



UNIVERSIDAD  
DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

**El aprendizaje adquirido sobre el binomio al cuadrado  
mediante la enseñanza con las representaciones  
geométrica y algebraica en estudiantes de tercer grado de  
secundaria de una institución educativa pública de Piura**

Tesis para optar el Título de  
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física

**Karen Nathalie Quintos Carranza**

Asesor(es):  
Mgtr. Flor Manuela Hau Yon Palomino

Piura, octubre de 2023



### Declaración Jurada de Originalidad del Trabajo Final

Yo, Karen Nathalie Quintos Carranza, egresado del Programa Académico del Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, identificado(a) con DNI N° 74947578.

Declaro bajo juramento que:

1. Soy autor del trabajo final titulado:  
"El aprendizaje adquirido sobre el binomio al cuadrado mediante la enseñanza con las representaciones geométrica y algebraica en estudiantes de tercer grado de secundaria de una institución educativa pública de Piura"  
El mismo que presento bajo la modalidad de Tesis<sup>1</sup> para optar el Título profesional<sup>2</sup> de Licenciado en Educación.
2. La asesoría del trabajo estuvo a cargo de:
  - Mgtr. Flor Manuela Hau Yon Palomino, identificada con DNI N° 06422599
3. El texto de mi trabajo final respeta y no vulnera los derechos de terceros o de ser el caso derechos de los coautores, incluidos los derechos de propiedad intelectual, datos personales, entre otros. En tal sentido, el texto de mi trabajo final no ha sido plagiado total ni parcialmente, para la cual he respetado las normas internacionales de citas y referencias de las fuentes consultadas.
4. El texto del trabajo final que presento no ha sido publicado ni presentado antes en cualquier medio electrónico o físico.
5. La investigación, los resultados, datos, conclusiones y demás información presentada que atribuyo a mi autoría son veraces.
6. Declaro que mi trabajo final cumple con todas las normas de la Universidad de Piura.

El incumplimiento de lo declarado da lugar a responsabilidad del declarante, en consecuencia; a través del presente documento asumo frente a terceros, la Universidad de Piura y/o la Administración Pública toda responsabilidad que pueda derivarse por el trabajo final presentado. Lo señalado incluye responsabilidad pecuniaria incluido el pago de multas u otros por los daños y perjuicios que se ocasionen.

Fecha: 02/10/2023.

Firma del autor optante<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup> Indicar si es tesis, trabajo de investigación, trabajo académico o trabajo de suficiencia profesional.

<sup>2</sup> Grado de Bachiller, Título profesional, Grado de Maestro o Grado de Doctor.

<sup>3</sup> Idéntica al DNI; no se admite digital, salvo certificado.

### **Dedicatoria**

A Dios padre todopoderoso, quien me ha permitido la culminación de este trabajo de manera satisfactoria, otorgándome la dicha de este logro profesional.

A mi madre y al ser tan maravilloso que le dio la vida, por ser los pilares de mi formación personal y por apoyarme de modo incondicional en mis metas académicas.



### **Agradecimientos**

A la Universidad de Piura, por brindarme una educación en valores y virtudes; asimismo, agradezco a la plana docente de la Facultad de Educación, ya que sin su formación no sería la profesional que soy.

A la profesora Mg. Flor Hau Yon Palomino, por brindarme su sabiduría y su tiempo en la elaboración y presentación de este trabajo de investigación.

Finalmente, agradezco a los participantes de esta investigación por su colaboración voluntaria en la realización de este trabajo de Tesis.



## Resumen

Este trabajo de investigación tiene por objetivo establecer semejanzas y diferencias en el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones geométrica, algebraica y verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura, en el año 2020. Para ello, se ha elaborado y aplicado un test del tópico algebraico mencionado cuya metodología para analizar la información tiene un carácter cualitativo-descriptivo bajo el diseño de estudio de caso. La muestra corresponde a 10 estudiantes varones de tercer grado de educación secundaria cuyas edades oscilan entre 13 – 15 años de edad. De los resultados obtenidos en la investigación, se concluye que mediante las representaciones geométrica y verbal se evidencia un mejor rendimiento en el aprendizaje del binomio al cuadrado en comparación de las representaciones algebraica y verbal, porque adquieren habilidades de visualización que permite potenciar la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.



## Tabla de contenido

<b>Introducción.....</b>	<b>10</b>
<b>Capítulo 1: Planteamiento del problema .....</b>	<b>12</b>
1.1. Caracterización de la problemática.....	12
1.2. Justificación de la investigación .....	15
1.3. Objetivo de la investigación .....	16
1.3.1. Objetivo general.....	16
1.3.2. Objetivos específicos.....	17
1.4. Antecedentes de estudio .....	17
1.4.1. Antecedentes internacionales.....	17
1.4.2. Antecedentes nacionales .....	20
1.4.3. Antecedentes locales.....	21
<b>Capítulo 2: Marco teórico de la investigación .....</b>	<b>23</b>
2.1. Aprendizaje.....	23
2.1.1. Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.....	24
2.1.2. Aprendizaje del álgebra.....	25
2.2. Álgebra .....	26
2.2.1. Importancia del álgebra .....	28
2.2.2. Desarrollo del pensamiento algebraico .....	29
2.2.3. Dificultades de la enseñanza y aprendizaje del álgebra.....	30
2.3. Visualización en matemática.....	33
2.3.1. Importancia de la visualización en matemática .....	34
2.3.2. Visualización de los productos notables desde la percepción geométrica.....	35
2.3.3. La teoría de los registros de representación semiótica .....	36
2.4. Competencias y capacidades en el área de Matemática según el Currículo Nacional de la Educación Básica – 2016 .....	37
2.4.1. Descripción de las competencias matemáticas.....	38
2.4.2. Descripción de las capacidades matemáticas .....	39
2.4.3. Competencia y capacidades relacionadas al álgebra .....	40
2.5. Productos notables.....	41
2.5.1. Enseñanza de los productos notables.....	42
2.5.2. Dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los productos notables.....	44
2.5.3. Representaciones de los productos notables .....	44
<b>Capítulo 3: Metodología de la investigación .....</b>	<b>51</b>
3.1. Paradigma, tipo y diseño de investigación.....	51

3.2.	Informantes.....	53
3.3.	Descripción del tratamiento didáctico .....	55
3.4.	Técnicas e instrumentos de recogida de información .....	55
3.4.1.	Test elaborado por el docente .....	55
3.4.2.	Observación.....	56
3.4.3.	Entrevista.....	57
3.5.	Procedimiento de organización, análisis y discusión de los resultados .....	57
<b>Capítulo 4: Resultados de la investigación .....</b>		<b>59</b>
4.1.	Análisis descriptivo de los resultados del test.....	59
4.1.1.	Resultados del test aplicado al grupo de estudio 1.....	59
4.1.2.	Resultados del test aplicado al grupo de estudio 2.....	67
4.2.	Análisis comparativo de los resultados del test aplicado al grupo de estudio 1 y al grupo de estudio 2.....	77
4.3.	Discusión de resultados.....	79
<b>Conclusiones .....</b>		<b>82</b>
<b>Referencias .....</b>		<b>84</b>
<b>Apéndices .....</b>		<b>93</b>
	Apéndice A: Matriz general de consistencia .....	94
	Apéndice B: Matriz de operacionalización del instrumento .....	96
	Apéndice C: Instrumento de evaluación .....	97
	Apéndice D: Rúbrica analítica para evaluar el examen de Matemática .....	100
	Apéndice E: Resultados obtenidos de la aplicación del instrumento de evaluación .....	108
	Apéndice F: Sesiones de aprendizaje .....	109
	Apéndice G: Diarios de campo de las sesiones de aprendizaje .....	158
	Apéndice H: Validaciones del instrumento de evaluación por docentes expertos.....	180
	Apéndice I: Entrevista a los informantes.....	183

### Lista de tablas

<b>Tabla 1</b> Actividades para el tratamiento metodológico de la investigación .....	52
<b>Tabla 2</b> Estudiantes que conforman la población investigada.....	53
<b>Tabla 3</b> Estudiantes que conforman la muestra de la investigación.....	54
<b>Tabla 4</b> Secuencia de las sesiones de aprendizaje .....	55
<b>Tabla 5</b> Procesamiento de los resultados para la organización, análisis y discusión.....	58
<b>Tabla 6</b> Resultados obtenidos del grupo de estudio 1 en el test .....	66
<b>Tabla 7</b> Resultados obtenidos del grupo de estudio 2 en el test .....	76
<b>Tabla 8</b> Análisis comparativo del aprendizaje adquirido del grupo de estudio 1 y grupo de estudio 2 en el test.....	77
<b>Tabla 9</b> Resultados obtenidos por pregunta del grupo de estudio 1 y grupo de estudio 2 en el test	108



## Lista de figuras

<b>Figura 1</b> Mapa conceptual de los sistemas de representación del binomio al cuadrado.....	46
<b>Figura 2</b> Representación geométrica del cuadrado de un binomio suma .....	47
<b>Figura 3</b> Representación geométrica del cuadrado de un binomio diferencia.....	48
<b>Figura 4</b> Codificación de los informantes.....	54
<b>Figura 5</b> Respuesta del estudiante I3A-4 a la pregunta 1 .....	60
<b>Figura 6</b> Respuesta del estudiante I3A-5 a la pregunta 2a.....	60
<b>Figura 7</b> Respuesta del estudiante I3A-1 a la pregunta 2b .....	61
<b>Figura 8</b> Respuesta del estudiante I3A-3 a la pregunta 3a.....	62
<b>Figura 9</b> Respuesta del estudiante I3A-2 a la pregunta 3b .....	62
<b>Figura 10</b> Respuesta del estudiante I3A-6 a la pregunta 4a .....	63
<b>Figura 11</b> Respuesta del estudiante I3A-3 a la pregunta 4a .....	64
<b>Figura 12</b> Respuesta del estudiante I3A-5 a la pregunta 5 .....	65
<b>Figura 13</b> Respuesta del estudiante I3D-1 a la pregunta 1 .....	68
<b>Figura 14</b> Respuesta del estudiante I3D-4 a la pregunta 2b.....	69
<b>Figura 15</b> Respuesta del estudiante I3D-1 a la pregunta 3a .....	70
<b>Figura 16</b> Respuesta del estudiante I3D-4 a la pregunta 3b.....	70
<b>Figura 17</b> Respuesta del estudiante I3D-3 a la pregunta 4a .....	72
<b>Figura 18</b> Respuesta del estudiante I3D-3 a la pregunta 5 .....	74
<b>Figura 19</b> Respuesta del estudiante I3D-4 a la pregunta 5 .....	74
<b>Figura 20</b> Respuesta del estudiante I3D-2 a la pregunta 5 .....	75

## Introducción

La enseñanza de la matemática siempre ha sido objeto de estudio con la finalidad de mejorar tanto la práctica docente como el desempeño de los estudiantes, en esta medida la rama del álgebra también ha sido protagonista de diversos estudios de investigación puesto que su apropiación permite desarrollar el pensamiento abstracto-algebraico. Así pues, surge el interés de realizar el presente trabajo, ya que, en la literatura revisada para fundamentarlo, se han encontrado varias investigaciones sobre los productos notables, pero no tantas sobre el binomio al cuadrado; es más, el tratamiento metodológico de este estudio permite un estudio a profundidad sobre el mismo.

Por ello, se ha planteado como objetivo principal establecer semejanzas y diferencias en el aprendizaje adquirido sobre el binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones verbal, geométrica y algebraica, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura, en el año 2020. De modo que, luego de haber diseñado la propuesta didáctica y haber aplicado el instrumento de evaluación, se identifique en cuál de las representaciones hay un mejor rendimiento académico en los estudiantes; ya que, continuamente ellos presentan dificultades debido a su carácter abstracto, pero es fundamental que lo aprendan por su utilidad en el contexto real y por el fomento del pensamiento algebraico. Así, el presente estudio dará nociones al profesorado en cuanto a la conveniencia de enseñar este tópico matemático mediante las representaciones geométrica-verbal respecto a las representaciones algebraica-verbal para mejorar su comprensión.

Por otro lado, el desarrollo de la tesis, presenta la siguiente estructura:

En el primer capítulo se describe la problemática y a su vez se fundamenta la originalidad del presente estudio. Se presenta el objetivo general y los objetivos específicos que enmarcan los parámetros de investigación, asimismo, se abordan los trabajos previos que anteceden la investigación.

En el segundo capítulo se aborda el marco teórico, en el cual se explican conceptos asociados al objeto de estudio tales como; el aprendizaje, el álgebra, la visualización, competencias y capacidades matemáticas que se desarrollan en el tema de los productos notables. Por ende, también se aborda de manera general las representaciones de los productos notables principalmente del binomio al cuadrado.

El tercer capítulo está centrado en la metodología de la investigación, por lo que se describe el paradigma, diseño de la investigación, población y muestra, técnicas e instrumentos de recogida de información. Al igual que, se describe la propuesta del tratamiento didáctico aplicado a ambos grupos de estudio con sus respectivas representaciones.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis descriptivo-comparativo de los resultados obtenidos en la investigación, teniendo en cuenta la competencia relacionada al álgebra Resuelve

problemas de regularidad, equivalencia y cambio y sus capacidades. Posteriormente, se muestra la discusión de los resultados encontrados con los trabajos realizados por otros autores.

Finalmente, se precisan las conclusiones en base a los datos obtenidos y a los objetivos de estudio planteados con el propósito de brindar información a la plana docente que enseñen el área de Matemática para mejorar el aprendizaje de los educandos en esta disciplina. Así como también, promover curiosidad científica para generar nuevos trabajos de investigación.



## **Capítulo 1: Planteamiento del problema**

En el presente capítulo se expone la caracterización del problema, es decir, se describen los motivos por los cuales es importante realizar esta investigación, de manera que se presenta el problema general como los problemas específicos; además, la justificación, los objetivos y las bases teóricas que fundamentan el trabajo.

### **1.1. Caracterización de la problemática**

La educación en el Perú, se encuentra en una situación alarmante pese al afán del Ministerio de Educación (Minedu en adelante) por revertirlo, motivo por el cual urge la intervención de todos los agentes educativos para generar procesos de cambio y desarrollo en el sistema educativo a través de la iniciativa e innovación docente principalmente, ya que es el maestro quien tiene un contacto directo en la enseñanza de los alumnos y su actuar profesional en ellos contribuye con la finalidad de brindar una educación de calidad que esté acorde con las exigencias a nivel mundial; de este modo, los estudiantes se consolidarán en su formación personal y académica para ejercer su ciudadanía de modo eficiente en la sociedad.

Entonces, es necesario superar las dificultades que tiene la educación peruana y que se reflejan a nivel internacional, como ocurre en la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), cuyos resultados según las estadísticas muestran que los estudiantes peruanos de 15 años del nivel secundario aún no logran los estándares que se plantean a nivel internacional; puesto que en el año 2018, de los 79 países o territorios que han participado, Perú ocupó el puesto 65 en el área de Matemática (Minedu, 2019). De acuerdo al informe obtenido en la evaluación, se deduce que los alumnos peruanos finalizan sus estudios del nivel de educación secundaria sin saber desarrollar situaciones que impliquen el razonamiento matemático, efectuar cálculos mentales o utilizar la técnica operativa, entre otras habilidades elementales matemáticas (Lucana, 2018); por lo que difícilmente podrían hacer frente a las situaciones y desafíos que les plantea la sociedad actual porque en principio no tienen interiorizados tales conocimientos.

Por tanto, es necesario que a nivel nacional se dé una mirada introspectiva para reflexionar sobre los retos específicos que surgen de nuestra realidad como país multicultural y diverso, y en base a ello cumplir las metas del sector educación, uno de ellos, elevar los promedios nacionales para posteriormente alcanzar los estándares que se plantean a nivel internacional. Cabe considerar que, en Perú, ya se están tomando medidas para mejorar en el examen PISA, razón por la cual, el Minedu (2017) cada año realiza la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) a los alumnos de la Educación Básica Regular de 2º grado de secundaria de todas las instituciones educativas estatales y privadas del país, que evalúa las competencias en Matemática y para hacerlo considera los documentos

curriculares vigentes. Por lo que, es un hecho que nuestro país ha ido mejorando en su sistema educativo, de manera paulatina pero insuficiente a la vez.

Asimismo, entre los factores causantes de esta problemática pueden ser: la falta de uso de estrategias de enseñanza-aprendizaje que fomenten la participación activa de los estudiantes, el no apoyarse en la actividad lúdica como herramienta pedagógica para lograr mejores niveles de aprendizaje en el álgebra, entre otros factores externos como los socio-económicos y personales (Lucana, 2018). Mientras que Tabuada (2019) expone que la falta de interés y compromiso por parte de los padres de familia por matricular y enviar a sus hijos de manera oportuna a los colegios impactan en el rendimiento escolar e influyen en los resultados obtenidos en el examen internacional; al igual que, la calidad educativa ofrecida por las instituciones educativas se puede ver influenciada por altos niveles de ausentismo docente y por los deficientes sistemas de monitoreo por parte de las autoridades educativas. A lo expuesto, la autora adiciona como causas relevantes dentro del fracaso escolar, el papel que desempeña el estado y el impacto de las políticas educativas actuales, así como también, la asignación de presupuesto designado al docente. Considerando lo expresado anteriormente puede decirse que las causas del problema en torno a la educación son múltiples.

Ahora, si nos enfocamos específicamente en Matemáticas, la principal dificultad en la adquisición de conocimientos de esta área curricular es el nivel de complejidad cognitiva debido a que demanda en los estudiantes el uso de las operaciones formales en el desarrollo y solución de problemas matemáticos. Entre otra de las razones que imposibilitan el aprendizaje matemático es la falta de compromiso por parte de los docentes en capacitarse continuamente para estar actualizados con las nuevas formas de enseñanza y estrategias para llegar al alumno y facilitar de ese modo su aprehensión conceptual, dejando de lado el enfoque tradicional que aún está vigente en los colegios ya sean de gestión pública o privada. Y se menciona este tipo de enseñanza porque ha imperado por mucho tiempo en el sistema educativo en el cual, el profesor era el encargado de transmitir su sabiduría de manera magistral y los estudiantes adquirían sus clases con actitud pasiva y memorizando la información recibida, aspecto bastante alejado de lo que significa el aprendizaje (Acevedo, 2007).

Respecto al aprendizaje del álgebra, su naturaleza abstracta genera dificultades en los alumnos y según los docentes de una institución educativa pública, los escolares presentan complicaciones al interpretar y realizar operaciones con expresiones algebraicas; a esto, le adicionamos el hecho de que no haya una base sólida desde la educación primaria. En cuanto a los productos notables, los problemas en la comunidad estudiantil son la mecanización a través del uso de fórmulas, el mal uso de propiedades al realizar operaciones de multiplicación y potencia, y el

hecho de que no haya un aprendizaje significativo implica que ellos no le den una aplicación en el contexto real, por lo que no les es vivencial y lo olvidan con facilidad.

Avalos (2014) confirma al expresar que uno de los factores que obstaculizan la comprensión del tema de productos notables es que el estudiante presenta complicaciones para recordar sus saberes previos debido a la mecanización y a la falta de un verdadero aprendizaje significativo, ya que ni siquiera pueden aplicarlos a la solución de diferentes situaciones. Por lo tanto, las consecuencias se ven reflejadas en el bajo rendimiento académico cuya razón es la ausencia de compromiso por parte del alumnado, puesto que no se sienten motivados por aprender el área de Matemática y mucho menos le encuentran un sentido a la aplicación del álgebra o de los productos notables; entonces, como ellos no encuentran esa necesidad de asimilar dichos contenidos teniendo el enfoque contextual, optan por rechazar el área sin un mínimo de esfuerzo por querer al menos aprobarlo y se conforman con una baja calificación hasta incluso dan por hecho que reprobarán la materia.

Es así que, en el afán de dar solución al problema referente a mejorar el aprendizaje de los productos notables, específicamente del binomio al cuadrado, en los alumnos de 3° grado de educación secundaria, la presente investigación se propone abordar este contenido a través de la enseñanza dinámica de las representaciones geométrica, algebraica y verbal con el fin de desarrollar competencias matemáticas y propiciar un aprendizaje vivencial en los estudiantes del nivel secundaria. Por lo expuesto, el planteamiento del problema de este trabajo de investigación se formula de la siguiente manera: ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias en el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones verbal, geométrica y algebraica, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura, en el año 2020?

De este problema general de investigación, se desprenden los siguientes problemas específicos:

- ✓ ¿Cuál y cómo es el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones geométrica y verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura?
- ✓ ¿Cuál y cómo es el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones algebraica y verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura?
- ✓ ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre el aprendizaje adquirido mediante las representaciones (verbal, geométrica o algebraica) del binomio al cuadrado, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura, en el año 2020?

## 1.2. Justificación de la investigación

La educación peruana ante las demandas de la sociedad actual requiere de cambios en el sistema educativo que permitan mejorar la calidad de la enseñanza, lo cual exige una reformulación de las políticas y planes de acción con miras a superar las dificultades que siguen vigentes como por ejemplo la actualización de los docentes, los métodos de enseñanza que se imparten en las escuelas, entre otros. En cuanto al área de Matemática, su aprendizaje y enseñanza ha sido una de las más complicadas a lo largo de la historia debido a su nivel de abstracción y lógica, cuyo resultado ha sido un pobre desarrollo de habilidades en los alumnos y en la misma línea, se encuentra el álgebra, ya que los estudiantes cuando pasan al nivel secundario ingresan con un pensamiento basado en lo concreto de forma dominante, por tanto, el estudio de esta rama de la matemática exige una transición apoyándose aún en el material concreto para llegar al ansiado razonamiento formal que muchos no logran desarrollar.

Ante estas circunstancias, consideramos oportuna la presente investigación porque pretende que los educadores y estudiantes cuenten con una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje del tema de productos notables, específicamente, del binomio al cuadrado, para saber con cuál de sus representaciones hay un mejor aprendizaje, si con la enseñanza de la representación geométrica y verbal o con la representación algébrica y verbal. Para ello, se establecerán las semejanzas y diferencias en el aprendizaje adquirido por los estudiantes de tercer grado de secundaria de una institución educativa estatal. Asimismo, la línea de investigación es Educación y diversidad de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura en el campo de enseñanza-aprendizaje de la Matemática a nivel escolar para estudiantes de educación secundaria respecto al contenido del binomio al cuadrado porque se tiene como propósito estudiar e investigar sobre este tema para mejorar la práctica educativa de los profesores.

Además, este proyecto de investigación es importante porque hace hincapié en el manejo y aplicación de las distintas representaciones del binomio al cuadrado para mejorar el rendimiento académico de los alumnos de tercer año de secundaria, ya que usualmente los docentes solo aplican la representación simbólica y no la fusionan con la representación geométrica para facilitar el entendimiento de este producto notable y tengan una visión más amplia del meramente algebraico y memorístico, de modo que los estudiantes se enfrenten a situaciones contextualizadas y como consecuencia su aprendizaje sea mucho más significativo. Según Duval (2004, como se citó en Oviedo *et al.*, 2012, p. 30):

El aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas

actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

Al mismo tiempo, lo que se pretende lograr en esta investigación es la innovación en la práctica profesional del docente, para que se informe acerca del provecho que puede obtener al incorporar la representación geométrica en la enseñanza del binomio al cuadrado a fin de lograr resultados más favorables, ya que, la geometría le da un aspecto más concreto a lo abstracto de la representación algebraica dado que usualmente esta última se usa como única vía para enseñar el tema (López, 2008); de esta manera, los estudiantes podrán desarrollar el pensamiento algebraico, pero desde otra perspectiva. Por tanto, dar un enfoque concreto a un tema abstracto es factible en cuanto a que la matemática lo admite porque le es propio, según De Guzmán (1996) las ideas, conceptos y métodos de esta ciencia ofrecen una gran riqueza de contenidos visuales, dado que se pueden representar de manera intuitiva y geométrica, cuyo uso resulta conveniente al matemático puesto que le permite acercarse a lo inteligible a través de la referencia de lo sensible y subyugarlo a una elaboración racional, vale decir que esta forma de actuar se le denomina visualización en matemáticas.

En consecuencia, este trabajo de investigación justifica su estudio y elaboración, pues será un aporte a la sociedad y en especial para los docentes que tienen a cargo el área de Matemática, ya que se estudia y analiza el aprendizaje del binomio al cuadrado a partir de la aplicación de sus representaciones de manera individual y bajo el enfoque actual de la enseñanza en la educación peruana, es decir respetando los procesos didácticos en cada sesión de aprendizaje. Por lo que esta investigación brindará una información valiosa a partir del estudio detallado de cada caso, planteándose así diseñar un instrumento que evalúe competencias y capacidades del área de Matemática respecto a este tema con una visión más concreta, puesto que en investigaciones anteriores se ha estudiado los productos notables de manera general, ya sea aplicando estrategias didácticas (material didáctico o uso de software) versus enfoques tradicionales en su enseñanza.

### **1.3. Objetivo de la investigación**

El objetivo de la investigación se ha planteado de manera general y a su vez en objetivos específicos. A continuación, se describen los mismos.

#### **1.3.1. Objetivo general**

Establecer semejanzas y diferencias en el aprendizaje adquirido sobre el binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones verbal, geométrica y algebraica, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura, en el año 2020.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- ✓ Describir el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones geométrica y verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de la sección “D” de una institución educativa pública de Piura.
- ✓ Describir el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones algebraica y verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de la sección “A” de una institución educativa pública de Piura.
- ✓ Realizar una comparación entre el aprendizaje adquirido mediante las representaciones geométrica-verbal y algebraica-verbal del binomio al cuadrado, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura.

### **1.4. Antecedentes de estudio**

Entre los estudios que anteceden el presente trabajo de investigación se ha considerado pertinente agruparlos por antecedentes internacionales, nacionales y locales; y son los siguientes:

#### **1.4.1. Antecedentes internacionales**

En la literatura científica se encuentran diversos estudios sobre los productos notables, el primer antecedente que se ha tomado en cuenta para esta investigación es el realizado por Gómez (2022) que en su artículo científico denominado “Estrategias didácticas en la enseñanza de los productos notables y la factorización en la telesecundaria” desarrollado en el Estado de México, se planteó como objetivo de estudio dar valía a las operaciones matemáticas que están inmersas tanto en los productos notables como en la factorización mediante el razonamiento matemático de los alumnos y el tratamiento geométrico del tema. La metodología adoptada fue de carácter cualitativo y la muestra corresponde a 20 estudiantes en formación para ser docentes, de tercer grado de secundaria.

Para la recolección y análisis de datos se usó una rúbrica de evaluación, donde los resultados mostraron que hay un mayor entendimiento del tópico algebraico a través del uso de softwares graficadores y cuando ellos captan las operaciones inversas de los productos notables, en otras palabras, “pasar de un trinomio cuadrado perfecto a un binomio cuadrado” (p. 1). Además, entendieron el tema en mención desde su representación algebraica, verbal y geométrica, presentándose dificultades cognitivas en esta última en los binomios conjugados. Este trabajo se relaciona con la investigación en curso, en la medida que se propone mejorar el aprendizaje del álgebra en los temas de factorización y de productos notables, desde la matemática formal lo que posibilita dejar buenos cimientos para el enfoque de resolución de problemas.

Por otro lado, Libreros (2017) en el trabajo que presentó para optar al título de Magíster, denominado “La resolución de problemas como propuesta didáctica para la enseñanza de los

productos notables haciendo uso de los múltiples registros de representación semiótica en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Jaime Duque Grisales del Municipio de Villamaría” en Manizales – Colombia, se propuso como objetivo de investigación diseñar una propuesta didáctica alternativa para enseñar productos notables y para ello, partió de un test diagnóstico sobre dicho tema algebraico. La metodología utilizada por la autora fue la investigación inductiva (el método descriptivo), bajo el enfoque cuasiexperimental. Otro aspecto a considerar de este trabajo, fue que la muestra se conformó por 30 educandos, además, uno de los instrumentos fundamentales de esta investigación fue la evaluación escrita, así como la entrevista y/o encuesta y registros de fotografía.

Algunas de las conclusiones a las que se arribó en esta tesis fueron que según el examen pretest, el 60 % de alumnos presentaban inconvenientes para entender los productos notables y a su vez, no podían llevar a cabo operaciones que involucren tal temática. Sin embargo, las guías didácticas elaboradas hicieron que en la evaluación de salida se apreciara gran avance en la comprensión del tópico algebraico debido a la incorporación del programa GeoGebra; por lo que el uso de los diferentes registros de representación semiótica, posibilitaron la adecuada conceptualización de los productos notables a partir de la estrategia de resolución de problemas. Esta investigación contribuye al presente estudio en la medida que concibe la enseñanza de los productos notables desde el aprendizaje significativo y dinámico, en donde el uso de la tecnología resulta provechoso y de gran agrado a los estudiantes. Por tanto, la construcción del aprendizaje del binomio al cuadrado en el alumno, hará que este vea la importancia de saber sobre este tema ya que podrá dar solución a situaciones contextualizadas sobre el mismo.

Otro trabajo que antecede la presente investigación, es la tesis doctoral de Rodríguez (2015) titulada “Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria” realizado en la ciudad de Granada – España. En esta memoria se planteó como objetivo estudiar a profundidad el tratamiento que hacen los estudiantes cuando empiezan su estudio en el álgebra al momento de presentarles enunciados algebraicos para traducirlos entre los dos sistemas de representación ya mencionados, con especial interés en identificar los errores cuando efectúan este proceso. Por tal razón, el tipo de investigación corresponde al descriptivo con enfoque mixto (cualitativo y cuantitativo). Además, se utilizaron como instrumentos para recolectar la información, exámenes escritos y entrevistas semiestructuradas. La muestra estudiada fue de 16 alumnos de 2º curso de ESO escogidos de manera intencional.

Esta tesis concluyó que los alumnos incurren en más errores cuando pasan de la representación verbal no contextualizada al simbolismo algebraico, esto ocurre por la complicación estructural del álgebra y el uso de las letras que muchas veces lo toman como objeto y no como un valor desconocido, asimismo, los estudiantes tienen mayor facilidad al hacer una traducción verbal

con presencia de contexto a partir de enunciados simbólico-algebraicos. Este estudio aporta a la presente investigación, pautas a tomar en cuenta para evitar los errores que cometen los educandos en temas algebraicos, puesto que se realizará un estudio sobre el binomio al cuadrado, y es lógico que se empleará la representación algebraica en el tratamiento didáctico aplicado a un grupo de estudio, por ende, en el desarrollo de las sesiones se trabajará con expresiones algebraicas.

Aguilar y Yaosca (2015) en su tesis “Estrategias didácticas aplicadas en la enseñanza aprendizaje en el tema de factorización del trinomio cuadrado perfecto en el noveno grado del instituto Manuel Hernández Martínez en el primer semestre de 2015” presentada para optar la licenciatura en Física y Matemática en Managua - Nicaragua, se plantearon como objetivo promover y aplicar estrategias didácticas que fomenten destrezas respecto al tema de investigación en los alumnos. La metodología empleada en esta investigación fue cualitativa y tuvo el tratamiento del estudio de caso, la muestra estudiada fue de 40 estudiantes y cuatro maestros a cargo del área de Matemática. Adicionalmente, se utilizaron como instrumentos para recoger información diferentes cuestionarios, registros de observación y la entrevista.

Entre las conclusiones a las que arribaron las investigadoras fue que se logró el objetivo general a través del análisis de las estrategias didácticas realizadas por los educadores de secundaria en el lugar donde se desarrolló la investigación, cuya finalidad era estimar la correcta ejecución de las técnicas y recursos planteados en este estudio. Incluso, se diseñó una secuencia didáctica acorde a las vivencias de los propios escolares para captar su atención desde el plan de clase. Indudablemente, esta investigación sustenta la importancia del desarrollo de habilidades lógico-matemáticas en el campo del álgebra y según las actividades que se pueden visualizar en el plan de clase, las autoras incorporan situaciones significativas y hasta combinan la representación geométrica para tratar el tema de investigación, además aporta valiosa información para la redacción del marco teórico del estudio en curso.

Finalmente, se ha considerado el trabajo realizado por Avalos (2014) quien en su tesina para optar el título de Licenciada en Pedagogía en Ajusco – México, cuyo título es “Adaptación de juegos para enseñar factorización y productos notables en educación media superior”, se propuso como objetivo principal diseñar una propuesta didáctica aplicativa de aula tomando en cuenta las competencias disciplinares que fomenta el álgebra, cuyo estudio se centra en el uso de recursos didácticos de juego de mesa para abordar el tema algebraico de productos notables y factorización; asimismo, la metodología utilizada fue cualitativa-cuantitativa. Esta tesis concluyó que el aprendizaje de los productos notables haciendo uso de dos juegos como herramientas de aprendizaje fue eficaz, ya que los estudiantes toman un sentido y entusiasmo al momento de aprender, por eso recomienda que los profesores innoven su práctica docente en beneficio de sus educandos. Esta investigación contribuye al presente estudio en la medida que involucra formas atractivas de enseñar los

productos notables, en la cual la lúdica es utilizada como una herramienta didáctica para facilitar el proceso de aprendizaje en los alumnos con criterio constructivista.

#### **1.4.2. Antecedentes nacionales**

Como primer antecedente nacional, se ha seleccionado el realizado por Lucana (2018) quien en su tesis titulada “Influencia de la actividad lúdica en el aprendizaje del álgebra en estudiantes de primer grado de la I.E.S. José Carlos Mariátegui Aplicación UNA Puno – 2017” en Perú, tuvo como objetivo determinar en qué contribuye la propuesta pedagógica de incluir el juego en el aprendizaje de ciertos temas algebraicos. El enfoque de esta investigación fue el cuantitativo y el diseño utilizado fue el cuasi-experimental, además, la técnica para recoger la información fue un test aplicado al inicio y final de la intervención didáctica; de modo que, la muestra con la que se trabajó fue de 67 estudiantes.

Por otro lado, se concluyó que la incorporación de las actividades lúdicas en las sesiones de aprendizaje aplicados al grupo experimental fue pertinente e influyeron positivamente en el aprendizaje del álgebra en los estudiantes de primer grado de secundaria. Por tal razón, este trabajo contribuye con la investigación aquí planteada porque insiste en la trascendencia del uso de las estrategias metodológicas para la enseñanza-aprendizaje del álgebra, sin embargo, la investigadora hace hincapié en que el maestro de aula debe escoger los juegos según el tema que va a enseñar para motivar a sus alumnos y que estos estén en concordancia con el propósito de aprendizaje, además, recomienda definir previamente las reglas del juego para que no hayan futuras confusiones y/o dificultades.

Un segundo estudio es la tesis realizada por Sedano y Bernardo (2017) titulada “Cálculo de áreas rectangulares en el aprendizaje significativo de productos notables en estudiantes de la Institución Educativa Mixto “Ramón Castilla y Marquesado” Huancavelica” en Perú. Los investigadores tuvieron como objetivo de investigación precisar si surge un aprendizaje significativo en los estudiantes al estudiar el tema algebraico en mención por medio del cálculo de las áreas rectangulares, la cual tuvo una muestra de 42 alumnos de tercer grado de secundaria, divididos en dos grupos homogéneos (experimental y de control) pertenecientes a distintas secciones. Para esta investigación se aplicó el método científico y el diseño utilizado fue el cuasi-experimental.

En cuanto al análisis de la información, se realizó a través de la técnica de observación, la evaluación escrita (diagnóstica y de salida) y el fichaje. Respecto a las conclusiones, ellos determinaron que el empleo de áreas rectangulares como propuesta didáctica para enseñar los productos notables, es una herramienta valiosa puesto que los alumnos del grupo experimental mejoraron sustancialmente y aprendieron de manera significativa en comparación con el grupo de control. La relación de la tesis con el presente trabajo de investigación, es en cuanto al tema de estudio, ya que, en el trabajo en curso, se plantea enseñar el binomio al cuadrado mediante la

representación geométrica que se relaciona con lo que los autores han propuesto, enseñar el tema vinculándolo con las áreas rectangulares y dejar atrás la enseñanza tradicional.

Por último, se ha escogido la tesis realizada por Capcha (2016) para optar el grado de maestro, cuyo título es “Estrategias didácticas en el aprendizaje de los productos notables en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la institución educativa República Federal de Alemania, Lima 2016” implementada en la ciudad de Lima - Perú. En este estudio se planteó diseñar estrategias pedagógicas alternativas respecto al aprendizaje gráfico, algorítmico y práctico del tema expuesto anteriormente, para aplicarlos al grupo experimental, mientras que el grupo de control estudiaba los productos notables a través de la enseñanza tradicional; de hecho, la muestra fue no probabilística estratificada, integrada por un total de 60 educandos.

El paradigma de esta investigación ha sido el positivista, asimismo, se empleó la metodología cuantitativa y el diseño fue el cuasi-experimental. La técnica utilizada para obtener información fue el cuestionario, instrumento que sirvió para confirmar que las estrategias didácticas que involucran material manipulativo contribuyen positivamente en el aprendizaje de los productos notables. Por tanto, este trabajo se relaciona con la investigación planteada debido a que hay una preocupación por obtener mejores resultados en el aprendizaje de la matemática referido al acápite de los productos notables planteándose estrategias que faciliten la adquisición de este conocimiento por medio de la lúdica y el empleo de recursos didácticos como el algeplano.

#### **1.4.3. Antecedentes locales**

Malqui (2015) en su tesis de maestría “El uso del algeplano en el aprendizaje de los polinomios” en Piura - Perú tiene como objetivo diseñar actividades y aplicar estrategias didácticas utilizando como recurso educativo el algeplano para conseguir que el estudiante a través de su manipulación, construya su aprendizaje y logre comprender el tema. Se trata de un proyecto factible, apoyado por una investigación de campo, cuya muestra estuvo constituida por 26 estudiantes y un profesor. Por otra parte, se utilizó el diario de campo y la observación como instrumentos para recopilar la información, desde luego, que el tipo de investigación fue el socio crítico y, por tanto, su enfoque fue el cualitativo. La conclusión a la que llegó el autor fue que la incorporación del algeplano favorece el aprendizaje de los polinomios en los alumnos de segundo grado de educación secundaria, por lo que se animó a recomendar a los docentes que incluyan esta herramienta pedagógica en sus planificaciones de clase. En este sentido, este trabajo aporta considerablemente a la investigación en curso, debido a que reitera la relevancia de introducir recursos didácticos para motivar y consolidar el aprendizaje de los polinomios y sus operaciones básicas promoviendo en el estudiante el inicio en la modelación matemática, por lo que hay una relación directa con el campo temático.

En la misma línea, Tuesta (2015) en su tesis para optar el grado de maestría en Piura - Perú, que lleva por título “Estrategias didácticas para la enseñanza de los productos notables” tuvo como

finalidad diseñar actividades considerando el uso de materiales manipulativos, aparte de ello, aplicar estrategias didácticas según los momentos de aplicación en los procesos de enseñanza-aprendizaje y según el proceso cognitivo atendido. El paradigma de estudio fue el interpretativo, ya que el autor no pretendía generalizar los resultados, sino sacar algunas conclusiones; por lo tanto, la metodología empleada fue la cualitativa y respecto a la técnica utilizada, la encuesta. Por otro lado, entre sus conclusiones se determinó que la innovación en la enseñanza de la matemática trae consigo efectos positivos en el aprendizaje de los alumnos de tercer año de secundaria de una escuela estatal. Este trabajo sirve de referencia para la presente investigación porque se enfoca en el diseño de sesiones con estrategias didácticas para desarrollar de manera óptima el aprendizaje de productos notables, que obviamente involucra el cuadrado de un binomio, que es el tema de estudio. Además, de reconocer la valía de este contenido algebraico en la educación secundaria.



## Capítulo 2: Marco teórico de la investigación

En este segundo capítulo se realizará una revisión teórica de lo que es el aprendizaje y el álgebra, así como también de las competencias que se pretende desarrollar en los alumnos de tercer año de secundaria teniendo como fuente de información el Currículo Nacional; además de las teorías que sustentan la representación de los productos notables en general, para arribar al estudio del binomio al cuadrado específicamente. De acuerdo con Godino *et al.* (2003) el aprendizaje de la matemática es un proceso que va desde el pensamiento concreto hasta los niveles más altos de abstracción, de modo que para aprender matemáticas es necesario comprenderlas a partir de la información ya tenida (experiencia) con la inclusión del nuevo contenido, por lo que se dice que hay más facilidad de adquirir este saber, cuando se construye de manera dinámica y vivencial.

Aunque, es relevante subrayar que cuando se habla de un aprendizaje matemático contextualizado, este tiene que servir de apoyo para que el alumno generalice ese conocimiento, es decir, sea capaz de desarrollar problemas matemáticos según el carácter formal del área, sin desatender que el objetivo es formar un ciudadano que relaciona y usa las matemáticas para situaciones reales, convirtiéndose en un ser pensante y consumidor de su gran bagaje intelectual. Por otra parte, es interesante analizar la importancia que se le da a esta ciencia puesto que a nivel internacional hay una gran preocupación por evitar el fracaso escolar en Matemáticas y de manera más precisa, elevar el rendimiento académico como prueba de que los alumnos están interiorizando el conocimiento matemático a partir de la indagación propia y comunitaria, permitiéndoles activar sus estructuras cognitivas respecto al curso.

En cuanto a la enseñanza, se debe procurar que la adquisición del lenguaje matemático-simbólico esté en concordancia con el ritmo de aprendizaje del estudiante porque ya de por sí la matemática es un tanto complicada y es labor del docente planificar la sesión de clase teniendo en cuenta este aspecto, además, los contenidos curriculares siguen un orden jerárquico y si los profesores avanzan sin que los alumnos entiendan, se generará una aversión y falta de interés por aprender la materia puesto que el estudiante en formación no cuenta con las herramientas suficientes para entender y desarrollar situaciones problemáticas algebraicas con niveles más altos de complejidad.

### 2.1. Aprendizaje

En primer lugar, es importante que la definición de aprendizaje sea clara y precisa, por lo que se considerará las siguientes posturas:

Pérez (2009) afirma que el "Aprendizaje es toda modificación del organismo que origina una nueva pauta de pensamiento y/o conducta. Es decir, se trata de algo nuevo que acontece al organismo y lo cambia, preparándolo para un nuevo tipo de actividades" (p. 73); además, precisa en su definición que el origen de la 'modificación' puede ser de carácter externo o interno; el primer

caso se da cuando hay una intervención por parte de una persona ya sea del profesor o la mamá, mientras que cuando el propio sujeto es quien hace las modificaciones a través de su pensamiento, es de origen interno. De igual modo, Schunk (2012) concibe al aprendizaje como una variación de la conducta humana que perdura en el tiempo a través de la praxis y de modo inferencial, es decir que se adquiere una conducta en base a los resultados que se obtienen de una determinada acción y mediante el contacto con las demás personas. Por lo tanto, para emplear este término es necesario que la persona realice algo distinto a lo habitual en su hacer práctico y, además, que este nuevo proceder permanezca en él, aunque de modo parcial ya que puede perecer con el tiempo, razón por la cual es primordial que el comportamiento adquirido se repita una y otra vez hasta quedar fijado. A continuación, se ha citado a otro autor que define el aprendizaje de la siguiente manera:

El aprendizaje, como un proceso activo, participativo, organizado y de socialización que favorece la apropiación de conocimientos, habilidades, destrezas y la formación en valores, implica tanto un conocimiento profundo de sus características y esencialidades como la implementación de una serie de estrategias y operaciones mentales, cognitivas y metacognitivas, con las cuales se pueda lograr la asimilación del conocimiento, para su posterior utilización y recreación, superando problemas o dificultades incidentes o condicionantes, en el marco de una enseñanza instructiva, educadora y desarrolladora. (Vásquez, 2010, pp. 14-15)

Por lo tanto, podemos concluir que el aprendizaje es la apropiación interiorizada e intelectual de un conocimiento, en el cual se adopta o modifica un comportamiento nuevo a partir de la experiencia, y para que se conserve, es imprescindible que el educando lo construya de manera activa y ardua, permitiéndole actuar en el medio social de manera favorable, enriqueciendo sus capacidades. De hecho, el ser humano está en constante aprendizaje porque está en su naturaleza, desde el momento en que nace e interactúa con su entorno; prueba de ello es cuando el sujeto tiene la capacidad de exteriorizar resultados como, por ejemplo, cuando él es capaz de pilotear cualquier medio de transporte.

### **2.1.1. Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel**

En palabras de Ausubel *et al.* (1983) sustentan que el aprendizaje significativo surge cuando el estudiante es capaz de relacionar la información nueva con los saberes previos existentes en su memoria como fruto de sus vivencias o de ideas que le han sido impartidas anteriormente, proceso que le sirve para construir un nuevo concepto desde el entendimiento por medio de la transferencia de ambas informaciones. Por lo que se debe tener en cuenta, que es requisito fundamental la coherencia del nuevo conocimiento con la estructura cognitiva del alumno para que haya una buena aprehensión, ya que, sin ello, se torna difícil tener como resultado una significatividad en su aprendizaje.

Pero, ¿qué es aprender significativamente? Ausubel denomina aprendizaje significativo a aquella posibilidad de establecer vínculos sustantivos y no arbitrarios entre lo que hay que aprender (nuevo contenido) y lo que ya se sabe, o sea lo que se encuentra en la estructura cognoscitiva de la persona que aprende, es decir, sus conocimientos previos. (Solano, 2009, p. 73)

Así, “por relación sustancial y no arbitraria queremos decir que las ideas se relacionan con algún *aspecto existente específicamente relevante* de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición” (Ausubel *et al.*, 1983, p. 48). La finalidad de este enfoque es evitar un aprendizaje memorístico y mecánico, razón por la cual es importante que el estudiante colabore desde su racionalidad y voluntad para que el contenido a aprender se profundice y se amplíe hacia una fijación más sólida. En este sentido Ausubel *et al.* (1983) afirman que la motivación y afectividad por aprender en el estudiante son vitales, puesto que en él se debe generar un interés por lo que va a estudiar y a la vez, hacer que el alumno valore su estilo de aprendizaje. Entonces, según estos investigadores, la aprehensión de lo novedoso quedará consolidado siempre y cuando haya una disponibilidad del estudiante por adquirir la nueva información en la medida que comprenda lo que percibe, de modo que, en el sistema educativo debe imperar este principio para facilitar el transporte de conocimientos en base a lo que el sujeto ya tiene almacenado en sus esquemas. Por tanto, el aprendizaje significativo básicamente se refiere a que el proceso de construcción de significados es sustancial en el binomio enseñanza-aprendizaje.

Por otra parte, los autores mencionan que el procedimiento mediante el cual se llega a aprender el material es a través del aprendizaje receptivo que no es más que la enseñanza explicativa, en donde el alumno solo tiene que recibir e internalizar la información en su forma final que le brinda el maestro para que lo relacione con los conocimientos anteriores y pueda reproducirlo en una próxima vez. “El aprendizaje significativo por recepción es importante en la educación porque es el mecanismo humano por excelencia que se utiliza para adquirir y almacenar la vasta cantidad de ideas e información representada por cualquier campo del conocimiento” (Ausubel *et al.*, 1983, p. 47). Por lo tanto, emplear esta teoría en clase significa que el docente podrá observar un cambio de actitud por parte de sus alumnos como reflejo de que están disfrutando e interiorizando este tipo de aprendizaje puesto que ellos son los protagonistas de la construcción de su propio conocimiento, por su parte, el profesor queda satisfecho con los resultados obtenidos al proporcionar material potencialmente significativo.

### **2.1.2. Aprendizaje del álgebra**

El aprendizaje del álgebra hace pensar que es una adquisición de conocimientos matemáticos con carácter abstracto, en el cual, el alumno estudia una matemática generalizada e incluso tiene que modificar parte de sus conocimientos ya establecidos en donde predomina el pensamiento

aritmético, sin embargo, eso no significa que sea algo en contra para el aprendizaje del álgebra puesto que esos conocimientos sirven para su iniciación en el estudio de la teoría de ecuaciones. Según la teoría de Piaget, la presencia de los referentes concretos pueden desaparecer cuando los estudiantes ingresen exclusivamente al periodo formal (Palarea, 1998); además, la autora a quien se está citando considera que el álgebra se le puede explicar al escolar (indistintamente de su edad) desde la siguiente concepción: “es un modo de pensar, sirve como método de aprehender y de explicar interrelaciones, permite una manera de llegar a la generalidad por la vía de lo particular y descubrir los "modelos" que se presentan en lo cotidiano” (p. 6).

Para precisar un poco más sobre lo que involucra el aprendizaje del álgebra en la formación inicial de esta rama matemática, se hará referencia a los autores Kieran y Filloy (1989) quienes en su estudio “El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica” sostienen que:

Los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. Aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal resulta ser difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra. (pp. 229-230)

En conclusión, aprender álgebra implica un proceso paulatino en el educando, ya que no le resultará de fácil adquisición pese a estar familiarizado con la aritmética, rama matemática totalmente distinta al descrito en este subapartado, desde el lenguaje y uso de símbolos (como precisan y analizan los autores Kieran y Filloy), maduración del intelecto, conocimientos previamente establecidos e incluso, se requiere que el estudiante esté predispuesto a aprender esta disciplina, aspectos que involucran un periodo de tiempo para llegar a dominar este saber. Cabe mencionar que en el sistema peruano se fomenta el aprendizaje del álgebra desde el nivel primario que se potencia en el nivel secundario definitivamente, respecto a este punto se ha extendido el comentario en el penúltimo acápite del presente capítulo.

## **2.2. Álgebra**

El origen del término *álgebra* procede de *ilm al-jabr w'al muqabala*, el cual era el título de un libro cuyo autor era árabe, por lo que traducido al castellano significa la ciencia de restauración y reducción; en otras palabras, es trasponer y combinar términos semejantes en una ecuación, además, el álgebra como parte de las matemáticas utiliza símbolos o letras para representar de forma arbitraria los números (Swokowski y Cole, 2011). A decir verdad, el álgebra como disciplina científica siempre estuvo relacionada con la aritmética, pero de manera generalizada o acabada,

puesto que este conocimiento no podía dar solución a todos los problemas matemáticos, es ahí donde la aritmética terminaba y empezaba el álgebra a tomar protagonismo “para la resolución de ecuaciones y el estudio de las operaciones y sus propiedades” (García, 2015, p. 9); respecto a este punto, Palarea (1998) menciona que las relaciones que se establecen entre las propiedades de las operaciones son de gran valía en álgebra porque facilita al educando efectuar transformaciones algebraicas de modo correcto.

Continuando con la definición del álgebra, en el siglo XVI el matemático Euler (como se citó en Katz, 2007) afirmaba que era “la ciencia que enseña a determinar las cantidades desconocidas a través de lo que se sabe” (p. 41). Según Baldor (2008) “El álgebra es la rama de las matemáticas que estudia las cantidades del modo más general posible” (p. 5). Además, hace hincapié que cuando se refiere a cantidad en el álgebra, este es más complejo que cuando se aborda en aritmética, ya que, para lograr la generalización se requiere el uso de letras para que estas puedan representar diversidad de valores, no obstante, el autor aclara que cuando se trata de un problema matemático en específico, la letra solo puede representar un valor. García *et al.* (2012) a manera de síntesis en base a las definiciones y enfoques estudiados por otros investigadores matemáticos, en la publicación de su artículo explican que “el álgebra es una generalización de la aritmética, un método para la resolución de problemas, una herramienta para el estudio de las funciones y es usada para el estudio de estructuras matemáticas” (p. 146). Finalmente, se presenta la definición elaborada por Lane y Birkhoff (1999, como se citó en García, 2015):

El álgebra empieza como el arte de manipular sumas, productos, y potencias de números; las reglas para estas manipulaciones son válidas para todos los números, así que las manipulaciones pueden llevarse a cabo con letras que representan a los números. (p. 15)

Como se puede observar, a lo largo del tiempo hasta la actualidad, el álgebra ha tenido distintas concepciones desde aritmética generalizada (Mason, 1996; Kieran y Filloy, 1989; Bell, 1996 y Hewitt, 1998), método para resolver un problema (Chalouh y Herscovics, 1984; Kieran, 1984; Kieran y Filloy, 1989; Langrall y Swafford, 1997; Filloy *et al.* 2008; García, 2015 y Bell, 1996) hasta disciplina especializada en el estudio de propiedades y operaciones de estructuras abstractas (NCTM, 2000; Lane y Birkhoff, 1999; García, 2015 y Sharma, 1998); de manera que muchos autores están de acuerdo con las caracterizaciones que se le atribuyen al álgebra, tales como Kaput (1995), Socas *et al.* (1996), Palarea (1998), Usiskin (1998) y García *et al.* (2012). En suma, en esta investigación se valora al álgebra como parte de la matemática cuya apropiación permite la adquisición de habilidades relacionadas al pensamiento algebraico, por lo que admite un estudio formal exigiendo niveles altos de abstracción, en el cual el escolar analiza la información brindada para establecer relaciones algebraicas y así, poder dar solución a un problema, admitiendo las diversas perspectivas que se le conceden a esta ciencia.

### 2.2.1. Importancia del álgebra

Los maestros del área de Matemática siempre tienen el reto de enseñar la importancia de la materia, mostrándoles ejemplos de la necesidad de su estudio en la vida cotidiana, aspecto que es más notorio para ellos ya que incluso para realizar una compra se requiere de nociones matemáticas. Sin embargo, se torna más difícil si se quiere hacer lo mismo con el álgebra ya que su utilidad no es tan visible para los estudiantes. Por ende, el docente tiene que darse tiempo para pensar bien los ejemplos y problemas que desarrollará en clase, con el fin de que estos sean más cercanos a los alumnos y así lograr su interés para obtener mejores resultados en su aprendizaje. Desde el punto de vista de Socas *et al.* (1996, p. 9):

La enseñanza-aprendizaje del álgebra es un núcleo esencial en la comunicación y expresión de las matemáticas y debe ser introducida como una parte útil, apetecible y bella que facilita los procedimientos empíricos inductivos frente al tradicional planteamiento formal y deductivo.

En este sentido, MacGregor (2004, p. 318) afirma que para la mayoría de los que conforman la congregación de matemáticos reconoce que el álgebra es importante, debido a las razones siguientes:

- ✓ Es una parte necesaria del conocimiento general de miembros de una sociedad democrática y educada.
- ✓ Es un prerrequisito para futuros estudios de matemáticas, ciertos cursos de una educación superior y muchos campos de empleo.
- ✓ Es un componente crucial de la alfabetización matemática, en la cual se basa un futuro tecnológico y el progreso económico de la nación.
- ✓ Es un camino eficiente para resolver ciertos tipos de problemas.
- ✓ Promueve la actividad intelectual de generalización, pensamiento organizado y razonamiento deductivo.

Además, la autora menciona que los saberes básicos del álgebra permiten a los educandos adquirir conocimientos para muchos ámbitos de su vida diaria, entre ellos, tener más seguridad para potenciar sus destrezas matemáticas e interpretar información expresada en notación algebraica, como también, identificar estructuras y patrones en ejercicios matemáticos, de esta manera, ellos comprenderán que esta disciplina de la matemática se usa para expresar tales generalidades. Por otro lado, resulta fundamental tener conocimientos algebraicos para analizar y hacer juicios sobre factores económicos sean a nivel personal o social (planes de política o de gobierno), entender situaciones ambientales, incluso realizar experimentos matemáticos de manera correcta (MacGregor, 2004). Como se ha señalado, la importancia del álgebra reside en su utilidad y las formas que la misma ofrece para hallar la solución a cierto problema, además de favorecer el

pensamiento lógico y simbólico, cuyo impacto es el incremento en la complejidad y el tipo de ecuación o problema que se quiera resolver. Para finalizar, EdSource (2009) comenta lo siguiente:

Esta habilidad de entender conceptos complejos, cambiantes y abstractos estimula al cerebro, ayudando a los estudiantes a pensar de formas nuevas. El álgebra también les ayuda a organizar su forma de pensar, logrando que puedan preparar respuestas razonables cuando se enfrentan a situaciones complicadas o dinámicas. (p. 1)

### **2.2.2. Desarrollo del pensamiento algebraico**

El desarrollo del pensamiento algebraico implica que el estudiante en formación realice una transición en su estructura cognitiva entre el pensamiento no formal y el formal, para que sea capaz de enfrentar problemas con un enfoque más elaborado dentro del proceso de abstracción de segundo orden, que lo aleja radicalmente del aprendizaje de la aritmética que hasta ese momento ha ido adquiriendo y que de cierta manera ya está familiarizado; como es notorio, esto supone una dificultad para el alumno que es incipiente en el tema. No obstante, la adquisición y dominio de este saber lo ayudará gratamente a lo largo de su aprendizaje académico, por lo que Serres (2011) da su concepción sobre el punto en cuestión de la siguiente manera:

El objetivo del álgebra escolar es desarrollar el razonamiento o pensamiento algebraico. El razonamiento algebraico o pensamiento algebraico consiste en un proceso de generalización para formular expresiones algebraicas o patrones, ecuaciones y funciones, el cual utiliza el lenguaje algebraico y su simbología en busca de precisión; para luego resolver problemas y diseñar modelos matemáticos, tanto dentro de la propia matemática como fuera de ella en otras áreas del conocimiento y en situaciones reales de la vida cotidiana. (p. 126)

Por lo tanto, podemos interpretar que el desarrollo del pensamiento algebraico sirve para desarrollar problemas matemáticos complejos, y a medida que el estudiante incrementa su tiempo de estudio en la resolución de los mismos será mucho mejor para él, ya que tendrá que relacionar todos los conceptos básicos de la ciencia de la matemática con el lenguaje de expresiones complejas y la aplicación de teoremas, proceso que evidentemente es trabajoso pero que es ahí donde tendrá que fusionar todo lo que tiene en su estructura cognitiva respecto a las nociones matemáticas de modo específico. Desde otra postura, se tiene a Love (1986, como se citó en Kieran y Filloy, 1989) quien nos da una idea de lo que significa realmente el estudio del álgebra.

Hoy en día el álgebra no es meramente “dar significado a los símbolos” sino otro nivel más allá de eso; que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son especialmente algebraicos –por ejemplo, manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, *es lo que significa pensar algebraicamente*. (p. 238)

En conclusión, cuando el estudiante ha desarrollado el razonamiento algebraico es capaz de representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en diversos problemas matemáticos; aspectos centrales en la disciplina de las matemáticas, también conocida como ciencia de los patrones y el orden. Además, la apropiación de este tipo de razonamiento permite visualizar el progreso del alumno en el uso del lenguaje y el simbolismo para sustentar su pensamiento y procesamiento algebraico, cuya formalización se manifiesta principalmente en el manejo de variables y/o planteo de ecuaciones y funciones (Socas *et al.*, 1996). Por tanto, de las líneas anteriores se descifra que es imprescindible la práctica continua de situaciones matemáticas para que el educando estimule su razonamiento algebraico y sea efectiva la transición del pensamiento aritmético al abstracto.

### **2.2.3. Dificultades de la enseñanza y aprendizaje del álgebra**

García (2013) afirma que “la matemática dota a los humanos de un conjunto de instrumentos que potencian y enriquecen sus estructuras mentales, y los posibilitan para explorar y actuar en la realidad” (p. 27). Pero su esencia abstracta hace que el proceso de internalización del contenido sea complicado para la mayoría de los escolares y como consecuencia de su carácter formal, hay deserción a nivel escolar en todos los niveles de la educación básica, además, de mostrar resultados desfavorables en los exámenes escolares, lo que es preocupante, puesto que la matemática es una herramienta de gran trascendencia para el conocimiento científico (Ferrero, 2004). En todo caso, lo que debe hacer el profesor es un análisis del grupo que tiene a cargo para detectar las dificultades de los alumnos y establecer vías didácticas para superarlas.

Por otro lado, Ardila (1979) expone que el aprendizaje no se debe concebir solo como un proceso intelectual sino también emocional dado que la persona tiene sus propios objetivos durante el proceso de construcción de sus conocimientos, por lo que deben ser claros y concisos para que los pueda cumplir satisfactoriamente. Asimismo, el autor recalca el papel del maestro en el proceso del binomio enseñanza-aprendizaje puesto que es el principal responsable de encauzar el comportamiento y el aprendizaje del educando, y a su vez de hacer atractivo el contenido que el alumnado va a aprender con la metodología que él emplee en su experticia profesional. Dicho de otra manera, el docente cumple un rol muy valioso en el sistema educativo porque aparte de ser un guía, actúa como condicionador emocional ya que motiva a sus estudiantes y los conduce hacia la dirección deseada.

Retomando el tema acerca de los problemas específicos del aprendizaje del álgebra, Palarea (1998) hace mención que en el proceso de apropiación de los conceptos algebraicos, estos generan en el escolar múltiples dificultades de diversa índole que están relacionados con la complejidad de los objetos del álgebra, el proceso del pensamiento debido a la naturaleza del mismo, así como también, con la forma en la que reciben la información, es decir la metodología de parte del maestro

para enseñar el tema y en cuanto a los estudiantes, la disposición que ellos tengan por aprender, aspectos sumativos que se entrelazan “y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos, mediante errores” (p. 74).

Por lo tanto, se infiere que uno de los problemas a los que se enfrenta el docente es que la comprensión del tema se vaya adquiriendo de manera correcta para evitar que el alumno no tenga tantas dificultades en esa colisión de ideas, entre los conocimientos nuevos y los ya existentes que están en su bagaje intelectual, razón fundamental para que el profesor haga un seguimiento oportuno del proceso de aprendizaje de sus estudiantes en función a la asimilación completa de la información algebraica con la finalidad de que ellos puedan efectuar problemas matemáticos formales sin inconvenientes, de lo contrario, si el docente identifica que el saber interiorizado del educando está incompleto se tornaría un obstáculo.

En palabras de Palarea (1998) un obstáculo es un saber que el alumno ha plasmado y ha registrado en su estructura cognitiva de manera positiva, por lo que no se trataría de una falta de conocimiento, sino de un saber que le sirve para una determinada situación, pero no precisamente para otra, bajo este contexto, ese conocimiento “genera respuestas inadecuadas, incluso, incorrectas; el dominio resulta falso. Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté, o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez” (p. 75); razón por la cual precisa de una inmediata detención para expulsarlo del conocimiento que recién le es proporcionado.

Entonces ¿qué es un error? es la concepción que tiene un sujeto sobre un tema en específico, y piensa que aquella noción es correcta, pero en realidad se trata de un concepto inadecuado, o más bien, equivocado que se da durante el acto educativo, que no precisamente significa que sea producto de la falta de conocimiento, sino más bien de la imperfección en la estructura cognitiva de la persona. A propósito, Rico (1998) concibe al error como un saber que no está completo en el bagaje intelectual de la persona, por lo cual es catalogado como un conocimiento deficiente que se encuentra presente en el proceso de aprendizaje y es objeto de estudio para la educación matemática. “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Godino *et al.*, 2003, p. 73).

Ahora bien, después de haber discutido de modo breve lo que es un obstáculo, el error y la dificultad como aspectos propios del aprendizaje, nos centraremos en esta última que es de interés para la presente investigación, según Kieran y Filloy (1989) las dificultades más recurrentes en los estudiantes de secundaria, son las que se muestran a continuación:

- ✓ **Forma de ver el signo igual:** Los estudiantes consideran que el signo igual tiene un carácter de unidireccionalidad, y no lo ven como un símbolo de equivalencia entre los lados izquierdo

y derecho de una ecuación. El que los estudiantes conciban el signo igual como un mero separador entre la secuencia de operaciones y el resultado los lleva a transgredir las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad.

- ✓ **Dificultades con las convenciones de notación:** la concatenación en álgebra significa multiplicar, por lo que  $4b$  es  $4xb$ ; de ahí que se pueda incurrir en otro error que es interpretar de manera automática que la letra “ $b$ ” es la inicial de una palabra. Otra dificultad, es que los niños no utilizan el paréntesis para seguir el orden correcto de las operaciones en su aritmética escolar elemental, por lo que no les es importante su uso y tienden a aplicar mal la propiedad distributiva.
- ✓ **Métodos de simbolizar:** Para la solución de un determinado problema en aritmética los estudiantes usan diversos tipos de métodos informales para desarrollarlo, incluso hasta por intuición, por lo cual ni siquiera tienen una preocupación por demostrar cómo llegaron a esa respuesta. En cambio, el álgebra le exige al niño, formalizar el procedimiento que ha realizado para llegar al resultado.
- ✓ **Variables:** Como los estudiantes no están familiarizados con la utilización de letras como variables, suelen etiquetarlas, por ejemplo: “ $m$ ” de *metros* y se quedan fijados a esa idea, de manera que Kuchemann (1981, como se citó en Kieran y Filloy, 1989) afirma lo siguiente: “la mayoría de los estudiantes trataban la letra en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como número generalizado o como variables” (p. 231).
- ✓ **Expresiones y ecuaciones:** Los alumnos tienen la tendencia de igualar a *algo* cualquier expresión algebraica porque son incapaces de asimilar un “ $7 + n$ ” como resultado de una solución o simplemente como expresión de un ejercicio; para los novicios en álgebra, aquella expresión estaría incompleta o carecería del signo igual. Por otra parte, el hecho de que, en la escuela elemental, los niños estén familiarizados con la solución de ecuaciones del tipo sumando faltante, ellos no ven la necesidad de expresarlo mediante una ecuación, es más, el resultado aparece a la derecha del signo igual.

Cabe recalcar que para determinar estas dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, los autores Kieran y Filloy se han valido de sus propias investigaciones como también la de otros estudiosos del tema; tales como Mevarech y Yitschak (1983), Chalouh y Herscovics (1984), Booth (1983) y Nesher (1980), entre otros. Por añadidura, según los autores Bustos *et al.* (2009) mencionan que otra dificultad estaría relacionada con la generalización, en el sentido de que cuando se trabaja un problema, es complicado guardar en la memoria las distintas propiedades que configuran su estructura; por lo que es frecuente que los estudiantes aprendan solo unas pocas propiedades para usarlas indistintamente, ya que, si estas cumplen con el problema que están desarrollando, dan por hecho que esa es la respuesta.

Por lo tanto, conocer las dificultades en las que incurren los estudiantes es importante porque el docente con esa información tratará de adecuar y facilitar mejor los contenidos matemáticos algebraicos, puesto que resulta inevitable que el educando afronte esta problemática porque es parte de su proceso de aprendizaje. Según Brunet (1998) las dificultades del aprendizaje son perturbaciones inherentes a la persona, evidenciándose en la adquisición y en la utilización del razonamiento, el proceso de escucha, la escritura, la lectura o en la interacción social de modo persistente como consecuencia de una alteración del sistema nervioso central. Asimismo, hace referencia a otros aspectos que causan una dificultad de aprendizaje, pero no de manera sustancial, como por ejemplo el retraso mental o las diferencias culturales, etc.

### **2.3. Visualización en matemática**

Con el pasar del tiempo, cada vez se ha hecho más importante el estudio de ciertos aspectos de la matemática a través de las distintas investigaciones que se vienen realizando hasta la actualidad, uno de ellos es la visualización que permite construir el pensamiento matemático a partir de la captación de las imágenes en su modo real para luego formarlas mentalmente (Blanco, 2009), lo cual constituye una capacidad que se va desarrollando desde siempre ya que el sujeto desde el momento que tiene contacto con la naturaleza crea representaciones en su sistema intelectual. Ahora, en cuanto a la vinculación con la ciencia de la matemática, Gutiérrez (1996) define “la visualización es una actividad del razonamiento o proceso cognitivo basada en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, utilizados para resolver problemas o probar propiedades” (p. 48). Por otro lado, Godino *et al.* (2012) concibe a la visualización como un doble proceso, es decir de modo ascendente y el otro descendente, respecto al primer proceso de visualización que va de lo material a lo inmaterial o ideal, y el segundo, que tiene carácter inverso, va de lo inmaterial (mente) a lo material.

Entonces, si el alumno aprende a utilizar la visualización de manera creativa, apoyándose en esta como una herramienta para descubrir y entender las matemáticas, el proceso de formar imágenes mentales, ya sea con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, será factible para mejorar su comprensión y usar tales imágenes de modo eficaz (Arcavi, 2003). Por lo tanto, se puede señalar que la visualización fomenta el interés por prestar atención a la información que dan las representaciones gráficas para poner de manifiesto o establecer relaciones abstractas de la noción matemática que interesa y estudia el sujeto, cuyo objetivo es ser experto en el manejo de esta habilidad para la solución de problemas (Moreno, 1999). Por otro lado, si se está frente a un problema con carácter algebraico, y en algún momento se pierde la ilación del desarrollo o se está en una encrucijada del cual aparentemente no se puede salir, la visualización se muestra como una vía que da luces para salir del problema y continuar con su desarrollo.

### **2.3.1. Importancia de la visualización en matemática**

La percepción humana es prioritariamente visual, lo cual indica que en asuntos matemáticos sea natural recurrir a la visualización como un apoyo para desarrollar ciertos problemas matemáticos. Sin embargo, no está exclusivamente relacionada con propósitos ilustrativos, ya que se le atribuye reconocimiento por ser elemento clave dentro de los procesos conceptuales del razonamiento, la resolución de problemas y la demostración; aspectos totalmente alejados de lo perceptivo (Arcavi, 2003). En esta línea, Castro y Castro (1997) dan a conocer que cuando el alumno ya tiene poseída la noción de pensamiento visual indica que este tiene la capacidad para formar imágenes mentales caracterizadas que le sirven de soporte para la evocación de un objeto sin que esté presente de manera física. Analizando la información que presentan los autores, la visualización constituye un aspecto importante para el pensamiento matemático, razón fundamental para que el profesor de matemáticas haga hincapié en el uso de representaciones gráficas con el fin de potenciar la visualización en los alumnos y mejorar la comprensión de un tema, según Arcavi (2003) «La visualización ofrece un método de ver lo invisible» (p. 216) en donde ese “ver” puede ser mental o estar en relación con una representación física.

En el mismo sentido, Cantoral y Montiel (2003) sostienen que “la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende” (p. 6); por lo cual, la capacidad visual no puede ser entendida como un acto reducido al mero hecho de solo ver, sino también a la de interpretación, acción y relación de lo que una imagen representa. Por tanto, el campo de la visualización en matemáticas está en relación con aspectos algebraicos, numéricos, gráficos, verbales e incluso gestuales; mostrando las implicancias y beneficios para el enriquecimiento de las estructuras cognitivas puesto que permite establecer relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático. Asimismo, los autores Gatica y Ares (2012) afirman que la visualización no es más que un medio para que el estudiante obtenga mejores resultados al tratar de entender un problema e incluso un concepto por medio de la imagen visual.

Por tanto, fomentar el razonamiento visual en el estudiante es importante porque le facilita resolver problemas matemáticos cuando es capaz de establecer “relaciones adecuadas entre representaciones visuales mentales y representaciones externas (gráficas o verbales). Para ello, es necesario que intervengan los tres elementos principales que integran la visualización: procesos de visualización, imágenes mentales y habilidades de visualización” (Gutiérrez y Jaime, 2016, p. 220). A modo de síntesis y en base a la información presentada por los autores, los procesos de visualización son responsables de regular y gestionar el vínculo entre la información externa (esquemas, figuras, texto escrito, información oral, etc.) que percibe el educando y la información gráfica interna que genera como consecuencia de su actividad mental (imagen mental), pero para desarrollar y dar

solución a un problema tienen que ponerse en marcha las habilidades de visualización, que son las encargadas de la efectividad de tales acciones mentales. Del Grande (1990) sostiene que tales habilidades que se pueden fomentar en Geometría son: la identificación visual, el reconocimiento de posiciones en el espacio, el reconocimiento de relaciones espaciales y, por último, la discriminación visual.

Para enfatizar sobre el presente acápite, la visualización en el área de Matemática es de interés y gran valía porque permite al estudiante captar ideas a través de la contemplación de una representación gráfica o del espacio en el que se encuentra, logrando establecer relaciones entre un problema de una situación real al matemático, cuyo proceso de establecer conexiones de por sí es importante, ya que cuando el alumno se enfrenta a una situación en la que tenga que pasar de una representación del registro gráfico al algebraico, le será cómodo e incluso reflejará que ha entendido el tema. En palabras de Duval (1998b) cuando el alumno es capaz de manejar adecuadamente al menos dos registros de representación (numérico, algebraico, gráfico o simbólico), es porque ha comprendido en su totalidad un contenido conceptual, que se pondrá en evidencia cuando él realice esta conversión de modo rápido y espontáneo, ejercitando su actividad cognitiva y consolidando conceptos matemáticos; por lo que precisa que “para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos” (Duval, 2006, p. 159).

### **2.3.2. Visualización de los productos notables desde la percepción geométrica**

En la actualidad aún existe la necesidad de ver la forma de impartir el conocimiento algebraico de manera adecuada puesto que siguen vigentes múltiples dificultades en la comprensión de los productos notables. Es por ello, que la vinculación de la geometría con el álgebra es un gran plus a utilizar como estrategia didáctica en la explicación del tema, es evidente entonces que la visualización en la enseñanza de este tema algebraico está implícita cuando se desarrolla la representación geométrica. A juicio de Duval (1998a), en la enseñanza–aprendizaje de la geometría hay tres actividades cognitivas que el sujeto realiza; la construcción, el razonamiento y la visualización. Siendo esta última de nuestro interés porque cuando se aborda la representación geométrica en los productos notables, el docente tiene que fomentar el razonamiento inductivo del alumno mediante el proceso de visualización, que muchas veces no es fácil pero tampoco imposible.

“Evidentemente, la visualización matemática está ligada a los distintos sistemas de representación (numérico, algebraico, gráfico, simbólico) usados y a la lectura e interrelación que se hace entre los mismos” (Aznar *et al.*, 2014, p. 4). Según Barreto (2009), el proceso cognitivo de visualización está estrechamente relacionado con la forma geométrica de la figura, en otras palabras, su configuración y el razonamiento se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente, tomando en consideración la noción de área con el cuadrado de un

binomio suma y diferencia. En cambio, la idea de volumen se asocia con el cubo de un binomio suma y diferencia lo que involucra que este producto notable esté vinculado con figuras geométricas sólidas en el espacio tridimensional (Barreto, 2014).

A modo de síntesis, en referencia al autor citado recientemente, la coordinación de los procesos cognitivos: visualización y razonamiento, le permitirá al educando construir desde una perspectiva geométrica las fórmulas usadas en algunos productos notables, reflejando así, que el tratamiento didáctico que el profesor emplee valiéndose de las distintas representaciones facilitarán el aprendizaje del tema algebraico que de por sí tiene una connotación de dificultad en los alumnos. Sin embargo, de acuerdo con Hitt (1998) es necesario precisar que no basta recurrir a la representación geométrica para resolver un problema, de manera textual, el autor expresa *“La visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro”* (p. 23).

### **2.3.3. La teoría de los registros de representación semiótica**

Duval (como se citó en Oviedo *et al.*, 2012) define que un sistema semiótico es un registro de representación, siempre y cuando se cumplan tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis: La formación que es la presencia de una representación mental identificable y las otras dos hacen referencia a una transformación de la representación en otras representaciones. Es decir, que en la segunda actividad implica un tratamiento a la representación (transformación interna) en el mismo registro y en la última, la conversión, que la representación sufra una transformación que dé como resultado otra representación en un registro diferente al dado de manera inicial. El tratamiento hace factible la elección del “mejor” cambio de registro para desarrollar un determinado problema por lo que no es considerada como una actividad que demande un gran proceso cognitivo como sí ocurre en la conversión, evidentemente ambos procesos conforman un todo cuando se da solución a un problema matemático, pero son fuentes independientes de problemas en el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2006).

Entonces, la noción de los registros semióticos en el área de Matemática es fundamental, porque permite al estudiante establecer relaciones y realizar traducciones de los distintos registros que se emplean respecto a un tema para que haya un mejor entendimiento, ya que la matemática al ser una ciencia abstracta requiere ser representada mediante signos. Por tanto, hay una comprensión matemática cuando el alumno establece una coordinación interna entre los distintos registros de representación semiótica que se puedan utilizar, es decir es capaz de transferir lo que ha aprendido a nuevas y diferentes situaciones, proceso que se da en la conversión de representación (Duval, 2006). Asimismo, el autor citado menciona que *“la comprensión no significa dar un salto desde el contenido de una representación hasta el concepto puramente matemático representado sino en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto”* (p. 158). Caso

contrario, lo que se estaría propiciando es un obstáculo cognitivo, por tanto, es fundamental que la complementariedad y manipulación simultánea de varias representaciones se efectúen de modo coherente para la consolidación de un determinado concepto en la estructura cognitiva del estudiante (Hitt, 1998).

#### **2.4. Competencias y capacidades en el área de Matemática según el Currículo Nacional de la Educación Básica – 2016**

El Currículo Nacional de la Educación Básica es el documento oficial en el cual se decreta los aprendizajes que deben alcanzar los educandos durante su formación escolar, en correspondencia con los objetivos de la educación peruana; para ello, se antepone el desarrollo de competencias que les permitan afrontar los requerimientos del vivir en sociedad hoy en día, apuntando siempre hacia una formación integral del estudiante. Asimismo, este marco legal al dar los lineamientos generales sobre la educación, establece en sus escritos que cada área debe tener su enfoque para la consecución de sus competencias (Minedu, 2016a). Como es sabido, la presente investigación está enmarcada en el área de matemática, por lo tanto, se tratará específicamente sobre ese punto más adelante, pero antes de continuar con las competencias y capacidades matemáticas, se hará referencia en primer lugar al enfoque del área en mención.

El enfoque de resolución de problemas del área de matemática es el que orienta la actividad matemática en las instituciones educativas; puesto que con él se asegurará el logro de las competencias. Para ello, el Minedu (2008) estableció que “El proceso de Resolución de problemas implica que el estudiante manipule los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione y mejore su proceso de pensamiento al aplicar y adaptar diversas estrategias matemáticas en diferentes contextos” (p. 187). Por tanto, en la Educación Básica Regular se pretende que el alumno egrese con un pensamiento matemático cuya fuente transversal es la resolución de problemas, con la finalidad de que el estudiante desarrolle habilidades que le permitan desenvolverse en diferentes situaciones, matemáticas o del entorno, en base a las nociones adquiridas en su aprendizaje formal.

Según Duval (2006) “resolver problemas 'de la vida real' demanda que los estudiantes utilicen su experiencia física o diaria y sus representaciones mentales” (p. 163). Cabe recalcar, que para el enfoque del área de Matemática lo más importante es que el adolescente encuentre el método correcto para llegar a la solución de un problema y no precisamente obtener la respuesta, ya que esto le exige enfrentar un reto para el cual no conoce de antemano la estrategia a ejecutar, pero que el docente ha previsto que lo podrá desarrollar, seguramente con cierto nivel de dificultad y quizás utilice nuevos procedimientos para seleccionar aquella que le ayude a desarrollar el desafío matemático planteado desde un proceso de indagación personal y reflexión, incluso social (Minedu, 2016b).

### 2.4.1. Descripción de las competencias matemáticas

La enseñanza de la matemática a lo largo del tiempo ha sufrido modificaciones con el fin de que el aprendizaje del educando se realice de la mejor manera posible, tal es así que en la actualidad, la educación se centra en él ya que lo considera el protagonista del acto educativo, porque es él quien construye su aprendizaje, sin embargo, esto demanda que la preparación formativa del estudiante cambie de panorama y se preocupe ahora por cumplir un perfil acorde con la actualidad, en donde él sea alguien *competente*, dejando atrás la concepción de que a la persona que dominaba las cuatro operaciones básicas y la regla de tres simple le bastaba para desenvolverse en la sociedad. En el documento oficial del Currículo Nacional una de las definiciones clave para concretar la práctica educativa es el ser competente y lo conceptualiza de la siguiente manera: “La *competencia* se define como la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético” (Minedu, 2016a, p. 21).

Así pues, en el área de Matemática para considerarse competente es necesario aplicar los conocimientos matemáticos a la vida diaria, dicho de otra manera, el estudiante tiene que tener la capacidad de encontrar la funcionalidad de su aprendizaje para comprender el mundo que lo rodea; evidentemente esto le hace poner en juego su juicio crítico en la selección de estrategias para dar solución a un determinado problema, sin embargo, esta manifestación de su aprehensión matemática tiene que manifestarlo en el lenguaje propio del área curricular. En palabras del profesor francés Jonnaert (2002) plasmadas en su libro “*Compétences et socioconstructivisme. Un cadre théorique*” manifiesta lo siguiente:

Las competencias no pueden definirse sino en función de situaciones, están tan situadas como los conocimientos en un contexto social y físico. El concepto de situación se vuelve el elemento central del aprendizaje: es en la situación que el alumno construye, modifica o refuta los conocimientos contextualizados y desarrolla competencias a la vez situadas. Se trata de un proceso determinante para el aprendizaje escolar, (...). Ya no basta con enseñar contenidos disciplinares descontextualizados (área del trapecio, suma de fracciones, procedimiento de cálculo mental, reglas de sintaxis, modo de conjugación, etc.) sino de definir situaciones en las cuales los alumnos pueden construir, modificar o refutar conocimientos y competencias a propósito de contenidos disciplinares. El contenido disciplinar no es un fin en sí mismo, es un medio al servicio del abordaje de las situaciones a la vez que de otros recursos. (pp. 76-77)

De estas líneas se concluye que el nuevo enfoque de la enseñanza requiere el despojo de los instrumentos tradicionales usados en el sistema educativo para empezar a elaborar contenidos enmarcados en base a contextos reales y vivenciales del estudiante, lo que se traduce en la llamada

situación significativa en la programación de las sesiones de clase hoy puestas en práctica por los docentes del Perú, cuyo objetivo esencial es el desarrollo eficaz de las competencias en sus alumnos. En suma, ser competente supone poner de manifiesto las habilidades (cognitivas, emocionales, sociales, etc.) de la persona para evaluar y analizar de modo perspicaz las alternativas con las que se enfrentará a una situación en relación con los conocimientos y experiencias propias adquiridas a lo largo de su formación. En cuanto a competencia matemática, el autor Niss (2003) la define como “habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra matemáticos” (p. 218).

Para finalizar este apartado es oportuno e imprescindible mencionar las cuatro competencias que se abordan en el área de Matemática para lograr el perfil de egreso del estudiante en la educación básica regular según los lineamientos que brinda el Currículo Nacional peruano, estas son (Minedu, 2016b, p. 235):

- ✓ Resuelve problemas de cantidad.
- ✓ Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambios.
- ✓ Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.
- ✓ Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

#### **2.4.2. Descripción de las capacidades matemáticas**

En el marco curricular peruano, se establece que para que haya un desarrollo efectivo de las competencias en el perfil del educando es necesario que este se desenvuelva en un ambiente (aula de clase) motivador y a la vez desafiante para que potencie sus capacidades en un continuo y dinámico aprendizaje, en beneficio propio y de los demás, para que colabore con sus compañeros y trabaje en equipo. Por lo expuesto, es pertinente definir las capacidades, para ello se citará a Rubinstein (1986) quien, desde el plano de las capacidades intelectuales, las define como “una formación compleja que condiciona la idoneidad del hombre para realizar un determinado tipo de actividad profesional, socialmente útil” (p. 393). En este sentido, lo que el autor da a entender es que las capacidades están relacionadas con la personalidad y con los saberes del sujeto, que sustentan y al mismo tiempo condicionan el éxito de su actuación dentro de la comunidad.

Ahora, conforme lo expuesto por el Minedu (2016a) “Las capacidades son recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. Estas capacidades suponen operaciones menores implicadas en las competencias, que son operaciones más complejas” (p. 21). Abundando en la opinión, es importante tener en cuenta la relación competencias-capacidades porque no se puede concebir que un estudiante sea “competente” cuando no ha combinado sus capacidades en conjunto. Por tanto, las competencias toman fuerza y se fundan desde la actualización y contextualización de las capacidades, en otras palabras, la realización de estas en

tanto esencia, potencian y hacen efectiva la realización de las competencias en el ser humano (Suárez *et al.*, 2007).

### **2.4.3. Competencia y capacidades relacionadas al álgebra**

En el Currículo Nacional de la Educación Básica, encontramos las competencias y capacidades a desarrollar en el área curricular de Matemática, sin embargo, por interés de estudio solo se trabajará con las que están directamente relacionadas con el aprendizaje del álgebra, Minedu (2016a, p. 76):

**2.4.3.1. Competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.** Esta competencia se refiere al hecho que el estudiante pueda caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto a otra, mediante reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. De esta manera, el alumno razona de modo inductivo y deductivo, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos.

Esta competencia permite por parte de los estudiantes, que combinen las siguientes capacidades:

- ✓ **Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas:** Significa que el estudiante transforme los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica (modelo) y que generalice la interacción entre estos. También, implica evaluar el resultado o la expresión formulada con respecto a las condiciones de la situación; y formular preguntas o problemas a partir de una situación o una expresión.
- ✓ **Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas:** Es expresar la comprensión de la noción, concepto o propiedades de los patrones, funciones, ecuaciones e inecuaciones estableciendo relaciones entre estas; usando lenguaje algebraico y diversas representaciones. Así como interpretar información que haga tácito el contenido algebraico.
- ✓ **Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales:** Significa seleccionar, adaptar, combinar o crear, procedimientos, estrategias y algunas propiedades para simplificar o transformar ecuaciones, inecuaciones y expresiones simbólicas que le permitan resolver ecuaciones, determinar dominios y rangos, representar rectas, parábolas, y diversas funciones.
- ✓ **Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia:** El alumno tiene que elaborar afirmaciones sobre variables, reglas algebraicas y propiedades algebraicas, razonando de manera inductiva para generalizar una regla y de manera deductiva probando y comprobando propiedades y nuevas relaciones.

## 2.5. Productos notables

Según Baldor (2008) “Se llaman productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación” (p. 97). En la misma línea, Coveñas (2009) afirma que el resultado de multiplicar dos polinomios con características especiales y que pueden determinarse de modo directo sin realizar esta operación, se les denomina productos notables. Por tanto, se afirma que, si el producto de unas expresiones algebraicas puede establecerse a través de un algoritmo estable para llegar a su resultado, sin necesidad de estar operando término por término algebraico, se trata de un producto notable puesto que su estructura ya está definida. Entonces, lo crucial de este concepto algebraico en el campo de la matemática es que su aplicación hace más fácil la resolución de muchas multiplicaciones que se efectúan de forma tradicional.

Asimismo, cabe reconocer que los productos notables otorgan al estudiante una gama de beneficios en cuanto a la continuidad y comprensión de temas algebraicos en general, ya que, si el alumno llega a ser un experto en el tema, es decir, se apropia de este contenido llegando a dominarlo con facilidad pese a su nivel de abstracción y complejidad matemática, él podrá desarrollar problemas que involucren la factorización con gran destreza y sin ninguna dificultad hasta dar con la respuesta correcta. En palabras del autor Martos (2008) los productos notables son importantes porque su interiorización conceptual y funcional permite ejecutar con versatilidad al menos las siguientes actividades (pp. 55-56):

- ✓ Calcular productos de expresiones algebraicas.
- ✓ Simplificar expresiones algebraicas.
- ✓ Factorizar expresiones algebraicas.
- ✓ Desarrollar una expresión algebraica.
- ✓ Hallar el valor de una variable.
- ✓ Resolver ecuaciones de segundo grado.
- ✓ Encontrar las raíces de una ecuación determinada.
- ✓ Hallar intersecciones de una gráfica con los ejes.
- ✓ Calcular la distancia entre dos puntos.
- ✓ Determinar la forma general de la ecuación de una cónica.
- ✓ Determinar la posición de la curva de cónicas, si van sobre el eje “x” o sobre el “y”.
- ✓ Encontrar asíntotas verticales de una función.
- ✓ Integrar con el método de fracciones parciales.

Los puntos mencionados por Martos, sin duda, recaen en el valor práctico de los productos notables, sin embargo, los autores Alcívar y González (2018) añaden información afirmando que son útiles para calcular, medir y contar áreas o perímetros, como también permite desarrollar y fomentar

el pensamiento lógico-matemático en los escolares y en el caso de ingeniería civil, facilita la medición de superficies de terrenos. En líneas generales, se concluye que lo fundamental del tema algebraico abordado en esta sección es porque se puede aplicar en el desarrollo de ejercicios matemáticos de una manera más rápida y certera, de hecho, se encuentra relacionado con problemas de la vida cotidiana puesto que permite saber el cálculo en la medición de áreas o volúmenes que contengan elementos de productos notables. Del mismo modo, está inmerso en la planificación curricular de educación secundaria y educación superior, ya que fomenta el nivel más alto de abstracción dentro de la ciencia de la matemática y a nivel cognitivo de modo global; es más, las personas que estudian una carrera afín con los números, siguen viendo el tema, pero con un nivel más alto de dificultad obviamente.

### **2.5.1. Enseñanza de los productos notables**

El tratamiento didáctico del tema algebraico en mención, requiere en principio de un conocimiento especializado en este campo de la matemática por parte del docente quien es el encargado de transmitir de forma adecuada los conceptos temáticos de la misma, sin duda, el proceso de aprendizaje del álgebra genera dificultades y en consecuencia se manifiestan diversos errores cuando los educandos tratan de comprender los productos notables, por tanto, es de vital importancia la formación del profesor ya que de eso depende el éxito de la captación de las nociones matemáticas en los alumnos además de la incorporación de estrategias que el docente pueda adoptar para facilitar este tópico algebraico.

Así pues, autores como Ball *et al.* (2001) sostienen que la manera en cómo los alumnos logran aprender la matemática depende de la enseñanza que reciben por parte del docente, y es indiscutible tal posición; por lo mismo, Graciano y Aké (2019) afirman que es necesario tener principal interés en la formación de quien imparte el conocimiento de productos notables, básicamente porque este debe dominar a profundidad el contenido que va a impartir en una sesión de clase, lo que involucra saber sobre los procedimientos, estrategias didácticas y representaciones que permitan la viabilidad efectiva del proceso de aprendizaje en el educando. Por tanto, el saber del contenido y de la enseñanza es una habilidad que todo docente debe adquirir, puesto que, para el desarrollo y explicación de los productos notables no basta con ser un matemático puro, ya que se trata de compartir un conocimiento a estudiantes en formación que necesitan de la guía y experticia del profesor de Matemática, por lo que este debe recurrir a estrategias didácticas que faciliten la comprensión del tema para cambiar el enfoque de la enseñanza tradicional y calar en el aprendizaje del alumno, sabiendo que en un aula de clase se encuentran diferentes ritmos de aprendizaje.

En cuanto a los tipos de productos notables, se han escogido a seis de los más comunes en la práctica escolar, según el autor Baldor (2008, pp. 97-104) son los siguientes:

- ✓ **Cuadrado de la suma de dos cantidades:** Elevar el cuadrado  $(a + b)$  equivale a multiplicar este binomio por sí mismo.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Luego, el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda.

- ✓ **Cuadrado de la diferencia de dos cantidades:** Elevar  $(a - b)$  al cuadrado equivale a multiplicar esta diferencia por sí misma.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Luego, el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

- ✓ **Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades:** Sea el producto;  $(a + b)(a - b)$  si se realiza la multiplicación término a término algebraico quedaría expresado de la siguiente manera:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Luego, la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo (en la diferencia) menos el cuadrado del sustraendo.

- ✓ **Cubo de la suma de un binomio:** Elevar  $(a + b)$  al cubo.

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Este producto notable, expresa que el cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad más el triple del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.

- ✓ **Cubo de la diferencia de un binomio:** Elevar  $(a - b)$  al cubo.

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Esto significa que el cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, menos el triple del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda cantidad.

- ✓ **Producto de dos binomios con término común:** El producto de dos binomios de la forma  $(x + a)$  y  $(x + b)$  es igual al cuadrado del término común, más el producto de la suma de los términos no comunes, por el término común, y más el producto de los términos no comunes (Coveñas, 2009, p. 156).

Es decir:  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

### 2.5.2. Dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los productos notables

En el tema de los productos notables, se presentan dificultades asociadas a la aplicación correcta de las fórmulas, por ende, no hay un debido procedimiento en la operación de multiplicación de expresiones algebraicas, y tampoco aplican bien la propiedad distributiva que está inmerso en el desarrollo de este tipo de ejercicios o problemas. Socas *et al.* (1996) expresan que un error frecuente en los escolares es el uso inapropiado de fórmulas conocidas para adaptarlas bajo su entendimiento a un problema matemático nuevo con la finalidad de hacer “familiar” el ejercicio propuesto. Ahondando en el análisis de los autores, afirman que el estudiante, por lo general, presenta dificultades en los procesos multiplicativo y lineal, a modo de ejemplo para evidenciar lo dicho en estas líneas, se presenta las siguientes situaciones:

$$a * (b + c) = a * b + c$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$



Aplicación incorrecta de la propiedad distributiva

Además, el error puede tomar más fuerza si es que al tema propuesto en este acápite se trabajara con números reales, en donde según sea el caso, el educando tiene que tener en cuenta si va a emplear la propiedad de potenciación. De igual forma, Cruz y Méndez (2008) en su investigación detectan las dificultades y errores ya expuestos, no obstante, los autores afirman que, en el binomio al cuadrado, los estudiantes presentan dificultades cuando realizan el cambio de registro pertinente entre lo verbal y algebraico, es por tal motivo que ellos lo expresan de diversas formas o simplemente, omiten pasos en el procedimiento de su desarrollo. Por lo tanto, el docente del área de Matemática tiene que velar por el aprendizaje del alumno facilitando el entendimiento del tema a través de estrategias innovadoras que permitan al alumno dar un significado al tema algebraico que está estudiando, un primer gran avance sería que el profesor fomente en el educando el conflicto cognitivo, así pues, con su participación activa en clase mejorará, ya que, si el docente no es consciente de que muchas veces el problema es de naturaleza cognoscitiva por parte del estudiante, servirá de muy poco que le diga en dónde se equivocó y luego explicarle lo que tenía que hacer porque al cabo de unos días si es que llega a “corregir” su error, se olvidará y volverá a recaer en lo mismo (Socas *et al.*, 1996).

### 2.5.3. Representaciones de los productos notables

Para desarrollar este apartado, es oportuno iniciar con la apreciación de Beltrán *et al.* (2016) quienes sostienen que “Los sistemas de representación permiten expresar de diferentes formas un mismo concepto. Por esta razón, cuanta mayor cantidad de representaciones se tengan de un concepto, mayores oportunidades para su comprensión se pueden ofrecer” (p. 83). Por lo que podemos deducir considerando lo antes planteado, que todos los sistemas de representación son

importantes para la enseñanza y el aprendizaje de los productos notables, aunque por lo general se trabaja solo las representaciones geométrica y algebraica y esto si es que el docente incluye en su praxis la primera representación mencionada. Los autores Oviedo *et al.* (2012) sintetizan lo siguiente:

Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática. (p. 30)

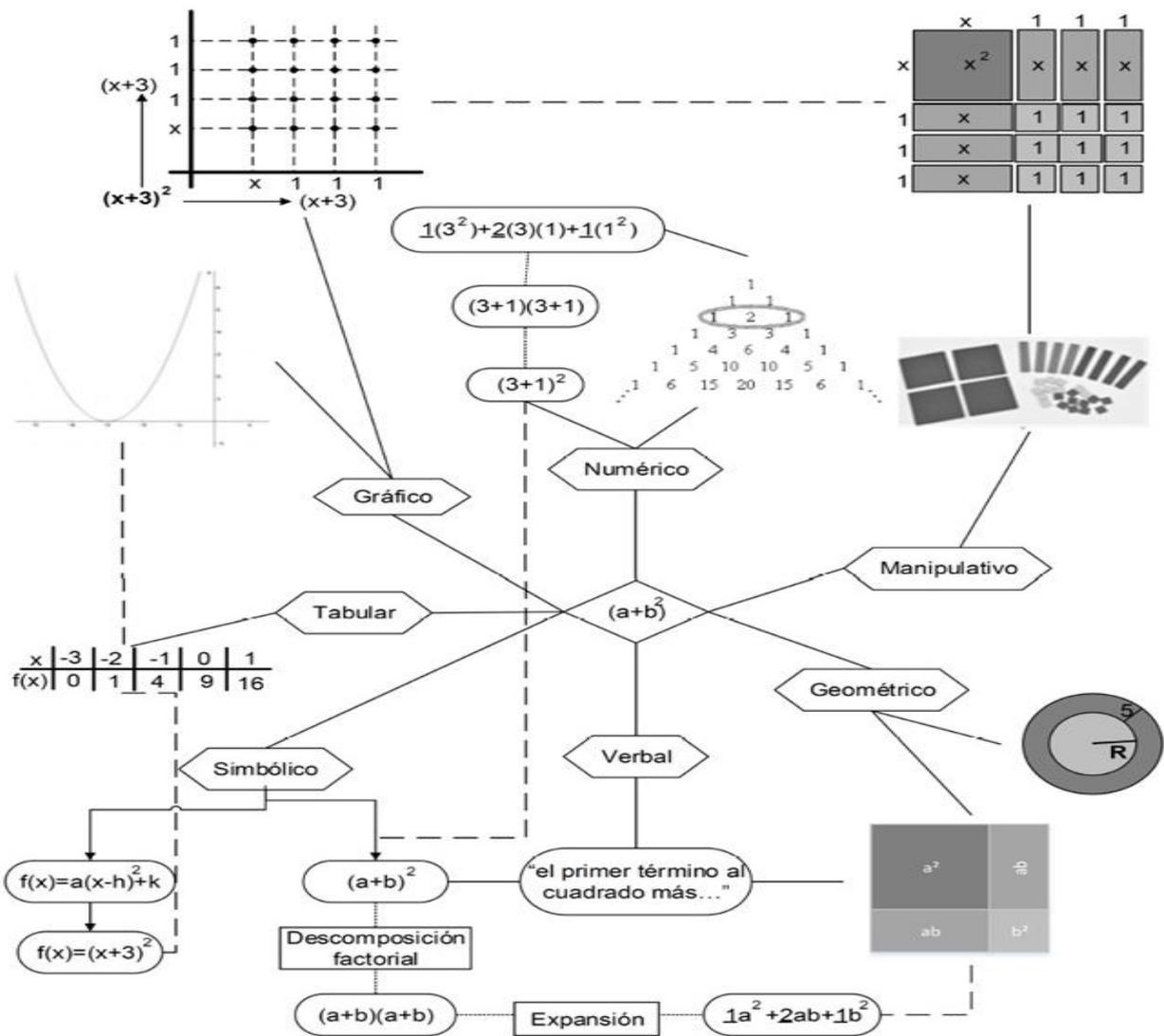
**2.5.3.1. Representaciones del binomio al cuadrado.** En cuanto a las representaciones del binomio al cuadrado, Beltrán *et al.* (2016) dan a conocer que los sistemas de representación simbólico, numérico, geométrico, tabular, manipulativo, verbal y gráfico son de gran valía para enseñar el cuadrado de un binomio y por tal razón, impactan de manera significativa en el aprendizaje de este producto notable. Por consiguiente, en la Figura 1 elaborada por los propios autores ilustra los sistemas de representación mencionados, las posibles transformaciones sintácticas y las traducciones que se pueden establecer entre ellos; para una mejor comprensión de la lectura del mapa conceptual, han hecho uso de una línea diferente para cada uno de estos aspectos.

“La línea continua indica los diferentes sistemas de representación, la línea discontinua muestra las posibles traducciones entre sistemas de representación y la línea punteada las transformaciones sintácticas invariantes que se establecen dentro del mismo sistema de representación” (Beltrán *et al.*, 2016, p. 83). Respecto a las transformaciones sintácticas invariantes, los autores explican que en la expresión algebraica  $(a + b)(a + b)$  y  $a^2 + 2ab + b^2$  hay una correspondencia, puesto que tal transformación interna se ha hecho en el mismo registro: la representación algebraica, y de modo constituyente ambas expresiones reflejan lo mismo a pesar de que visualmente la estructura sea distinta, ya que no cambia el objeto matemático, explicado de ese modo se afirma que la transformación efectuada permanece invariante.

Para efectos de esta investigación, solo se explicará a detalle tres de las representaciones del binomio al cuadrado, las cuales son: la representación verbal, la representación geométrica y la representación algebraica o simbólica. Pero antes de continuar, se considera oportuna esta pregunta: ¿a qué se le denomina cuadrado de un binomio?, Jimenez (2009) afirma “Si se eleva al cuadrado una expresión significa multiplicarla por sí misma. Si esta expresión corresponde a un binomio, se llamará **cuadrado de un binomio**” (p. 52). Dicho esto, se desarrollará la explicación de la suma y de la diferencia de este producto notable, teniendo en cuenta a autores como Baldor (2008), Jimenez (2009) y Coveñas (2009).

Figura 1

Mapa conceptual de los sistemas de representación del binomio al cuadrado



Nota. Extraído de Beltrán *et al.* (2016, p. 84).

**A. Cuadrado de la suma de dos cantidades.** Elevar el cuadrado  $(a + b)$  equivale a multiplicar este binomio por sí mismo.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

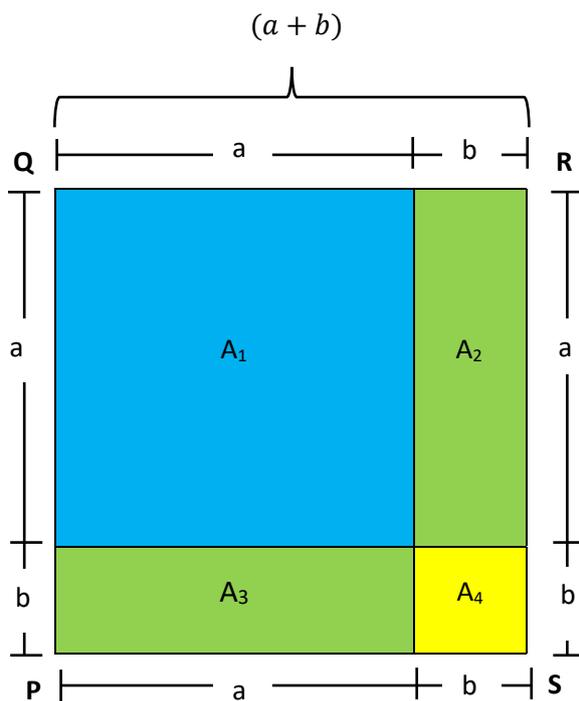
Efectuando este producto se tiene:

$$\begin{array}{r} (a + b) \\ (a + b) \\ \hline a^2 + ab \\ \quad ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \quad \times$$

Es decir, la representación algebraica queda expresada de la siguiente forma:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Por tanto, la **representación verbal** queda expresada de la siguiente manera: El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda. Ahora bien, la **representación geométrica** (interpretación) del cuadrado de un binomio suma, se desarrolla mediante el concepto de áreas, para ello, se grafica un cuadrado PQRS cuyo lado será  $(a + b)$ .

**Figura 2**

*Representación geométrica del cuadrado de un binomio suma*



De la figura se observa que el área del cuadrado PQRS es:

$$A_{\square} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Por lo tanto:

$$A_{\square} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_{\square} = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$A_{\square} = a^2 + 2ab + b^2$$

Nota. Adaptado de Coveñas (2009, p. 152).

La conclusión obtenida anteriormente permite afirmar que: El área total del cuadrado corresponde a  $(a + b)^2$  lo que es equivalente a la suma de las áreas parciales en las que se ha dividido la figura; dos cuadrados de áreas distintas  $a^2$  y  $b^2$ , y dos rectángulos de igual área  $ab$ .

$$\text{Área del cuadrado PQRS} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**B. Cuadrado de la diferencia de dos cantidades.** Elevar  $(a - b)$  al cuadrado equivale a multiplicar esta diferencia por sí misma:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

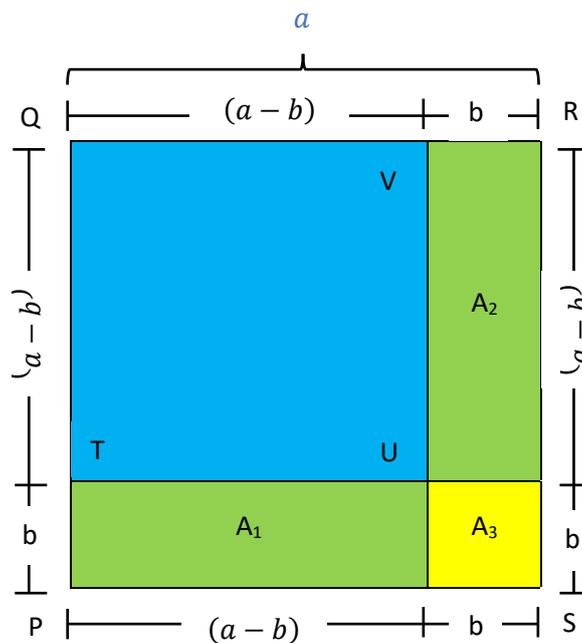
Efectuando este producto se tiene:

$$\begin{array}{r} (a-b) \\ (a-b) \\ \hline a^2 - ab \\ -ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \times$$

Es decir, la representación algebraica se expresa así:  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ . Por tanto, la **representación verbal** de este producto es: el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad. En cuanto a la **representación geométrica**, se parte de la noción de áreas, pero en este caso el lado del cuadrado PQRS será "a".

**Figura 3**

*Representación geométrica del cuadrado de un binomio diferencia*



Nota. Adaptado de Coveñas (2009, p. 153).

De la figura se extrae que el área del cuadrado PQRS es:

$$A_{\square} = a^2$$

Además, las figuras geométricas que corresponden a cada una de las áreas ( $A_1, A_2, A_3$ ) que forman parte del cuadrado PQRS son:

- ✓ Área del rectángulo de lados  $b$  y  $(a-b)$ :  $A_1 = b(a-b)$

- ✓ Área del rectángulo de lados  $(a - b)$  y  $b$ :  $A_2 = b(a - b)$
- ✓ Área del cuadrado de lado " $b$ ":  $A_3 = b^2$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{Área del cuadrado QTUV} &= \text{Área del cuadro de PQRS} - A_1 - A_2 - A_3 \\ &= a^2 - ab + b^2 - ab + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

La conclusión obtenida anteriormente permite establecer que:

$$\text{Área del cuadrado QTUV} = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**2.5.3.2. Aplicaciones del binomio al cuadrado.** Para brindar de significatividad al contenido matemático a cerca de este producto notable en la ejecución de las sesiones de aprendizaje, el enfoque de la enseñanza a utilizar por parte del docente debe estar direccionada en función al valor contextual del área. Por tal razón, es oportuno que el tema algebraico del binomio al cuadrado esté vinculado en la aplicación de hechos concretos, es decir, se debe plantear problemas basándose en situaciones reales en los cuales los alumnos hagan más cercana esa realidad, o sea, sean capaces de vivenciar y tomar conciencia de la importancia de saber este tema más allá de los grandes beneficios que otorga el nivel meramente algebraico en la resolución de problemas que ya han sido abordados en el marco teórico de la presente investigación.

Ruiz (2008) menciona que es fundamental establecer conexiones entre la resolución de problemas de la vida cotidiana y la matemática para eliminar el rechazo que la mayoría de los estudiantes le tiene a esta ciencia abstracta, puesto que lo conciben como un área curricular carente de uso en la realidad o que simplemente no les es útil cuando terminan sus estudios académicos, y como consecuencia no se sienten motivados por aprender. Asimismo, el autor comenta que "El profesor además de estimular el trabajo del colectivo, ha de prestar atención a las diferencias individuales, tanto de aquellos estudiantes que son aventajados en relación con el resto del colectivo, como de aquellos que se rezagan" (p. 3). De modo que el docente tiene como desafío mantener conectados a los estudiantes de forma dinámica y enriquecedora para fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico y a la vez, fortalecer el vínculo interdisciplinar en la práctica de distintas situaciones.

Por otra parte, un estudio realizado por Ledezma y Cuevas (2019) detectaron que los profesores en su gran mayoría se dedican solo a abordar aspectos algebraicos, mientras que dejan de lado la vinculación que tiene el cuadrado de un binomio con situaciones reales. Incluso, los docentes

(objetos de estudio) presentaron una confusión en lo que implica contextualizar un objeto matemático con su representación, de manera textual se cita: “los docentes intentaron contextualizar el cuadrado de binomio, siendo que en realidad sólo los convirtieron a otro registro de representación semiótica, es decir, desde la expresión algebraica  $((a + b)^2)$  a la representación geométrica (cálculo de área de figuras cuadradas)” (p. 529). Esta situación evidencia que hay un esmero por el tratamiento del contenido algebraico pero que definitivamente existe la disyuntiva entre el peso que cobra el aprendizaje del algoritmo por sobre la contextualización de un conocimiento matemático abstracto en situaciones cotidianas. De manera específica Barreto (2009) señala que la aplicación directa del cuadrado de un binomio está relacionada con las áreas, por lo que Beltrán *et al.* (2016) complementan la idea de manera tácita en que este producto notable da solución a problemas matemáticos que estén relacionados con los terrenos en diferentes situaciones como el educativo, laboral, público y científico.



### Capítulo 3: Metodología de la investigación

En el presente capítulo se desarrolla el paradigma de investigación, la metodología y el diseño de estudio; así como también se describe la población y la muestra, el tratamiento didáctico realizado y las técnicas e instrumentos para el recojo de la información. Por último, se aborda el tratamiento para la organización y el análisis de los datos obtenidos.

#### 3.1. Paradigma, tipo y diseño de investigación

Esta investigación pertenece al paradigma interpretativo porque busca mejorar la enseñanza, y por ende el aprendizaje del binomio al cuadrado en los estudiantes de tercer grado de secundaria, a través de un proceso sistemático, descriptivo y de análisis cualitativo. Asimismo, este paradigma se caracteriza por comprender e interpretar lo que pasa en una situación específica a través de la observación cuando todos los elementos de estudio interactúan en su hábitat natural (Pérez, 1994). De modo que, la metodología es cualitativa porque hay interés en describir a detalle los resultados de la aplicación del instrumento en base a las respuestas de los participantes para comparar y determinar si la representación geométrica y verbal mejora el aprendizaje del binomio al cuadrado, en contraste de la representación algebraica y verbal. Al respecto, Hernández *et al.* (2010) afirman que “La investigación cualitativa se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones (busca interpretar lo que va captando activamente)” (p. 9). De estas palabras se puede señalar, que tanto el paradigma como la metodología planteada, buscan dar solución a una preocupación académica en relación con el álgebra, el cual es optimizar el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado.

El diseño de la presente investigación es el estudio de caso porque aborda el tema de investigación de manera profunda y en su contexto, lo que permite un mayor aprendizaje sobre el grupo de estudio al cual se le está realizando la investigación desde la comprensión de su complejidad, ya que emplea diversas fuentes de datos y métodos, considerándose transparadigmático y transdisciplinario (Durán, 2012). De la misma manera, Yin (1984) define a este diseño “como una indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de la vida real” (p. 23), en el cual es importante contar con varias fuentes de información. Además, según los objetivos planteados en la presente investigación y la tipología que realiza el autor en mención, el tipo de estudio de caso es descriptivo en la que finalmente se realizará una comparación respecto a las representaciones usadas en el aprendizaje del binomio al cuadrado. En suma y atendiendo al paradigma de investigación, se considera oportuno plantear las siguientes actividades de diseño, tal como se muestra en la Tabla 1 .

Tabla 1

*Actividades para el tratamiento metodológico de la investigación*

Actividad	Descripción
1. <b>Delimitación del problema</b>	Se identificaron algunos problemas académicos en el área de Matemática en los alumnos de una institución educativa estatal, en relación a los productos notables, específicamente sobre el binomio al cuadrado.
2. <b>Planteamiento de los objetivos</b>	Se plantearon varios objetivos de investigación de carácter descriptivo en cuanto al aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante sus distintas representaciones (algebraica, geométrica y verbal).
3. <b>Revisión bibliográfica</b>	Se consultó diversas fuentes de información en relación con el tema de estudio para sustentar la presente investigación, así como también para la selección de los antecedentes de estudio y el diseño de las sesiones de aprendizaje para el tratamiento didáctico.
4. <b>Recolección de la información</b>	Se diseñó, como instrumento principal para recoger información, una evaluación escrita. Este instrumento ayudó a determinar el aprendizaje del alumno en cuanto al binomio al cuadrado según sus diversas representaciones, y desarrollar la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Además, se utilizó la técnica de observación en las sesiones de clase.
5. <b>Validación del instrumento</b>	La evaluación escrita fue presentada a docentes especializados en el área de Matemática, los cuales revisaron e hicieron sus apreciaciones respectivas para subsanarlas, quedando validado para su posterior aplicación.
6. <b>Selección de la muestra</b>	La muestra estuvo conformada por diez estudiantes de tercer año de educación secundaria de una institución educativa pública a quienes les corresponde estudiar el tema de los productos notables establecido en el Currículo Nacional.
7. <b>Aplicación del instrumento</b>	Se aplicó la evaluación escrita a los 10 informantes de la investigación durante 65 minutos.

<b>8. Análisis de los resultados</b>	Se procedió a realizar el análisis descriptivo-comparativo de los resultados de cada una de las preguntas teniendo en cuenta el tratamiento didáctico realizado a cada grupo de estudio en la aplicación diferenciada de las representaciones del binomio al cuadrado.
<b>9. Redacción de conclusiones</b>	Luego de un análisis detallado de los resultados obtenidos se elaboraron las conclusiones tomando como referencia los objetivos de investigación.

Nota. Elaboración propia.

### 3.2. Informantes

La población estuvo determinada por un total de 63 estudiantes, cuyas edades oscilan entre 13 y 14 años, y cursaban el séptimo ciclo de Educación Básica Regular, correspondientes al tercer grado del nivel secundario, en una institución educativa pública de la ciudad de Piura de zona urbana, distribuidos en dos aulas de secciones "A" y "D", como se muestra en la Tabla 2.

**Tabla 2**

*Estudiantes que conforman la población investigada*

<b>3º A</b>	<b>3º D</b>	<b>Total</b>
30	33	63

Nota. Nómina de matrícula de la institución educativa pública de Piura – 2020

La muestra estuvo conformada por 10 alumnos<sup>1</sup> varones de acuerdo a sus posibilidades de acceso a internet, ya que las sesiones de aprendizaje se realizaron vía Zoom según la modalidad del sector educación en el año 2020, que fue la no presencial o educación a distancia, por efecto del coronavirus y la emergencia sanitaria a nivel mundial. De manera que, los informantes se han subdividido en dos grupos de estudio, respetando al aula de clase a la que pertenecían, tal como se aprecia en la Tabla 3. El grupo de estudio 1 (estudiantes de 3º grado de secundaria, sección "A") y el grupo de estudio 2 (estudiantes de 3º grado de secundaria, sección "D").

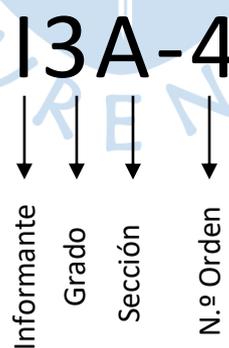
<sup>1</sup> Hernández *et al.* (2010) establecen que cuando la muestra en un estudio cualitativo es pequeña, se trata de un estudio de caso, reafirmando lo planteado en el diseño de investigación.

**Tabla 3***Estudiantes que conforman la muestra de la investigación*

Grado y Sección	N.º Alumnos
Tercer Grado A	6
Tercer Grado D	4

Nota. Elaboración propia.

Así pues, la muestra responde a un muestreo no probabilístico de manera intencional; en relación a lo mencionado, Salamanca y Crespo (2007) afirman que “se suele utilizar sobre todo al principio una muestra por conveniencia que se denomina muestra de voluntarios, y se utiliza si el investigador necesita que los posibles participantes se presenten por sí mismos” (p. 2). Además, esta forma de elección de los sujetos es conocida también como selección a priori, porque se identifica a un grupo humano perteneciente a una misma realidad y con las mismas características. Por otro lado, para mantener bajo reserva la identidad de los informantes, se ha considerado oportuno realizar una codificación estructurada para cada uno de los estudiantes de la muestra<sup>2</sup>, de la siguiente manera: Informante/Grado/Sección/Número de orden, tal como se muestra en la Figura 4. Por tanto, la muestra constituida por los estudiantes de Tercer Grado “A” se codificaron como I3A-1; I3A-2; ...; I3A-6; y los de Tercer Grado “D”, I3D-1; I3D-2; ...; I3D-4.

**Figura 4***Codificación de los informantes*

Nota. Elaboración propia.

<sup>2</sup> Para la codificación de los informantes solo se toma en cuenta a los estudiantes que son parte de la muestra, por orden alfabético según apellido paterno.

### 3.3. Descripción del tratamiento didáctico

La propuesta del tratamiento didáctico sobre el binomio al cuadrado ha tomado como principal referente el Currículo Nacional de la Educación Básica, dado que este documento está diseñado para garantizar un buen trabajo sistemático en el aula de clase. En este sentido, se han diseñado 6 sesiones de aprendizaje, tres sesiones para cada grupo de estudio (ver Tabla 4) tratando en lo posible que las actividades planteadas sean similares. Así, el grupo de estudio 1 ha recibido el tratamiento didáctico sobre el binomio al cuadrado mediante las representaciones algebraica y verbal y el grupo de estudio 2 mediante las representaciones geométrica y verbal.

**Tabla 4**

*Secuencia de las sesiones de aprendizaje*

Sesión	Título de la sesión	Descripción
1	Estudiamos el binomio suma al cuadrado	Se aborda exclusivamente el binomio suma al cuadrado mediante sus representaciones de acuerdo al grupo de estudio.
2	Estudiamos el binomio diferencia al cuadrado	Se aborda exclusivamente el binomio diferencia al cuadrado mediante sus representaciones de acuerdo al grupo de estudio.
3	Resolvemos diversas situaciones sobre el binomio al cuadrado	Se aborda el binomio al cuadrado tanto la suma como la diferencia (sesión taller) mediante sus representaciones de acuerdo al grupo de estudio.

Nota. Elaboración propia.

### 3.4. Técnicas e instrumentos de recogida de información

Para la recolección de la información del presente trabajo de investigación, se aplicaron instrumentos y se desarrollaron técnicas como la evaluación escrita y el diario de campo, los cuales se detallan a continuación:

#### 3.4.1. *Test elaborado por el docente*

Es una técnica de recogida de información, en donde se plantean preguntas ya sea establecidas o elaboradas, de ser este último caso es necesario que para su aplicación sea validada por un grupo de expertos. Asimismo, Gómez *et al.* (2010) expresan que “un test se administra con un objetivo concreto, generalmente para tomar decisiones que en la mayoría de ocasiones son relevantes para la vida del individuo receptor” (p.75), esto quiere decir, que la evaluación tiene que

recoger información importante sobre los conocimientos de los educandos y en base a ello, tomar decisiones. En ese sentido, después de un periodo de enseñanza a la muestra de estudio, se ha diseñado una evaluación escrita validada mediante juicio de tres expertos (ver apéndice H):

**3.4.1.1. Experto 1.** Doctor por la Universidad de Extremadura-España, dentro del programa de Investigación en la Enseñanza-Aprendizaje de las Ciencias Experimentales. Docente con trayectoria en la facultad de Ciencias de la Educación en la Universidad de Piura.

**3.4.1.2. Experto 2.** Doctora en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales, Matemáticas y de la Actividad Física y Deportiva por la Universidad de Huelva en España y se desempeña como docente en la facultad de Ciencias de la Educación en la Universidad de Piura.

**3.4.1.3. Experto 3.** Magíster en Educación con Mención en Gestión Educativa por la Universidad de Piura y actualmente es docente en la facultad de Ciencias de la Educación en la Universidad de Piura. Dentro de sus observaciones para mejorar el instrumento, se consideró oportuno reestructurar la nota realizada en la pregunta "4b" del test sobre el binomio al cuadrado, por si algún otro investigador quisiera replicar la pregunta, quedando como se muestra a continuación: *"Nota: Las dimensiones de los lados pueden tomar cualquier valor numérico natural exceptuando el número 1."* Sin embargo, para efectos de este estudio no ha sido posible subsanar la acotación porque el test ya había sido aplicado, por otro lado, dicha observación no ha sido considerada por la muestra.

La finalidad de la aplicación del instrumento fue determinar, a través de una comparación de los resultados obtenidos, cuál de las representaciones tuvo mejor impacto en el rendimiento académico de los informantes; si las representaciones algebraica y verbal o las representaciones geométrica y verbal, trabajados en el grupo de estudio 1 y grupo de estudio 2, respectivamente. Además, el test permite identificar el nivel de desarrollo de la competencia relacionada al álgebra: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, en el que se encuentran los estudiantes de tercer grado de secundaria respecto al contenido temático del cuadrado de un binomio, después de haber aplicado el tratamiento didáctico.

### **3.4.2. Observación**

Es una técnica de recogida de información que implica una planificación previa, puesto que se realiza de manera intencionada sobre algo específico, cuyo proceso exige una sistematización para captar la información que se busca o es de interés; tal es su impacto en el proceso de enseñanza y aprendizaje que su uso resulta ser primordial en toda evaluación formativa debido a su finalidad última, perfeccionar la calidad de dicho proceso educativo con miras más globales, es decir, mejorar el sistema educativo (Fuertes, 2011). Por tanto, el docente cuando aplica esta técnica para recoger

información sobre algún hecho que está averiguando, es necesario que preste atención durante toda la sesión de aprendizaje. Para ello, se han utilizado los siguientes instrumentos:

**3.4.2.1. Lista de cotejo.** “Es un instrumento estructurado, que contiene una lista de criterios o desempeños de evaluación establecidos por el docente, en los cuales se califica únicamente la presencia o ausencia de estos mediante una escala dicotómica” (Dirección de Educación Media Superior, 2019, p. 4). Se caracteriza porque es sencilla de realizar por lo que no exige de un análisis profundo si los indicadores son claros, además, es útil ya que permite valorar ciertas actividades dictaminadas por el profesor como son los productos de aprendizaje, incluso las conductas de los estudiantes, entre otros. Por tal razón, este instrumento se utiliza con fines de evaluación formativa durante el desarrollo de las sesiones de aprendizaje diseñadas en la presente investigación.

**3.4.2.2. Diario de campo.** Es un instrumento que sirve para consignar información procesal que se organiza de manera metódica para trabajar con la información que es importante para el investigador, en el cual se utilizan “diferentes técnicas de recolección de información para conocer la realidad, profundizar sobre nuevos hechos en la situación que se atiende, dar secuencia a un proceso de investigación e intervención y disponer de datos para la labor evaluativa posterior” (Valverde, 1993, p. 309). De hecho, el autor señala que el diario de campo es importante porque aporta datos concomitantes, por ejemplo, puede brindar información cualitativa y cuantitativa a la vez, que resulta relevante durante el proceso de la investigación porque permite un trabajo de calidad.

### **3.4.3. Entrevista**

Esta técnica de recogida de información, según los autores Campoy y Gomes (2009) es “la interacción entre dos personas, planificada y que obedece a un objetivo en el que el entrevistado da su opinión sobre un asunto y, el entrevistador, recoge e interpreta esa visión” (p. 288). Por otra parte, el tipo de entrevista realizada es semiestructurada ya que se busca entender la(s) respuesta(s) de los informantes según se requiera después de la aplicación del test, es decir, no se han preparado de antemano las preguntas ya que depende de la información obtenida para poder plantearlas. Así mismo, el motivo de elegir esta técnica de investigación se realiza con el fin de hacer una mejor interpretación en cuanto a las dificultades y el progreso en la comprensión del binomio al cuadrado que han tenido los estudiantes. Por otro lado, para el registro de las entrevistas se hizo uso de herramientas digitales y los diálogos realizados se transcribieron teniendo en cuenta la codificación hecha en la presente investigación para reservar la identidad de los informantes y para nombrar al docente quien gestiona las preguntas a los estudiantes se ha designado el código D.

### **3.5. Procedimiento de organización, análisis y discusión de los resultados**

La recolección de datos de la presente investigación se hizo efectiva luego del tratamiento didáctico realizado a ambos grupos de estudio, para mayor detalle sobre el procedimiento seguido en relación con el objetivo de la investigación, se presenta la Tabla 5.

Tabla 5

*Procesamiento de los resultados para la organización, análisis y discusión*

<b>Procedimiento</b>	<b>Descripción</b>
<b>1. Recogida de datos</b>	Se procede a recoger los resultados de ambos grupos de estudio de tercer año de secundaria luego de haber sido aplicado el test.
<b>2. Procesamiento de la información</b>	Se realiza este procedimiento teniendo en cuenta la metodología de la investigación, es decir con carácter cualitativo.
<b>3. Presentación de los resultados</b>	Se realiza a través de tablas (Tabla 6, Tabla 7 y Tabla 9) en donde se muestra el aprendizaje adquirido por los estudiantes según las representaciones desarrolladas en cada grupo de estudio, además, de identificar los errores cometidos por ellos durante este proceso. Posteriormente, mediante un cuadro comparativo se describen las semejanzas y diferencias en el aprendizaje del binomio al cuadrado.
<b>4. Análisis y discusión de los resultados</b>	Se efectúa una descripción detallada a partir de los datos obtenidos de cada informante según el tratamiento didáctico sobre el binomio al cuadrado de acuerdo a los objetivos planteados en la investigación, para ello se ha elaborado una rúbrica de evaluación (ver Apéndice D) para facilitar este procedimiento desde una perspectiva imparcial y cualitativa.

Nota. Elaboración propia.

## Capítulo 4: Resultados de la investigación

Los resultados del trabajo de investigación se muestran de acuerdo al nivel de logro de aprendizaje alcanzado por los informantes en el tema algebraico del binomio al cuadrado, en el examen de Matemática. Para ello, se ha realizado un análisis con carácter descriptivo cuya finalidad es comparar la información obtenida por el grupo de estudio 1 y el grupo de estudio 2.

### 4.1. Análisis descriptivo de los resultados del test

La evaluación se aplicó a ambos grupos de estudio con el objetivo de analizar las respuestas de los estudiantes según el aprendizaje adquirido luego del tratamiento didáctico correspondiente a cada grupo de estudio en cuanto al desarrollo de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Por tal razón, los resultados se muestran en tablas para describir e interpretar los datos obtenidos.

#### 4.1.1. Resultados del test aplicado al grupo de estudio 1

Se aplicó el instrumento de evaluación al grupo de estudio 1 a quienes se les enseñó el binomio al cuadrado a través de las representaciones algebraica y verbal. Este grupo estuvo integrado por los estudiantes de tercer año de educación secundaria de la sección "A" de una institución educativa pública de Piura, cuyos resultados cuantitativos se muestran en el Apéndice E que sirven como referencia para describir las respuestas de los estudiantes. A continuación, se describen los resultados de la aplicación del instrumento.

Pregunta 1:

1. Indique si la expresión algebraica  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$  es correcta o no. Fundamente su respuesta.

En la pregunta 1 se puede evidenciar que tres de los seis estudiantes (I3A-3, I3A-5 e I3A-6) han podido desarrollar correctamente la pregunta, es decir, reconocen que la igualdad  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$  es incorrecta y fundamentan su respuesta empleando la representación algebraica del binomio suma al cuadrado, mientras que dos estudiantes afirman que la igualdad es correcta, pero el estudiante I3A-2 justifica su respuesta empleando correctamente la fórmula del binomio al cuadrado, por tal motivo se le ha realizado una entrevista para entender la fundamentación hecha por el estudiante, obteniendo como información que ha respondido de esa manera porque para él la igualdad era correcta (Apéndice I - Entrevista 1) y el estudiante I3A-4 mantiene su respuesta como se observa en la Figura 5. En cambio, el estudiante I3A-1 tiene la noción de que la ecuación es incorrecta, aunque es insuficiente la fundamentación que realiza el informante ya que él señala que falta multiplicar  $(x)(y)$ ; de manera que el estudiante expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcial porque no utiliza ni la representación algebraica ni la verbal para justificar su respuesta.

**Figura 5**

Respuesta del estudiante I3A-4 a la pregunta 1

1. Indique si la expresión algebraica  $(x+y)^2 = x^2 + y^2$  es correcta o no.  
 Si es correcta, porque se descomponen en las potencias de  $x$  y  $y$  de las dos cantidades al cuadrado por el exponente 2 que elevamos.

Pregunta 2:

2. Para la siguiente expresión:  $(x - y)^2$

- Escriba su representación verbal.
- Escriba la representación verbal del desarrollo de la expresión dada.

En la pregunta 2, apartado a, se puede apreciar que solo el estudiante I3A-3 ha podido expresar de manera correcta su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, ya que dos de los seis estudiantes (I3A-1 e I3A-5) no han utilizado el lenguaje formal para escribir la representación verbal del binomio diferencia al cuadrado, sin embargo, eso no quiere decir que no tengan noción del mismo ya que el estudiante I3A-5 comprende perfectamente que se trata del binomio diferencia al cuadrado (Figura 6). Por otro lado, tres de los seis estudiantes (I3A-2, I3A-4 e I3A-6) presentan deficiencias para expresar de manera escrita la representación verbal del binomio diferencia al cuadrado, por ejemplo, el estudiante I3A-4 literalmente ha escrito como respuesta: "Resta de equis menos ye, todo elevado al cuadrado".

**Figura 6**

Respuesta del estudiante I3A-5 a la pregunta 2a

$$2o \ (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

a) el cuadrado de la diferencia de "x" y "y"

En cambio, en la pregunta 2b, tres de los seis estudiantes (I3A-4, I3A-5 e I3A-6) han podido expresar correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, es decir, que no ha habido ninguna observación en las respuestas, pero sí con los estudiantes I3A-1 y I3A-3 quienes han demostrado que son capaces de expresar de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcial mediante su representación verbal. Es importante mencionar que los cuatro primeros estudiantes (I3A-1, I3A-4, I3A-5 e I3A-6) se han ayudado de la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado, para responder al apartado b, tal como se puede observar en la Figura 7. Cabe señalar que solo el informante I3A-2 ha

tenido errores en la representación verbal del binomio diferencia al cuadrado, ya que los operadores de resta y suma los ha cambiado de orden, siendo este error replicado en las posteriores preguntas relacionadas al binomio diferencia al cuadrado tal como se puede visualizar en la Figura 9.

**Figura 7**

*Respuesta del estudiante I3A-1 a la pregunta 2b*

La primera al cuadrado menos 2 a la primera  
 por la segunda más la segunda al cuadrado  
 $(x-y)^2 = x^2 - 2(x)(y) + y^2$

Pregunta 3:

3. Desarrolle los siguientes ejercicios mostrando el procedimiento seguido:

a)  $(3y + 4)^2 =$

b)  $(2x - 5)^2 =$

En la pregunta 3, apartado *a*, se evidencia que cuatro de los seis estudiantes (I3A-2, I3A-4, I3A-5 e I3A-6) han podido seleccionar y combinar de manera correcta estrategias heurísticas para dar solución al ejercicio planteado sobre el binomio suma al cuadrado mediante la representación algebraica. No obstante, los estudiantes I3A-1 e I3A-3 han respondido de manera parcial a la pregunta, es decir, tienen la idea de la estructura de la fórmula del binomio al cuadrado, pero el estudiante I3A-1 en su desarrollo demuestra que tiene dificultades con la simbolización ya que solo al primer término del trinomio cuadrado perfecto no coloca los paréntesis que significaría que este término lo elevaría al cuadrado, pero sí realiza tal operación. En cambio, el estudiante I3A-3 ha realizado muy bien la aplicación de la fórmula del binomio en estudio aunque al hacer la multiplicación factor por factor del binomio, según la simbolización matemática que él emplea, expresa de manera escrita que realizará una suma con los factores, pero efectúa la multiplicación tal como se puede apreciar en la Figura 8; por tal motivo se le ha consultado el porqué del operador suma entre ambas expresiones y el estudiante no identifica la razón, solo afirma que él quería comprobar su resultado (Apéndice I – Entrevista 2).

**Figura 8**

Respuesta del estudiante I3A-3 a la pregunta 3a

$$\begin{aligned}
 a) (3y+4)^2 &= (3y)^2 + 2(3y)(4) + (4)^2 \rightarrow (3y+4) + (3y+4) \\
 &= 9y^2 + 24 + 16 &= 9y^2 + \cancel{12y} + \cancel{12y} + 16 \\
 & &= 9y^2 + 24y + 16
 \end{aligned}$$

En la pregunta 3b se observa que tres de los seis estudiantes (I3A-4, I3A-5 e I3A-6) han podido responder satisfactoriamente el ejercicio del binomio diferencia al cuadrado, en otras palabras, han seleccionado y combinado estrategias heurísticas de manera correcta para dar solución a la pregunta mediante la representación algebraica. Los estudiantes I3A-1, I3A-2 e I3A-3 han desarrollado el ejercicio de modo parcialmente correcto, en el caso de los estudiantes I3A-1 e I3A-3 se observa que han replicado el mismo error que se ha descrito en la pregunta 3a, es decir, los estudiantes son capaces de aplicar la fórmula y dar la respuesta correctamente; sin embargo, durante el proceso presentan dificultades. Ya que, el estudiante I3A-1 en su desarrollo omite colocar los paréntesis al primer término del trinomio cuadrado perfecto, pero eleva al cuadrado dicho término, en cambio el estudiante I3A-3 cuando realiza la multiplicación factor por factor del binomio, según la simbolización matemática que él emplea, expresa de manera escrita que efectuará una resta con los factores, pero finalmente los multiplica ya que su intención es comprobar su resultado (Apéndice I – Entrevista 2). En cuanto al estudiante I3A-2 el error que ha presentado ha sido con los operadores, ya que los ha intercambiado tal como se puede apreciar en la Figura 9.

**Figura 9**

Respuesta del estudiante I3A-2 a la pregunta 3b

$$\begin{aligned}
 b) (2x-5)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(5) - (5)^2 \\
 &4x^2 + 20x - 25
 \end{aligned}$$

## Pregunta 4:

4. Jaime ha construido en un terreno de forma cuadrada una casa. Para ello ha dividido dicho terreno en cuatro partes. Dibuje las divisiones que Jaime hizo según lo que se indica a continuación:
- Dos rectángulos de “k” metros de largo y “n” metros de ancho, para ubicar los espacios de la cocina y el dormitorio.
  - Dos cuadrados, uno de “k” metros y otro de “n” metros por lado respectivamente para la ubicación de la sala y el baño.
- a) Represente la situación e interprete de manera simbólica la información que le brinda el problema para calcular el área total del terreno de la casa de Jaime.
- b) Si uno de los rectángulos representa la zona del dormitorio y tiene un área de  $35 \text{ m}^2$  ¿Cuál es el área total del terreno de la casa de Jaime?
- Nota: Ninguno de los lados puede tomar el valor de uno.*

En la pregunta 4a se evidencia que solo tres de los seis estudiantes (I3A-2, I3A-4 e I3A-6) han respondido de manera correcta y por tanto son capaces de establecer relaciones entre datos para transformar la expresión verbal de la situación problemática a expresiones algebraicas y geométricas que involucran el desarrollo del binomio suma al cuadrado, para evidenciar lo descrito se puede visualizar la respuesta obtenida por el informante I3A-6 en la Figura 10. Asimismo, se aprecia que los estudiantes para dar solución al problema lo han hecho mediante la representación algebraica, pero han utilizado la representación gráfica como parte de su procedimiento; por ende, ellos demuestran de manera escrita su comprensión sobre el binomio en estudio. Respecto a los otros tres estudiantes (I3A-1, I3A-3 e I3A-5) han desarrollado de manera parcial la pregunta, en el caso del estudiante I3A-5 ha podido establecer relaciones entre datos para expresar de forma simbólica lo que le piden; además, señala el área del cuadrado, pero sin desarrollar la expresión del binomio suma al cuadrado.

**Figura 10**

*Respuesta del estudiante I3A-6 a la pregunta 4a*

4. a.

$$A_{\square} = (k+n)^2 = (k+n)(k+n) = k^2 + 2(k)(n) + n^2 = k^2 + 2kn + n^2$$

Por otro lado, el estudiante I3A-1 demuestra que tiene poco dominio para expresar de manera escrita su comprensión sobre el binomio suma al cuadrado ya que solo ha logrado identificar las relaciones entre datos que da el problema para representarlo de manera gráfica, pero no ha podido identificar la dimensión del lado del cuadrado del gráfico elaborado por él mismo, por ende, no ha calculado el área ni ha seleccionado alguna estrategia para desarrollarla. En cambio, el estudiante I3A-3 ha desarrollado la pregunta, apartado *a*, de manera parcialmente correcta ya que en el gráfico que ha elaborado no señala las dimensiones, sin embargo, da a entender que el lado de la figura tiene por dimensión  $(k + n)$ , por lo que procede a realizar la multiplicación del binomio por sí mismo, pero en la ecuación se observa que en el primer miembro no ha colocado el exponente dos en la expresión del binomio suma. Por otro lado, se puede apreciar que el estudiante duda de sus conocimientos puesto que, ha borrado el procedimiento que ha hecho aplicando la fórmula del binomio suma al cuadrado (Figura 11).

**Figura 11**

*Respuesta del estudiante I3A-3 a la pregunta 4a*

4a-

Primera pregunta

$$(k+m) = (k+m)(k+m)$$
~~$$(k+m)^2 = k^2 + 2km + m^2$$~~

$$(k+m)^2 = k^2 + 2km + m^2$$

$$\begin{array}{r} (k+m) \\ \times \\ (k+m) \\ \hline k^2 + km \\ km + m^2 \\ \hline k^2 + 2km + m^2 \end{array}$$

En la pregunta 4b se observa que cuatro de los seis estudiantes (I3A-2, I3A-4, I3A-5 e I3A-6) han respondido de manera satisfactoria y los estudiantes I3A-1 e I3A-3 no, lo que demuestra una correspondencia con los resultados de la pregunta anterior puesto que las preguntas mantienen una relación directa. Para precisar la información obtenida por los estudiantes y descrita de manera general en líneas anteriores, se analizarán las respuestas de algunos estudiantes. En el caso del estudiante I3A-5, se puede apreciar que ha podido establecer relaciones entre datos de manera correcta al transformar la expresión verbal a expresiones algebraicas que involucra el desarrollo de un binomio al cuadrado, además realiza una representación gráfica donde ubica las dimensiones y el dato del área de una parte de la figura; con este apoyo logra desarrollar adecuadamente la

representación algebraica del binomio suma al cuadrado. Por el contrario, los estudiantes I3A-1 e I3A-3 evidencian que no han logrado desarrollar habilidades algebraicas para dar una solución correcta, es más, el primer estudiante toma el dato de  $35 \text{ m}^2$  como dimensión del lado del terreno, lo que evidencia que ni siquiera ha podido extraer e interiorizar los datos de manera correcta y el segundo estudiante no ha desarrollado la pregunta.

Pregunta 5:

5. Karla desea comprar un terreno de forma cuadrada para la construcción de su tienda, a ella le gustaría que el lado tenga una longitud de 200 metros, sin embargo, por falta de presupuesto la dimensión original del lado del terreno tiene que disminuir en " $b$ " metros.

➤ Represente la situación mediante una gráfica y calcule el área del terreno que puede comprar Karla.

Finalmente, en la pregunta 5 se observa que tres de los seis estudiantes (I3A-4, I3A-5 e I3A-6) han desarrollado la pregunta de manera parcialmente correcta, es decir, los alumnos han podido establecer relaciones entre datos para transformar la expresión verbal a expresiones exclusivamente algebraicas, pero no han podido representar de manera gráfica la información brindada a excepción del estudiante I3A-6 que ha intentado hacer dicha representación; él ha dibujado un cuadrado grande y ha colocado por dimensión del lado 200 metros, posteriormente y señalando con una flecha ha dibujado un cuadrado más pequeño con dimensión de  $200 - b$  metros por lado, asimismo, estos tres estudiantes han desarrollado muy bien la parte operativa de la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado tal como se puede apreciar en la respuesta del estudiante I3A-5 en la Figura 12.

**Figura 12**

*Respuesta del estudiante I3A-5 a la pregunta 5*

So



$$(200 - b)^2 = (200)^2 - 2(200)(b) + (b)^2$$

$$40000 - 400b + b^2$$

Por otra parte, los estudiantes I3A-1, I3A-2 e I3A-3 evidencian que no han podido desarrollar la pregunta, en el caso del estudiante I3A-2 en su intento de representar de manera gráfica los datos del problema se puede visualizar que la dimensión de su gráfico es de  $200 + 2b$  metros, además, ha aplicado de manera incorrecta la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado, ya

que, el estudiante ha tenido una confusión con los signos de suma y resta como se ha descrito y evidenciado anteriormente en las preguntas 2b y 3b. Los estudiantes I3A-1 e I3A-3 han comprendido mal los datos del problema, ya que el primer estudiante toma el dato de 200 metros como el área del terreno mas no como dimensión del lado de la figura y el segundo estudiante, evidencia inseguridad de lo que él sabe puesto que ha estado desarrollando bien la pregunta, pero ha borrado lo que ha hecho y ha considerado como dimensión del terreno  $20 - b$  metros y con esa medida ha efectuado la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado.

Para visualizar lo descrito en este apartado, se ha elaborado la Tabla 6 en la cual se muestra el puntaje alcanzado por pregunta de cada informante perteneciente al grupo de estudio 1.

**Tabla 6**

*Resultados obtenidos del grupo de estudio 1 en el test*

Informante	Puntaje <sup>3</sup>								
	Pregunta 1	Pregunta 2a	Pregunta 2b	Pregunta 3a	Pregunta 3b	Pregunta 4a	Pregunta 4b	Pregunta 5	Total
I3A-1	1	0.5	0.5	1	1	0.5	0	0	4.5
I3A-2	1.5	0	0	2	1	3.5	3.5	0	11.5
I3A-3	2.5	1	0.5	1	1	1	0	0	07
I3A-4	0	0	1	2	2	3.5	3.5	3	15
I3A-5	2.5	0.5	1	2	2	1.5	3.5	3	16
I3A-6	2.5	0	1	2	2	3.5	3.5	3	17.5

Nota. Elaboración propia.

Teniendo en cuenta la información presentada en la Tabla 6 y la rúbrica analítica para evaluar el test se puede evidenciar que dos de los seis estudiantes (I3A-1 e I3A-3) no han aprendido el binomio al cuadrado de manera significativa, por lo que cabe señalar que aún presentan dificultades para comprender este tópico matemático ya que no han sido capaces de demostrar la adquisición de conocimientos, habilidades y/o actitudes algebraicas para desarrollar de modo competente y correcto las situaciones contextualizadas planteadas en el instrumento de evaluación acerca del binomio al cuadrado; incluso han tratado de aprender de manera memorística el tema por lo que ni siquiera han podido establecer relaciones entre datos para transformar la expresión verbal del enunciado de los problemas a expresiones algebraicas puesto que con este grupo de estudio se han

<sup>3</sup> La puntuación máxima del test de esta investigación es de 19 puntos.

trabajado las representaciones algebraica y verbal del binomio al cuadrado, por lo que es comprensible que hayan tenido dificultades al pedirles que realicen la representación gráfica.

Asimismo, el estudiante I3A-2 se encuentra en proceso de comprender mejor este aspecto algebraico pues entre las dificultades que ha tenido, ha resaltado la falta de apropiación de la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado, ya que ha invertido el orden de los operadores suma y resta; sin embargo, cuando se trata del binomio suma al cuadrado ha efectuado bien la parte operativa tanto en el ejercicio como en la situación problemática planteados en el test, además de respetar el uso adecuado de los paréntesis, por lo que se evidencia de manera escrita su comprensión sobre el binomio suma al cuadrado mediante su representación algebraica.

Respecto a los otros tres estudiantes (I3A-4, I3A-5 e I3A-6), se observa que han entendido el tema algebraico en estudio y por lo mismo han desarrollado de manera satisfactoria los ejercicios y problemas planteados en el test, de ahí que, se destaque la correcta selección y combinación de estrategias heurísticas para darles solución mediante la representación algebraica; no obstante, ningún estudiante pudo representar de manera geométrica la situación problemática del binomio diferencia al cuadrado pero han dibujado un cuadrado de dimensión  $(200 - b)$  metros por lado. Por otra parte, es importante mencionar que a pesar de que estos alumnos han mostrado dominio en el tema, no han podido demostrar la apropiación absoluta de esta representación ya que incluso han tenido que escribir la forma final del desarrollo del binomio diferencia al cuadrado para responder a la pregunta 2, respondiendo correctamente la pregunta 2b.

#### **4.1.2. Resultados del test aplicado al grupo de estudio 2**

Se aplicó el instrumento de evaluación al grupo de estudio 2 a quienes se les enseñó el binomio al cuadrado a través de las representaciones geométrica y verbal. Este grupo estuvo integrado por los estudiantes de tercer año de educación secundaria de la sección "D" de una institución educativa pública de Piura. Los resultados cuantitativos se muestran en el Apéndice E y sirven como referencia para describir las respuestas de los estudiantes.

Pregunta 1:

1. Indique si la expresión algebraica  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$  es correcta o no. Fundamente su respuesta.

En la pregunta 1 se evidencia que dos de los cuatro estudiantes (I3D-3 e I3D-4) han podido justificar y comprobar de manera correcta la invalidez de la siguiente expresión  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ , para ello los estudiantes en mención se han apoyado de la representación algebraica del binomio suma al cuadrado, incluso el estudiante I3D-3 ha utilizado también la representación verbal para validar su afirmación. En cambio, las respuestas de los estudiantes I3D-1 y I3D-2 son insuficientes, ya

que no utilizan ninguna representación del binomio suma al cuadrado o emplean ejemplos y/o propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre este tópico matemático, solo se limitan a decir que es incorrecta porque falta un término en la igualdad como lo afirma el estudiante I3D-2, en cambio el estudiante I3D-1 responde que falta sumar las dos incógnitas pero según se aprecia en la Figura 13, el estudiante las multiplica, es más, la incógnita “y” la eleva al cuadrado.

**Figura 13**

*Respuesta del estudiante I3D-1 a la pregunta 1*

1. Indique si la expresión algebraica  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$  es correcta o no. Fundamente su respuesta.

$(x+y)^2$   
 $xy^2$       No es correcto, ya que se puede sumar las 2 incógnitas.

Pregunta 2:

2. Para la siguiente expresión:  $(x - y)^2$

- Escriba su representación verbal.
- Escriba la representación verbal del desarrollo de la expresión dada.

En la pregunta 2, apartado a, se observa que todos los estudiantes expresan de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcial mediante su representación verbal, ya que así se solicita en la pregunta, en este caso ninguno de los estudiantes ha respondido de manera correcta, pero se aprecia que ellos han intentado responder según sus propios conocimientos y palabras. En la misma línea, se ha obtenido similares resultados en la pregunta 2b, sin embargo, para este apartado se evidencia en todos los estudiantes que hay una necesidad visual de tener la forma final de la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado para responder a la pregunta. En el caso del estudiante I3D-1 a pesar de tener escrito correctamente la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado, dentro de la representación verbal que él hace, coloca el signo más en lugar de menos; por otro lado, el estudiante I3D-2 utiliza la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado (aplicación de la fórmula) para responder, asimismo dentro de las observaciones realizadas, se visualiza que el estudiante I3D-4 no utiliza ni la representación algebraica ni la geométrica para tener la expresión final del binomio diferencia al cuadrado, sino que ha interiorizado la secuencia de la sumatoria de áreas puesto que no traza el gráfico sino que de frente realiza la parte operativa tal como se observa en la Figura 14.

Figura 14

Respuesta del estudiante I3D-4 a la pregunta 2b

b) Escribe su representación verbal del desarrollo de la expresión dada

$$(x-y)^2 = x^2 - (yx - y^2) - (yx - y^2) = y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - yx + y^2 - yx + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2yx + y^2$$

"El cuadro de la diferencia de  $x-y$  es igual al cuadrado de la primera cantidad ( $x^2$ ), menos la multiplicación de ambas cantidades ( $yx$ ), más el cuadro de su segunda cantidad.

Pregunta 3:

3. Desarrolle los siguientes ejercicios mostrando el procedimiento seguido:

a)  $(3y + 4)^2 =$

b)  $(2x - 5)^2 =$

En la pregunta 3, apartado a, se observa que dos de cuatro estudiantes (I3D-3 e I3D-4) han seleccionado y combinado de manera correcta estrategias heurísticas para dar solución al ejercicio planteado sobre el binomio suma al cuadrado mediante la representación geométrica. No obstante, los estudiantes I3D-1 e I3D-2 han presentado ciertos errores en el proceso para dar solución a la pregunta, en el caso del estudiante I3D-1, no ha realizado la gráfica pero ha colocado de manera vertical los productos de las dimensiones de las figuras para calcularlas y obtener el área para posteriormente realizar la suma algebraica, en este procedimiento se puede apreciar que el estudiante ha realizado mal la multiplicación de ciertas áreas presentando dificultades en la operación de multiplicación de bases iguales al no sumar los exponentes y en otra operación, al no considerar la variable ya que solo ha multiplicado los coeficientes tal como se muestra en la Figura 15.

Asimismo, el estudiante I3D-2 ha desarrollado la pregunta 3a mediante la representación algebraica del binomio suma al cuadrado y como la docente no le ha explicado el tema a través de esta representación se le ha hecho una entrevista, en la cual comenta que él de manera autónoma ha visto videos y lo ha desarrollado utilizando esa representación (Apéndice I – Entrevista 3); en el procedimiento seguido por el estudiante se evidencia que ha interiorizado la fórmula correctamente, sin embargo al igual que a varios estudiantes del grupo de estudio 1 presenta como dificultad el no

considerar los paréntesis cuando eleva al cuadrado el primer y tercer término del trinomio cuadrado perfecto, siendo ese su único error.

**Figura 15**

*Respuesta del estudiante I3D-1 a la pregunta 3a*

3. Desarrolle los siguientes ejercicios mostrando el procedimiento seguido:

a)  $(3y + 4)^2 =$

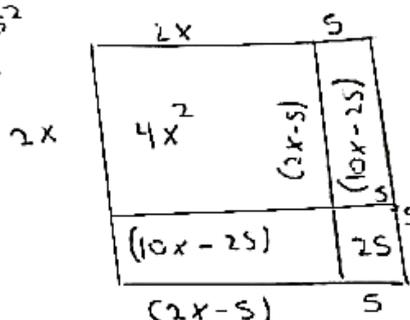
$$\begin{array}{l} 3y \cdot 3y = 9y^2 \\ 3y \cdot 4 = 12y \\ 4 \cdot 4 = 16 \\ 4 \cdot 3y = 12y \end{array} \quad 9y^2 + 24y + 16$$

En la pregunta 3b se evidencia que solo el estudiante I3D-3 ha desarrollado de manera correcta el ejercicio del binomio diferencia al cuadrado mediante su representación gráfica, es decir, ha dibujado correctamente colocando sus respectivas dimensiones, calculando cada área hasta efectuar la suma algebraica sin equivocaciones; por ende, el estudiante ha expresado de manera escrita su comprensión del binomio en estudio. De manera muy similar se ha obtenido como respuesta la del estudiante I3D-4 solo que, en este caso, se ha hecho una observación en el procedimiento, específicamente en la identificación y señalización de las dimensiones de la figura graficada por el estudiante puesto que da entender que el lado que corresponde como medida  $(2x - 5)$  es  $2x$ , pero a su vez también pone la dimensión correcta en otros lados de la figura, después, en la parte operativa ha omitido colocar los paréntesis al número cinco tal como se puede apreciar en la Figura 16.

**Figura 16**

*Respuesta del estudiante I3D-4 a la pregunta 3b*

$$\begin{aligned} \text{b) } (2x - 5)^2 &= 4x^2 - (10x - 25) - (10x - 25) - 5^2 \\ &= 4x^2 - 10x + 25 - 10x + 25 - 25 \\ &= 4x^2 - 20x + 25 \end{aligned}$$



En el caso del estudiante I3D-1 ha presentado las mismas características en el desarrollo realizado en la pregunta anterior y por tanto hay similitud en los errores cometidos, en la operación de multiplicación solo se ha equivocado en calcular la primera área al no elevar al cuadrado la variable, es decir, ha colocado  $2x \cdot 2x = 4x$  y no ha aplicado la propiedad que señala que en el producto de bases iguales los exponentes de las variables se suman; asimismo, el estudiante en su respuesta final (trinomio cuadrado perfecto) ha utilizado como único operador el de resta por lo que selecciona y combina estrategias heurísticas de manera errónea para dar solución al ejercicio sobre el binomio diferencia al cuadrado. Sin embargo, en la pregunta 2b, los operadores de la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado están escritos correctamente, de manera que, es evidente que el estudiante no ha interiorizado correctamente el binomio diferencia al cuadrado. En cuanto al estudiante I3D-2 de igual forma que la pregunta anterior ha desarrollado el ejercicio mediante la representación algebraica tendiendo a cometer errores por no colocar paréntesis como parte de la simbología matemática, ya que se entiende que eleva al cuadrado el primer y tercer término del trinomio cuadrado perfecto, pero no se visualiza formalmente ese proceso, por lo que a simple inspección el estudiante estaría afirmando que  $2x^2$  es igual a  $4x^2$ .

Pregunta 4:

4. Jaime ha construido en un terreno de forma cuadrada una casa. Para ello ha dividido dicho terreno en cuatro partes. Dibuje las divisiones que Jaime hizo según lo que se indica a continuación:

- Dos rectángulos de “k” metros de largo y “n” metros de ancho, para ubicar los espacios de la cocina y el dormitorio.
- Dos cuadrados, uno de “k” metros y otro de “n” metros por lado respectivamente para la ubicación de la sala y el baño.

a) Represente la situación e interprete de manera simbólica la información que le brinda el problema para calcular el área total del terreno de la casa de Jaime.

b) Si uno de los rectángulos representa la zona del dormitorio y tiene un área de  $35 \text{ m}^2$  ¿Cuál es el área total del terreno de la casa de Jaime?

*Nota: Ninguno de los lados puede tomar el valor de uno.*

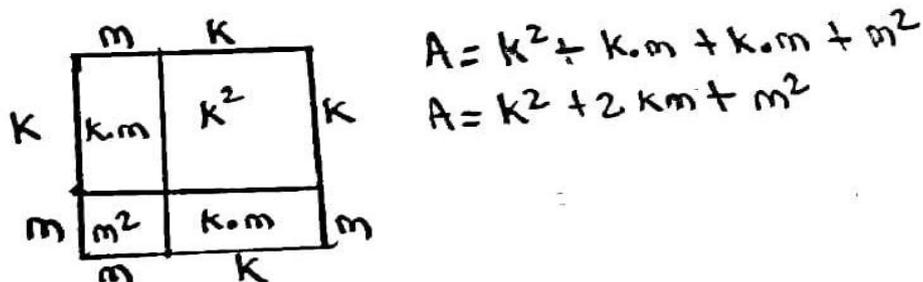
En la pregunta 4a se observa que solo el estudiante I3D-3 ha establecido relaciones entre datos de manera correcta para transformar la expresión verbal de la situación problemática a expresiones algebraicas y geométricas que involucran el desarrollo de un binomio suma al cuadrado, aparte de eso, ha logrado desarrollar con éxito la parte operativa de la sumatoria de áreas que implica la representación gráfica de este tópico matemático tal como se observa en la Figura 17. Respecto a los estudiantes I3D-1, I3D-2 e I3D-4 han sido capaces de establecer parcialmente relaciones entre datos de manera correcta para transformar la expresión verbal de la situación

problemática a expresiones algebraicas y geométricas que involucran el desarrollo de un binomio suma al cuadrado, en otras palabras, han realizado el gráfico y han colocado las dimensiones de manera correcta, sin embargo, ninguno ha realizado el procedimiento correcto de la sumatoria de áreas.

**Figura 17**

*Respuesta del estudiante I3D-3 a la pregunta 4a*

- a) Represente la situación e interprete de manera simbólica la información que le problema para calcular el área total del terreno de la casa de Jaime. <sup>1</sup>



Para ahondar en el procedimiento seguido de los estudiantes I3D-1, I3D-2 e I3D-4 se analizarán las respuestas de cada uno de ellos, el estudiante I3D-1 ha seleccionado y ha combinado estrategias heurísticas para dar solución al problema planteado sobre el binomio suma al cuadrado mediante la representación geométrica, aunque cabe señalar que para el estudiante es indistinto poner como variable la letra “n” en mayúscula o minúscula puesto que las ha combinado. Por otro lado, el estudiante I3D-4 ha indicado el área del terreno que se le pide calcular, pero no muestra su desarrollo y la igualdad que él escribe es incorrecta ya que la expresión del binomio suma al cuadrado no lo ha elevado al cuadrado, pero lo iguala al trinomio cuadrado perfecto; por lo que evidentemente no ha seleccionado ni ha combinado estrategias heurísticas para dar solución al problema planteado sobre el binomio suma al cuadrado mediante la representación geométrica e igualmente es el caso del estudiante I3D-2 quien ha omitido esa parte.

En la pregunta 4b se observa que todos los estudiantes han respondido de manera satisfactoria, es decir, han establecido relaciones entre datos de manera correcta para transformar la expresión verbal de la situación problemática a expresiones algebraicas y geométricas que involucran el desarrollo de un binomio suma al cuadrado. Es más, todos los estudiantes han podido desarrollar de manera eficiente la sumatoria de áreas, no obstante, solo tres de los cuatro estudiantes (I3D-2, I3D-3 e I3D-4) han hecho uso de una simbología para indicar y señalar que están realizando el cálculo de la sumatoria de áreas; es decir, el estudiante I3D-2 ha escrito “el área total”, el estudiante I3D-3

ha puesto la letra "A" y el estudiante I3D-4 ha atinado a escribir la expresión del binomio al cuadrado y han hecho los respectivos cálculos.

Por tanto, de lo descrito anteriormente se evidencia que han comprendido este tópico matemático y lo comunican de manera escrita a través del desarrollo que han efectuado, no obstante, hay que mencionar que solo al estudiante I3D-1 se le ha valorado como parcialmente correcta la selección de estrategias para desarrollar el problema que involucra el binomio suma al cuadrado por la manera de presentar su procedimiento, ya que, el estudiante coloca de manera vertical cada área pero no utiliza una simbología como sí lo han hecho sus otros compañeros, solo escribe los cuatro sumandos y lo iguala al resultado, procedimiento que ha utilizado en las preguntas del examen que involucran desarrollar un binomio al cuadrado y que lo ha hecho incluso desde las sesiones de aprendizaje.

Pregunta 5:

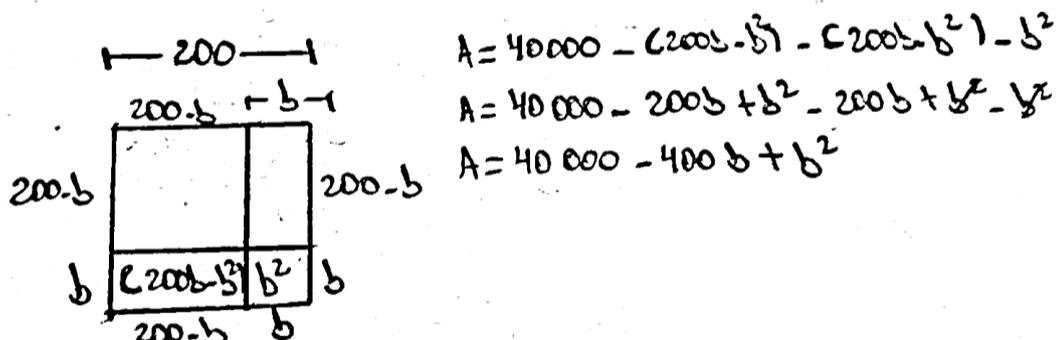
5. Karla desea comprar un terreno de forma cuadrada para la construcción de su tienda, a ella le gustaría que el lado tenga una longitud de 200 metros, sin embargo, por falta de presupuesto la dimensión original del lado del terreno tiene que disminuir en " $b$ " metros.
- Represente la situación mediante una gráfica y calcule el área del terreno que puede comprar Karla.

Por último, en la pregunta 5 se observa que solo el estudiante I3D-3 ha establecido relaciones entre datos de manera correcta para transformar la expresión verbal de la situación problemática a expresiones algebraicas y geométricas que involucran el desarrollo de un binomio diferencia al cuadrado. De igual forma, el proceso seguido del estudiante en cuanto a la selección y combinación de estrategias heurísticas para dar solución al problema mediante la representación geométrica lo ha hecho muy bien, incluso ha señalado y ha ubicado las dimensiones de los lados de la figura correctamente; por lo que, el estudiante expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación geométrica tal como se observa en la Figura 18.

Figura 18

Respuesta del estudiante I3D-3 a la pregunta 5

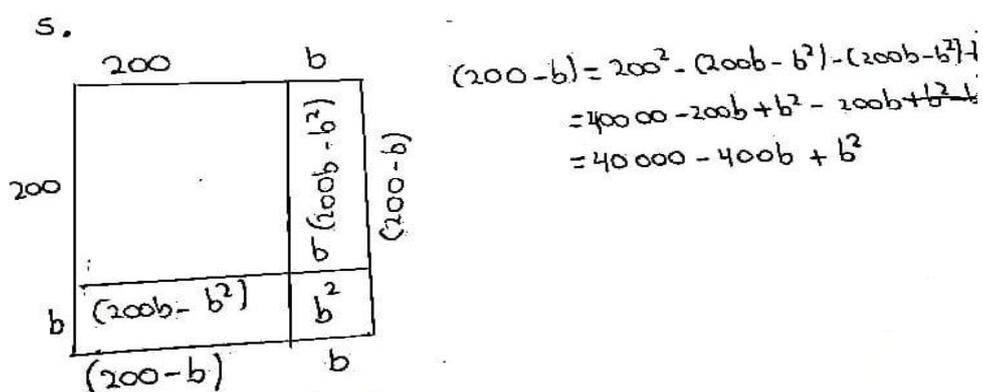
- Represente la situación mediante una gráfica y calcule el área del terreno que puede comprar Karla.



Posteriormente, se evidencia que el estudiante I3D-4 ha establecido relaciones entre datos de manera parcialmente correcta para transformar la expresión verbal de la situación problemática a expresiones algebraicas y geométricas que involucran el desarrollo de un binomio diferencia al cuadrado porque en la representación gráfica, al igual que en la pregunta 3b, el estudiante no señala correctamente la dimensión que corresponde al binomio diferencia al cuadrado puesto que da entender que el lado que corresponde como medida  $(200 - b)$  es 200, pero a su vez también pone la dimensión correcta en otros lados de la figura. Asimismo, se puede visualizar que el estudiante en la formulación de la ecuación, tiene como único error escribir en el primer miembro el binomio diferencia entre paréntesis, pero no lo eleva al cuadrado, error repetitivo ya que en la pregunta 4a hace lo mismo, de manera que se le ha realizado una entrevista para preguntarle el motivo de su error ya que el estudiante ha efectuado correctamente la parte operativa de la representación geométrica tal como se observa en la Figura 19, lo que él responde es que no creía tan necesario elevarlo al cuadrado ya que después de la igualdad (segundo miembro de la ecuación), el procedimiento que realiza está bien (Apéndice I – Entrevista 4).

Figura 19

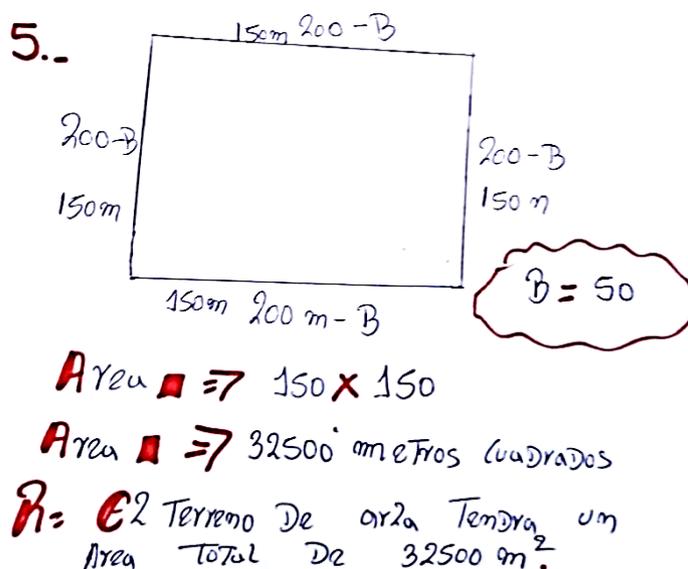
Respuesta del estudiante I3D-4 a la pregunta 5



Continuando con el análisis de los resultados obtenidos en la pregunta 5, el estudiante I3D-1 ha establecido relaciones entre datos de manera errónea para transformar la expresión verbal de la situación problemática a expresiones algebraicas y geométricas, es decir, respecto a la gráfica es incapaz de señalar e identificar correctamente los lados de la figura que él mismo ha realizado por lo que hay una incongruencia entre los datos que muestra la figura y los datos que escribe en su ecuación, ya que en esta última presenta los datos correctamente y el procedimiento que realiza también aunque ha omitido ciertos pasos para llegar al resultado. Ahora, en cuanto al estudiante I3D-2 se evidencia que no ha podido establecer relaciones entre los datos para transformar la expresión verbal de la situación problemática a expresiones algebraicas y geométricas, incluso, el estudiante ha asignado un valor numérico para la variable "b" por lo que evidentemente ya ni siquiera desarrolla el concepto del binomio diferencia al cuadrado tal como se observa en la Figura 20.

**Figura 20**

*Respuesta del estudiante I3D-2 a la pregunta 5*



De lo descrito en este apartado, se presenta a continuación la Tabla 7 en la cual se visualiza el puntaje alcanzado por pregunta de cada informante perteneciente al grupo de estudio 2.

**Tabla 7***Resultados obtenidos del grupo de estudio 2 en el test*

Informante	Puntaje <sup>4</sup>								Total
	Pregunta 1	Pregunta 2a	Pregunta 2b	Pregunta 3a	Pregunta 3b	Pregunta 4a	Pregunta 4b	Pregunta 5	
I3D-1	0	0.5	0.5	0	0	2	2.5	1.5	07
I3D-2	0	0.5	0.5	1	1	1	3.5	0	7.5
I3D-3	2.5	0.5	0.5	2	2	3.5	3.5	3.5	18
I3D-4	2.5	0.5	0.5	2	1.5	1.5	3.5	2	14

Nota. Elaboración propia.

Considerando la información presentada en la Tabla 7 y la rúbrica analítica para evaluar el test se puede evidenciar que dos de los cuatro estudiantes (I3D-1 e I3D-2) no han aprendido significativamente el binomio al cuadrado, por lo que es notorio que aún tienen dificultades para entender este tema algebraico haciendo uso de las representaciones geométrica y verbal; en este sentido y para ilustrar lo señalado, se observa que ambos estudiantes no expresan correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio. En cuanto al desarrollo de los ejercicios planteados en el test, el estudiante I3D-2 utiliza la representación algebraica del binomio al cuadrado y las respuestas que obtiene son correctas, pero presenta un error operativo en su procedimiento, el no utilizar paréntesis, lo que conlleva a interpretar que el estudiante no eleva al cuadrado los términos algebraicos que debería.

Y en la misma línea, el estudiante I3D-1 evidencia que no sabe multiplicar monomios, por lo que sus respuestas y el procedimiento son incorrectos, es más, ninguno de estos estudiantes ha graficado los binomios al cuadrado propuestos; aunque, en las situaciones contextualizadas si lo hacen ya que se les ha pedido hacerlo, respecto a este punto, los estudiantes brindan nociones de que pueden desarrollar un problema sobre el binomio suma al cuadrado y dar una buena respuesta pero estableciendo relaciones entre datos de modo parcialmente correcto para transformar la expresión verbal del enunciado a expresiones geométricas, al igual que en la selección y combinación de estrategias heurísticas.

Ahondando en la descripción de los resultados obtenidos, se observa que el estudiante I3D-4 muestra un mejor dominio del tema, lo que significa que es capaz de seleccionar y combinar estrategias heurísticas de manera apropiada para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el

<sup>4</sup> La puntuación máxima del test de esta investigación es de 19 puntos.

binomio al cuadrado mediante la representación geométrica, aunque debido a que el estudiante ha incurrido en errores de simbolismo matemático formal, se puede concluir que no ha comprendido el tema en su totalidad; ya que expresa su entendimiento sobre la sumatoria de áreas pero no explicita en los problemas que desarrolla un binomio al cuadrado y en el caso de la situación contextualizada acerca del binomio diferencia al cuadrado ha efectuado bien la parte operativa, en cambio, en su representación gráfica no presenta correctamente las dimensiones.

Finalmente, para concluir con la descripción de las respuestas obtenidas en el instrumento de evaluación por el grupo de estudio 2, se observa que el estudiante I3D-3 ha alcanzado un alto puntaje, lo que evidencia que ha podido desarrollar de modo competente la mayoría de las preguntas, es decir, ha logrado adquirir conocimientos, habilidades y/o actitudes algebraicas para dar solución a los ejercicios y problemas usando las representaciones geométrica y verbal sin errores. Por lo que este alumno, en general, es capaz de justificar y comprobar de modo certero la validez de sus afirmaciones mediante ejemplos y propiedades matemáticas para evidenciar su dominio sobre el tema lo que involucra establecer datos y relaciones adecuadamente, como también, saber elegir y combinar de manera perspicaz estrategias heurísticas para dar solución a situaciones problemáticas de la vida real. Teniendo como interferencia en su aprendizaje, la formalidad que exige la representación verbal del binomio al cuadrado para responder a la pregunta 2.

#### **4.2. Análisis comparativo de los resultados del test aplicado al grupo de estudio 1 y al grupo de estudio 2**

Luego de realizar el análisis descriptivo a cada grupo de estudio, se ha elaborado un cuadro comparativo (Tabla 8) con la finalidad de contrastar el aprendizaje adquirido mediante las representaciones algebraica-verbal (grupo de estudio 1) y geométrica-verbal (grupo de estudio 2) del binomio al cuadrado, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura. Para ello, se ha utilizado como instrumento de evaluación una rúbrica para valorar, describir y evidenciar con cuál de las representaciones hay un mejor rendimiento en el aprendizaje de los estudiantes en el test acerca del binomio al cuadrado. De modo que, en el cuadro comparativo se detallan los aspectos logrados por cada grupo de estudio en base a las capacidades de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

**Tabla 8**

*Análisis comparativo del aprendizaje adquirido del grupo de estudio 1 y grupo de estudio 2 en el test*

<b>Aprendizaje del binomio al cuadrado</b>	<b>Grupo de estudio 1 (Representación algebraica y verbal)</b>	<b>Grupo de estudio 2 (Representación geométrica y verbal)</b>
Traduce datos y	En la resolución de las situaciones	En la resolución de las situaciones

condiciones expresiones algebraicas y gráficas.	a problemáticas, los estudiantes son capaces de establecer relaciones entre datos para transformar la expresión verbal a expresiones algebraicas y geométricas que involucran el desarrollo de un binomio suma al cuadrado; en cuanto al binomio diferencia al cuadrado, solo pueden transformar la expresión verbal a expresiones algebraicas.	problemáticas, los estudiantes son capaces de establecer relaciones entre datos para transformar la expresión verbal a expresiones algebraicas y geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.
Comunica comprensión sobre las relaciones algebraicas.	su Los estudiantes expresan de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación algebraica; en cuanto a la representación geométrica lo hacen si se trata del binomio suma al cuadrado y respecto a la representación verbal, lo hacen de manera parcial.	Los estudiantes expresan de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación geométrica y respecto a la representación verbal, lo hacen de manera parcial.
Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	y Los estudiantes seleccionan y combinan estrategias heurísticas para dar solución a ejercicios y problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica y lo hacen mediante la representación geométrica si es que se trata del binomio suma al cuadrado.	y Los estudiantes seleccionan y combinan estrategias heurísticas para dar solución a ejercicios y problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación geométrica.
Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	Los estudiantes son capaces de justificar y comprobar la invalidez de una igualdad incorrecta sobre el binomio suma al cuadrado	Los estudiantes son capaces de justificar y comprobar la invalidez de una igualdad incorrecta sobre el binomio suma al cuadrado

---

mediante	propiedades	mediante	propiedades
matemáticas	para señalar su	matemáticas	para señalar su
comprensión	sobre este tema	comprensión	sobre este tema
algebraico	utilizando	algebraico	utilizando
representación algebraica.	la	representación	algebraica y/o
		verbal.	

---

Nota. Elaboración propia.

En el cuadro comparativo se visualiza la información correspondiente a cada grupo de estudio según la información obtenida en la aplicación del test luego del tratamiento didáctico de manera general en relación a las capacidades matemáticas que un estudiante de tercer año de educación secundaria debe desarrollar y fusionar para potenciar la competencia matemática en relación al álgebra y de esa forma, mejorar el pensamiento abstracto. En esta línea y considerando también los resultados cuantitativos, se evidencia que en ambos grupos de estudio hay dificultades para aprender este tema algebraico, pero de igual forma es posible un aprendizaje significativo del tema al margen de las representaciones que se usen para su enseñanza.

Por lo tanto, se infiere que mediante la aplicación del tratamiento didáctico haciendo uso de las representaciones geométrica y verbal hay un mejor rendimiento en el aprendizaje del binomio al cuadrado, ya que los estudiantes son capaces de representar simbólicamente la información que se les presenta en el problema a comparación del grupo de estudio 1 a quienes se les enseñó mediante las representaciones algebraica y verbal, puesto que ellos han podido representar de manera geométrica el problema porque se trataba del binomio suma al cuadrado, aspecto que se abordó en la primera sesión de aprendizaje, pero no pueden representar de manera simbólica la información cuando se trata del binomio diferencia al cuadrado. Habría que añadir, que el estudiante I3D-3 perteneciente al grupo de estudio 2 utiliza preferentemente la representación verbal para dar solución a la expresión algebraica de un binomio al cuadrado por lo que de manera indirecta trabaja la representación algebraica del tema en mención.

#### **4.3. Discusión de resultados**

A partir de los hallazgos encontrados en el grupo de estudio 2 a quienes se les enseñó el binomio al cuadrado mediante las representaciones geométrica y verbal se evidencia que efectivamente el uso de distintas representaciones y en especial al utilizar la representación geométrica mejora significativamente el desempeño de los estudiantes, a pesar de que no se vea reflejado en la totalidad de los estudiantes, ya que solo dos de cuatro estudiantes han tenido una buena calificación. Sin embargo, todos los informantes pertenecientes a este grupo mínimamente han podido identificar una igualdad incoherente y responder adecuadamente a una situación

problemática contextualizada sobre el binomio suma al cuadrado con su respectivo gráfico. De este modo, hay una correspondencia con lo que postulan los diferentes autores tales como Duval (1998a; 1998b; 2006), Hitt (1998), Blanco (2009), Gatica y Ares (2012), Godino *et al.* (2012), Oviedo *et al.* (2012) y Aznar (2014) sobre los beneficios del uso de varias representaciones al enseñar un tópico matemático.

Es más, dentro de esta óptica, los resultados obtenidos por cuatro de los seis estudiantes del grupo de estudio 1 evidencian que han logrado interiorizar perfectamente la selección y combinación de estrategias heurísticas para dar solución a ejercicios y problemas sobre el binomio suma al cuadrado mediante la representación algebraica y solo tres de los seis estudiantes lo han hecho también con el binomio diferencia al cuadrado; en otras palabras, se ha promovido el pensamiento abstracto porque han utilizado el lenguaje algebraico respetando su simbología (correcto uso de paréntesis) en la formulación de expresiones algebraicas (Serres, 2011 y Socas *et al.*, 1996).

Ahora bien, tomando en cuenta la idea de los autores Cantoral y Montiel (2003) acerca de que la visualización es una habilidad para representar y comunicar información, se concuerda con la descripción realizada en el aprendizaje adquirido de ambos grupos de estudio en cuanto al binomio al cuadrado de acuerdo a las respuestas obtenidas en las situaciones problemáticas del examen, ya que, los estudiantes han tenido que representar de manera simbólica la información proporcionada; incluso en las sesiones de aprendizaje, el grupo de estudio 1 quienes trabajaron mediante las representaciones algebraica y verbal, les era necesario realizar un gráfico para comprender los problemas.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que el aprendizaje significativo implica comprender y comunicar lo que se está haciendo, se infiere que los estudiantes del grupo de estudio 2 han logrado una mejor captación del binomio al cuadrado porque se ha trabajado el tema mediante las representaciones verbal y geométrica, respecto a esta última representación, al estar íntimamente ligada con la visualización se ha podido lograr que los estudiantes adquieran habilidades para representar de manera visual la información y al ser trabajada en el tema de productos notables, se obtienen resultados favorables como lo demuestran las investigaciones de López (2008) Barreto (2009; 2016), Malqui (2015), Tuesta (2015), Capcha (2016), Libreros (2017), Sedano y Bernardo (2017) y Gómez (2022).

No obstante, este grupo de estudio al trabajar las representaciones mencionadas evitan realizar el gráfico para poder desarrollar los ejercicios y/o problemas porque no sienten la necesidad visual de representar algo que se sobrentiende ya saben o que lo tienen interiorizado, esto se puede explicar con lo que afirman los autores Vinner (1989) y Eisenberg y Dreyfus (1990) citados en la investigación de Hitt (1998), quienes sostienen que algunos de los estudiantes muestran una resistencia al uso de consideraciones visuales porque están mayormente familiarizados con el

pensamiento algorítmico y una de las razones sería “que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente” (p. 27).

Para finalizar este apartado y prescindiendo de las representaciones geométrica y algebraica del binomio al cuadrado, se señalan las dificultades sobre la representación verbal; de las sesiones de clase y las respuestas obtenidas en el test se observa que se mantienen las dificultades en la apropiación de esta representación al margen de que vaya articulada con la representación geométrica o algebraica, puesto que la mayoría de los estudiantes (grupo de estudio 1 y grupo de estudio 2) no pudieron realizar correctamente la traducción de una expresión algebraica a la representación verbal; este resultado guarda relación con lo que sostiene la autora Rodríguez (2015) quien señala que los errores que cometen los estudiantes son debido a características propias del simbolismo algebraico.



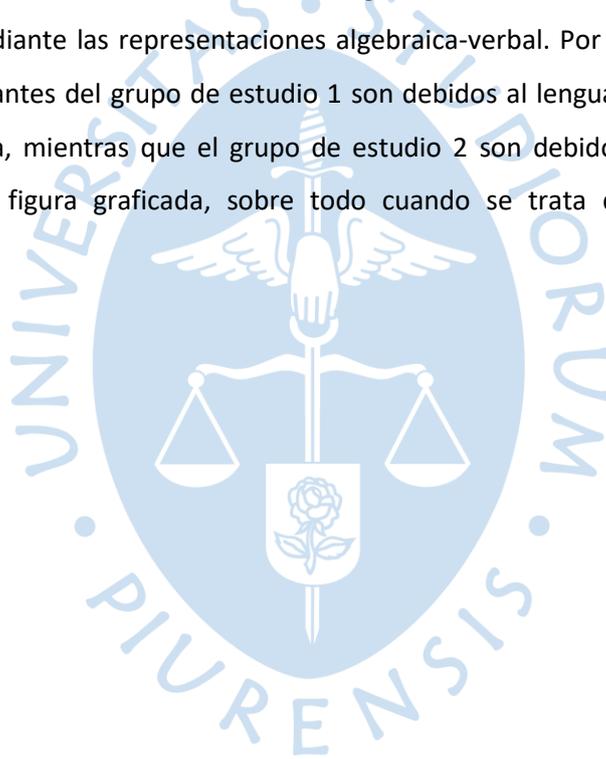
## Conclusiones

Al término de la investigación cuyo objetivo fue establecer semejanzas y diferencias en el aprendizaje adquirido sobre el binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones geométrica-verbal y algebraica-verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura, en el año 2020, se llegaron a las siguientes conclusiones:

- El aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de la representación geométrica y verbal, permite a los estudiantes representar de manera visual los datos que brinda un problema contextualizado, es decir, pueden realizar un gráfico indicando las dimensiones de la figura tanto para el binomio al cuadrado suma como diferencia para posteriormente aplicar la sumatoria de áreas y dar solución al problema. Ante lo expuesto, se evidencia que mediante estas representaciones se puede lograr un aprendizaje significativo ya que son capaces de transferir sus conocimientos a situaciones de la vida real y obtener una respuesta coherente, de modo que, pueden efectuar correctamente la expresión de un binomio al cuadrado sin contexto, no obstante, presentan dificultades con la representación verbal y cuando se les pide evidenciar la apropiación de esta representación tienden a utilizar la expresión final de la representación algebraica del binomio al cuadrado.
- El aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de la representación algebraica y verbal, permite a los estudiantes desarrollar una situación problemática contextualizada utilizando la fórmula del binomio al cuadrado pero solo pueden representar los datos mediante un gráfico cuando se trata del binomio suma al cuadrado porque fue necesario utilizar ese apoyo visual en la primera sesión de aprendizaje por lo que cuando se trata del binomio diferencia, proceden a desarrollarla utilizando solo la representación algebraica; de manera que es más notorio en este grupo de estudio el aprendizaje memorístico. De lo descrito anteriormente, es razonable obtener respuestas correctas cuando efectúan la expresión de un binomio al cuadrado sin contexto, aunque haya errores en el procedimiento. En cuanto a la representación verbal no han logrado interiorizarla por lo que necesitan escribir la expresión algebraica para intentar responder de manera correcta cuando se les pregunta acerca de esta representación.
- Las semejanzas en el aprendizaje adquirido sobre el binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones geométrica-verbal y algebraica-verbal son que en ambos grupos se aprecia un razonamiento algebraico basado en la búsqueda y detección de patrones para poder replicar sus procedimientos cuando desarrollan los ejercicios y problemas matemáticos planteados tanto en las sesiones de aprendizaje como en el test, por lo que el grupo de estudio 1 incurre en el aprendizaje por repetición y deducción sin llegar a comprender finalmente el tema.

Por el contrario, en el grupo de estudio 2, se sienten familiarizados con el procedimiento a tal punto que, si no se les pide de manera tácita la representación gráfica del binomio al cuadrado, ellos evitan hacerlo, en este sentido los estudiantes reflejan un aprendizaje significativo e inductivo, característica propia del proceso cognitivo de visualización.

- Las diferencias en el aprendizaje adquirido sobre el binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones geométrica-verbal respecto a la algebraica-verbal son que en el primer caso se evidencia un mejor rendimiento académico en los estudiantes por lo que al trabajar estas representaciones se potencia la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio y a su vez adquieren habilidades de visualización que les permite comprender mejor este tópico algebraico, incluso hasta se puede trabajar de manera indirecta la representación algebraica y favorecer aún más la estructura cognitiva de los estudiantes; aspecto que no se puede ejecutar mediante las representaciones algebraica-verbal. Por otro lado, los errores que cometen los estudiantes del grupo de estudio 1 son debidos al lenguaje formal y simbólico que demanda el álgebra, mientras que el grupo de estudio 2 son debidos a la señalización de las dimensiones de la figura graficada, sobre todo cuando se trata del binomio diferencia al cuadrado.



## Referencias

- Acevedo, H. (2007). *Enseñanza de los productos notables por medio del aprendizaje cooperativo* [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio de la Universidad Industrial de Santander. <https://docplayer.es/26382513-Ensenanza-de-los-productos-notables-por-medio-del-aprendizaje-cooperativo-hernan-dario-acevedo-sanchez.html>
- Aguilar, F., y Yaosca, A. (2015). *Estrategias didácticas aplicadas en la enseñanza aprendizaje en el tema de factorización del trinomio cuadrado perfecto en el noveno grado del instituto Manuel Hernández Martínez en el primer semestre de 2015* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua]. Repositorio Institucional UNAN-MANAGUA. <http://repositorio.unan.edu.ni/3476/>
- Alcívar, A., y González, M. (2018). *Herramientas multimedia en el aprendizaje de productos notables de los estudiantes con escolaridad inconclusa del Noveno y Décimo año de Educación General Básica. Diseño de una guía multimedia* [Tesis de pregrado, Universidad de Guayaquil]. Repositorio Institucional de la Universidad de Guayaquil. <http://repositorio.ug.edu.ec/bitstream/redug/30301/1/BFILO-PD-INF2-18-002.pdf>
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.126.6579&rep=rep1&type=pdf>
- Ardila, R. (1979). *Psicología del aprendizaje* (13ª ed.). Siglo veintiuno editores, S. A. (Original publicado en 1970). <https://saberrespsi.files.wordpress.com/2016/09/ardila-psicologc3ada-del-aprendizaje.pdf>
- Ausubel, D., Novak, J., y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (M. Sandoval, Trad.; 2ª ed.). Trillas. (Original publicado en 1976). <https://studylib.es/doc/8984976/ausubel--novak--hanesian---psicolog%C3%ADa-educativa.-un-punto...>
- Avalos, L. (2014). *Adaptación de juegos para enseñar factorización y productos notables en educación media superior* [Tesina, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN. <http://200.23.113.51/pdf/30461.pdf>
- Aznar, M., Distéfano, M., Moler, E., y Pesa, M. (2014, del 12 al 14 de noviembre). Visualización y conversiones: un estudio aplicado a curvas y regiones del plano complejo [congreso]. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, Buenos aires, Argentina. <https://fddocuments.ec/document/visualizacion-y-conversiones-un-estudio-aplicado-a-curvas-regiones-o-curvas.html?page=1>
- Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2ª ed.). GRUPO EDITORIAL PATRIA.

- Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on Teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433-456). Macmillan.  
[https://www.academia.edu/3339658/Research\\_on\\_teaching\\_mathematics\\_The\\_unsolved\\_problem\\_of\\_teachers\\_mathematical\\_knowledge](https://www.academia.edu/3339658/Research_on_teaching_mathematics_The_unsolved_problem_of_teachers_mathematical_knowledge)
- Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 71, 57-74.  
[http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos\\_02.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_02.pdf)
- Barreto, J. (2014). Dinamización Matemática: Deducción geométrica de los productos notables en el espacio tridimensional como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (38), 115-133.  
<http://www.fisem.org/www/union/revistas/2014/38/archivo11.pdf>
- Beltrán, J., Camargo, H., López, P., Martínez, S., y Cañadas, M. (2016). Cuadrado del binomio. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 2* (pp. 77-140). Universidad de los Andes.  
<http://funes.uniandes.edu.co/6505/1/Beltr%C3%A1n2016Cuadrado.pdf>
- Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones* [Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio Digital Institucional IPN.  
[https://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11341/1/blanco\\_2009.pdf](https://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11341/1/blanco_2009.pdf)
- Brunet, J. (1998). *Definición de las dificultades de aprendizaje*.  
[http://www.sld.cu/galerias/pdf/sitios/rehabilitacion-logo/definicion\\_de\\_las\\_dificultades\\_de\\_aprendizaje.pdf](http://www.sld.cu/galerias/pdf/sitios/rehabilitacion-logo/definicion_de_las_dificultades_de_aprendizaje.pdf)
- Bustos, P., Giraldo, W., y Forero, A. (2009, del 8 al 10 de octubre). Caracterización de los elementos epistemológicos que usan algunos profesores al tratar el álgebra geométrica en algunas clases de grado octavo [congreso]. *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, Pasto, Colombia. <http://funes.uniandes.edu.co/701/1/caracterizacion.pdf>
- Cantor, R., y Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números*, 55, 3-22. <https://mdc.ulpgc.es/utills/getfile/collection/numeros/id/569/filename/565.pdf>
- Campoy, T. y Gomes, E. (2009). Técnicas e instrumentos cualitativos de recogida de datos. *Manual básico para la realización de tesis, tesis y trabajos de investigación*, 275-302.  
[https://proyectos.javerianacali.edu.co/cursos\\_virtuales/posgrado/maestria\\_asesoria\\_familiar/Investigacion%20I/Material/29\\_Campoy\\_T%c3%a9nicas\\_e\\_instrum\\_cualita\\_recogidainformacion.pdf](https://proyectos.javerianacali.edu.co/cursos_virtuales/posgrado/maestria_asesoria_familiar/Investigacion%20I/Material/29_Campoy_T%c3%a9nicas_e_instrum_cualita_recogidainformacion.pdf)

- Capcha, J. (2016). *Estrategias didácticas en el aprendizaje de los productos notables en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la institución educativa República Federal de Alemania, Lima 2016* [Tesis de maestría, Universidad César Vallejo]. Repositorio de la Universidad César Vallejo. [http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha\\_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). HORSORI.
- Coveñas, M. (2009). *MateMax2* (3ª ed.). Bruño. (Original publicado en 2008).
- Cruz, L., y Méndez, T. (2008). Dificultades en la práctica de productos notables y factorización. *Revista del Instituto de Matemática y Física*, (15), 59-69. <http://matesup.cl/porta/revista/2008/8.pdf>
- De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático: Elementos básicos del análisis* (1ª ed.). PIRÁMIDE. [https://issuu.com/jacob9510/docs/libro\\_guzman\\_el\\_rincon\\_de\\_la\\_pizarr](https://issuu.com/jacob9510/docs/libro_guzman_el_rincon_de_la_pizarr)
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense, *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Dirección de Educación Media Superior. (2019). *Catálogo de Listas de cotejo*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. [https://www.uaeh.edu.mx/division\\_academica/educacion-media/docs/2019/listas-de-cotejo.pdf](https://www.uaeh.edu.mx/division_academica/educacion-media/docs/2019/listas-de-cotejo.pdf)
- Durán, M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Administración*, (3)1, 121-134. <https://doi.org/10.22458/rna.v3i1.477>
- Duval, R. (1998a). Geometry from a cognitive point of view. *An ICMI*. In C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1998b). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, (9)1, 143-168. <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546>
- EdSource. (2009). *¿Por qué es importante aprender álgebra?* (Guía de padres/estudiantes). [https://edsources.org/wp-content/publications/pub\\_algebra\\_qa\\_Spanish.pdf](https://edsources.org/wp-content/publications/pub_algebra_qa_Spanish.pdf)
- Ferrero, L. (2004). *El juego y la matemática* (5ª ed.). La Muralla. (Original publicado en 1991). <https://puentefichas.com/jich/badi/hejd/capitulo.pdf>

- Fuertes, M. T. (2011). La observación de las prácticas educativas como elemento de evaluación y de mejora de la calidad en la formación inicial y continua del profesorado. *Revista de Docencia Universitaria*, 9 (3), 237–258. <http://red-u.net/redu/files/journals/1/articles/248/public/248-647-1-PB.pdf>
- García, J., Segovia, I., y Lupiáñez, J. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. En D. Arnau, J. Lupiáñez y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 139-148). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM. [https://www.researchgate.net/publication/320593519\\_Antecedentes\\_y\\_fundamentacion\\_d\\_e\\_una\\_investigacion\\_sobre\\_errores\\_en\\_la\\_resolucion\\_de\\_tareas\\_algebraicas](https://www.researchgate.net/publication/320593519_Antecedentes_y_fundamentacion_d_e_una_investigacion_sobre_errores_en_la_resolucion_de_tareas_algebraicas)
- García, J. (2015). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional Digibug. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/43529>
- García, P. (2013). *Juegos educativos para el aprendizaje de la matemática* [Tesis de pregrado, Universidad Rafael Landívar]. Repositorio Institucional AUSJAL. <http://biblio3.url.edu.gt/Tesario/2013/05/09/Garcia-Petrona.pdf>
- Gatica, N., y Ares, O. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *EDMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC*, 1(2), 88-107. [https://www.researchgate.net/publication/317152336\\_La\\_importancia\\_de\\_la\\_visualizacion\\_en\\_el\\_aprendizaje\\_de\\_conceptos\\_matematicos](https://www.researchgate.net/publication/317152336_La_importancia_de_la_visualizacion_en_el_aprendizaje_de_conceptos_matematicos)
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros* (1ª ed.). Universidad de Granada. [https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1\\_Fundamentos.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf)
- Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (2), 109-130. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/254506>
- Gómez, E. (2022). Estrategias didácticas en la enseñanza de los productos notables y la factorización en la telesecundaria. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 12(24), 1-24. <https://doi.org/10.23913/ride.v12i24.1143>
- Gómez, J., Hidalgo, M., y Guilera, G. (2010). El sesgo de los instrumentos de medición. *Tests justos. Papeles del Psicólogo*, 31(1), 75-84. <http://www.redalyc.org/pdf/778/77812441008.pdf>
- Graciano, J., y Aké, L. (2019). Conocimiento matemático para la enseñanza de productos notables: un estudio de tres casos. *Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa*, 4, 192-200. <http://funes.uniandes.edu.co/15893/1/Graciano2019Conocimiento.pdf>

- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceeding of the 20<sup>th</sup> International Conference of the P.M.E.* (pp. 3-19). University of Valencia. [https://www.researchgate.net/publication/267420316\\_Visualization\\_in\\_3-Dimensional\\_Geometry\\_In\\_Search\\_of\\_a\\_Framework](https://www.researchgate.net/publication/267420316_Visualization_in_3-Dimensional_Geometry_In_Search_of_a_Framework)
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (2016). La visualización en la geometría de la Educación Primaria. En J. Carrillo y otros (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 217-236). Paraninfo. [https://www.researchgate.net/publication/332550534\\_La\\_visualizacion\\_en\\_la\\_geometria\\_de\\_Educacion\\_Primary](https://www.researchgate.net/publication/332550534_La_visualizacion_en_la_geometria_de_Educacion_Primary)
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ª ed.). McGraw-Hill. (Original publicado en 1991). [http://jbposgrado.org/material\\_seminarios/HSAMPIERI/Metodologia%20Sampieri%205a%20edicion.pdf](http://jbposgrado.org/material_seminarios/HSAMPIERI/Metodologia%20Sampieri%205a%20edicion.pdf)
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, (10)2, 23-45. <https://core.ac.uk/download/pdf/154339091.pdf>
- Jimenez, M. (2009). *Matemática 1. Educación Media*. Santillana. <https://drive.google.com/file/d/0B3D0WhLX1Akhay4dG02RIE2VEE/view?usp=sharing>
- Jonnaert, P. (2002). *Compétences et socioconstructivisme. Un cadre théorique* (1ª ed.). De Boeck <https://www.webdepot.umontreal.ca/Usagers/archaj/MonDepotPublic/ETA6801/cours%205/5-1%20Jonnaert%2C%202002.pdf>
- Katz, V. J. (2007). Learning algebra: An historical overview. In V. J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a technological future* (pp. 41-45). The Mathematics Association of America.
- Kieran, C., y Filloy, M. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240. <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51268/93013>
- Ledezma, C., y Cuevas, M. (2019). La contextualización en la enseñanza del cuadrado de binomio: un estudio de caso con profesores chilenos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 514-522. <http://funes.uniandes.edu.co/13977/1/Ledezma2019La.pdf>
- Libreros, C. (2017). *La resolución de problemas como propuesta didáctica para la enseñanza de los productos notables haciendo uso de los múltiples registros de representación semiótica en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Jaime Duque Grisales del Municipio de Villamaría* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN. <http://bdigital.unal.edu.co/65091/1/30392049.2017.pdf>

- López, E. (2008). *Productos Notables, Factorización Y Ecuaciones De Segundo Grado Con Una Incógnita Una Propuesta Didáctica Para El Bachillerato Del Colegio De Ciencias Y Humanidades* [Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México]. Repositorio Institucional de la UNAM. <http://univirtual.utp.edu.co/pandora/recursos/1000/1966/1966.pdf>
- Lucana, R. (2018). *Influencia de la actividad lúdica en el aprendizaje del álgebra en estudiantes de primer grado de la I.E.S. José Carlos Mariátegui aplicación UNA Puno – 2017* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Altiplano]. Repositorio Institucional Digital UNAP. [http://repositorio.unap.edu.pe/bitstream/handle/UNAP/7205/Lucana\\_Pomaccola\\_Ritma.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.unap.edu.pe/bitstream/handle/UNAP/7205/Lucana_Pomaccola_Ritma.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- MacGregor, M. (2004). Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12<sup>th</sup> ICMI Study* (pp. 313-328). Kluwer Academic Publishers. [https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6\\_12](https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_12)
- Malqui, J. (2015). *El uso del algeplano en el aprendizaje de los polinomios* [Tesis de maestría inédita]. Universidad de Piura.
- Martos, E. (2008). Valores prácticos y epistémicos de los productos notables en profesores de matemáticas [Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio Digital Institucional IPN. <https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/5994/1448.pdf?sequence=1>
- Ministerio de Educación. (2008). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. [Resolución Ministerial N° 0440-2008-ED]. [http://www.minedu.gob.pe/DelInteres/xtras/dcn\\_2009.pdf](http://www.minedu.gob.pe/DelInteres/xtras/dcn_2009.pdf)
- Ministerio de Educación. (2016a). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular*. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf>
- Ministerio de Educación. (2016b). *Programa curricular de Educación Secundaria*. [Resolución Ministerial N° 649-2016-MINEDU]. Diario Oficial “El Peruano”. <http://www.ugelsanchezcarrion.gob.pe/wordpress/wp-content/uploads/2019/06/programa-sekundaria-17-abril.pdf>
- Ministerio de educación. (2017). *El Perú en PISA 2015. Informe nacional de resultados* (1ª ed.). Oficina de medición de la Calidad de los Aprendizajes. [http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Libro\\_PISA.pdf](http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2017/04/Libro_PISA.pdf)
- Ministerio de Educación. (2019). *Resultados. Evaluación Internacional PISA*. Oficina de medición de la Calidad de los Aprendizajes. <http://umc.minedu.gob.pe/resultadospisa2018/>

- Moreno, M. (1999). El uso de la visualización en una clase de matemáticas. *El Guiniguada. Revista de investigaciones y experiencias en Ciencias de la Educación*, 9, 385-392. [https://accedacris.ulpgc.es/bitstream/10553/5403/1/0235347\\_01999\\_0024.pdf](https://accedacris.ulpgc.es/bitstream/10553/5403/1/0235347_01999_0024.pdf)
- Niss, M. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 215-220). The National Council on Education and the Disciplines. <https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/QL/WhyNumeracyMatters.pdf>
- Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, 1(13), 29-36. <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/publicaciones/index.php/AulaUniversitaria/article/view/4112/6207>
- Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* [Tesis doctoral, Universidad de La Laguna]. Repositorio institucional RIULL. <https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21205>
- Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I Métodos* (1ª ed.). Madrid, España: La Muralla. [http://concreactraul.weebly.com/uploads/2/2/9/5/22958232/investigacin\\_cualitativa.pdf](http://concreactraul.weebly.com/uploads/2/2/9/5/22958232/investigacin_cualitativa.pdf)
- Pérez, P. (2009). *Psicología educativa* (3ª ed.). San Marcos. (Original publicado en 1995).
- Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Una empresa docente, Universidad de los Andes. [https://www.researchgate.net/publication/278009025\\_Educacion\\_Matematica\\_Errores\\_y\\_dificultades\\_de\\_los\\_estudiantes\\_Resolucion\\_de\\_problemas\\_Evaluacion\\_Historia](https://www.researchgate.net/publication/278009025_Educacion_Matematica_Errores_y_dificultades_de_los_estudiantes_Resolucion_de_problemas_Evaluacion_Historia)
- Rodríguez, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional Digibug. <http://hdl.handle.net/10481/41014>
- Rubinstein, S. L. (1986). El problema de las capacidades y las cuestiones relativas a la teoría psicológica. En I. I. Iliasov y V. Ya. Liaudis. (Eds.), *Antología de la psicología pedagógica y de las edades* (pp. 54-67). Editorial pueblo y educación. <https://ur.b-ok.lat/book/5247833/153813>
- Ruiz, J. M. (2008) Problemas actuales de la enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 47(3), 1-8. <https://rieoei.org/RIE/article/view/2348>

- Salamanca, A., y Crespo, C. (2007). El muestreo en la investigación cualitativa. *Nure Investigación*, (27), 1-4. <http://www.sc.ehu.es/plwllumuj/ebalECTS/praktikak/muestreo>
- Schunk, D. (2012). *Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa* (L. Pineda y M. Ortiz, Trads.; 6ª ed.). PEARSON. (Original publicado en 1991). <https://ciec.edu.co/wp-content/uploads/2017/06/Teorias-del-Aprendizaje-Dale-Schunk.pdf>
- Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 12(1), 122-142. <http://www.redalyc.org/pdf/410/41030367007.pdf>
- Sedano, M., y Bernardo, H. (2017). *Cálculo de áreas rectangulares en el aprendizaje significativo de productos notables en estudiantes de la institución educativa mixto "Ramón Castilla y Marquesado" Huancavelica* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Huancavelica]. Repositorio Institucional Digital UNH. <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1078>
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., y Fernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra* (1ª reimpresión). Síntesis S.A. (Original publicado en 1989). <https://pdfcookie.com/download/23-iniciacion-al-algebra-mlxzwr310r27>
- Solano, J. (2009). *Educación y aprendizaje* (1ª ed., Vol. 2). Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/SICA. [https://ceccsica.info/sites/default/files/content/Volumen\\_02.pdf](https://ceccsica.info/sites/default/files/content/Volumen_02.pdf)
- Suárez, C., Dusú, R., y Sánchez, M. (2007). Las capacidades y las competencias: su comprensión para la Formación del Profesional. *Acción Pedagógica*, (16), 30-39. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2968554>
- Swokowski, E., y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (P. Solorio, Trad.; 13ª ed.). CENGAGE Learning. [https://www.academia.edu/38264521/A\\_lgebra\\_y\\_Trigonometri\\_a\\_con\\_Geometri\\_a\\_Analitica\\_13\\_ed](https://www.academia.edu/38264521/A_lgebra_y_Trigonometri_a_con_Geometri_a_Analitica_13_ed)
- Tabuada, M. (2019). *Resultados de la prueba PISA en el Perú: análisis de la problemática y elaboración de una propuesta innovadora* [Trabajo de suficiencia profesional, Universidad de Piura]. Repositorio Institucional Pirhua. [https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/3949/TSP\\_ECO\\_017.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/3949/TSP_ECO_017.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Tuesta, M. (2015). *Estrategias didácticas para la enseñanza de los productos notables* [Tesis de maestría inédita]. Universidad de Piura.
- Valverde, L. (1993). El diario de campo. *Revista Trabajo Social*, 18(39), 308-319. <https://www.binasss.sa.cr/revistas/ts/v18n391993/art1.pdf>

Vásquez, F. (Ed.). (2010). *Estrategias de enseñanza: investigaciones sobre didáctica en instituciones educativas de la ciudad de Pasto* (1ª ed.). Kimpres, Universidad de la Salle.  
<http://biblioteca.clacso.edu.ar/Colombia/fce-unisalle/20170117011106/Estrategias.pdf>

Yin, R. K. (1984). *Case Study Research: Design and Methods* (1<sup>st</sup> ed.). Sage Publications.



## Apéndices



### Apéndice A: Matriz general de consistencia

<b>TÍTULO:</b> El aprendizaje adquirido sobre el binomio al cuadrado mediante la enseñanza con las representaciones geométrica y algebraica en estudiantes de tercer grado de secundaria de una institución educativa pública de Piura. <b>NOMBRE DEL TESISISTA:</b> Karen Nathalie Quintos Carranza.			
PROBLEMAS	OBJETIVOS	VARIABLES	METODOLOGÍA
<b>Problema general:</b> ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias en el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones verbal, geométrica y algebraica, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura, en el año 2020?	<b>Objetivo general:</b> Establecer semejanzas y diferencias en el aprendizaje adquirido sobre el binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones verbal, geométrica y algebraica, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura, en el año 2020.	<b>Variable independiente:</b> Representaciones del binomio al cuadrado. <b>Dimensiones:</b> _ Representación algebraica. _ Representación geométrica. _ Representación verbal.  <b>Variable dependiente:</b> El aprendizaje del binomio al cuadrado.	<b>Diseño:</b> Estudio de casos  <b>Enfoque:</b> Interpretativo  <b>Población:</b> Los estudiantes de tercer grado de secundaria de una institución educativa pública de Piura.
<b>Problemas específicos:</b> ¿Cuál y cómo es el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones geométrica y verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura?	<b>Objetivos específicos:</b> Describir el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones geométrica y verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de la sección "D" de una institución educativa	El aprendizaje del binomio al cuadrado.  <b>Dimensiones:</b> _ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	<b>Muestra:</b> Los estudiantes de tercer grado de secundaria de las secciones "A" y "D" de una institución educativa pública de Piura.

	pública de Piura.	_ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	<b>Técnicas de obtención de la información:</b>  _ Observación. _ Examen. _ Entrevista.
¿Cuál y cómo es el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones algebraica y verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura?	Describir el aprendizaje adquirido del binomio al cuadrado mediante la enseñanza de las representaciones algebraica y verbal, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de la sección "A" de una institución educativa pública de Piura.	_ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. _ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	
¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre el aprendizaje adquirido mediante las representaciones (verbal, geométrica o algebraica) del binomio al cuadrado, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura, en el año 2020?	Realizar una comparación entre el aprendizaje adquirido mediante las representaciones geométrica-verbal y algebraica-verbal del binomio al cuadrado, por los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de una institución educativa pública de Piura.		

Nota. Elaboración propia.

## Apéndice B: Matriz de operacionalización del instrumento

VARIABLE	DIMENSIONES	INDICADORES	ÍTEMS
El aprendizaje del binomio al cuadrado	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.	4a; 4b y 5
	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	1; 2a; 2b; 3a; 3b; 4a; 4b y 5
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Selecciona y combina estrategias heurísticas para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	3a; 3b; 4a; 4b y 5
	Argumenta sobre relaciones de cambio y equivalencia.	Justifica y comprueba la validez de su afirmación mediante ejemplos y propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado.	1

Nota. Elaboración propia.

**Apéndice C: Instrumento de evaluación****Examen de Matemática****Estudiante:** .....**Grado:** .....**Sección:** .....**Fecha:** .....**Indicación:**

Estimado estudiante, a continuación, se le presenta el siguiente examen sobre el binomio al cuadrado con la finalidad de recoger datos para una investigación sobre este tópico matemático, por lo cual, se le solicita resolverlo con total honestidad. Muchas gracias por su colaboración.

1. Indique si la expresión algebraica  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$  es correcta o no. Fundamente su respuesta.

2. Para la siguiente expresión:  $(x - y)^2$

a) Escriba su representación verbal.

b) Escriba la representación verbal del desarrollo de la expresión dada.

3. Desarrolle los siguientes ejercicios mostrando el procedimiento seguido:

a)  $(3y + 4)^2 =$

b)  $(2x - 5)^2 =$

4. Jaime ha construido en un terreno de forma cuadrada una casa. Para ello ha dividido dicho terreno en cuatro partes. Dibuje las divisiones que Jaime hizo según lo que se indica a continuación:

- Dos rectángulos de “k” metros de largo y “n” metros de ancho, para ubicar los espacios de la cocina y el dormitorio.
- Dos cuadrados, uno de “k” metros y otro de “n” metros por lado respectivamente para la ubicación de la sala y el baño.

a) Represente la situación e interprete de manera simbólica la información que le brinda el problema para calcular el área total del terreno de la casa de Jaime <sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Adaptado de Sedano, M., y Bernardo, H. (2017). *Cálculo de áreas rectangulares en el aprendizaje significativo de productos notables en estudiantes de la institución educativa mixto “Ramón Castilla y Marquesado” Huancavelica* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Huancavelica]. Repositorio Institucional Digital UNH. <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1078>

- b) Si uno de los rectángulos representa la zona del dormitorio y tiene un área de  $35 \text{ m}^2$  ¿Cuál es el área total del terreno de la casa de Jaime?

*Nota: Ninguno de los lados puede tomar el valor de uno.*

5. Karla desea comprar un terreno de forma cuadrada para la construcción de su tienda, a ella le gustaría que el lado tenga una longitud de 200 metros, sin embargo, por falta de presupuesto la dimensión original del lado del terreno tiene que disminuir en " $b$ " metros.

- Represente la situación mediante una gráfica y calcule el área del terreno que puede comprar Karla.

**Apéndice D: Rúbrica analítica para evaluar el examen de Matemática**

Informante: \_\_\_\_\_

ÍTEMS	PUNTUACIONES				SUBTOTAL
	1.5	1	0.5	0	
1. Indique si la expresión algebraica $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ es correcta o no. Fundamente su respuesta.	Justifica y comprueba de manera correcta la validez de su afirmación mediante ejemplos y propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado.	Justifica y comprueba de manera parcialmente correcta la validez de su afirmación mediante ejemplos y propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado.	Justifica y comprueba de manera errónea la validez de su afirmación mediante ejemplos y propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado.	No justifica o justifica sin comprobar la validez de su afirmación mediante ejemplos y propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado.	
		Expresa correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	Expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcialmente correcto mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	No expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	

<p>2. Para la siguiente expresión:</p> $(x - y)^2$ <p>a) Escriba su representación verbal.</p>		<p>Expresa correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	<p>Expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcialmente correcto mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	<p>No expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	
<p>2. Para la siguiente expresión:</p> $(x - y)^2$ <p>b) Escriba la representación verbal del desarrollo de la expresión dada.</p>		<p>Expresa correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	<p>Expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcialmente correcto mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	<p>No expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	
<p>3. Desarrolle los siguientes ejercicios mostrando el procedimiento seguido:</p> <p>a) <math>(3y + 4)^2 =</math></p>		<p>Selecciona y combina de manera correcta estrategias heurísticas para dar solución a ejercicios y/o problemas</p>	<p>Selecciona y combina estrategias heurísticas parcialmente correctas para dar solución a ejercicios y/o problemas</p>	<p>No selecciona ni combina estrategias heurísticas o las hace de manera errónea para dar solución a ejercicios y/o</p>	

		sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	
		Expresa correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	Expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcialmente correcto mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	No expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	
3. Desarrolle los siguientes ejercicios mostrando el procedimiento seguido:  b) $(2x - 5)^2 =$		Selecciona y combina de manera correcta estrategias heurísticas para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación	Selecciona y combina estrategias heurísticas parcialmente correctas para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación	No selecciona ni combina estrategias heurísticas o las hace de manera errónea para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la	

		algebraica o geométrica.	algebraica o geométrica.	representación algebraica o geométrica.	
		Expresa correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	Expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcialmente correcto mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	No expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	
<p>4. Jaime ha construido en un terreno de forma cuadrada una casa. Para ello ha dividido dicho terreno en cuatro partes. Dibuje las divisiones que Jaime hizo según lo que se indica a continuación:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dos rectángulos de “k” metros de largo y “n”</li> </ul>	Establece relaciones entre datos de manera correcta para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.	Establece relaciones entre datos de manera parcialmente correcta para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al	Establece relaciones entre datos de manera errónea para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al	No establece relaciones entre datos para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.	

<p>metros de ancho, para ubicar los espacios de la cocina y el dormitorio.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dos cuadrados, uno de “k” metros y otro de “n” metros por lado respectivamente para la ubicación de la sala y el baño.</li> </ul>		<p>cuadrado.</p> <p>Expresa correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	<p>Expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcialmente correcto mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	<p>No expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	
<p>a) Represente la situación e interprete de manera simbólica la información que le brinda el problema para calcular el área total del terreno de la casa de Jaime.<sup>6</sup></p>		<p>Selecciona y combina de manera correcta estrategias heurísticas para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.</p>	<p>Selecciona y combina estrategias heurísticas parcialmente correctas para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.</p>	<p>No selecciona ni combina estrategias heurísticas o las hace de manera errónea para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.</p>	

<sup>6</sup> Adaptado de Sedano, M., y Bernardo, H. (2017). *Cálculo de áreas rectangulares en el aprendizaje significativo de productos notables en estudiantes de la institución educativa mixta “Ramón Castilla y Marquesado” Huancavelica* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Huancavelica]. Repositorio Institucional Digital UNH. <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1078>

<p>b) Si uno de los rectángulos representa la zona del dormitorio y tiene un área de <math>35 \text{ m}^2</math> ¿Cuál es el área total del terreno de la casa de Jaime?</p> <p><i>Nota: Ninguno de los lados puede tomar el valor de uno.</i></p>	<p>Establece relaciones entre datos de manera correcta para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.</p>	<p>Establece relaciones entre datos de manera parcialmente correcta para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.</p>	<p>Establece relaciones entre datos de manera errónea para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.</p>	<p>No establece relaciones entre datos para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.</p>	
		<p>Expresa correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	<p>Expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcialmente correcto mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	<p>No expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.</p>	

		Selecciona y combina de manera correcta estrategias heurísticas para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	Selecciona y combina estrategias heurísticas parcialmente correctas para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	No selecciona ni combina estrategias heurísticas o las hace de manera errónea para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	
5. Karla desea comprar un terreno de forma cuadrada para la construcción de su tienda, a ella le gustaría que el lado tenga una longitud de 200 metros, sin embargo, por falta de presupuesto la dimensión original del lado del terreno tiene que disminuir en “ $b$ ” metros. ➤ Represente la	Establece relaciones entre datos de manera correcta para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.	Establece relaciones entre datos de manera parcialmente correcta para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al	Establece relaciones entre datos de manera errónea para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al	No establece relaciones entre datos para transformar la expresión verbal de las situaciones problemáticas a expresiones algebraicas o geométricas que involucran el desarrollo de un binomio al cuadrado.	

situación mediante una gráfica y calcule el área del terreno que puede comprar Karla.		cuadrado.			
		Expresa correctamente de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	Expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado de modo parcialmente correcto mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	No expresa de manera escrita su comprensión sobre el binomio al cuadrado mediante su representación verbal, algebraica o geométrica.	
		Selecciona y combina de manera correcta estrategias heurísticas para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	Selecciona y combina estrategias heurísticas parcialmente correctas para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	No selecciona ni combina estrategias heurísticas o las hace de manera errónea para dar solución a ejercicios y/o problemas sobre el binomio al cuadrado mediante la representación algebraica o geométrica.	
<b>Valoración final</b>					

Nota. Elaboración propia.

### Apéndice E: Resultados obtenidos de la aplicación del instrumento de evaluación

**Tabla 9**

*Resultados obtenidos por pregunta del grupo de estudio 1 y grupo de estudio 2 en el test*

Informante	Puntaje <sup>7</sup>								
	Pregunta 1	Pregunta 2a	Pregunta 2b	Pregunta 3a	Pregunta 3b	Pregunta 4a	Pregunta 4b	Pregunta 5	Total
	I3A-1	1	0.5	0.5	1	1	0.5	0	
I3A-2	1.5	0	0	2	1	3.5	3.5	0	11.5
I3A-3	2.5	1	0.5	1	1	1	0	0	07
I3A-4	0	0	1	2	2	3.5	3.5	3	15
I3A-5	2.5	0.5	1	2	2	1.5	3.5	3	16
I3A-6	2.5	0	1	2	2	3.5	3.5	3	17.5
I3D-1	0	0.5	0.5	0	0	2	2.5	1.5	07
I3D-2	0	0.5	0.5	1	1	1	3.5	0	7.5
I3D-3	2.5	0.5	0.5	2	2	3.5	3.5	3.5	18
I3D-4	2.5	0.5	0.5	2	1.5	1.5	3.5	2	14

Nota. Elaboración propia.

<sup>7</sup> La puntuación máxima del test de esta investigación es de 19 puntos.

**Apéndice F: Sesiones de aprendizaje****Sesión de aprendizaje 1: “Estudiamos el binomio suma al cuadrado”****I.- Datos Informativos:**

Docente : Karen Quintos Carranza  
 Área : Matemática  
 Grado : 3º secundaria, sección “A”  
 Fecha : 12/11/2020

**II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación.**

COMPETENCIA/Capacidad	DESEMPEÑOS PRECISADOS	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE
<b>“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”</b> _ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas. _ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. _ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. _ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	_ Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión en la situación problemática planteada sobre el binomio suma al cuadrado. _ Resuelve problemas y/o ejercicios utilizando la fórmula del binomio al cuadrado. _ Verifica sus resultados cuando aplica la fórmula del binomio al cuadrado realizando la multiplicación factor por factor.	Resuelve la situación problemática de forma escrita
		<b>INSTRUMENTO DE VALORACIÓN</b>
		Lista de cotejo
<b>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</b>		
<i>Gestiona su aprendizaje de manera autónoma.</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> <i>Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC.</i>		
<b>Enfoques Transversales</b>	<b>Valores/acciones observables</b>	
Enfoque Ambiental	Justicia y solidaridad <ul style="list-style-type: none"> <li>- Emite opinión de sus acciones y actitudes que impactan al medio ambiente de su actuar en beneficio de las personas.</li> </ul>	

## III.- Momentos de la sesión:

Momentos	Estrategias	Tiempo
<b>Inicio</b>	<p><b>MOTIVACIÓN</b></p> <p>_ La docente da la bienvenida a los estudiantes de tercer grado “A” y registra la asistencia. Luego, mediante un consenso se establecen las normas de convivencia.</p> <p>_ Se presenta el tema y a la vez, se menciona la competencia y capacidades que los alumnos tendrán que desarrollar; para ello, se proyecta el PowerPoint (anexo 01) que será utilizado en esta sesión de aprendizaje a través de la plataforma virtual de Zoom.</p> <p>_ Para motivar a los estudiantes se hace un breve comentario acerca de la importancia del aprendizaje de los productos notables en el área de matemáticas.</p> <p><b>SABERES PREVIOS</b></p> <p>_ Para recuperar los saberes previos de los estudiantes sobre el binomio al cuadrado, se les plantea las siguientes interrogantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ¿Qué recuerdas sobre el binomio al cuadrado?</li> <li>➤ ¿Cómo se calcula el cuadrado de un número? Da algunos ejemplos.</li> <li>➤ Sea “<math>a</math>” un número cualquiera, ¿Cómo se calcula el cuadrado de “<math>a</math>”?</li> <li>➤ ¿Cómo se calcula el doble de un número? Da algunos ejemplos.</li> <li>➤ ¿Cómo se expresa de manera algebraica el doble de un número cualquiera?</li> </ul> <p>_ Los estudiantes brindan sus respuestas de forma oral u escrita mostrando sus pizarras.</p> <p><b>PROPÓSITO Y ORGANIZACIÓN</b></p> <p>_ La docente enuncia el propósito de aprendizaje:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Resolvemos situaciones que involucran el desarrollo de un binomio suma al cuadrado de manera algebraica para hallar e interpretar su solución.</li> </ul> <p>_ Además, se les informa a los alumnos que serán evaluados mediante una lista de cotejo y se les comenta que se desarrollará un problema contextualizado y algunos ejercicios para entender el concepto del binomio suma al cuadrado.</p>	15 min

<b>Inicio</b>	<p><b>PROBLEMATIZACIÓN</b></p> <p>_ Se plantea la siguiente situación problemática:</p> <p>En Piura se ha construido un colegio, cuya área del terreno es de forma cuadrada y ha sido dividida en cuatro partes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Dos rectángulos de “a” metros de largo y “b” metros de ancho, para ambientes de recreación y estudio.</li> <li>➤ Dos cuadrados, uno de “a” metros y otro de “b” metros por lado respectivamente para la ubicación de las aulas y la oficina administrativa.</li> </ul> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Cuál es el área total del terreno en donde está ubicado el colegio?<sup>8</sup></li> <li>2. Si uno de los rectángulos representa el ambiente de recreación y tiene un área de <math>15 \text{ m}^2</math> ¿Cuál es el área total del terreno en donde está ubicado el colegio?</li> </ol> <p><b><u>Comprensión del problema:</u></b></p> <p>_ Se pide la participación de un estudiante para que dé lectura a la situación problemática.</p> <p>_ Se pregunta a los estudiantes lo siguiente: ¿De qué trata el problema?, ¿qué es lo que pide hallar el problema? y ¿cuáles son los datos que proporciona la situación problemática?</p>	
<b>Desarrollo</b>	<p><b>GESTIÓN Y ACOMPAÑAMIENTO DE LA COMPETENCIA</b></p> <p><b><u>Búsqueda de estrategias:</u></b></p> <p>La profesora ayuda y hace que el estudiante explore y ejecute los distintos caminos que elegirá para afrontar el problema planteado.</p> <p><b><u>Representación (De lo concreto a lo simbólico):</u></b></p> <p>A partir de la situación problemática se explica sobre el binomio suma al cuadrado y se analizan los elementos que la componen. Para ello, se pide a los estudiantes que participen de manera activa porque a su vez se estará desarrollando parte de dicha situación.</p>	40 min

<sup>8</sup> Adaptado de Sedano, M., y Bernardo, H. (2017). *Cálculo de áreas rectangulares en el aprendizaje significativo de productos notables en estudiantes de la institución educativa mixta “Ramón Castilla y Marquesado” Huancavelica* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Huancavelica]. Repositorio Institucional Digital UNH. <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1078>

\_ *Cuadrado de la suma de dos cantidades:* Elevar el cuadrado  $(a + b)$  equivale a multiplicar este binomio por sí mismo.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Efectuando este producto se tiene:



$$\begin{array}{r} (a + b) \\ (a + b) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} (a + b) \\ (a + b) \end{array}} \right\} \times$$


---


$$a^2 + ab$$
  

$$\begin{array}{r} ab + b^2 \end{array}$$


---


$$a^2 + 2ab + b^2$$

\_ Por lo tanto, la representación verbal queda expresada de esta manera:

*“El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda”.*

\_ La docente hace notar que al desarrollar el binomio suma al cuadrado se ha obtenido tres términos, para decirles que este resultado se llama “Trinomio cuadrado perfecto”.

\_ Los alumnos responden a la primera pregunta de la situación problemática.

**Formalización:**

\_ La docente interviene para fijar y compartir esta idea:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\_ También, brinda algunos ejemplos:

$$(4 + 9)^2 = (4)^2 + 2(4)(9) + (9)^2 = 16 + 72 + 81 = 169$$

$$(x + 1)^2 = (x)^2 + 2(x)(1) + (1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(2x + y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(y) + (y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$$

**Transferencia:**

Los alumnos aplican lo aprendido realizando los siguientes ejercicios:

$$(10 + 5)^2 =$$

$$(k + 9)^2 =$$

$$(8 + x)^2 =$$

$$(5b + 3)^2 =$$

25 min

<b>Desarrollo</b>	<p>_ Se les pide a los alumnos resolver los ejercicios propuestos y también, se retorna a la situación problemática para terminar con la segunda parte del reto, de ese modo, los estudiantes transfieren los conocimientos que han aprendido en la sesión.</p> <p>_ La docente monitorea y da seguimiento a las actividades realizadas.</p> <p>_ Los alumnos participan poniendo en común sus deducciones y generalizaciones.</p> <p><b>Reflexión:</b> La profesora afianza las respuestas correctas y en caso de que algún estudiante tuviera dificultades o errores para concluir con la segunda pregunta de la solución de la situación inicial presentada, se tratará de construir el aprendizaje para reflexionar sobre el mismo y mejorar.</p>	
<b>Cierre</b>	<p><b>EVALUACIÓN Y METACOGNICIÓN</b></p> <p>_ Al final del desarrollo de las actividades, se les plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendiste hoy?, ¿se cumplió el propósito de aprendizaje? Así pues, la docente les entrega una ficha de metacognición para que lo respondan de forma individual (anexo 02).</p> <p>_ Como tarea de ampliación los estudiantes tendrán que desarrollar una ficha de ejercicios (anexo 03) y presentar la solución de la situación problemática realizada en clase.</p>	10 min

#### IV.- Materiales:

- Pizarra
- Plumones
- PowerPoint
- Fichas
- Material didáctico (cartulina)

#### V.- Bibliografía:

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2ª ed.). GRUPO EDITORIAL PATRIA.

Coveñas, M. (2009). *MateMax2* (3ª ed.). Bruño. (Original publicado en 2008).

Jimenez, M. (2009). *Matemática 1. Educación Media*. Santillana.

<https://drive.google.com/file/d/0B3D0WhLX1Akhany4dG02RIE2VEE/view?usp=sharing>

Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular*.  
<http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf>

Sedano, M., y Bernardo, H. (2017). *Cálculo de áreas rectangulares en el aprendizaje significativo de productos notables en estudiantes de la institución educativa mixto “Ramón Castilla y Marquesado” Huancavelica* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Huancavelica].  
 Repositorio Institucional Digital UNH. <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1078>

### Instrumento de evaluación

#### *Lista de cotejo*

N.º	Informantes	“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”					
		_ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas. _ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. _ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. _ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.					
		<b>Desempeños</b>					
Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión en la situación problemática planteada sobre el binomio suma al cuadrado.		Resuelve problemas y/o ejercicios utilizando la fórmula del binomio al cuadrado.		Verifica sus resultados cuando aplica la fórmula del binomio al cuadrado realizando la multiplicación factor por factor.			
Sí		No		Sí		No	
1.	I3A-1		X		X		X
2.	I3A-2		X	X			X
3.	I3A-3		X	X		X	
4.	I3A-4		X	X			X
5.	I3A-5		X	X			X
6.	I3A-6		X	X		X	

Anexo 01: PowerPoint de la sesión

### "Binomio suma al cuadrado"

"Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio"

- ❖ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.
- ❖ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
- ❖ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.
- ❖ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

### Productos notables

- Según Baldor (2008) "Se llaman productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación"
- Son importantes porque su apropiación permite ejecutar con versatilidad al menos las siguientes actividades:
  - ❖ Calcular productos de expresiones algebraicas.
  - ❖ Simplificar expresiones algebraicas.
  - ❖ Factorizar expresiones algebraicas.
  - ❖ Desarrollar una expresión algebraica.
  - ❖ Hallar el valor de una variable.
  - ❖ Resolver ecuaciones de segundo grado.

### Saberes previos

- ¿Cómo se calcula el cuadrado de un número? Da algunos ejemplos.
- Sea "a" un número cualquiera, ¿Cómo se calcula el cuadrado de "a"?
- ¿Cómo se calcula el doble de un número? Da algunos ejemplos.
- ¿Cómo se expresa de manera algebraica el doble de un número?



### Propósito de aprendizaje

- Resolvemos situaciones que involucran el desarrollo de un binomio suma al cuadrado de manera algebraica para hallar e interpretar su solución.



### Situación problemática

En Piura se ha construido un colegio, cuya área del terreno es de forma cuadrada y ha sido dividida en cuatro partes:

- Dos rectángulos de "a" metros de largo y "b" metros de ancho, para ambientes de recreación y estudio.
- Dos cuadrados, uno de "a" metros y otro de "b" metros por lado, respectivamente para la ubicación de las aulas y la oficina administrativa.

1. ¿Cuál es el área total del terreno en donde está ubicado el colegio?
2. Si uno de los rectángulos representa el ambiente de recreación y tiene un área de 15 m<sup>2</sup> ¿Cuál es el área total del terreno en donde está ubicado el colegio?

### Binomio suma al cuadrado

**A. Cuadrado de la suma de dos cantidades.**

Elevar el cuadrado  $a + b$  equivale a multiplicar este binomio por sí mismo.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Efectuando este producto se tiene:

$$\begin{array}{r} (a + b) \cdot \\ \underline{(a + b)} \phantom{\cdot} \\ a^2 + ab \\ \phantom{a^2 +} ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Es decir:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow \text{Representación algebraica}$$

Por lo tanto, la **representación verbal** queda expresada de la siguiente manera:

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda.



**Anexo 03: Tarea**

1. Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado aplicando la fórmula y luego verifique sus resultados multiplicando factor por factor.

➤  $(y + 10)^2 =$

➤  $(3a + 4)^2 =$

➤  $(2x + 5)^2 =$



2. Completa el desarrollo de los siguientes cuadrados al binomio.

➤  $(x + 7)^2 = x^2 + \underline{\hspace{1cm}} + 49$

➤  $(a + \underline{\hspace{1cm}})^2 = a^2 + \underline{\hspace{1cm}} + 121$

➤  $(2f \underline{\hspace{1cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} + 40f + \underline{\hspace{1cm}}$

### Sesión de aprendizaje 2: “Estudiamos el binomio diferencia al cuadrado”

#### I.- Datos Informativos:

Docente : Karen Quintos Carranza  
 Área : Matemática  
 Grado : 3º secundaria, sección “A”  
 Fecha : 16/11/2020

#### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación.

COMPETENCIA/Capacidad	DESEMPEÑOS PRECISADOS	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE
<b>“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”</b> _ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas. _ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. _ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. _ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	_ Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión en la situación problemática planteada sobre el binomio diferencia al cuadrado. _ Resuelve problemas y/o ejercicios utilizando la fórmula del binomio al cuadrado. _ Verifica sus resultados cuando aplica la fórmula del binomio al cuadrado realizando la multiplicación factor por factor.	Resuelve la situación problemática de forma escrita
		<b>INSTRUMENTO DE VALORACIÓN</b>
		Lista de cotejo
<b>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</b>		
<i>Gestiona su aprendizaje de manera autónoma.</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> <i>Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC.</i>		
<b>Enfoques Transversales</b>	<b>Valores/acciones observables</b>	
Enfoque Ambiental	Justicia y solidaridad <ul style="list-style-type: none"> <li>- Emite opinión de sus acciones y actitudes que impactan al medio ambiente de su actuar en beneficio de las personas.</li> </ul>	

## III.- Momentos de la sesión:

Momentos	Estrategias	Tiempo
<b>Inicio</b>	<p><b>MOTIVACIÓN</b></p> <p>_ La docente saluda a los estudiantes y registra la asistencia. Asimismo, se recuerdan las normas de convivencia.</p> <p>_ Se presenta el tema y a la vez, se menciona la competencia y capacidades que los alumnos tendrán que desarrollar; para ello, se proyecta el PowerPoint (anexo 01) que será utilizado en esta sesión de aprendizaje a través de la plataforma virtual de Zoom.</p> <p>_ Para motivar a los estudiantes se les pide comentar acerca de la siguiente frase de Thomas Edison: <i>“Nuestra mayor debilidad radica en renunciar. La forma más segura de tener éxito es siempre intentarlo una vez más”</i>. De ese modo, ellos tendrán que reflexionar sobre la importancia de persistir para lograr los objetivos que se propongan.</p> <p><b>SABERES PREVIOS</b></p> <p>_ Para recuperar los saberes previos de los estudiantes se plantea las siguientes interrogantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ¿Cuál es la expresión desarrollada de un binomio al cuadrado suma?</li> <li>➤ Lee la siguiente expresión: <math>(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2</math></li> </ul> <p>_ Los estudiantes brindan sus respuestas de forma oral. Además, se les hace recordar sobre la situación problemática de la sesión anterior y algunos puntos desarrollados en el mismo.</p> <p><b>PROPÓSITO Y ORGANIZACIÓN</b></p> <p>_ La docente enuncia el propósito de aprendizaje:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Resolvemos situaciones que involucran el desarrollo de un binomio diferencia al cuadrado de manera algebraica para hallar e interpretar su solución.</li> </ul> <p>_ Además, se les informa a los alumnos que serán evaluados mediante una lista de cotejo y se les dice que se desarrollará un problema contextualizado y algunos ejercicios para entender el concepto del binomio diferencia al cuadrado.</p> <p><b>PROBLEMATIZACIÓN</b></p> <p>_ Se plantea la siguiente situación problemática:</p>	15 min

<b>Inicio</b>	<p>La docente del área de Matemática ha presentado a sus alumnos de 3º grado de secundaria el caso de Marcos, en el cual se les pide hallar el área de su terreno tomando en cuenta cada uno de los pasos que se muestran en el siguiente cuadro que además tienen que completar según lo indicado<sup>9</sup>.</p>		
		Expresión verbal	Expresión algebraica
	Paso 1	Marcos tiene un terreno cuadrado cuyo lado tiene una longitud igual a "a".	
	Paso 2	Marcos decide vender una parte de su terreno equivalente a un rectángulo de lados "a" y "b".	
	Paso 3	Después compra un sector de terreno alrededor al suyo de forma cuadrada de lado "b".	
Paso 4	Luego vende otra parte de su terreno que también equivale a un rectángulo de lados "a" y "b".		
	<p>¿Podrías ayudar a los alumnos de 3º grado de secundaria a cumplir el reto que les ha dejado la profesora?</p> <p><b><u>Comprensión del problema:</u></b></p> <p>_ Se vuelve a leer la situación problemática y se les pregunta a los estudiantes lo siguiente: ¿De qué trata el problema?, ¿qué es lo que pide hallar el problema? y ¿cuáles son los datos que proporciona la situación problemática?</p>		
<b>Desarrollo</b>	<p><b>GESTIÓN Y ACOMPAÑAMIENTO DE LA COMPETENCIA</b></p> <p><b><u>Búsqueda de estrategias:</u></b></p> <p>La profesora ayuda y hace que el estudiante explore y ejecute los distintos caminos que elegirá para afrontar el problema planteado.</p>		40 min

<sup>9</sup> Adaptado de Acevedo, H. (2007). *Enseñanza de los productos notables por medio del aprendizaje cooperativo* [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio de la Universidad Industrial de Santander. <https://docplayer.es/26382513-Ensenanza-de-los-productos-notables-por-medio-del-aprendizaje-cooperativo-hernan-dario-acevedo-sanchez.html>

**Representación (De lo concreto a lo simbólico):**

A partir de la situación problemática se explica sobre el binomio diferencia al cuadrado, estableciendo lo siguiente:

\_ *Cuadrado de la diferencia de dos cantidades:* Elevar  $(a - b)$  al cuadrado equivale a multiplicar esta diferencia por sí misma.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

Efectuando este producto se tiene:



$$\begin{array}{r} (a - b) \\ (a - b) \end{array} \Bigg] \times$$


---


$$a^2 - ab$$

$$-ab + b^2$$


---


$$a^2 - 2ab + b^2$$

\_ Entonces, la representación verbal queda expresada de esta manera: “El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad”.

\_ La docente hace notar que al desarrollar el binomio diferencia al cuadrado se ha obtenido tres términos, para decirles que este resultado se llama “Trinomio cuadrado perfecto”.

**Formalización:**

\_ La docente interviene para fijar y compartir esta idea:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

\_ También, brinda algunos ejemplos:

$$(15 - 5)^2 = (15)^2 - 2(15)(5) + (5)^2 = 225 - 150 + 25 = 100$$

$$(x - 1)^2 = (x)^2 - 2(x)(1) + (1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

**Transferencia:**

Los alumnos aplican lo aprendido realizando los siguientes ejercicios:

$$(10 - 5)^2 =$$

$$(x - 14)^2 =$$

$$(8 - y)^2 =$$

$$(5b - 3)^2 =$$

$$(2x - y)^2 =$$

<b>Desarrollo</b>	<p>_ Se les pide a los alumnos resolver los ejercicios propuestos para que después puedan aplicar lo aprendido realizando la situación problemática. Para ello, la docente monitorea y da seguimiento a las actividades realizadas por los estudiantes.</p> <p>_ Los alumnos participan poniendo en común sus deducciones y generalizaciones en la resolución de los ejercicios propuestos y se le pide a un estudiante que dirija la solución de la situación problemática con la ayuda de sus compañeros.</p> <p><b>Reflexión:</b></p> <p>La profesora afianza las respuestas correctas y corrige posibles errores con la finalidad de construir el aprendizaje en los educandos, de esa manera se aprende del error y reflexionamos sobre el mismo para mejorar.</p>	
<b>Cierre</b>	<p><b>EVALUACIÓN Y METACOGNICIÓN</b></p> <p>_ Al final del desarrollo de las actividades, se les plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendiste hoy?, ¿se cumplió el propósito de aprendizaje? Posteriormente, la docente les entrega una ficha de metacognición para que lo respondan de forma individual (anexo 02).</p> <p>_ Como tarea de ampliación los estudiantes tendrán que desarrollar una ficha de ejercicios (anexo 03) y presentar la solución de la situación problemática realizada en clase.</p>	10 min

#### IV.- Materiales:

- Pizarra
- Plumones
- Material didáctico
- PowerPoint
- Fichas

#### V.- Bibliografía:

- Acevedo, H. (2007). *Enseñanza de los productos notables por medio del aprendizaje cooperativo* [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio de la Universidad Industrial de Santander. <https://docplayer.es/26382513-Ensenanza-de-los-productos-notables-por-medio-del-aprendizaje-cooperativo-hernan-dario-acevedo-sanchez.html>
- Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2ª ed.). GRUPO EDITORIAL PATRIA.
- Coveñas, M. (2009). *MateMax2* (3ª ed.). Bruño. (Original publicado en 2008).

Jimenez, M. (2009). *Matemática 1. Educación Media.* Santillana.

<https://drive.google.com/file/d/0B3D0WhLX1AkhY4dG02RIE2VEE/view?usp=sharing>

Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular.*

<http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf>

### Instrumento de evaluación

#### *Lista de cotejo*

N.º	Informantes	“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”					
		<ul style="list-style-type: none"> <li>_ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>_ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>_ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.</li> <li>_ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>					
		<b>Desempeños</b>					
Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión en la situación problemática planteada sobre el binomio diferencia al cuadrado.		Resuelve problemas y/o ejercicios utilizando la fórmula del binomio al cuadrado.		Verifica sus resultados cuando aplica la fórmula del binomio al cuadrado realizando la multiplicación factor por factor.			
Sí		No		Sí		No	
1.	I3A-1		X	X			X
2.	I3A-2	X		X			X
3.	I3A-3	X		X		X	
4.	I3A-4	X		X			X
5.	I3A-5	X		X			X
6.	I3A-6		X	X			X

## Anexo 01: PowerPoint de la sesión

### "Binomio diferencia al cuadrado"

"Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio"

- ❖ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.
- ❖ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
- ❖ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.
- ❖ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

*Nuestra mayor debilidad radica en renunciar. La forma más segura de tener éxito es siempre intentarlo una vez más.*



Thomas Edison

### Propósito de aprendizaje

- Resolvemos situaciones que involucran el desarrollo de un binomio diferencia al cuadrado de manera algebraica para hallar e interpretar su solución.



### Situación problemática

1. La docente del área de Matemática ha presentado a sus alumnos de 3º grado de secundaria el caso de Marcos, en el cual se les pide hallar el área de su terreno tomando en cuenta cada uno de los pasos que se muestran en el siguiente cuadro que además tienen que completar según lo indicado.

	Expresión verbal	Expresión algebraica
Paso 1	Marcos tiene un terreno cuadrado cuyo lado tiene una longitud igual a "a".	
Paso 2	Marcos decide vender una parte de su terreno equivalente a un rectángulo de lados "a" y "b".	
Paso 3	Después compra un sector de terreno aledaño al suyo de forma cuadrada de lado "b".	
Paso 4	luego vende otra parte de su terreno que también equivale a un rectángulo de lados "a" y "b".	

¿Podrías ayudar a los alumnos de 3º grado de secundaria a cumplir el reto que les ha dejado la profesora?

### Binomio diferencia al cuadrado

Elevar  $(a - b)$  al cuadrado equivale a multiplicar esta diferencia por sí misma.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

Efectuando este producto se tiene:

$$\begin{array}{r} \left. \begin{array}{l} (a - b) \\ (a - b) \end{array} \right\} \times \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Es decir:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Representación algebraica}$$

- Por tanto, la **representación verbal** de este producto es:
- El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.



**Anexo 03: Tarea**

1. Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado aplicando la fórmula y luego verifique sus resultados multiplicando factor por factor.

➤  $(y - 6)^2 =$

➤  $(4a - 2)^2 =$

➤  $(7 - 2x)^2 =$



2. Completa el desarrollo de los siguientes cuadrados al binomio.

➤  $(x - 2)^2 = x^2 - \underline{\hspace{1cm}} + 4$

➤  $(a - \underline{\hspace{1cm}})^2 = a^2 - \underline{\hspace{1cm}} + 144$

➤  $(3f \underline{\hspace{1cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} - 60f + \underline{\hspace{1cm}}$

### Sesión de aprendizaje 3: “Resolvemos diversas situaciones sobre el binomio al cuadrado”

#### I.- Datos Informativos:

Docente : Karen Quintos Carranza  
 Área : Matemática  
 Grado : 3º secundaria, sección “A”  
 Fecha : 23/11/2020

#### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación.

COMPETENCIA/Capacidad	DESEMPEÑOS PRECISADOS	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE
<b>“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”</b> _ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas. _ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. _ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. _ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	_ Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión sobre el binomio al cuadrado en las diversas situaciones planteadas. _ Resuelve problemas y/o ejercicios utilizando la fórmula del binomio al cuadrado. _ Aplica el uso de propiedades matemáticas para desarrollar el binomio de un cuadrado.	Resuelve la situación problemática de forma escrita
		<b>INSTRUMENTO DE VALORACIÓN</b>
		Lista de cotejo
<b>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</b>		
<i>Gestiona su aprendizaje de manera autónoma.</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> <i>Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC.</i>		
<b>Enfoques Transversales</b>	<b>Valores/acciones observables</b>	
Enfoque Ambiental	Justicia y solidaridad <ul style="list-style-type: none"> <li>- Emite opinión de sus acciones y actitudes que impactan al medio ambiente de su actuar en beneficio de las personas.</li> </ul>	

## III.- Momentos de la sesión:

Momentos	Estrategias	Tiempo
<b>Inicio</b>	<p><b>MOTIVACIÓN</b></p> <p>_ La docente realiza el saludo respectivo y registra la asistencia; se mencionan los acuerdos de convivencia. Asimismo, se presenta el tema y a la vez, se dice la competencia y capacidades que los alumnos tendrán que desarrollar.</p> <p>_ Para motivar a los estudiantes se ha elaborado un test en la herramienta virtual de Kahoot! con la finalidad de que comuniquen los aprendizajes adquiridos sobre el binomio al cuadrado de manera entretenida.</p> <p><b>SABERES PREVIOS</b></p> <p>_ Para recuperar los saberes previos de los estudiantes se han elaborado 8 preguntas sobre el tema en la plataforma virtual de Kahoot! como ya se mencionó, finalizado el cuestionario, los alumnos comentan sobre sus respuestas dadas en la plataforma.</p> <p><b>PROPÓSITO Y ORGANIZACIÓN</b></p> <p>_ La docente enuncia el propósito de aprendizaje: Resolvemos situaciones que involucran el desarrollo del binomio al cuadrado de manera algebraica para hallar e interpretar su solución.</p> <p>_ Además, se les informa a los alumnos que serán evaluados mediante una lista de cotejo y se les dice que se desarrollaran problemas y ejercicios para entender el concepto del binomio al cuadrado.</p> <p><b>PROBLEMATIZACIÓN</b></p> <p>_ Se plantea la siguiente situación problemática: Lucía tiene un terreno de forma cuadrada cuya área es de <math>144 \text{ m}^2</math> y ella desea regalarle a su hermano una parte de su propiedad, por tanto, el lado del terreno de Lucía disminuye en "x" metros. Calcula la nueva área que representa el terreno de la señorita.</p> <p><b><u>Comprensión del problema:</u></b></p> <p>_ Se vuelve a leer la situación problemática y se les pregunta a los estudiantes lo siguiente: ¿De qué trata el problema?, ¿qué es lo que pide hallar el problema? y ¿cuáles son los datos que proporciona la situación problemática?</p> <p>_ Para verificar la comprensión del texto los alumnos responden a los cuestionamientos mediante una lluvia de ideas.</p>	15 min

<b>Desarrollo</b>	<p><b>GESTIÓN Y ACOMPAÑAMIENTO DE LA COMPETENCIA</b></p> <p><b><u>Búsqueda de estrategias:</u></b></p> <p>La profesora ayuda y hace que el estudiante explore y ejecute los distintos caminos que elegirá para afrontar el problema planteado.</p> <p><b><u>Representación (De lo concreto a lo simbólico):</u></b></p> <p>A partir de la situación problemática se explica sobre el binomio diferencia al cuadrado, estableciendo relaciones entre la expresión verbal del enunciado para traducirlo a una expresión algebraica.</p> <p><b><u>Formalización:</u></b></p> <p>_ Se comparte la siguiente fórmula:</p> $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ <p><b><u>Transferencia:</u></b></p> <p>_ Se escriben los siguientes ejercicios en la pizarra, para que cada estudiante participe y desarrolle los binomios al cuadrado propuestos:</p> $(5x + 3)^2 =$ $(3x^4 + 3y)^2 =$ $(0,3x^3y + 0,5z^2)^2 =$ $\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{2}y\right)^2 =$ $(6x^2 - 2y)^2 =$ $(4xy^3 - 5z^4)^2 =$ $(0,8x^4 - 0,3y)^2 =$ $\left(\frac{2}{3}xy - \frac{5}{4}x\right)^2 =$ <p>_ Posteriormente, se les pide dar solución a los siguientes problemas:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Considera que el lado de un cuadrado tiene una longitud de 12 unidades, si el lado disminuye en 4 unidades. Calcula el área del nuevo cuadrado.</li> <li>2. Considera que el lado de un cuadrado tiene una longitud de 8 unidades, si el lado aumenta en 3 unidades. Calcula el área del nuevo cuadrado.</li> </ol>	30 min

<b>Desarrollo</b>	<p>_ Se les pide a los alumnos resolver los ejercicios y problemas propuestos para que después puedan aplicar lo aprendido realizando la situación problemática. Para ello, la docente monitorea y da seguimiento a las actividades realizadas por los estudiantes.</p> <p>_ Los alumnos participan poniendo en común sus deducciones y generalizaciones en la resolución de los ejercicios propuestos y se le pide a un estudiante que dirija la solución de la situación problemática con la ayuda de sus compañeros.</p> <p><b>Reflexión:</b></p> <p>La profesora afianza las respuestas correctas y corrige posibles errores con la finalidad de construir el aprendizaje en los educandos, de esa manera se aprende del error y reflexionamos sobre el mismo para mejorar.</p>	
<b>Cierre</b>	<p><b>EVALUACIÓN Y METACOGNICIÓN</b></p> <p>_ Al final del desarrollo de las actividades, se les plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendiste hoy?, ¿se cumplió el propósito de aprendizaje? Posteriormente, la docente les entrega una ficha de metacognición para que lo respondan de forma individual (anexo 01).</p>	10 min

#### IV.- Materiales:

- Pizarra
- Plumones
- Ficha

#### V.- Bibliografía:

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2ª ed.). GRUPO EDITORIAL PATRIA.

Coveñas, M. (2009). *MateMax2* (3ª ed.). Bruño. (Original publicado en 2008).

Jimenez, M. (2009). *Matemática 1. Educación Media*. Santillana.

<https://drive.google.com/file/d/0B3D0WhLX1Akhany4dG02RIE2VEE/view?usp=sharing>

Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular*.

<http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf>

**Instrumento de evaluación***Lista de cotejo*

N.º	Informantes	<b>“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”</b>					
		<ul style="list-style-type: none"> <li>_ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>_ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>_ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.</li> <li>_ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>					
		<b>Desempeños</b>					
		Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión en la situación problemática planteada sobre el binomio diferencia al cuadrado.		Resuelve problemas y/o ejercicios utilizando la fórmula del binomio al cuadrado.		Verifica sus resultados cuando aplica la fórmula del binomio al cuadrado realizando la multiplicación factor por factor.	
		Sí	No	Sí	No	Sí	No
1.	I3A-1		X	X			X
2.	I3A-2	X		X		X	
3.	I3A-3		X	X			X
4.	I3A-4		X	X		X	
5.	I3A-5		X	X			X
6.	I3A-6		X	X			X

**Anexo 01: Ficha de Metacognición 3**

1. Luego de las clases desarrolladas ¿Qué sabes ahora sobre el binomio al cuadrado?
2. ¿Cuáles han sido las actividades que te han ayudado a entender este producto notable?
3. ¿Cuál fue el binomio que se te dificultó aprenderlo en clase: el binomio al cuadrado suma o el binomio al cuadrado diferencia? ¿Por qué?
4. ¿Cuál fue el binomio que se te hizo más fácil aprenderlo en clase: el binomio al cuadrado suma o el binomio al cuadrado diferencia? ¿Por qué?
5. ¿Crees que el desarrollo algebraico y el uso de propiedades matemáticas te ha ayudado a entender mejor el concepto sobre el binomio al cuadrado?
  - a) Sí
  - b) No

Si tu respuesta es sí ¿Cómo consideras que te ha ayudado?

---

---
6. Según lo visto en las sesiones de aprendizaje, ¿el binomio al cuadrado está presente en situaciones de la vida cotidiana? Si es así menciona otros ejemplos en donde esté presente la aplicación del binomio al cuadrado en la vida real, diferentes a los ya planteados en las sesiones de aprendizaje.
7. ¿Por qué crees que es importante aprender sobre este tema?

### Sesión de aprendizaje 1: “Estudiamos el binomio suma al cuadrado”

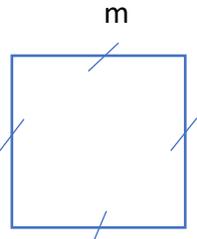
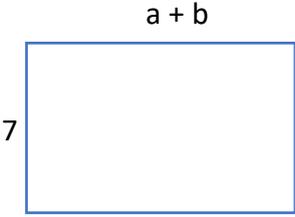
#### I.- Datos Informativos:

Docente : Karen Quintos Carranza  
 Área : Matemática  
 Grado : 3º secundaria, sección “D”  
 Fecha : 11/11/2020

#### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación.

COMPETENCIA/Capacidad	DESEMPEÑOS PRECISADOS	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE
<p><b>“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”</b></p> <p>_ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</p> <p>_ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</p> <p>_ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.</p> <p>_ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</p>	<p>_ Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión sobre el binomio suma al cuadrado en la situación problemática planteada.</p> <p>_ Elabora gráficos y utiliza la noción de área para desarrollar problemas y/o ejercicios sobre el binomio suma al cuadrado.</p> <p>_ Ejemplifica y hace uso de propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado a través de su representación gráfica.</p>	Resuelve la situación problemática de forma escrita
		<b>INSTRUMENTO DE VALORACIÓN</b>
		Lista de cotejo
<b>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</b>		
<p><i>Gestiona su aprendizaje de manera autónoma.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> <p><i>Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC.</i></p>		
<b>Enfoques Transversales</b>	<b>Valores/acciones observables</b>	
Enfoque Ambiental	<p>Justicia y solidaridad</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Emite opinión de sus acciones y actitudes que impactan al medio ambiente de su actuar en beneficio de las personas.</li> </ul>	

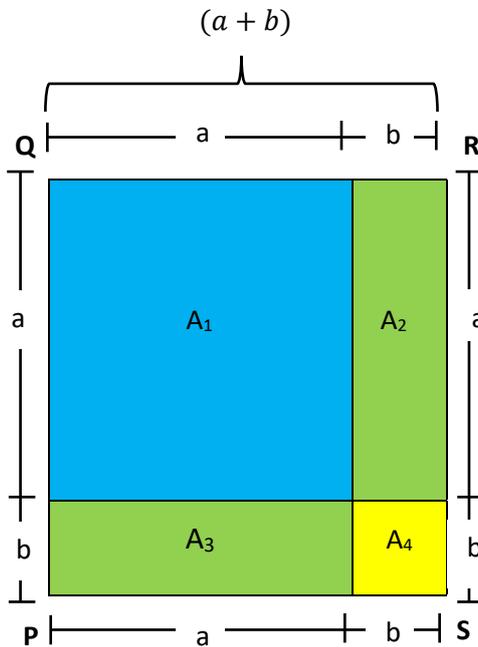
## III.- Momentos de la sesión:

Momentos	Estrategias	Tiempo
Inicio	<p><b>MOTIVACIÓN</b></p> <p>_ La docente da la bienvenida a los estudiantes de tercer grado “D” y registra la asistencia. Luego, mediante un consenso se establecen las normas de convivencia.</p> <p>_ Se presenta el tema y a la vez, se menciona la competencia y capacidades que los alumnos tendrán que desarrollar; para ello, se proyecta el PowerPoint (anexo 01) que será utilizado en esta sesión de aprendizaje a través de la plataforma virtual de Zoom.</p> <p>_ Para motivar a los estudiantes se hace un breve comentario acerca de la importancia del aprendizaje de los productos notables en el área de matemáticas.</p> <p><b>SABERES PREVIOS</b></p> <p>_ Para recuperar los saberes previos de los estudiantes se plantea las siguientes interrogantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ¿Qué recuerdas sobre el binomio al cuadrado?</li> <li>➤ ¿Cómo se calcula el área de un cuadrado y de un rectángulo?</li> <li>➤ Encuentra el área de las siguientes figuras:</li> </ul> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>A= _____</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>A= _____</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>A = _____</p> </div> </div> <p>_ Los estudiantes brindan sus respuestas de forma oral u escrita mostrando sus pizarras. Además, se les hace recordar que las unidades que se usan para medir áreas se llaman unidades cuadradas.</p> <p><b>PROPÓSITO Y ORGANIZACIÓN</b></p> <p>_ La docente enuncia el propósito de aprendizaje: Resolvemos situaciones que involucran el desarrollo de un binomio suma al cuadrado a través de su representación gráfica para hallar e interpretar su solución.</p>	15 min

<b>Inicio</b>	<p>_ Además, se les informa a los alumnos que serán evaluados mediante una lista de cotejo y se les comenta que se desarrollará un problema contextualizado y algunos ejercicios para entender el concepto del binomio suma al cuadrado.</p> <p><b>PROBLEMATIZACIÓN</b></p> <p>_ Se plantea la siguiente situación problemática: En Piura se ha construido un colegio, cuya área del terreno es de forma cuadrada y ha sido dividida en cuatro partes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Dos rectángulos de “a” metros de largo y “b” metros de ancho, para ambientes de recreación y estudio.</li> <li>➤ Dos cuadrados, uno de “a” metros y otro de “b” metros por lado respectivamente para la ubicación de las aulas y la oficina administrativa</li> </ul> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Cuál es el área total del terreno en donde está ubicado el colegio?<sup>10</sup></li> <li>2. Si uno de los rectángulos representa el ambiente de recreación y tiene un área de <math>15 \text{ m}^2</math> ¿Cuál es el área total del terreno en donde está ubicado el colegio?</li> </ol> <p><b><u>Comprensión del problema:</u></b></p> <p>_ Se pide la participación de un estudiante para que dé lectura a la situación problemática.</p> <p>_ Se pregunta a los estudiantes lo siguiente: ¿De qué trata el problema?, ¿qué es lo que pide hallar el problema? y ¿cuáles son los datos que proporciona la situación problemática?</p>	
<b>Desarrollo</b>	<p><b>GESTIÓN Y ACOMPAÑAMIENTO DE LA COMPETENCIA</b></p> <p><b><u>Búsqueda de estrategias:</u></b></p> <p>La profesora ayuda y hace que el estudiante explore y ejecute los distintos caminos que elegirá para afrontar el problema planteado.</p> <p><b><u>Representación (De lo concreto a lo simbólico):</u></b></p> <p>A partir de la situación problemática se explica sobre el binomio suma al cuadrado y se analizan los elementos que la componen. Para ello, se pide a los estudiantes que participen de manera activa porque a su vez se estará desarrollando parte de dicha situación.</p>	30 min

<sup>10</sup> Adaptado de Sedano, M., y Bernardo, H. (2017). *Cálculo de áreas rectangulares en el aprendizaje significativo de productos notables en estudiantes de la institución educativa mixto “Ramón Castilla y Marquesado” Huancavelica* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Huancavelica]. Repositorio Institucional Digital UNH. <http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1078>

\_ *Cuadrado de la suma de dos cantidades:* La representación geométrica del cuadrado de un binomio suma, se desarrolla mediante el concepto de áreas, para ello, se grafica un cuadrado PQRS cuyo lado será  $(a + b)$ .



De la figura se observa que el área del cuadrado PQRS es:

$$A_{\square} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Por lo tanto:

$$A_{\square} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_{\square} = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$A_{\square} = a^2 + 2ab + b^2$$

\_ Por lo tanto, la representación verbal queda expresada de esta manera:

*“El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda”.*

\_ La docente hace notar que al desarrollar el binomio suma al cuadrado se ha obtenido tres términos, para decirles que este resultado se llama “Trinomio cuadrado perfecto”.

\_ Los alumnos responden a la primera pregunta de la situación problemática.

**Formalización:**

\_ La docente interviene para fijar y compartir el siguiente enunciado:

El binomio suma al cuadrado se puede calcular a través de la suma de las áreas de las piezas que conforman el cuadrado, ya que de manera geométrica se obtiene esta figura, por ende:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\_ Asimismo, la profesora les explica el siguiente ejemplo:

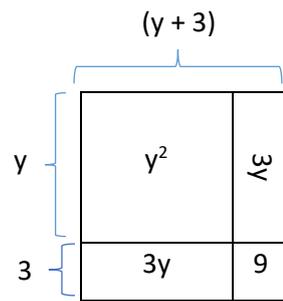
$$(y + 3)^2 =$$

$$A_{\square} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A_{\square} = y^2 + 3y + 3y + 9$$

$$A_{\square} = y^2 + 6y + 9$$

$$\therefore (y + 3)^2 = y^2 + 6y + 9$$



**Transferencia:**

Los alumnos aplican lo aprendido realizando los siguientes ejercicios:

1. Considera que el lado del cuadrado que se muestra en la figura tiene una longitud de 8 unidades, si el lado aumenta en 3 unidades. Calcula el área del nuevo cuadrado.



2. Si un cuadrado tiene un área de  $(2x+3)^2$

- Grafica dicho cuadrado
- Encuentra el área de cada pieza
- ¿Cuál es la suma de cada pieza que conforma el cuadrado?
- ¿A qué conclusión llegas de la respuesta anterior?

3. Plantea un ejemplo del binomio suma al cuadrado empleando el concepto de área en su desarrollo.

\_ Se les pide a los alumnos resolver los ejercicios propuestos y también, se retorna a la situación problemática para terminar con la segunda parte del reto, de ese modo, los estudiantes transfieren los conocimientos que han aprendido en la sesión.

\_ La docente monitorea y da seguimiento a las actividades realizadas.

\_ Los alumnos participan poniendo en común sus deducciones y generalizaciones.

**Reflexión:** La profesora afianza las respuestas correctas y en caso de que algún estudiante tuviera dificultades o errores para concluir con la segunda pregunta de la solución de la situación inicial presentada, se tratará de construir el aprendizaje para reflexionar sobre el mismo y mejorar.

Desarrollo

35 min

<b>Cierre</b>	<p><b>EVALUACIÓN Y METACOGNICIÓN</b></p> <p>_ Al final del desarrollo de las actividades, se les plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendiste hoy?, ¿se cumplió el propósito de aprendizaje? Así pues, la docente les entrega una ficha de metacognición para que lo respondan de forma individual (anexo 02).</p> <p>_ Como tarea de ampliación los estudiantes tendrán que desarrollar una ficha de ejercicios (anexo 03) y presentar la solución de la situación problemática realizada en clase.</p>	10 min
---------------	---	--------

#### IV.- Materiales:

- Pizarra
- Plumones
- Material didáctico (cartulina)
- PowerPoint
- Fichas

#### V.- Bibliografía:

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2ª ed.). GRUPO EDITORIAL PATRIA.

Capcha, J. (2016). *Estrategias didácticas en el aprendizaje de los productos notables en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la institución educativa República Federal de Alemania, Lima 2016* [Tesis de maestría, Universidad César Vallejo]. Repositorio de la Universidad César Vallejo. [http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha\\_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Coveñas, M. (2009). *MateMax2* (3ª ed.). Bruño. (Original publicado en 2008).

Jimenez, M. (2009). *Matemática 1. Educación Media*. Santillana. <https://drive.google.com/file/d/0B3D0WhLX1Akhany4dG02RIE2VEE/view?usp=sharing>

Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular*. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf>

**Instrumento de evaluación***Lista de cotejo*

N.º	Informantes	“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”					
		<ul style="list-style-type: none"> <li>_ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>_ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>_ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.</li> <li>_ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>					
		<b>Desempeños</b>					
Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión sobre el binomio suma al cuadrado en la situación problemática planteada.		Elabora gráficos y utiliza la noción de área para desarrollar problemas y/o ejercicios sobre el binomio suma al cuadrado.		Ejemplifica y hace uso de propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado a través de su representación gráfica.			
Sí		No		Sí		No	
1.	I3D-1		X	X		X	
2.	I3D-2		X	X		X	
3.	I3D-3	X		X		X	
4.	I3D-4	X		X		X	

**Anexo 01: PowerPoint de la sesión**

### “Binomio suma al cuadrado”

“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”

- ❖ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.
- ❖ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
- ❖ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.
- ❖ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

### Productos notables

- Según Baldor (2008) “Se llaman productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificarla multiplicación”
- Son importantes porque su apropiación permite ejecutar con veracidad al menos las siguientes actividades:
  - ❖ Calcular productos de expresiones algebraicas.
  - ❖ Simplificar expresiones algebraicas.
  - ❖ Factorizar expresiones algebraicas.
  - ❖ Desarrollar una expresión algebraica.
  - ❖ Hallar el valor de una variable.
  - ❖ Resolver ecuaciones de segundo grado.

### Saberes previos

- ¿Cómo se calcula el área de un cuadrado y de un rectángulo?
- Encuentra el área de las siguientes figuras:

### Propósito de aprendizaje

- Resolvemos situaciones que involucran el desarrollo de un binomio suma al cuadrado a través de su representación gráfica para hallar e interpretar su solución.

### Situación problemática

En Piura se ha construido un colegio, cuya área del terreno es de forma cuadrada y ha sido dividida en cuatro partes:

- Dos rectángulos de “a” metros de largo y “b” metros de ancho, para ambientes de recreación y estudio.
- Dos cuadrados de “a” metros y “b” metros por lado, respectivamente para la ubicación de las aulas y la oficina administrativa.

1. ¿Cuál es el área total del terreno en donde está ubicado el colegio?
2. Si uno de los rectángulos representa el ambiente de recreación y tiene un área de 15 m<sup>2</sup> ¿Cuál es el área total del terreno en donde está ubicado el colegio?

### Binomio suma al cuadrado

- La representación geométrica (interpretación) del cuadrado de un binomio suma, se desarrolla mediante el concepto de áreas, para ello, se grafica un cuadrado PQRS cuyo lado será (a + b).

De la figura se observa que el área del cuadrado PQRS es:

$$A_{\square} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Por lo tanto:

$$A_{\square} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_1$$

$$A_{\square} = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$A_{\square} = a^2 + 2ab + b^2$$

Es decir:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow \text{Trinomio cuadrado perfecto}$$

Por lo tanto, la **representación verbal** queda expresada de la siguiente manera:

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda.

### Ejercicios:

- 1. Considera que el lado del cuadrado que se muestra en la figura tiene una longitud de 8 unidades, si el lado aumenta en 3 unidades. Calcula el área del nuevo cuadrado.

- 2. Si un cuadrado tiene un área de  $(2x + 3)^2$ 
  - ❖ Grafica dicho cuadrado
  - ❖ Encuentra el área de cada pieza
  - ❖ ¿Cuál es la suma de cada pieza que conforma el cuadrado?
  - ❖ ¿A qué conclusión llegas de la respuesta anterior?
- 3. Plantea un ejemplo del binomio suma al cuadrado empleando el concepto de área en su desarrollo.

**Anexo 02: Ficha de metacognición 1**

Nombres y apellidos: \_\_\_\_\_

Grado y sección: \_\_\_\_\_

**✚ Sesión de aprendizaje**

1. ¿La situación problemática te ha parecido significativa para comprender el tema?

---



---

2. ¿Qué parte de la sesión te ha ayudado a comprender el cuadrado de un binomio suma?

---



---

3. ¿Qué dificultades has tenido mientras realizabas las actividades de aprendizaje?

---



---

4. ¿Qué hiciste para solucionarlas?

---



---

**✚ Tarea**

1. Para desarrollar la actividad, ¿has vuelto a revisar lo que se hizo en clase? Sí  No

2. ¿Cuál fue el ejercicio en donde tuviste dificultades para desarrollar el cuadrado de un binomio suma? ¿por qué?

---



---

3. ¿Qué hiciste para solucionarlas?

---



---

4. ¿Has consultado otra fuente para entender el tema?

e) Pregunté a un familiar

f) Revisé un libro

g) Miré videos

h) Otro:

---

## Anexo 03: Tarea

Completa el siguiente cuadro<sup>11</sup>:

BINOMIO SUMA AL CUADRADO	GRÁFICA	DESARROLLO				
$(y + 10)^2$						
	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>9a^2</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>12a</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">16</td> </tr> </table>	$9a^2$	$12a$		16	
$9a^2$	$12a$					
	16					
		$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ $A = 4x^2 + 10x + 10x + 25$ $A = 4x^2 + 20x + 25$				

<sup>11</sup> Adaptado de Capcha, J. (2016). *Estrategias didácticas en el aprendizaje de los productos notables en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la institución educativa República Federal de Alemania, Lima 2016* [Tesis de maestría, Universidad César Vallejo]. Repositorio de la Universidad César Vallejo. [http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha\\_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

## Sesión de aprendizaje 2: “Estudiamos el binomio diferencia al cuadrado”

### I.- Datos Informativos:

Docente : Karen Quintos Carranza  
 Área : Matemática  
 Grado : 3º secundaria, sección “D”  
 Fecha : 18/11/2020

### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación.

COMPETENCIA/Capacidad	DESEMPEÑOS PRECISADOS	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE
<p><b>“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”</b></p> <p>_ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</p> <p>_ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</p> <p>_ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.</p> <p>_ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</p>	<p>_ Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión sobre el binomio diferencia al cuadrado en la situación problemática planteada.</p> <p>_ Elabora gráficos y utiliza la noción de área para desarrollar problemas y/o ejercicios sobre el binomio diferencia al cuadrado.</p> <p>_ Ejemplifica y hace uso de propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado a través de su representación gráfica.</p>	Resuelve la situación problemática de forma escrita
		<b>INSTRUMENTO DE VALORACIÓN</b>
		Lista de cotejo
<b>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</b>		
<p><i>Gestiona su aprendizaje de manera autónoma.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> <p><i>Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC.</i></p>		
<b>Enfoques Transversales</b>	<b>Valores/acciones observables</b>	
Enfoque Ambiental	<p>Justicia y solidaridad</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Emite opinión de sus acciones y actitudes que impactan al medio ambiente de su actuar en beneficio de las personas.</li> </ul>	

## III.- Momentos de la sesión:

Momentos	Estrategias	Tiempo
<b>Inicio</b>	<p><b>MOTIVACIÓN</b></p> <p>_ La docente saluda a los estudiantes de tercer grado “D” y registra la asistencia. Asimismo, se recuerdan las normas de convivencia.</p> <p>_ Se presenta el tema y a la vez, se menciona la competencia y capacidades que los alumnos tendrán que desarrollar; para ello, se proyecta el PowerPoint (anexo 01) que será utilizado en esta sesión de aprendizaje a través de la plataforma virtual de Zoom.</p> <p>_ Para motivar a los estudiantes se les pide comentar acerca de la siguiente frase de Thomas Edison: <i>“Nuestra mayor debilidad radica en renunciar. La forma más segura de tener éxito es siempre intentarlo una vez más”</i>. De ese modo, ellos tendrán que reflexionar sobre la importancia de persistir para lograr los objetivos que se propongan.</p> <p><b>SABERES PREVIOS</b></p> <p>_ Para recuperar los saberes previos de los estudiantes se plantea las siguientes interrogantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ¿Qué es un producto notable?</li> <li>➤ ¿Cuál es la interpretación geométrica de un binomio suma al cuadrado?</li> </ul> <p>_ Los estudiantes brindan sus respuestas de forma oral u escrita mostrando sus pizarras. Además, se les hace recordar sobre la situación problemática de la sesión anterior.</p> <p><b>PROPÓSITO Y ORGANIZACIÓN</b></p> <p>_ La docente enuncia el propósito de aprendizaje:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Resolvemos situaciones que involucran el desarrollo de un binomio diferencia al cuadrado a través de su representación gráfica para hallar e interpretar su solución.</li> </ul> <p>_ Además, se les informa a los alumnos que serán evaluados mediante una lista de cotejo y se les comenta que se desarrollará un problema contextualizado y algunos ejercicios para entender el concepto del binomio diferencia al cuadrado.</p>	15 min

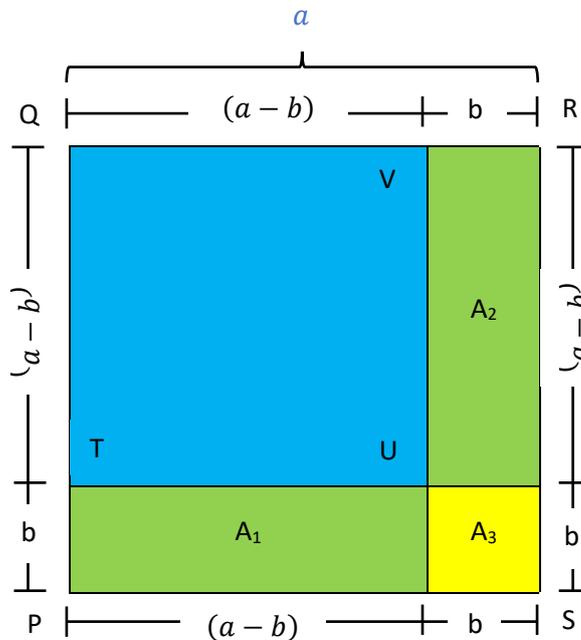
<b>Inicio</b>	<b>PROBLEMATIZACIÓN</b>			
	<p>_ Se plantea la siguiente situación problemática:</p> <p>La docente del área de Matemática ha presentado a sus alumnos de 3º grado de secundaria el caso de Marcos, en el cual se les pide hallar el área de su terreno tomando en cuenta cada uno de los pasos que se muestran en el siguiente cuadro que además tienen que completar según lo indicado<sup>12</sup>.</p>			
		Expresión verbal		Representación gráfica
	Paso 1	Marcos tiene un terreno cuadrado cuyo lado tiene una longitud igual a "a".		
	Paso 2	Marcos decide vender una parte de su terreno equivalente a un rectángulo de lados "a" y "b".		
Paso 3	Después compra un sector de terreno aledaño al suyo de forma cuadrada de lado "b".			
Paso 4	luego vende otra parte de su terreno que también equivale a un rectángulo de lados "a" y "b".			
	<p>¿Podrías ayudar a los alumnos de 3º grado de secundaria a cumplir el reto que les ha dejado la profesora?</p> <p><b>Comprensión del problema:</b></p> <p>_ Se vuelve a leer la situación problemática y se les pregunta a los estudiantes lo siguiente: ¿De qué trata el problema?, ¿qué es lo que pide hallar el problema? y ¿cuáles son los datos que proporciona la situación problemática?</p>			
<b>Desarrollo</b>	<b>GESTIÓN Y ACOMPAÑAMIENTO DE LA COMPETENCIA</b>		35 min	
	<p><b>Búsqueda de estrategias:</b></p> <p>La profesora ayuda y hace que el estudiante explore y ejecute los distintos caminos que elegirá para afrontar el problema planteado.</p>			

<sup>12</sup> Adaptado de Acevedo, H. (2007). *Enseñanza de los productos notables por medio del aprendizaje cooperativo* [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio de la Universidad Industrial de Santander. <https://docplayer.es/26382513-Ensenanza-de-los-productos-notables-por-medio-del-aprendizaje-cooperativo-hernan-dario-acevedo-sanchez.html>

**Representación (De lo concreto a lo simbólico):**

A partir de la situación problemática se explica sobre el binomio diferencia al cuadrado, estableciendo lo siguiente:

\_ *Cuadrado de la diferencia de dos cantidades:* En cuanto a la representación geométrica, se parte de la noción de áreas, pero en este caso el lado del cuadrado PQRS será "a".



De la figura se extrae que el área del cuadrado PQRS es:

$$A_{\square} = a^2$$

Además, las figuras geométricas que corresponden a cada una de las áreas ( $A_1, A_2, A_3$ ) que forman parte del cuadrado PQRS son:

- ✓ Área del rectángulo de lados  $b$  y  $(a - b)$ :  $A_1 = b(a - b)$
- ✓ Área del rectángulo de lados  $(a - b)$  y  $b$ :  $A_2 = b(a - b)$
- ✓ Área del cuadrado de lado "b":  $A_3 = b^2$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{Área del cuadrado QTUV} &= \text{Área del cuadro de PQRS} - A_1 - A_2 - A_3 \\ &= a^2 - ab + b^2 - ab + \cancel{b^2} - \cancel{b^2} \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

\_ Entonces, la representación verbal queda expresada de esta manera: “El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad”.

\_ La docente hace notar que al desarrollar el binomio diferencia al cuadrado se ha obtenido tres términos, para decirles que este resultado se llama “Trinomio cuadrado perfecto”.

**Formalización:**

\_ La docente interviene para fijar y compartir la fórmula del binomio diferencia al cuadrado:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

\_ Asimismo, la profesora les explica el siguiente ejemplo:

$$(y - 3)^2 =$$

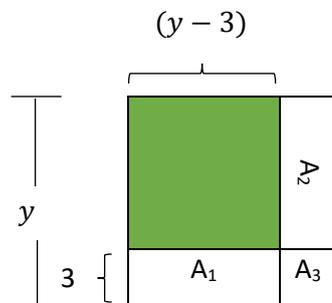
$$\text{Área } \blacksquare = \text{Área } \square - A_1 - A_2 - A_3$$

$$\text{Área } \blacksquare = y^2 - (3y - 9) - (3y - 9) - 9$$

$$\text{Área } \blacksquare = y^2 - 3y + 9 - 3y + 9 - 9$$

$$\text{Área } \blacksquare = y^2 - 6y + 9$$

$$\therefore (y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9$$



Desarrollo

**Transferencia:**

Los alumnos aplican lo aprendido realizando los siguientes ejercicios:

1. Considera que el lado del cuadrado que se muestra en la figura tiene una longitud de 12 unidades, si el lado disminuye en 4 unidades. Calcula el área del nuevo cuadrado.



2. Lucía tiene un terreno de forma cuadrada cuya área es de  $144 \text{ m}^2$  y ella desea regalarle a su hermano una parte de su propiedad, por tanto, el lado del terreno de Lucía disminuye en “x” metros. Calcula la nueva área que representa el terreno de la señorita.
3. Desarrolla de manera geométrica la siguiente expresión:  $(x - 14)^2$

30 min

	<p>_ Se les pide a los alumnos resolver los ejercicios propuestos para que después puedan aplicar lo aprendido realizando la situación problemática. Para ello, la docente monitorea y da seguimiento a las actividades realizadas por los estudiantes.</p> <p>_ Los alumnos participan poniendo en común sus deducciones y generalizaciones en la resolución de los ejercicios propuestos y se le pide a un estudiante que dirija la solución de la situación problemática con la ayuda de sus compañeros.</p> <p><b>Reflexión:</b> La profesora afianza las respuestas correctas y corrige posibles errores con la finalidad de construir el aprendizaje en los educandos, de esa manera se aprende del error y reflexionamos sobre el mismo para mejorar.</p>	
<b>Cierre</b>	<p><b>EVALUACIÓN Y METACOGNICIÓN</b></p> <p>_ Al final del desarrollo de las actividades, se les plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendiste hoy?, ¿se cumplió el propósito de aprendizaje? Posteriormente, la docente les entrega una ficha de metacognición para que lo respondan de forma individual (anexo 02).</p> <p>_ Como tarea de ampliación los estudiantes tendrán que desarrollar una ficha de ejercicios (anexo 03) y presentar la solución de la situación problemática realizada en clase.</p>	10 min

#### IV.- Materiales:

- Pizarra
- Plumones
- Material didáctico (cartulina)
- PowerPoint
- Fichas

#### V.- Bibliografía:

- Acevedo, H. (2007). *Enseñanza de los productos notables por medio del aprendizaje cooperativo* [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio de la Universidad Industrial de Santander. <https://docplayer.es/26382513-Ensenanza-de-los-productos-notables-por-medio-del-aprendizaje-cooperativo-hernan-dario-acevedo-sanchez.html>
- Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2ª ed.). GRUPO EDITORIAL PATRIA.
- Capcha, J. (2016). *Estrategias didácticas en el aprendizaje de los productos notables en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la institución educativa República*

*Federal de Alemania, Lima 2016* [Tesis de maestría, Universidad César Vallejo]. Repositorio de la Universidad César Vallejo. [http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha\\_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Coveñas, M. (2009). *MateMax2* (3ª ed.). Bruño. (Original publicado en 2008).

Jimenez, M. (2009). *Matemática 1. Educación Media*. Santillana. <https://drive.google.com/file/d/0B3D0WhLX1AkhY4dG02RIE2VEE/view?usp=sharing>

Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular*. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf>

### **Instrumento de evaluación**

#### *Lista de cotejo*

N.º	Informantes	<b>“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”</b>					
		<ul style="list-style-type: none"> <li>_ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>_ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>_ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.</li> <li>_ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>					
		<b>Desempeños</b>					
		Establece relaciones entre datos y expresa su comprensión sobre el binomio diferencia al cuadrado en la situación problemática planteada.	Elabora gráficos y utiliza la noción de área para desarrollar problemas y/o ejercicios sobre el binomio diferencia al cuadrado.	Ejemplifica y hace uso de propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado a través de su representación gráfica.			
		Sí	No	Sí	No	Sí	No
1.	I3D-1	X		X			X
2.	I3D-2	X		X			X
3.	I3D-3	X		X		X	
4.	I3D-4	X		X			X

**Anexo 01: PowerPoint de la sesión**

### "Binomio diferencia al cuadrado"

"Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio"

- ❖ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.
- ❖ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
- ❖ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.
- ❖ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

*Nuestra mayor debilidad radica en renunciar. La forma más segura de tener éxito es siempre intentarlo una vez más.*



Thomas Edison

### Propósito de aprendizaje

➤ Resolvemos situaciones que involucran el desarrollo de un binomio diferencia al cuadrado a través de su representación gráfica para hallar e interpretar su solución.



### Situación problemática

1. La docente del área de Matemática ha presentado a sus alumnos de 3º grado de secundaria el caso de Marcos, en el cual se les pide hallar el área de su terreno tomando en cuenta cada uno de los pasos que se muestran en el siguiente cuadro que además tienen que completar según lo indicado.

	Expresión verbal	Representación gráfica
Paso 1	Marcos tiene un terreno cuadrado cuyo lado tiene una longitud igual a "a".	
Paso 2	Marcos decide vender una parte de su terreno equivalente a un rectángulo de lados "a" y "b".	
Paso 3	Después compra un sector de terreno aledaño al suyo de forma cuadrada de lado "b".	
Paso 4	Luego vende otra parte de su terreno que también equivale a un rectángulo de lados "a" y "b".	

¿Podrías ayudar a los alumnos de 3º grado de secundaria a cumplir el reto que les ha dejado la profesora?

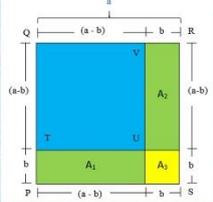
### Binomio diferencia al cuadrado

• Cuadrado de la diferencia de dos cantidades:

En cuanto a la representación geométrica, se parte de la noción de áreas, pero en este caso el lado del cuadrado PQRS será "a".

Área del cuadrado QTUV = Área del cuadro de PQRS - A1 - A2 - A3  
 $= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$   
 $= a^2 - 2ab + b^2$

Entonces:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$


• Por tanto, la **representación verbal** de este producto es:

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el doble de la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

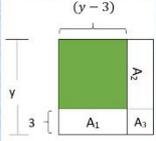


### Ejemplo:

•  $(y - 3)^2 =$

Área  $\blacksquare = \text{Área}_{\square} - A_1 - A_2 - A_3$   
 Área  $\blacksquare = y^2 - (3y - 9) - (3y - 9) - 9$   
 Área  $\blacksquare = y^2 - 3y + 9 - 3y + 9 - 9$   
 Área  $\blacksquare = y^2 - 6y + 9$

• Por lo tanto:

$$(y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9$$


### Problemas

1. Considera que el lado del cuadrado que se muestra en la figura tiene una longitud de 12 unidades, si el lado disminuye en 4 unidades. Calcula el área del nuevo cuadrado. 
2. Lucía tiene un terreno de forma cuadrada cuya área es de 144 m<sup>2</sup> y ella desea regalarle a su hermano una parte de su propiedad, por tanto, el lado del terreno de Lucía disminuye en "x" metros. Calcula la nueva área que representa el terreno de la señorita.
3. Desarrolla de manera geométrica la siguiente expresión:  $(x - 14)^2$

**Anexo 02: Ficha de metacognición 2**

Nombres y apellidos: \_\_\_\_\_

Grado y sección: \_\_\_\_\_

**✚ Sesión de aprendizaje**

1. ¿La situación problemática te ha parecido significativa para comprender el tema?

---



---

2. ¿Qué parte de la sesión te ha ayudado a comprender el cuadrado de un binomio diferencia?

---



---

3. ¿Qué dificultades has tenido mientras realizabas las actividades de aprendizaje?

---



---

4. ¿Qué hiciste para solucionarlas?

---



---

**✚ Tarea**

1. Para desarrollar la actividad, ¿has vuelto a revisar lo que se hizo en clase? Sí  No

2. ¿Cuál fue el ejercicio en donde tuviste dificultades para desarrollar el cuadrado de un binomio diferencia? ¿por qué?

---



---

3. ¿Qué hiciste para solucionarlas?

---



---

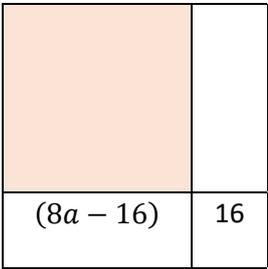
4. ¿Has consultado otra fuente para entender el tema?

- a) Pregunté a un familiar                      b) Revisé un libro  
c) Miré videos                                      d) Otro:

---

## Anexo 03: Tarea

Completa el siguiente cuadro<sup>13</sup>:

BINOMIO DIFERENCIA AL CUADRADO	GRÁFICA	DESARROLLO
$(y - 7)^2$		
		
		$\text{Área}_{\blacksquare} = \text{Área}_{\square} - A_1 - A_2 - A_3$ $\text{Área}_{\blacksquare} = k^2 - (9k - 81) - (9k - 81) - 81$ $\text{Área}_{\blacksquare} = k^2 - 9k + 81 - 9k + 81 - 81$ $\text{Área}_{\blacksquare} = k^2 - 18k + 81$

<sup>13</sup> Adaptado de Capcha, J. (2016). *Estrategias didácticas en el aprendizaje de los productos notables en los estudiantes del tercer grado de educación secundaria de la institución educativa República Federal de Alemania, Lima 2016* [Tesis de maestría, Universidad César Vallejo]. Repositorio de la Universidad César Vallejo. [http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha\\_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/UCV/20877/Capcha_LIJW.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

### Sesión de aprendizaje 3: “Resolvemos diversas situaciones sobre el binomio al cuadrado”

#### I.- Datos Informativos:

Docente : Karen Quintos Carranza  
 Área : Matemática  
 Grado : 3º secundaria, sección “D”  
 Fecha : 25/11/2020

#### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación.

COMPETENCIA/Capacidad	DESEMPEÑOS PRECISADOS	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE
<b>“Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”</b> _ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas. _ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. _ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. _ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	_ Representa gráficamente su comprensión sobre el binomio suma al cuadrado. _ Elabora gráficos y utiliza la noción de área para desarrollar problemas y/o ejercicios sobre el binomio diferencia al cuadrado. _ Ejemplifica y hace uso de propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado a través de su representación gráfica.	Demuestra de manera gráfica el binomio suma de un cuadrado
		<b>INSTRUMENTO DE VALORACIÓN</b>
		Lista de cotejo
<b>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</b>		
<i>Gestiona su aprendizaje de manera autónoma.</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> <i>Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC.</i>		
<b>Enfoques Transversales</b>	<b>Valores/acciones observables</b>	
Enfoque Ambiental	Justicia y solidaridad <ul style="list-style-type: none"> <li>- Emite opinión de sus acciones y actitudes que impactan al medio ambiente de su actuar en beneficio de las personas.</li> </ul>	

## III.- Momentos de la sesión:

Momentos	Estrategias	Tiempo
<b>Inicio</b>	<p><b>MOTIVACIÓN</b></p> <p>_ La docente realiza el saludo respectivo y registra la asistencia. Asimismo, se mencionan los acuerdos de convivencia. Se presenta el tema y a la vez, se enuncia la competencia y capacidades que los alumnos tendrán que desarrollar.</p> <p>_ Para motivar a los estudiantes se les informa que haremos un trabajo demostrativo acerca del binomio suma al cuadrado con hojas bond o cartulinas.</p> <p><b>SABERES PREVIOS</b></p> <p>_ Para recuperar los saberes previos de los estudiantes se plantea la siguiente interrogante: Expresa la representación verbal de las siguientes expresiones:</p> $(a + b)^2 =$ $(a - b)^2 =$ <p>_ Los estudiantes participan y brindan sus respuestas de forma oral.</p> <p><b>PROPÓSITO Y ORGANIZACIÓN</b></p> <p>_ La docente enuncia el propósito de aprendizaje: Demostramos de manera geométrica la representación de un binomio suma al cuadrado con material escolar.</p> <p>_ Además, se les informa a los alumnos que serán evaluados mediante una lista de cotejo y se les comenta que se desarrollará un problema contextualizado y algunos ejercicios para entender el concepto del binomio suma al cuadrado.</p> <p><b>PROBLEMATIZACIÓN</b></p> <p>_ Se plantea la siguiente situación problemática: Lucas está en 3º grado de secundaria y su profesora le ha dejado como tarea que represente de manera geométrica el binomio suma al cuadrado con material escolar, es decir haciendo uso de hojas bond o cartulinas para que él visualice el concepto de dicho tema algebraico estudiado en clase, puesto que Lucas tuvo algunos problemas para entenderlo. ¿Podrías ayudar a Lucas a realizar su actividad? ¿Cómo lo ayudarías?</p> <p><b><u>Comprensión del problema:</u></b></p> <p>_ Se pregunta a los estudiantes lo siguiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ¿De qué trata el problema?</li> <li>➤ ¿Qué es lo que pide realizar?</li> </ul>	15 min

<b>Desarrollo</b>	<p><b>GESTIÓN Y ACOMPAÑAMIENTO DE LA COMPETENCIA</b></p> <p><b><u>Búsqueda de estrategias:</u></b></p> <p>La profesora ayuda y hace que el estudiante explore y ejecute los distintos caminos que elegirá para afrontar el problema planteado.</p> <p><b><u>Representación (De lo concreto a lo simbólico):</u></b></p> <p>A partir de la situación problemática se recuerda sobre el binomio suma al cuadrado asociado con la definición de áreas.</p> <p>_ Los alumnos trabajan de manera individual la situación problemática, es decir, elaborando la representación gráfica del binomio suma al cuadrado, para que posteriormente expliquen cómo lo que han realizado, las medidas que han usado para verificar finalmente, si es que han cumplido con el reto planteado</p> <p><b><u>Formalización:</u></b></p> <p>Se comparte la siguiente fórmula: <math>(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2</math></p> <p><b><u>Transferencia:</u></b></p> <p>_ Los alumnos luego de haber desarrollado la situación problemática, la profesora plantea los siguientes ejercicios para que lo desarrollen de manera geométrica:</p> <p style="margin-left: 40px;">a) <math>(2x + 8)^2 =</math></p> <p style="margin-left: 40px;">b) <math>(x - z)^2 =</math></p> <p style="margin-left: 40px;">c) <math>(3y - 7)^2 =</math></p> <p>_ Se les pide a los alumnos resolver los ejercicios propuestos, mientras la docente monitorea y da seguimiento a las actividades realizadas.</p> <p>_ Los alumnos participan poniendo en común sus deducciones y generalizaciones.</p> <p><b><u>Reflexión:</u></b> La profesora afianza las respuestas correctas y corrige posibles errores con la finalidad de construir el aprendizaje en los educandos, de esa manera se aprende del error y reflexionamos sobre el mismo para mejorar.</p>	45 min
	<b>Cierre</b>	<p><b>EVALUACIÓN Y METACOGNICIÓN</b></p> <p>_ Al final del desarrollo de las actividades, se les plantea las siguientes interrogantes: ¿Qué aprendiste hoy?, ¿se cumplió el propósito de aprendizaje? Así pues, la docente les entrega una ficha de metacognición para que lo respondan de forma individual (anexo 01).</p>
		10 min

#### IV.- Materiales:

- Pizarra
- Plumones

- Material escolar (hojas bond, tijera, cartulina, etc.)
- Ficha

#### V.- Bibliografía:

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor* (2ª ed.). GRUPO EDITORIAL PATRIA.

Coveñas, M. (2009). *MateMax2* (3ª ed.). Bruño. (Original publicado en 2008).

Jimenez, M. (2009). *Matemática 1. Educación Media*. Santillana.

<https://drive.google.com/file/d/0B3D0WhLX1AkhY4dG02RIE2VEE/view?usp=sharing>

Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica Regular*.

<http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016-2.pdf>

#### Instrumento de evaluación

##### *Lista de cotejo*

N.º	Informantes	"Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio"								
		_ Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas. _ Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas. _ Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales. _ Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.								
		<b>Desempeños</b>								
		Representa gráficamente su comprensión sobre el binomio suma al cuadrado con material escolar.	Elabora gráficos y utiliza la noción de área para desarrollar problemas y/o ejercicios sobre el binomio suma al cuadrado.	Ejemplifica y hace uso de propiedades matemáticas para señalar su comprensión sobre el binomio al cuadrado a través de su representación gráfica.	Sí	No	Sí	No	Sí	No
1.	I3D-1	X		X		X		X		
2.	I3D-2	X		X		X		X		
3.	I3D-3	X		X		X		X		
4.	I3D-4	X		X		X		X		

**Anexo 01: Ficha de metacognición 3**

1. Luego de las clases desarrolladas ¿Qué sabes ahora sobre el binomio al cuadrado?
2. ¿Cuáles han sido las actividades que te han ayudado a entender este producto notable?
3. ¿Cuál fue el binomio que se te dificultó aprender en clase: el binomio al cuadrado suma o el binomio al cuadrado diferencia? ¿Por qué?
4. ¿Cuál fue el binomio que se te hizo más fácil aprender en clase: el binomio al cuadrado suma o el binomio al cuadrado diferencia? ¿Por qué?
5. ¿Crees que la noción de área te ha ayudado a entender mejor el concepto sobre el binomio al cuadrado? ¿Cómo consideras que te ha ayudado?
6. Según lo visto en las sesiones de aprendizaje, ¿el binomio al cuadrado está presente en situaciones de la vida cotidiana? Si es así menciona otros ejemplos en donde esté presente la aplicación del binomio al cuadrado en la vida real, diferentes a los ya planteados en las sesiones de aprendizaje.
7. ¿Por qué crees que es importante aprender sobre este tema?

**Apéndice G: Diarios de campo de las sesiones de aprendizaje****Diario de campo N° 1**

Docente: Karen Quintos Carranza

Fecha: 12-11-2020

Tema: Estudiamos el binomio suma al cuadrado (representación algebraica y verbal)

Grado: 3º A

Hora de inicio: 10:40 a.m.

Hora de cierre: 12:00 p.m.

Observaciones	Comentarios
<p>La docente saluda a los estudiantes mientras ellos están ingresando a la sala virtual, les solicita encender la cámara ya que de igual forma lo harán durante el desarrollo de la sesión, algunos lo hacen. Luego les pide establecer algunas normas de convivencia, pero ellos no han participado por lo que la docente da algunas sugerencias. Posteriormente, les pide que su participación de preferencia sea oral (activando el micrófono) y no por el chat. Menciona el título de la sesión, la competencia y capacidades a trabajar en la sesión de aprendizaje, asimismo, expone la importancia de los productos notables. Después, recoge los saberes previos de los estudiantes, pero ellos manifiestan que no recuerdan nada sobre el binomio al cuadrado, de modo que la docente les plantea unas preguntas para favorecer la evocación de ciertos conceptos, tales como la idea del cuadrado de un número y el doble de un número, aspectos que han quedado consolidado según los propios estudiantes. La docente les recomienda que para la multiplicación utilicen paréntesis, enuncia el propósito de la clase y les dice que los evaluará mediante una lista de cotejo, presenta la situación problemática y solicita la participación voluntaria de un estudiante para su lectura. La docente precisa que solo el estudiante I3A-2 participa y pide la intervención de todos los estudiantes, se plantean preguntas para entender el problema y los estudiantes responden; ellos han</p>	<p>Al parecer la docente está un poco apresurada por iniciar con la sesión de aprendizaje ya que cuando les pide establecer las normas de convivencia, no les da el tiempo suficiente para dar sus opiniones o al menos llamar con nombre a alguno de ellos para que lo haga. Respecto al recojo de los saberes previos, hubiese sido mejor presentar las preguntas una por una y no en bloque, ya que las mismas llevan una secuencialidad.</p>

comprendido los datos que les da el problema sin embargo, cuando la docente les pregunta cómo se desarrollaría el problema, no responden, les da unos minutos y siguen sin opinar, de modo que ella los orienta, pero siempre solicitando la intervención oral de los estudiantes; es decir primero coloca en la pizarra la figura de un cuadrado general para luego colocar las subpartes, detalle que los mismos estudiantes han detectado. Luego, con la ayuda de la mayoría de los estudiantes se empieza a colocar las dimensiones de los lados de las figuras, aspecto que ayuda a recordar ciertas propiedades de geometría como, por ejemplo, los lados opuestos de un rectángulo son paralelos y por lo tanto tienen la misma medida; sin embargo, debido al propósito de aprendizaje se focaliza en hallar el lado del cuadrado para explicar el tema mediante su representación algebraica y de ese modo no desarrollar la sumatoria de áreas. Por consiguiente, se retorna a la idea de la potencia de un número y se recuerda la fórmula para hallar el área de un cuadrado, lo que permite explicar que el binomio al cuadrado equivale a multiplicar el binomio por sí mismo; la docente pide la intervención de un estudiante para que realice aquella operación, no obtiene una participación individual, pero si grupal. Se realiza la suma de términos semejantes para enfatizar que el desarrollo de un binomio al cuadrado da como resultado un trinomio cuadrado perfecto y a su vez se hace la representación verbal del binomio en estudio, además, se refuerza la formalización a través de la proyección del PowerPoint. La docente pregunta si hasta este momento de la sesión se ha podido dar respuesta a parte de la situación problemática, a lo que el estudiante I3A-2 dice que se ha desarrollado de manera algebraica pero no sabe cuál es el área del terreno, la docente explica que esa es la respuesta. La docente continúa con el desarrollo de la sesión planteando algunos ejemplos, en el ejercicio  $(x + 1)^2$ , el estudiante I3A-2 acota que el tercer término de su desarrollo debe quedar al cuadrado, pero la docente le hace notar que uno al cuadrado es uno, luego se continúa con el ejercicio  $(2x + y)^2$  en el cual se hace mención a la propiedad de la multiplicación de una potencia para poder efectuarlo, se termina con su desarrollo y según los estudiantes no tienen ninguna duda. Una vez terminada

Para la presentación de la figura, quizás hubiese sido mucho mejor mostrar las cuatro piezas y pedirles a los estudiantes cómo formarían el área del terreno, ya que en este caso la docente les ha facilitado ese proceso.

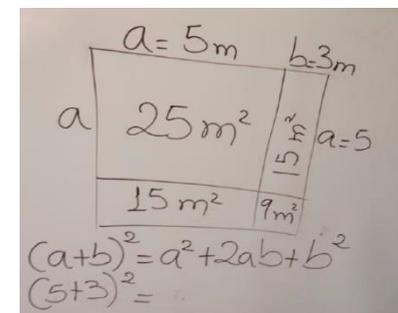
esta parte, se prosigue con el planteo de ejercicios a cada estudiante, el estudiante I3A-6 presenta la solución de su ejercicio de manera correcta, pero empleando la multiplicación factor por factor siendo el único que lo ha hecho de esta forma ya que los demás lo han realizado empleando la fórmula y en general lo han realizado bien. Los estudiantes I3A-2, I3A-4 e I3A-5 quienes han desarrollado los ejercicios  $(8+x)^2$ ,  $(5b+3)^2$  y  $(x+9)^2$  respectivamente no han tenido ninguna observación realizada por parte de la docente, en el caso del estudiante I3A-3 ha efectuado bien el ejercicio  $(k+9)^2$  sin embargo en su desarrollo le faltó expresar la respuesta que se obtiene de elevar al cuadrado el número nueve. Luego la docente realiza en la pizarra cada ejercicio de manera conjunta con los estudiantes, en el caso del estudiante I3A-1 se le propuso desarrollar el ejercicio  $(y+10)^2$  y que dictara el desarrollo para que la docente lo escriba en la pizarra, realizó bien la aplicación de la fórmula, pero al pedirle el resultado de efectuar  $(y)^2$  el estudiante no respondió de manera inmediata, motivo por el cual la docente explicó su desarrollo, pero a la par el estudiante emitió su respuesta. Posteriormente, se retornó a la situación problemática para desarrollar la segunda pregunta, para ello el estudiante I3A-2 participa dando su opinión acerca del dato que brinda el problema, deduciendo que si el rectángulo tiene un área de  $15\text{ m}^2$ , el otro rectángulo también por ser congruentes, por lo que faltaría saber el área de los cuadrados; de modo que, la docente encauza la idea de área que tienen los estudiantes para hallar el valor de los lados "a" y "b" de la figura en mención y de esa forma dar respuesta a la pregunta que se está desarrollando pero de manera algebraica ya que ese es el propósito de la sesión, aspecto que logra ejecutar el estudiante I3A-2 al desarrollar el binomio  $(5+3)^2$ . La docente finaliza la sesión preguntando si la situación retadora y todo lo desarrollado en clase ha quedado claro, responden que sí, pero un estudiante solicita afianzar el concepto del binomio al cuadrado mediante un ejemplo, por lo que, se propone un ejercicio en el que se desarrolla primero a través de la multiplicación factor por factor y luego mediante la fórmula; después, les muestra la actividad que tienen que presentar y a su vez, proyecta la ficha

Presentación del ejercicio desarrollado por el estudiante I3A-2:

$$(8+x)^2 = 8^2 + 2(8)(x) + x^2$$

$$16 + 16x + x^2$$

Figura que representa la solución a la segunda pregunta de la situación problemática trabajada en la sesión de aprendizaje:



de metacognición, momento en el que los estudiantes afirman que la situación problemática les ha ayudado a comprender el tema.	
<p><b>Reflexión.</b> Considero que la clase no ha sido realmente protagonizada por los estudiantes, ya que he tenido que pedir en reiteradas ocasiones que todos participen, en verdad, me gustaría que la participación sea más activa y voluntaria. Creo que en ciertos momentos durante la explicación sobre el desarrollo de un binomio he estado un poco acelerada, quizás me haya faltado consolidar mejor las ideas acerca del binomio al cuadrado por lo que debo de mejorar en este aspecto en las próximas sesiones. Además, siento que en el afán de evitar propiciar en el estudiante, el aprendizaje del binomio suma al cuadrado mediante la representación gráfica, me he atribuido facilitarles ese razonamiento durante el desarrollo de la situación problemática para poder dirigirlo a través de la representación algebraica y verbal.</p>	

**Diario de campo N° 2**

Docente: Karen Quintos Carranza

Fecha: 16-11-2020

Tema: Estudiamos el binomio diferencia al cuadrado (representación algebraica y verbal)

Grado: 3º A

Hora de inicio: 8:30 a.m.

Hora de cierre: 9:47 a.m.

Observaciones	Comentarios
<p>Se ingresa al aula virtual, se saluda a los estudiantes mientras se están incorporando y se les pregunta cómo están, ellos no responden. Posteriormente, se comienza la sesión mencionando el título de la misma y recordando la competencia y las capacidades que se están trabajando, después la docente les presenta una frase acerca de la perseverancia, los estudiantes hacen sus respectivos comentarios. Luego se menciona el propósito de la sesión, sin embargo, antes de continuar con lo programado en la sesión, la docente les dice que deben presentar la tarea de ampliación que les dejó en la clase anterior ya que no todos lo han hecho y les explica que es una actividad de</p>	<p>La retroalimentación brindada a los estudiantes ha sido bastante precisa,</p>

interés porque lo ejecutan de manera personal, además, realiza una retroalimentación de 20 minutos para hacer ciertas precisiones sobre la sesión anterior, tales como la formalización del binomio suma al cuadrado mediante la situación problemática que se trabajó, asimismo, el desarrollo verbal del binomio en estudio y ejercicios en los cuales visualicen la importancia del uso de paréntesis y propiedades matemáticas para dar con el resultado. Finalizado este momento de engranaje de la sesión anterior, la docente les recomienda que tomen nota de lo que se hace en clase e inicia con la lectura de la situación problemática, se procede a plantear preguntas a los estudiantes para comprender el problema y dar solución a la misma, actividad que se realiza con éxito; se completa la tabla según la información brindada con la participación de algunos estudiantes, para dar respuesta al problema se les pregunta qué hacer con los datos que se han obtenido, el estudiante I3A-1 opina que se debe dibujar el terreno, el estudiante I3A-2 afirma que se debe igualar a algo o que se puede dibujar, sin embargo el estudiante I3A-4 da a entender que se debe realizar una suma algebraica por lo que se procede a hacerla, de manera que, se da solución a la situación problemática y a su vez se realiza la formalización del concepto del binomio diferencia al cuadrado a través de su representación algebraica; para ello, la docente pide la participación de un estudiante para que realice la multiplicación factor por factor del binomio en estudio, pide la palabra el estudiante I3A-2, quien lo hace correctamente. Luego se procede con la lectura de la expresión algebraica, es decir, se desarrolla la representación verbal, siendo el mismo estudiante quien emite su participación de manera voluntaria y lo ha hecho bien, aunque la docente ha solicitado la intervención del estudiante I3A-3 para reforzar esta parte del tema, quien lo ha hecho parcialmente correcto. Se continúa con el planteo de algunos ejemplos, para que después ellos resuelvan los ejercicios que ha escrito la docente en la pizarra, se les da unos minutos, luego se pide de manera voluntaria que den sus respuestas de manera oral, ya que después se realizará el desarrollo en la pizarra, el estudiante I3A-2 ha desarrollado bien el ejercicio  $(8 - y)^2$ , para el ejercicio  $(5b - 3)^2$  el estudiante I3A-3 dice que

además, cuando la docente nota que los estudiantes tienen dificultades, los anima a superar las mismas; por ejemplo, les hace ver que la representación verbal del binomio al cuadrado es "leer" tal cual la expresión algebraica que están observando.

Respecto a la situación problemática de la presente sesión, el llenado de la tabla, ha sido dinámico porque los estudiantes han participado de manera voluntaria en esta parte.

Es notoria la dificultad que representa tener el signo negativo dentro de la estructura del trinomio cuadrado perfecto, además, persiste el error de no efectuar bien la

<p>ha obtenido como respuesta <math>25b + 25b + 9</math>, por lo que el estudiante I3A-5 afirma que le ha salido como resultado <math>5b^2 - 30b + 9</math> y el estudiante I3A-2 dice que su respuesta fue <math>25b^2 - 30b + 9</math>; para el ejercicio <math>(15 - 5)^2</math> el estudiante I3A-1 comenta que le ha salido como respuesta 218, pero los estudiantes I3A-2 e I3A-5 afirman que les ha salido 100, ante tal situación y las diversas respuestas que han dado los estudiantes, la docente procede a ejecutar la solución de dichos ejercicios con la ayuda de ellos mismos. Para finalizar con la sesión, la docente profundiza en la explicación de la actividad de extensión de la sesión anterior ya que la tarea de la presente clase es muy parecida, se enfoca en orientarlos en el apartado dos, les pregunta (a los que han hecho la tarea) si han tenido alguna dificultad en esa parte y ellos dicen que ninguna; luego se dan las orientaciones para el llenado de la ficha de metacognición.</p>	<p>potencia de una expresión algebraica en donde la parte literal tenga como coeficiente un número diferente a uno. Hubiese sido interesante no solo escuchar las respuestas de los alumnos, sino también analizar sus procedimientos.</p>
<p><b>Reflexión.</b> Plantear la situación problemática de la forma en que se ha hecho, ha sido muy bueno, ya que se ha logrado presentar el binomio diferencia al cuadrado sin tanta dificultad, es más cuando ellos emitían sus ideas al completar la tabla y si había algún error, ellos mismos las corregían. Si embargo, de manera general, considero que trabajar el binomio diferencia al cuadrado con la representación algebraica le es complicado a los estudiantes, a pesar de la explicación que les brindo y remarcando errores que cometen para corregirlos. Aunque los estudiantes se han mostrado con una actitud colaboradora e incluso con interés de aprender pese a la virtualidad de la sesión y el nivel de dificultad del tema, ellos están presentes así tengan la cámara apagada, por lo que amerita aún más mi compromiso por realizar la presente investigación.</p>	

## Diario de campo N° 3

Docente: Karen Quintos Carranza

Fecha: 23-11-2020

Tema: Resolvemos diversas situaciones sobre el binomio al cuadrado (representación algebraica y verbal)

Grado: 3º A

Hora de inicio: 8:30 a.m.

Hora de cierre: 10:12 a.m.

Observaciones	Comentarios
<p>Se saluda a los estudiantes, aún no se han conectado todos por lo que la docente les espera unos minutos, inicia la clase preguntándoles si alguna vez han ingresado a la plataforma de Kahoot!, ellos responden que no, por tal motivo les explica sobre esta herramienta digital y lo que van a desarrollar en él, hay algunos inconvenientes para ingresar, de modo que, la docente decide continuar con lo planificado en la sesión, les presenta la situación problemática para que intenten desarrollarlo mientras ella trata de solucionar los problemas presentados en Kahoot!, les invita a ingresar a la plataforma y se procede con la actividad, según las respuestas obtenidas cinco de seis estudiantes saben lo que significa elevar al cuadrado, todos saben identificar el ejemplo de un binomio al cuadrado, cinco de seis estudiantes saben que la siguiente igualdad es falsa <math>(b + c)^2 = b^2 + c^2</math> y para esta igualdad <math>(a - b)^2 = a^2 - 2a2b + b^2</math> solo cuatro estudiantes han respondido que es falsa, todos saben que la solución de un binomio al cuadrado da como respuesta un trinomio cuadrado perfecto y a su vez pueden identificar correctamente la fórmula del binomio al cuadrado, cuatro estudiantes han marcado la solución correcta de <math>(x - 3)^2</math> y en el caso del binomio <math>(2m + m)^2</math> solo tres estudiantes han marcado la opción correcta ya que dos alumnos han marcado la opción <math>2m^2 + 4m^2 + m^2</math> y otro la opción <math>4 + 4m + m^2</math>. Por consiguiente, una vez finalizada la actividad, se les pregunta qué les ha parecido la experiencia, ellos responden: "bien, miss" e</p>	<p>Los estudiantes se han mostrado satisfechos con la actividad, es más, el estudiante I3A-1 en una pregunta se mostró emocionado al saber que su respuesta fue correcta.</p> <p>Creo que, para dar respuesta a las dos últimas preguntas, algunos estudiantes lo han hecho sin tratar de desarrollar los binomios al</p>

“interesante”, según el informe que da la plataforma, el estudiante I3A-2 ha respondido correctamente siete de las ocho preguntas quedando en tercer lugar, el estudiante I3A-4 ha respondido bien todas las preguntas al igual que el estudiante I3A-5 quedando en segundo y primer lugar respectivamente. Se vuelve a proyectar la situación problemática y se les pregunta si tienen alguna idea para desarrollarla, el estudiante I3A-2 dice que ha entendido que el área tiene  $144 m^2$  y es una área de forma cuadrada, por lo tanto se saca la raíz cuadrada a dicha área, obteniendo como dato que el lado tiene una longitud de 12 metros; nadie más pide la palabra por lo que después se plantean ejercicios con un nivel más alto de complejidad (expresiones algebraicas con un coeficiente distinto a uno y/o variable diferente a uno, en donde se trabaje incluso con números racionales), para empezar se les propone el siguiente  $(5x + 3)^2$  y antes de continuar se vuelve a remarcar en esta sesión la importancia de colocar paréntesis, es más el estudiante I3A-2 afirma que las expresiones  $(5x)^2$  y  $5x^2$  son diferentes; sin embargo, es un error tan recurrente en él y otros estudiantes, se termina de desarrollar el ejercicio con la ayuda de los estudiantes y luego la docente escribe en la pizarra los ejercicios  $(3x^4 + 3y)^2$  y  $(0,3x^3y + 0,3z^2)^2$ , les da un tiempo para que puedan desarrollarlos, luego ella procede a dar la explicación pero hasta este momento no todos los alumnos han presentado, los que lo han hecho, algunos han tenido ciertas equivocaciones al no elevar al cuadro algún exponente por ejemplo. La explicación de la docente ha sido acompañada con la participación oral de los estudiantes, de los ejercicios ya mencionados y otros que se han hecho en clase tanto del binomio al cuadrado suma y diferencia, cabe recalcar que durante este proceso, algunos han utilizado la representación verbal del binomio al cuadrado para realizar el dictado de la solución del ejercicio a la profesora y que algunos necesitan aún preguntas de refuerzo para que puedan resolver bien los ejercicios, en el caso del binomio diferencia casi siempre se confunden con los operadores de suma o resta, pero en general todas las participaciones han sido buenas, se les ha preguntado en reiteradas ocasiones si han tenido alguna dificultad pero no han respondido. Después, se concreta la idea del

cuadrado y han marcado la opción que les ha parecido correcta.

Considero, que el análisis del estudiante I3A-2 no solo ha sido identificada por él, ya que sé que hay otros estudiantes capaces de sacar las mismas conclusiones, pero él al ser quien emite oralmente su idea, los demás ya no tienen la necesidad de hacerlo.

<p>binomio al cuadrado según la regla general y se procede a practicar la representación verbal del mismo, se plantean dos problemas para luego desarrollar la situación problemática, se finaliza la sesión preguntándoles qué les ha parecido la clase, dicen que ha estado muy bonita e interesante y algunos afirmaron que los ejercicios estaban fáciles. Se les informa que para esta sesión solo deben presentar la ficha de metacognición y se les da unas orientaciones para el día del examen.</p>	
<p><b>Reflexión.</b> La sesión ha estado planificada para concretar y consolidar los aprendizajes de los estudiantes en cuanto al tema del binomio al cuadrado, siento que no se ha logrado en su totalidad, pero, al menos ha quedado clara la estructura de la fórmula del binomio al cuadrado (y de paso se ha trabajado la representación verbal con más frecuencia debido a que la estructura de la fórmula lo permite), ya que cuando ellos me dictaban la solución del ejercicio, lo hacían bien en esa parte, solo en ocasiones un ligero problema con los operadores de suma y resta cuando se trataba del binomio diferencia. Me hubiese gustado que los estudiantes expresaran su opinión acerca de la clase, ya que no lo han hecho o solo han comentado que ha estado interesante. Respecto al uso de la plataforma kahoot!, quizás por ser la primera vez que se ha usado he tenido algunos inconvenientes, pero se han superado y se ha podido llevar con éxito esta actividad programada. Por otro lado, considero que hubiese sido mucho mejor el proceso de análisis a los estudiantes respecto al aprendizaje y progreso del tema si hubiera sido presencial, ya que la virtualidad me limitaba en este caso a las opiniones voluntarias de los estudiantes y en este grupo solo ha sido un estudiante quien participaba, pues se sabe que no a todos los estudiantes les gusta emitir sus ideas u opiniones y es algo que respetaba, pero siempre he tratado de evidenciar sus aprendizajes, ya que les asignaba preguntas y/o ejercicios de manera directa. En cuanto mi desempeño docente, siento que me falta ser más dinámica en mis sesiones de clase, para poder transmitir ese interés a los estudiantes, aunque cuando han desarrollado bien algún ejercicio, les he felicitado.</p>	

## Diario de campo N° 4

Docente: Karen Quintos Carranza

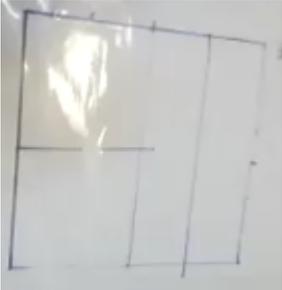
Fecha: 11-11-2020

Tema: Estudiamos el binomio suma al cuadrado (representación geométrica y verbal)

Grado: 3º D

Hora de inicio: 11:06 a.m.

Hora de cierre: 12:39 p.m.

Observaciones	Comentarios
<p>La sesión de aprendizaje ha iniciado unos minutos tarde, por lo cual la docente pide las disculpas del caso y explica que el motivo ha sido porque la aplicación de Zoom no respondía, saluda a los estudiantes y les pide establecer algunas normas de convivencia para poder mantener el orden, ellos participan dando sus opiniones y la docente les dice que pueden activar el micrófono en cualquier momento de la sesión si es que tienen alguna pregunta, pero que no lo hagan por el chat. Luego, se proyecta el PowerPoint, se enuncia la competencia y capacidades que se desarrollarán en la presente sesión, les pregunta qué recuerdan sobre el binomio al cuadrado, los estudiantes responden que nada excepto el estudiante I3D-1 quien comenta que la palabra binomio lo asocia al término dos. Se explica la importancia de los productos notables, posteriormente, se recogen los saberes previos, en esta parte los estudiantes han respondido muy bien las preguntas, aunque en la figura dos del segundo apartado, el estudiante I3D-2 afirmó que el área del rectángulo sería <math>x/z</math>, se le explica que no es así, ya que la palabra “sobre” indica una fracción por lo tanto división y en este caso es un producto. Después, se menciona el propósito de la sesión y se presenta la situación problemática, para ello se asigna la lectura a un estudiante, se extraen los datos que presenta el problema, para ello el estudiante I3D-3 dice que tiene una idea de cómo podría ser la figura y la muestra, la docente le dice que hay unos datos respecto a los lados y por tanto, la figura que él presenta debe cumplir con aquellas condiciones, de modo que la docente les ayuda con la representación visual de la figura y con ayuda del</p>	<p>Figura que muestra el estudiante I3D-3 para representar los datos de la situación problemática:</p> 

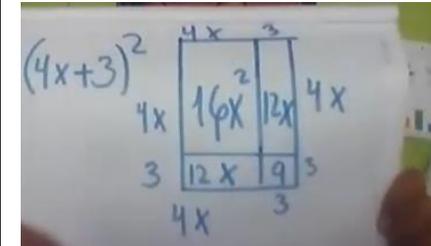
mismo el estudiante completa en la pizarra las dimensiones de los lados de la figura según los datos de la situación problemática, momento que aprovecha para la evocación de ciertas propiedades de las figuras geométricas como cuadrado y rectángulo, tal como, los lados opuestos de un rectángulo son paralelos y por lo tanto tienen la misma medida. El tema es tratado según el propósito de la sesión, es decir, se trabaja la representación geométrica mediante la sumatoria de áreas y cuando la docente les pregunta si han entendido la explicación, ellos comentan que sí, por lo que al preguntarles si ya se podría responder a alguna pregunta de la situación problemática, el estudiante I3D-4 afirma que a la pregunta uno de la situación problemática; mientras ellos están haciendo sus anotaciones, se les pregunta qué están entendiendo hasta este momento de la sesión, solo el estudiante I3D-3 responde, quien dice textualmente: "Más o menos que son diferentes áreas para llegar a una mayor". Se les explica que al desarrollar un binomio al cuadrado se obtiene un trinomio cuadrado perfecto y a su vez se procede a explicar su representación verbal, para afianzar estas ideas se retorna al PowerPoint. Luego, se explica un ejercicio a modo de ejemplo para que posteriormente ellos desarrollen los ejercicios propuestos por la docente, para el primero, el estudiante I3D-4 dice que sería  $(11 + 8)^2$  ante tal comentario se les explica que en principio la nueva figura tendría que ser un nuevo cuadrado y no otra figura, se desarrolla el ejercicio mediante la sumatoria de áreas; para el segundo ejercicio  $(2x + 3)^2$ , el estudiante I3D-3 realiza parcialmente de forma correcta el ejercicio ya que ha realizado bien la distribución de los lados de la representación gráfica, pero al multiplicar  $2x(2x)$  ha dado como respuesta  $4x$ , se corrige el error del estudiante y se explica el desarrollo del ejercicio de manera oral, la docente se muestra un poco preocupada por los demás estudiantes ya que no están participando, les pregunta si han entendido, si quieren que vuelva a explicar o si es que está explicando muy rápido pero no responden, luego quiere avanzar con el apartado tres, pero al preguntar a los estudiantes si querían que explicara el ejercicio dos en la pizarra, todos respondieron que sí, mientras la docente está explicando el ejercicio se puede visualizar que el

Quizás hubiese sido mejor, aprovechar la figura que ha mostrado el estudiante para ahondar más en el por qué no es correcta comprobando con los datos (dimensiones) que daba el problema.

La explicación del ejemplo ha estado bien, pero no les ha dado tiempo a los estudiantes de poder copiar el ejercicio, aunque por las cámaras encendidas se ve que han estado copiando en paralelo.

estudiante I3D-4 estaba intentando hacerlo solo y los demás prestaban atención a lo que hacía la docente, en este ejercicio se ha reforzado que el resultado da un trinomio cuadrado perfecto y que de manera geométrica ese resultado representa la figura de un cuadrado. Ahora, para el apartado tres, se les ha propuesto plantear un ejercicio, se les da tiempo para que lo puedan hacer, se ve que están trabajando, presentan los binomios al cuadrado que van a desarrollar, los estudiantes I3D-3 e I3D-4 han hecho muy bien el planteo y desarrollo de los ejercicios  $(x + 2)^2$  y  $(4x + 3)^2$  respectivamente; mientras siguen desarrollando sus ejemplos se les pregunta si van entendiendo el tema, dicen que sí y según sus expresiones se nota que son sinceros. El estudiante I3D-1 dice que lo ha hecho pero no está seguro, de lo que ha mostrado, solo se aprecia que ha podido plantear el ejercicio y ubicar sus dimensiones y de igual manera el estudiante I3D-2, en su ejemplo  $(6x + 3)^2$ , para el área uno ha dado como respuesta  $36x$ , por lo que se le orienta a sacar el área de cada pieza de forma correcta y luego se le indica que tiene que sumar, él responde que le ha salido 81, la docente se asombra y el estudiante I3D-3 mueve la cabeza negativamente y le dice: “acuérdate que tiene que salir un trinomio”, la docente decide explicar ese ejercicio en la pizarra, él dice que había sumado todo, la docente recalca que debe salir un trinomio cuadrado perfecto y que solo se suman términos semejantes. Posteriormente, el estudiante I3D-1 muestra el desarrollo de su ejercicio  $(3x + 5)^2$ , de lo que se observa, se puede apreciar que al multiplicar  $5(3x)$  lo iguala a 15 y como resultado total de la sumatoria de áreas ha obtenido  $9x^2 + 20 + 15$ , de manera que, la docente informa que este ejercicio lo explicará en la pizarra y le recomienda al estudiante quien ha planteado ese ejercicio que preste atención y que identifique en qué parte se ha equivocado, asimismo, la docente menciona que de los errores se aprende y continúa con la explicación, se calcula el área de cada pieza de la figura, la sumatoria lo realizan los estudiantes I3D-3 e I3D-1, lo hacen correctamente, el estudiante I3D-2 afirma que ya ha podido entender totalmente el ejercicio. El estudiante I3D-1 dice en qué se ha equivocado, momento en que la docente precisa que es diferente multiplicar

Presentación del ejercicio del estudiante I3D-4



Los estudiantes al desarrollar los binomios al cuadrado han tenido dificultades en la parte operativa al multiplicar expresiones algebraicas, ya que entienden la representación gráfica del binomio al cuadrado y que se desarrolla mediante la sumatoria de áreas.

expresiones algebraicas a sumarlas o a restarlas, ya que, en este caso, cuando es una adición solo se suman términos semejantes. Para finalizar con la sesión de aprendizaje, se retorna a la situación problemática para desarrollar la segunda pregunta, el estudiante I3D-3 inmediatamente afirma que el área sería 64, la docente dice a los estudiantes en forma general que si hasta este punto ya han entendido toda la clase, están en condiciones para dar solución a dicha pregunta, se les da tiempo, el estudiante I3D-2 comenta que todos los lados medirían 15, la docente le dice que 15 es el área de un rectángulo, entonces el estudiante I3D-3 participa opinando que la figura tendría por dimensiones  $5m$  y  $3m$ , se concluye con la explicación en la pizarra, durante este proceso se les pregunta si obtendrían como resultado un trinomio cuadrado perfecto, por lo que el estudiante I3D-3 dice que no, porque son números, el estudiante I3D-4 presenta su avance y lo está haciendo bien. Luego, se pregunta si se ha cumplido con el propósito de aprendizaje, un alumno comenta que sí, se proyecta la lista de cotejo y se les comenta lo que se les evaluará en la presente sesión, se muestra y explica lo que tienen que hacer en su actividad de extensión, además cuando se les presenta la ficha de metacognición, les recomienda que sus respuestas no sean cortas, sino reflexivas.

**Reflexión.** Se ha cumplido con el propósito de aprendizaje, trabajar la representación geométrica del binomio suma al cuadrado, quedando claro que se obtiene el resultado al sumar cada área de las piezas del cuadrado, sin embargo, se han presentado ciertas dificultades en los estudiantes pero asociadas a las operaciones de adición y multiplicación de expresiones algebraicas, aspecto que se ha ido superando a lo largo de la clase pero que aún falta consolidar mejor en algunos estudiantes, además, no se ha podido afianzar la representación verbal del binomio suma al cuadrado, por lo que se deberá retomar en la próxima sesión. Los estudiantes, de manera general han sido colaborativos en la sesión de aprendizaje, es más, si un alumno se ha equivocado, son respetuosos al momento de corregir tal error.

**Diario de campo N° 5**

Docente: Karen Quintos Carranza

Fecha: 18-11-2020

Tema: Estudiamos el binomio diferencia al cuadrado (representación geométrica y verbal)

Grado: 3º D

Hora de inicio: 11:02 a.m.

Hora de cierre: 12:51 p.m.

Observaciones	Comentarios
<p>La docente saluda a los estudiantes y toma asistencia, inicia la sesión presentando el tema, enuncia la competencia y capacidades que se trabajarán en la sesión, luego, presenta una frase con el fin de motivar a los estudiantes, se les pide comentar sobre la misma, los estudiantes voluntariamente proceden a dar sus opiniones. Se les pregunta qué recuerdan de la sesión anterior y no responden, la docente proyecta el PowerPoint de la sesión anterior para consolidar ciertas nociones del binomio suma al cuadrado para ello se lee la situación problemática, se recuerda la sumatoria de áreas, en esta parte la docente les recomienda identificar y señalar cada pieza que conforma el cuadrado con su respectiva simbología, ya que cuando se estudie el binomio diferencia al cuadrado habrá una pequeña variación; a modo de comentario, les dice que cuando realicen la gráfica del binomio suma al cuadrado, se visualice la figura de un cuadrado. Después, la docente les propone como ejercicio <math>(x + 2)^2</math> y al preguntarles cómo se desarrollaría, el estudiante I3D-1 menciona que primero se grafica y el estudiante I3D-3 dice que se saca el área de cada parte, la docente termina de explicar el ejercicio con ayuda de los estudiantes, asimismo, les pide que envíen su tarea de la sesión anterior. Posteriormente, enuncia el propósito de aprendizaje de la presente sesión y proyecta la situación problemática para su lectura, se completa de manera exitosa con la participación de todos los estudiantes la columna en la que piden la representación gráfica, finalizada esta parte se les pregunta qué hacemos con esos datos, el estudiante I3D-1 comenta: “lo agrupamos” y en la misma línea el estudiante I3D-2 dice “lo</p>	

calculamos”; ambos estudiantes haciendo alusión a realizar una suma algebraica con los datos obtenidos, se realiza tal procedimiento y se finaliza con el desarrollo de la situación problemática. Inmediatamente, la docente procede a explicar en la pizarra el concepto del binomio diferencia al cuadrado para su formalización mediante su representación geométrica, para ello, se establece una simbología ( $A_{\square}$  representará el área del cuadrado que contiene a todas las piezas, en cambio,  $A_{\blacksquare}$  -con el cuadradito pintado- representará el área del binomio diferencia al cuadrado) con el fin de facilitar el aprendizaje de los estudiantes respecto al tema que se está estudiando, durante la explicación, el estudiante I3D-3 participa comentando que de la expresión  $(a - b)^2 = a^2 - (ab - b^2) - (ab - b^2) - b^2$  se puede simplificar a la siguiente expresión  $(a - b)^2 = a^2 - 2(ab - b^2) - b^2$  pero la docente ha estado tan concentrada en su explicación que ella ha continuado la clase sin tener en cuenta la participación del estudiante; finalmente, para concretar este proceso didáctico la docente se apoya del PowerPoint. Antes de trabajar la representación verbal, la docente les comenta que ella sabe que cuesta entender el binomio diferencia al cuadrado y que también lo es explicar, luego continúa escribiendo en la pizarra la representación algebraica del binomio suma al cuadrado y le asigna al estudiante I3D-1 su lectura, quien no lo hace bien al igual que al estudiante I3D-4, siendo el estudiante I3D-3 quien dice la representación verbal del binomio suma al cuadrado correctamente. Ahora, la docente escribe la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado y le dice al estudiante I3D-2 que dé lectura a tal expresión, él no sabe identificar de manera inmediata cuál es el binomio diferencia al cuadrado, ya que en la pizarra están escritos ambos binomios al cuadrado, se le ayuda a identificar el binomio al cuadrado que se le solicitó y el estudiante no puede decir de manera correcta la representación verbal puesto que ha leído de la siguiente manera: “el cuadrado de dos cantidades es igual al cuadrado de una cantidad menos el doble de dos cantidades por "b" más una cantidad al cuadrado”; por tanto, la docente se ve en la necesidad de explicar otra vez este punto, ella pregunta a los estudiantes si tienen preguntas, responden que no, entonces para

Se puede apreciar que a la docente le cuesta explicar el tema, no por falta de conocimiento, sino tal vez por falta de experticia profesional, de modo que los alumnos están entendiendo el tema hasta este momento de manera parcial (es la percepción de la docente).

concluir esta parte y asegurarse de que han entendido le asigna al estudiante I3D-1 que dé lectura al binomio en estudio y de igual forma, tiene problemas al hacerlo, ante tal situación la docente les dice que tienen que repasar porque en la próxima clase se retomará esta actividad. Para continuar con la sesión, se desarrolla el ejemplo  $(y - 3)^2$  con la colaboración de los estudiantes, en ese proceso se les explica que el signo negativo solo afecta a los signos de las expresiones que están dentro del paréntesis, cuando se están sumando los términos semejantes  $-3y - 3y$ , el estudiante I3D-3 tiene dificultades al dar la respuesta ya que dice dos y luego cero, mientras que el estudiante I3D-4 da la respuesta correctamente; se termina con la explicación del ejercicio y según los estudiantes no tienen preguntas, para reforzar el entendimiento de este ejercicio se proyecta el PowerPoint en donde se aprecia el desarrollo del ejemplo en mención. Durante la explicación la docente les recomienda pintar el área que representa el binomio diferencia al cuadrado para que eviten poner letras a la figura. De hecho, para que los alumnos transfieran sus conocimientos, la docente les propone desarrollar tres problemas, después de la lectura del primero, les pregunta de qué binomio se trataría, el estudiante I3D-3 responde que sería sobre el binomio diferencia ya que en el problema dice que se le está restando; se les da tiempo para que puedan resolver el problema, el mismo estudiante responde que ha obtenido como respuesta  $144 - 96 + 16$ , minutos después él afirma que al desarrollar las operaciones va a salir 64, como nadie más quiere participar la docente explica el desarrollo del binomio  $(12 - 4)^2$  y se comprueba finalmente la igualdad  $(8)^2 = 64$ , se continúa con el segundo problema, para ello la docente solicita la participación de otro estudiante, el estudiante I3D-2 afirma que si el terreno total tiene un área de  $144 m^2$ , entonces, el lado tendría una longitud de 12 metros, por lo que el lado al disminuir " $x$ " metros sería  $12 - x$  pero tiene como pregunta si se disminuye " $x$ " a cada lado o solo a uno, la docente realiza el gráfico en la pizarra y le explica que al realizar las divisiones queda un cuadrado al final, el estudiante I3D-3 dice que ya ha desarrollado el ejercicio y como nadie más participa la docente comienza a explicar

el desarrollo con la ayuda de los dos estudiantes en mención, el primero a establecer relaciones entre los datos que brinda el problema que finalmente arriba en una expresión algebraica y el segundo estudiante en el cálculo de áreas de cada pieza de la figura, en esta parte al traspasar los resultados del cálculo de las áreas de la figura a la ecuación  $\text{Área } \blacksquare = \text{Área } \square - A_1 - A_2 - A_3$  la docente tuvo algunos errores, específicamente en  $A_1$  y  $A_2$  coloca las dimensiones de los lados del rectángulo en vez del área obtenida de la figura geométrica en mención que ya se había calculado y estaba escrito dentro de la misma figura; por lo que les recomendó a los estudiantes siempre tener cuidado al traspasar los términos algebraicos ya que les puede pasar lo mismo que a ella y les comenta que según la expresión que están desarrollando la respuesta tendría que ser la de un trinomio cuadrado perfecto; durante el desarrollo del presente ejercicio al realizar la suma algebraica  $-12x - 12x$ , el estudiante I3D-3 responde  $48x$ , por lo que la docente y uno de sus compañeros lo corrigen e incluso él mismo se da cuenta de que está equivocado y subsana tal error en su cuaderno. Para el tercer ejercicio  $(x - 14)^2$  la docente les solicita resolverlo ellos mismos, de modo que les da el tiempo necesario para que lo desarrollen, cabe recalcar que el estudiante I3D-3 ha dicho de forma oral la respuesta que ha obtenido pero de manera rápida, la docente le dice que su respuesta está bien y ante el poco tiempo transcurrido le pregunta cómo lo ha hecho, el estudiante no sabe explicar su procedimiento y responde: “siguiendo los resultados de los anteriores, no más... es, este... es "x" al cuadrado”, la docente le menciona que el problema dice textualmente desarrolla de manera geométrica, él está intentando analizar lo que ha hecho mientras tanto el estudiante I3D-4 muestra a la cámara su desarrollo pero sin la gráfica (luego lo hace); después el estudiante I3D-3 comenta: “¡Ah, ya... miss! Yo lo hice de frente, por la lectura, porque sabiendo que la diferencia de dos cantidades al cuadrado es igual a la primera cantidad al cuadrado, menos el doble de la primera por la segunda cantidad más la segunda cantidad al cuadrado. Ya, ahí no más saqué los resultados”, la docente le dice que está bien su respuesta pero que el problema indica que el binomio al cuadrado se desarrolle de

La docente se muestra apenada por el incidente, pero se ve que los estudiantes han estado atentos a la explicación ya que incluso ellos se dan cuenta del error que ha cometido la docente y le ayudan a corregir.

La docente piensa que el alumno I3D-3 ha desarrollado el ejercicio mediante la representación algebraica del binomio diferencia al cuadrado, ya que el estudiante dice “siguiendo los resultados de los anteriores” entonces pudo haber encontrado un patrón y llegar a la regla general del binomio al cuadrado; pero al saber que lo ha

manera geométrica. Posteriormente, la docente le pregunta al estudiante I3D-2 qué dificultades ha tenido mientras ha desarrollado el ejercicio, por lo que él comenta: “se me ha hecho un poco difícil al momento de medir los lados del área sombreada”, entonces, la docente procede a explicar esa parte en la pizarra, se colocan las dimensiones a cada lado del cuadrado y la docente pregunta cuál es la expresión del área sombreada, el alumno I3D-3 es quien da la respuesta, por lo que se le pregunta al estudiante I3D-2 si la respuesta que ha dado su compañero está bien, responde que sí y explica el porqué, se finaliza con la solución del ejercicio; luego se le pregunta al estudiante I3D-1 si le ha quedado claro la explicación, él responde: “Sí, profesora. Si no que se me hace un poco difícil al operar ya que muchos números confunde”, el estudiante I3D-2 de igual manera opina: “¡Ah! Sí, miss. En la operación como que dificulta un poco a veces operar”. La docente supone que las dificultades han surgido cuando el signo negativo ha estado fuera del paréntesis por lo que les explica que este solo afecta al signo de las expresiones numéricas o algebraicas que estén dentro del paréntesis, es más, les pone un ejemplo diferente a lo que han visto en clase para que ellos puedan entender mejor este aspecto. Por último, la docente presenta, explica y les recomienda que envíen la tarea, asimismo, les explica el llenado de la ficha de metacognición, les agradece su participación en la clase y se despide de los estudiantes.

desarrollado mediante la representación verbal se nota sorprendida y hasta satisfecha con la actividad cognitiva del estudiante, sin embargo no lo felicita por su logro, solo le ha dicho que su respuesta está bien y que preste atención a la indicación que dé el ejercicio y/o problema.

**Reflexión.** Sinceramente, se me ha hecho complicado dictar el tema, precisamente presentar y formalizar el binomio diferencia al cuadrado mediante la representación geométrica porque de por sí es complicado hacer que el estudiante aprenda este binomio al cuadrado por ser de carácter abstracto, aspecto que se ha trabajado al calcular cada área del cuadrado, ahora adicionar la parte formal de la geometría, colocar letras al cuadrado y piezas que conforman esta, a criterio personal era complicar más el aprendizaje del estudiante por lo que opté por simplificar esta parte a través de una simbología que al parecer sí ha ayudado un poco en la presente sesión de aprendizaje, porque de igual manera dos de los cuatro estudiantes han comentado que han tenido dificultades al aprender el tema. Además, no se ha podido concretizar con éxito el aprendizaje del tema mediante la representación verbal porque a los estudiantes les cuesta utilizar el lenguaje formal matemático, ya que por ejemplo cuando se ha estado practicando la representación verbal del binomio

diferencia al cuadrado, el estudiante I3D-1 para referirse al término  $b^2$  literalmente ha dicho “el doble de la segunda cantidad”, por lo que se les ha recomendado practicar esta parte para la próxima sesión de aprendizaje.

### Diario de campo N° 6

Docente: Karen Quintos Carranza

Fecha: 25-11-2020

Tema: Resolvemos diversas situaciones sobre el binomio al cuadrado (representación geométrica y verbal)

Grado: 3º D

Hora de inicio: 11:00 a.m.

Hora de cierre: 12:28 p.m.

Observaciones	Comentarios
<p>Se saluda a los estudiantes y se proyecta inmediatamente la situación problemática a trabajar en la presente sesión, se le asigna la lectura al estudiante I3D-1, luego se procede con la comprensión del problema, él opina que primero tenemos que graficar y el estudiante I3D-3 comenta lo mismo y al preguntarles cómo van a realizar esa demostración del binomio suma al cuadrado mediante la representación geométrica, este estudiante responde que haciendo un cuadrado mayor y luego dos cuadrados y dos rectángulos, cuyas dimensiones sean "a" y "b", la docente les dice que los valores que establezcan deben tener una medida exacta. Los estudiantes al parecer no saben muy bien cómo realizar la actividad ya que cuando la docente pregunta si han entendido, no responden, se vuelve a explicar y se les hace recordar lo que han visto en la primera sesión de aprendizaje, ellos afirman que ya han entendido por lo que se les pide empezar a trabajar; el estudiante I3D-3 pregunta si cada uno de ellos puede establecer las dimensiones, la docente le responde que sí, por lo que, el estudiante I3D-1 interpreta que puede colocar <math>2x</math> más otro valor, la docente vuelve a remarcar que trabajen con valores específicos. Para asegurarse de</p>	<p>La docente omite la presentación del tema, enunciar el propósito de aprendizaje, competencia y capacidades. Si bien es cierto, se está viendo el tema del binomio al cuadrado y los alumnos lo saben, pero es parte del proceso didáctico mencionarlos.</p>

que realicen bien lo que se les pide en la situación problemática les pregunta a cada estudiante los valores que tomarán "a" y "b", ellos responden y van presentando su trabajo según su avance, el estudiante I3D-2 muestra a la pantalla el resultado de su trabajo, la docente le informa que a simple inspección se puede apreciar que las medidas de su figura son incorrectas ya que no se visualiza un cuadrado (el estudiante había comentado que sus lados tendrían el valor de 15 cm y 5 cm), por lo que él responde: ¿tiene que ser un cuadrado o cómo es? La docente le dice que sí y comenta en general que, tanto en el cuadrado como en el rectángulo, los ángulos interiores deben medir  $90^{\circ}$ . Los demás estudiantes han presentado sus trabajos y la docente les dice que no hay ninguna observación, pero comenta que la sesión sería diferente si la clase fuera presencial, ya que incluso les haría medir con transportador los ángulos, de modo que el estudiante I3D-4 afirma que él sí lo ha utilizado y lo muestra a la cámara. Luego, la docente les pregunta cómo ha sido el proceso que han llevado a cabo para hacer la demostración geométrica del binomio suma al cuadrado, el estudiante I3D-3 participa opinando que primero ha dibujado el cuadrado general y luego ha realizado el dibujo de las cuatro áreas que la conformarían, en cambio el estudiante I3D-2 ha dicho que él solo ha seccionado las partes en una hoja. Posteriormente, se continúa con lo planificado en la sesión de aprendizaje, se plantean tres ejercicios para que lo desarrollen a través de la sumatoria de áreas, y a la vez les recuerda enviar sus tareas, el primer ejercicio es  $(2x + 8)^2$ , el estudiante I3D-3 comenta a los pocos minutos que de manera directa le sale  $4x + 16x + 64$ , la docente le dice que lo desarrolle de manera geométrica y él empieza a trabajar en ello, se les da tiempo para que puedan desarrollar los ejercicios, el estudiante I3D-3 muestra a la cámara cómo ha desarrollado el ejercicio, la docente evidentemente se da cuenta de que no todo su procedimiento está bien y al querer hacer su valoración, el estudiante I3D-2 afirma que a él también le ha salido exactamente igual a la respuesta de su compañero, pero al mostrar su trabajo a la pantalla su respuesta es  $4x + 32 + 64$ , asimismo el estudiante I3D-4 comenta que a él le ha salido  $4x^2 + 32x + 64$  sin hacer el gráfico, de modo

Presentación del gráfico realizado por el estudiante I3D-2:



Evidencia del trabajo realizado por el estudiante I3D-4:



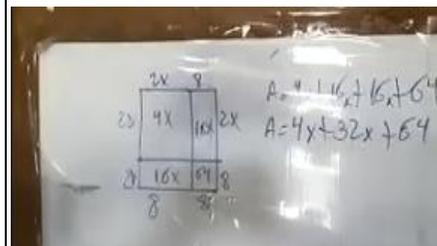
El estudiante cuando habla de "manera directa" se refiere a representación verbal, quizás en esta parte hubiera sido bueno que la docente le diga que utilice el término formal, ya que cuando su compañero I3D-4 participa, el primer estudiante afirma que el procedimiento de su

que, la docente le pregunta cómo lo ha hecho, él responde que primero eleva la primera cantidad al cuadrado ( $2x$ ), para el segundo y tercer término ha multiplicado  $2(8x)$ , aquí dice que él se ha dado cuenta de que siempre los dos términos se multiplican entre sí y para el último término, solo ha elevado al cuadrado el número ocho e incluso que este razonamiento lo hace de manera mental; cabe mencionar que mientras el estudiante exponía su procedimiento ha habido interferencia por el internet, por lo que el estudiante I3D-3 dice que la explicación que está dando su compañero es por la lectura, la profesora le responde que no es así, que efectivamente él sí está desarrollando los ejercicios utilizando la representación verbal, en cambio, su compañero lo ha hecho estableciendo relaciones, en la cual ha encontrado un patrón a través de lo que sale en la sumatoria de áreas; el estudiante I3D-4 responde que sí. Por otro lado, el estudiante I3D-1 comenta que el desarrollo del ejercicio lo ha hecho mentalmente, que los gráficos ya los tenía pensados y que ha calculado cada área; el estudiante I3D-2 dice que lo ha hecho elevando al cuadrado el primer término, después ha multiplicado el primer término por el segundo y luego por dos, y elevando el segundo término al cuadrado; el estudiante al mostrar su trabajo a la cámara, se nota que lo ha desarrollado de manera directa, sin hacer el gráfico. Finalmente, la docente luego de escuchar el procedimiento seguido de cada estudiante, explica la solución del ejercicio con la ayuda de los estudiantes y se ha tenido principal interés en explicar (incluso con otros ejemplos) cómo se realiza la multiplicación de expresiones algebraicas y que se debe tener en cuenta la propiedad de que cuando las bases son iguales, los exponentes de la variable se suman, ya que casi todos se han equivocado al elevar al cuadrado  $2x$ .

Ahora, se continúa con la sesión de aprendizaje planteando el ejercicio  $(x - z)^2$ , para ello el estudiante I3D-4 presenta su trabajo y el procedimiento ha sido similar al que ha efectuado en el ejercicio del binomio suma al cuadrado, luego el estudiante I3D-3 ha presentado su avance, quien lo ha hecho muy bien y mediante la representación geométrica, la docente explica en la pizarra la solución del ejercicio y procede a escribir en la pizarra

compañero es por la “lectura” del binomio al cuadrado, en vez de decir que ha utilizado la representación verbal.

Evidencia del estudiante I3D-3 del primer ejercicio:



Según se puede apreciar el estudiante I3D-1 siempre calcula las áreas de manera independiente y coloca sus datos en forma vertical y luego suma las expresiones para dar su resultado.

A opinión personal, no creo que el estudiante I3D-2 esté desarrollando el ejercicio teniendo en cuenta exclusivamente la representación

<p>el tercer y último ejercicio <math>(3y - 7)^2</math>, en esta ocasión les ayuda con el gráfico y a poner en los lados sus respectivas dimensiones, pero solicita que ellos realicen el cálculo de las áreas, el estudiante I3D-3 enuncia de manera correcta la respuesta del ejercicio, pero la docente al solicitar su procedimiento, el estudiante con una actitud desganada dice que lo realizará haciendo la gráfica, el estudiante I3D-4 también ha desarrollado correctamente el ejercicio, luego la docente desarrolla el ejercicio que se ha propuesto y finaliza la sesión haciéndoles practicar a cada estudiante la representación verbal del binomio al cuadrado, en las cuales ha habido una notable mejoría respecto de la sesión anterior.</p>	<p>verbal, ya que al parecer la representación gráfica no lo ha utilizado, intuyo que está utilizando la representación algebraica del binomio suma al cuadrado.</p>
<p><b>Reflexión.</b> He realizado la sesión un poco apresurada y centrándome en la solución de la situación problemática y el buen desarrollo de los ejercicios, por lo que he omitido ciertos procesos pedagógicos que se deben cumplir en una sesión de aprendizaje, como el proceso de metacognición, tal vez lo he obviado porque les he preguntado y escuchado a cada estudiante el procedimiento que han realizado para poder desarrollar cada ejercicio y he intervenido en las partes que han tenido dificultades, asimismo, al igual que las anteriores sesiones de aprendizaje les he dejado para que desarrollen la ficha de metacognición. De manera general, siento que he propiciado muy poco el aprendizaje del binomio al cuadrado mediante la representación verbal, pero sí me he esforzado para que aprendan el tema de manera geométrica, tal es así que los ejercicios que se han realizado en clase han sido bastante sencillos pero ni así he percibido que todos los estudiantes puedan desarrollar un ejercicio correctamente, en esta línea y por la misma razón es que se ha trabajado muy poco la parte algebraica del tema a comparación del otro grupo de estudiantes, a quienes incluso les hice trabajar con números racionales como coeficientes para la tercera sesión de aprendizaje.</p>	

## Apéndice H: Validaciones del instrumento de evaluación por docentes expertos



UNIVERSIDAD DE PIURA  
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN  
DEL INSTRUMENTO

### I. INFORMACIÓN GENERAL

- 1.1 Nombres y apellidos del validador: Marcos Augusto Zapata Esteves
- 1.2 Cargo e institución donde labora: Docentes de la Facultad de Ciencias de la Educación/Especialidad Matemática y Física.
- 1.3 Nombre del instrumento evaluado: Examen sobre el Binomio al cuadrado.
- 1.4 Autor del instrumento: Karen Quintos Carranza.

### II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. **D** - Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. **R** - Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. **B** - Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	X	
CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	X	
REDACCIÓN	Los ítems están bien escritos, respetando las reglas ortográficas y de redacción.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	X	
<b>CONTEO TOTAL</b> (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)		<b>C</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>Total</b>

Coeficiente de validez :  $\frac{A+B+C}{9} = 1$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

### III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el Intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena

Piura, 23 de agosto de 2021.

Firma del Experto



UNIVERSIDAD DE PIURA  
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN  
DEL INSTRUMENTO

### I. INFORMACIÓN GENERAL

- 1.1 Nombres y apellidos del validador: Emma Lizelly Carreño Peña  
 1.2 Cargo e institución donde labora: docente, Universidad de Piura  
 1.3 Nombre del instrumento evaluado: Examen de matemática  
 1.4 Autor del instrumento: Karen Nathalie Quintos Carranza

### II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. **D** - Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).  
 2. **R** - Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).  
 3. **B** - Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	<input type="checkbox"/>	X <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Revisar asociación ítem-dimensión-indicadores
CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	X <input type="checkbox"/>	
REDACCIÓN	Los ítems están bien escritos, respetando las reglas ortográficas y de redacción.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	X <input type="checkbox"/>	
<b>CONTEO TOTAL</b> (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)			<b>2</b>	<b>6</b>	
		<b>C</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>Total</b>

Coefficiente de validez :  $\frac{A + B + C}{9} = 0,89$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

### III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el Intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez Buena

Piura, 23 de agosto de 2021.



UNIVERSIDAD DE PIURA  
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN  
DEL INSTRUMENTO

### I. INFORMACIÓN GENERAL

- 1.1 Nombres y apellidos del validador: Moisés Pariahuache Ahumada  
1.2 Cargo e institución donde labora: Docente – Universidad de Piura.  
1.3 Nombre del instrumento evaluado: Examen de matemática (Binomio al cuadrado)  
1.4 Autor del instrumento: Karen Nathalie Quintos Carranza

### II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. **D** - Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. **R** - Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. **B** - Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	x	
CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	x	
REDACCIÓN	Los ítems están bien escritos, respetando las reglas ortográficas y de redacción.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	x	
<b>CONTEO TOTAL</b> (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)				<b>9</b>	
		<b>C</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>Total</b>

Coefficiente de validez :  $\frac{A+B+C}{9} = 1$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

### III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el Intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena

*M. Pariahuache*  
Firma del Experto

Piura, 16 de agosto de 2021.

## Apéndice I: Entrevista a los informantes

### Entrevista 1

Fecha: 21-04-2022

Nombre de la evaluación: Examen de Matemática

Informante: I3A-2

D : (Se le envía la imagen de su respuesta de la pregunta 1) En esa pregunta, ¿por qué afirmas que es correcta y luego fundamentas que no sigue la estructura de un trinomio cuadrado perfecto?

I3A-2: ¡Ay, miss! ¡Qué vergüenza! Eso es incorrecto.

D : No te preocupes, respondiste de esa manera cuando estabas en tercer año de secundaria.

I3A-2: Quizá lo puse así porque no sabía

D : Pero en ese momento, ¿en verdad pusiste que era correcto?

I3A-2: Sí, así es.

### Entrevista 2

Fecha: 15-10-2022

Nombre de la evaluación: Examen de Matemática

Informante: I3A-3

D : (Se le envía la imagen de sus respuestas de la pregunta 3a y 3b) En el apartado 3 se les pide desarrollar esos ejercicios, ¿por qué colocaste el operador de suma y resta en la parte donde te estoy señalando en la imagen?

I3A-3: Miss, ya... bueno, esa es una cuadrática y puse así porque como es al cuadrado y como en ese entonces no sabía cómo se desarrollaba muy bien, puse así,  $(3y + 4)$  y como todo está al cuadrado puse de nuevo  $(3y + 4)$ , por eso puse el más y en el otro que es menos es igual.

D : Pero, ¿qué significaba para ti ese más, por qué ponerlo? Te entiendo perfectamente el motivo de repetir el  $(3y + 4)$  porque es un binomio al cuadrado, pero por qué has colocado ese más, igual en el otro ejercicio, el operador de resta.

I3A-3: Miss ahí el más y el menos me he equivocado, quise comprobar, pero el más y el menos no

va, no cumple ninguna función. Creo que ahí me confundí al poner esos signos, ni sé por qué los he puesto.

### Entrevista 3

Fecha: 08-04-2022

Nombre de la evaluación: Examen de Matemática

Informante: I3D-2

D : (Se le envía la imagen de la segunda hoja de sus respuestas, desde la pregunta 3a hasta la pregunta 4a) En la pregunta 3, ¿por qué lo has desarrollado así (representación algebraica)?, ¿usaste la fórmula?

I3D-2: Así lo desarrollé, según la manera en la que usted nos enseñó. ¿Por qué la pregunta?

D : Porque a ustedes les enseñé el binomio al cuadrado mediante la representación geométrica, así como has desarrollado la pregunta 4, con sumatoria de áreas, por eso te pregunto si usaste la fórmula.

I3D-2: También nos enseñó a resolverlo así (representación geométrica). Y sí, usé la fórmula.

D : ¿Y por qué usaste la fórmula, lo aprendiste de las sesiones de clase o has buscado por internet?

I3D-2: Creo que también vi unos vídeos de internet sobre ese tema (binomio al cuadrado), porque también usted nos dio una recomendación de que podíamos reforzar la clase a través de algunos vídeos de YouTube.

### Entrevista 4

Fecha: 07-11-2022

Nombre de la evaluación: Examen de Matemática

Informante: I3D-4

D : (Se le envía la imagen de la segunda hoja de sus respuestas, desde la pregunta 3b hasta la pregunta 5) En la pregunta 4a no elevas al cuadrado  $(k + n)$ , ¿se te olvidó o así lo creíste correcto en ese momento? De igual forma en la pregunta 5, ¿te has olvidado elevar al cuadrado la expresión  $(200 - b)$ ?

I3A-4: Así creía que era la fórmula.

D : ¿Estás seguro? Porque en la pregunta 3b, ahí sí elevas al cuadrado.

I3A-4: Bueno, también porque asumía que ya no era tan necesario elevar al cuadrado sabiendo que al lado hago el procedimiento bien.

D : (Se le envía la imagen de su respuesta de la pregunta 1) Entonces en la pregunta 1 has respondido utilizando la fórmula del binomio al cuadrado, ¿por qué?, ¿lo aprendiste con la información que se les dio en clase?

I3A-4: Sí, porque usted mandó unos pdf donde salía la fórmula con ejemplos claros y ahí se me hizo fácil guiarme.

