) = sen (a) . cos (b) + cos (a) . sen (b)
sen (a - b) = sen (a) . cos (b) - cos (a) . sen (b)

Restando ambas igualdades, tenemos:

sen (a + b) – sen (a - b) = 2 cos (a) . sen (b)

Si llamamos p = a + b ; entonces: a = (p + q)/2
q = a – b b = (p – q)/2

sen (p) – sen (q) = 2 cos [(p + q)/2] . sen [(p – q)/2]

C. Transformación de sumas en productos

DEMOSTRACIÓN

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

Del teorema XVI-1

cos (a + b) = cos (a) x cos (b) – sen (a) x sen (b)
cos (a - b) = cos (a) x cos (b) + sen (a) x sen (b)

Sumando ambas igualdades, tenemos:

cos (a + b) + cos (a - b) = 2 cos (a) . cos (b)

Si llamamos p = a + b ; entonces: a = (p + q)/2
q = a – b b = (p – q)/2

cos (p) + cos (q) = 2 cos [(p + q)/2] . cos [(p – q)/2]

C. Transformación de sumas en productos

DEMOSTRACIÓN

$$\cos p - \cos q = -2sen\frac{p+q}{2}.sen\frac{p-q}{2}$$

Del teorema XVI-1

cos (a + b) = cos (a) x cos (b) – sen (a) x sen (b)
cos (a - b) = cos (a) x cos (b) + sen (a) x sen (b)

Restando ambas igualdades, tenemos:

cos (a + b) – cos (a - b) = – 2 sen (a) . sen (b)

Si llamamos p = a + b ; entonces: a = (p + q)/2
q = a – b b = (p – q)/2

cos (p) – cos (q) = – 2 sen [(p + q)/2] . sen [(p – q)/2]

C. Transformación de sumas en productos

COROLARIOS

$$sena.\cos b = \frac{1}{2}\left[sen(a+b) + sen(a-b)\right]$$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$sena.senb = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Trasformación en producto:

1. $senx + sen2x$
2. $senx + \cos 2x$

   Sugerencia : $senx = \cos(90 - x).$

Trasformar en suma:

3. $sen3x \ \cos 3y$
4. $\cos 3x \ \cos 3y$
5. $\cos 5x \ \cos 7x$
6. $sen2x \ senx$

Calcular, a partir de funciones trigonométricas conocidas:

7. $sen15°$ R.: ½ $\sqrt{2-\sqrt{3}}$
8. $\cos 15°$ R.: ½ $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
9. $sen105°$
10. $\cos 105°$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Trasformación en producto:

1. $senx + sen2x$

1. $$\begin{Bmatrix} x = p \\ 2x = q \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ \frac{3x}{2} = \frac{(p+q)}{2} \right\} \wedge \left\{ \frac{-x}{2} = \frac{p-q}{2} \right\}$$

$$senx + sen2x = 2sen\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{-x}{2}\right) = 2sen\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Trasformación en producto:

2. $senx + \cos 2x$ Sugerencia: $senx = \cos(90 - x).$

2. $$senx + \cos 2x = \cos(90 - x) + \cos 2x$$

$$\begin{Bmatrix} 90 - x = p \\ 2x = q \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ \frac{90+x}{2} = \frac{(p+q)}{2} \right\} \wedge \left\{ \frac{90-3x}{2} = \frac{p-q}{2} \right\}$$

$$\cos(90 - x) + \cos 2x = 2\cos\left(\frac{90+x}{2}\right)\cos\left(\frac{90-3x}{2}\right)$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Trasformar en suma:

3. $sen3x \ \cos 3y$

3. $\left.\begin{cases} 3x = (p+q)/2 \\ 3y = (p-q)/2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \{3x+3y=p\} \wedge \{3x-3y=q\}$

$$sen3x.\cos 3y = \frac{1}{2}\left[sen(3x+3y)+sen(3x-3y)\right]$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Trasformar en suma:

4. $\cos 3x \ \cos 3y$

4. $\left.\begin{cases} 3x = (p+q)/2 \\ 3y = (p-q)/2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \{3x+3y=p\} \wedge \{3x-3y=q\}$

$$\cos 3x.\cos 3y = \frac{1}{2}\left[\cos(3x+3y)+\cos(3x-3y)\right]$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Trasformar en suma:

5. $\cos 5x \ \cos 7x$

5. $\left.\begin{cases} 7x = (p+q)/2 \\ 5x = (p-q)/2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \{12x = p\} \wedge \{2x = q\}$

$$\cos 7x . \cos 5x = \frac{1}{2}\left[\cos(12x) + \cos(2x)\right]$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Trasformar en suma:

6. $sen2x \ \ senx$

6. $\left.\begin{cases} 2x = (p+q)/2 \\ x = (p-q)/2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \{3x = p\} \wedge \{x = q\}$

$$sen2x . senx = -\frac{1}{2}\left[\cos(3x) - sen(x)\right] = \frac{1}{2}\left[sen(x) - \cos(3x)\right]$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Calcular, a partir de funciones trigonométricas conocidas:

7. $sen15°$ R.: ½ $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$sen15° = sen(45-30)° \wedge$$

$$sen(a-b) = sena.\cos b - \cos a.senb \Rightarrow$$

$$sen(45-30) = sen45.\cos 30 - \cos 45.sen30 = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2\left(3-2\sqrt{3}+1\right)}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Calcular, a partir de funciones trigonométricas conocidas:

8. $\cos 15°$ R.: ½ $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$$\cos 15° = \cos(45-30)° \wedge$$

$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + sena.senb \Rightarrow$$

$$\cos(45-30) = \cos 45.\cos 30 + sen45.sen30 = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2\left(3+2\sqrt{3}+1\right)}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Calcular, a partir de funciones trigonométricas conocidas:

9. $sen105°$

$$sen105° = sen(60+45)° \wedge$$
$$sen(60+45) = sena.\cos b + \cos a.senb \Rightarrow$$
$$sen(60+45) = sen60.\cos 45 + \cos 60.sen45 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2(\sqrt{3}+1)^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2(3+2\sqrt{3}+1)}}{2}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Calcular, a partir de funciones trigonométricas conocidas:

10. $\cos 105°$

$$\cos 105° = \cos(60+45)° \wedge$$
$$\cos(60+45) = \cos a.\cos b - sena.senb \Rightarrow$$
$$\cos(60+45) = \cos 60.\cos 45 - sen60.sen45 = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2(1-\sqrt{3})^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2(1-2\sqrt{3}+3)}}{2}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Si A, B, C son los ángulos de un triangulo, demostrar las igualdades siguientes:

11. $\cos A+\cos B+\cos C=4sen\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2}+1$

12. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=-2\cos A\cos B\cos C+1$

Sugerencia: $\cos^2 A=\cos^2(A+B)$

13. $sen2A+sen2A+sen2C=4senAsenBsenC).$

14. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Si A, B, C son los ángulos de un triangulo, demostrar las igualdades siguientes:

11. $\cos A+\cos B+\cos C=4sen\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2}+1$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\left(\frac{180-C}{2}\right)=sen\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2sen\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos C=1-2sen^2\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=2sen\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+1-2sen^2\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=2sen\left(\frac{C}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-sen\left(\frac{C}{2}\right)\right)+1$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Si A, B, C son los ángulos de un triangulo, demostrar las igualdades siguientes:

11. $\cos A+\cos B+\cos C=4sen\frac{A}{2}\,sen\frac{B}{2}\,sen\frac{C}{2}+1$

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-sen\left(\frac{C}{2}\right)=-2sen\left(\frac{A}{2}\right)sen\left(\frac{-B}{2}\right)=2sen\left(\frac{A}{2}\right)sen\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$\left\{\begin{matrix}\frac{A-B}{2}=p\\ \frac{A+B}{2}=q\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{p+q}{2}=\frac{A}{2}\\ \frac{p-q}{2}=\frac{-B}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=2sen\left(\frac{C}{2}\right)\left(2sen\left(\frac{A}{2}\right)sen\left(\frac{B}{2}\right)\right)+1$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=4sen\left(\frac{C}{2}\right)sen\left(\frac{A}{2}\right)sen\left(\frac{B}{2}\right)+1$$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Si A, B, C son los ángulos de un triangulo, demostrar las igualdades siguientes:

11. $\cos A+\cos B+\cos C=4sen\frac{A}{2}\,sen\frac{B}{2}\,sen\frac{C}{2}+1$

12. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=-2\cos A\cos B\cos C+1$

Sugerencia: $\cos^2 A=\cos^2(A+B)$

13. $sen2A+sen2A+sen2C=4senAsenBsenC).$

14. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

C. Transformación de sumas en productos

EJERCICIOS

Demostrar que:

$$\tan x \pm \tan y = \frac{sen(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cot x \pm \cot y = \frac{sen(x \pm y)}{senx\, seny}$$