



UNIVERSIDAD
DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

**Propuesta pedagógica basada en actividades de
enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de la
competencia de resolución de problemas en estudiantes
de cuarto grado de secundaria**

Tesis para optar el Título de
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria, especialidad Matemática y Física

Jean Pierre Gómez Espinoza

**Asesor(es):
Dr. Marcos Augusto Zapata Esteves**

Piura, abril de 2022



Dedicatoria

A Dios por darme la vida, fortaleza y perseverancia necesaria para seguir adelante.

A mis padres por su apoyo incondicional en todo momento, por inculcarme valores y por mostrarme que con esfuerzo y perseverancia los grandes logros pueden ser alcanzados.



Agradecimientos

La culminación de este trabajo ha tenido la influencia de muchas personas importantes, personas las cuales, sin su ayuda, quizá este trabajo no hubiese sido posible. Por ello, es necesario para mí, dirigir mis más sinceros agradecimientos a ellos.

A Dios por brindarme la salud y sabiduría necesaria para culminar esta investigación.

A mis padres y hermanos por brindarme el soporte emocional necesario y motivarme en momentos difíciles.

A mi asesor de esta investigación, el Dr. Marcos Augusto Zapata Esteves, por todas las orientaciones académicas brindadas que me ayudaron a realizar las correcciones necesarias para el éxito de este trabajo, y por sus consejos como buen amigo.



Resumen

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo diseñar una propuesta pedagógica basada en actividades de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas relacionados con las razones trigonométricas, haciendo uso de espejos, gnomon y clinómetro como recursos didácticos, en estudiantes de cuarto de secundaria. Esta es una investigación cualitativa de tipo curricular ya que la propuesta pedagógica se centra en el ámbito de la planificación curricular; además, esta investigación es básica ya que se enmarca en el paradigma interpretativo, pues esta ha quedado en un plano descriptivo. De este modo, el presente trabajo es un aporte en el campo de la pedagogía y de la didáctica de las matemáticas, ya que la propuesta pedagógica contiene actividades de enseñanza-aprendizaje donde se aplica una metodología que incorpora el uso de recursos manipulativos tangibles. Como resultados del trabajo de esta tesis se ha obtenido, como primer producto, un listado de estrategias heurísticas, como segundo producto, problemas sobre razones trigonométricas y finalmente, como tercer producto, la propuesta pedagógica incorporada por 11 actividades de enseñanza-aprendizaje las cuales fueron validadas por la técnica de juicio de expertos. Como conclusión, para poder planificar, seleccionar y clasificar una actividad de enseñanza-aprendizaje se debe hacer mediante el uso de criterios pedagógicos.

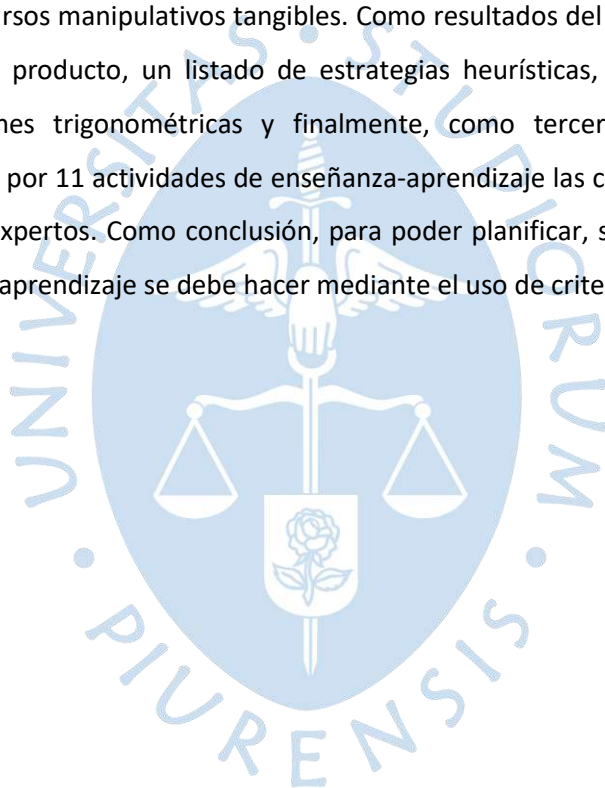




Tabla de contenido

Introducción.....	17
Capítulo 1 Planteamiento de la investigación	19
1.1 Caracterización de la problemática.....	19
1.2 Problema de investigación	21
1.2.1 Problema general	21
1.2.2 Problemas específicos	21
1.3 Justificación de la investigación	22
1.4 Objetivos de la investigación	23
1.4.1 Objetivo general	23
1.4.2 Objetivos específicos	23
1.5 Antecedentes de investigación	24
Capítulo 2 Marco teórico	31
2.1 Fundamentos teóricos constructivistas del aprendizaje	31
2.1.1 Aprendizaje significativo	33
2.1.2 Aprendizaje por descubrimiento.....	34
2.2 Actividades de enseñanza-aprendizaje.....	35
2.2.1 Definición de actividades de enseñanza – aprendizaje.....	36
2.2.2 Clasificación de las actividades de enseñanza – aprendizaje.....	37
2.2.3 Criterios de selección para las actividades de enseñanza – aprendizaje	41
2.2.4 Criterios para el diseño de actividades de enseñanza – aprendizaje.....	45
2.2.5 Actividades de enseñanza – aprendizaje en la matemática.....	53
2.3 Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática	54
2.3.1 Definición y función de los recursos didácticos	54
2.3.2 Clasificación de los recursos didácticos.....	58
2.3.3 Recursos manipulativos tangibles	60
2.3.4 Criterios de elección y organización de los recursos didácticos.....	71
2.4 Competencia de resolución de problemas	73
2.4.1 Definición de competencia de resolución de problemas.....	73
2.4.2 Capacidades involucradas en la competencia de resolución de problemas	79
2.5 Estudio del campo temático de razones trigonométricas	86
2.5.1 Semejanza de triángulos	86
2.5.2 Triángulos rectángulos	88

2.5.3	Razones trigonométricas.....	90
2.5.4	Aplicaciones.....	91
Capítulo 3 Metodología de la investigación		93
3.1	Paradigma y tipo de investigación	93
3.2	Diseño de investigación	94
3.3	Variables de investigación.....	96
3.4	Descripción de la aplicación de la técnica de análisis de contenido.....	97
3.5	Descripción de la técnica para la validación de la propuesta pedagógica.....	98
Capítulo 4 Resultados de la investigación		101
4.1	Aplicación de la técnica de análisis de contenido.....	101
4.2	Análisis de contenido sobre el campo temático de razones trigonométricas.....	118
4.3	Listado de estrategias heurísticas.....	123
4.4	Problemas sobre razones trigonométricas	126
4.5	Propuesta pedagógica.....	135
4.5.1	Actividades de enseñanza – aprendizaje 1.....	144
4.5.2	Actividades de enseñanza – aprendizaje 2.....	152
4.5.3	Actividades de enseñanza – aprendizaje 3.....	159
4.5.4	Actividades de enseñanza – aprendizaje 4.....	167
4.5.5	Actividades de enseñanza – aprendizaje 5.....	173
4.5.6	Actividades de enseñanza – aprendizaje 6.....	182
4.5.7	Actividades de enseñanza – aprendizaje 7.....	191
4.5.8	Actividades de enseñanza – aprendizaje 8.....	197
4.5.9	Actividades de enseñanza – aprendizaje 9.....	203
4.5.10	Actividades de enseñanza – aprendizaje 10.....	209
4.5.11	Actividades de enseñanza – aprendizaje 11.....	215
4.6	Validación de la propuesta pedagógica.....	221
4.7	Discusión de los resultados	221
4.7.1	Discusión de los resultados provenientes de la técnica de análisis de contenido	223
4.7.2	Discusión de los productos de esta investigación	227
Conclusiones		235

Recomendaciones	237
Lista de referencias	239
Apéndices	247
Anexos.....	273





Lista de tablas

Tabla 1. Criterios para seleccionar las actividades de enseñanza-aprendizaje.....	44
Tabla 2. Esquema de un diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje (Parte I).....	50
Tabla 3. Esquema de un diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje (Parte II).....	52
Tabla 4. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo	91
Tabla 5. Descripción de las fases del diseño de la investigación curricular.	95
Tabla 6. Definición conceptual y operacional de las variables de investigación.....	97
Tabla 7. Categorías y subcategorías del contenido a analizar.....	98
Tabla 8. Variable/Categoría: Competencia de resolución de problemas.....	103
Tabla 9. Variable/Categoría: Actividades de enseñanza-aprendizaje	110
Tabla 10. Campo conceptual y procedimental de las razones trigonométricas.	120
Tabla 11. Relación entre fenómenos, subestructuras, situaciones y contextos.....	122
Tabla 12. Estrategias heurísticas que se pueden incluir en los problemas creados.	135
Tabla 13. Puntajes otorgados por los expertos en la validación de la propuesta pedagógica.	221





Lista de figuras

Figura 1. Ficha de la actividad. Vista general	47
Figura 2. Ficha de descripción de la actividad. Vista detallada	48
Figura 3. Estructura de una actividad de enseñanza-aprendizaje	49
Figura 4. Representación de la proyección de la sombra “s” de un gnomon de altura “h”	61
Figura 5. Proyección de sombras: $a / b = c / d$, donde $c = e + f$	63
Figura 6. Ciudades de Alejandría y Siena	64
Figura 7. Ángulo formado por los rayos de sol con el gnomon de Alejandría y el pozo de Siena.....	65
Figura 8. Clinómetro Sencillo o Rudimentario	67
Figura 9. Partes del clinómetro	67
Figura 10. Reflexión de un rayo de luz en la superficie de un espejo	69
Figura 11. Tipos de reflexión: especular y difusa	69
Figura 12. Uso del espejo como recurso.....	70
Figura 13. Seven step modelling schema.....	81
Figura 14. Primer criterio de semejanza de triángulos: ángulo-ángulo	87
Figura 15. Segundo criterio de semejanza de triángulos: lado-ángulo-lado	88
Figura 16. Tercer criterio de semejanza de triángulos: Lado-lado-lado.....	88
Figura 17. Triángulo rectángulo	89
Figura 18. Semejanza en un triángulo rectángulo.....	89
Figura 19. Teorema de Pitágoras	90
Figura 20. Elementos en situaciones de ángulos de elevación y depresión.....	92
Figura 21. Estructuración de la metodología de investigación.....	93
Figura 22. Propuesta de ficha general de una actividad de enseñanza-aprendizaje	118
Figura 23. Propuesta de ficha específica de una actividad de enseñanza-aprendizaje.....	118
Figura 24. Estructura conceptual general de las funciones trigonométricas	119
Figura 25. Mapa conceptual del contenido temático de razones trigonométricas	119
Figura 26. Sistemas de representación de las razones trigonométricas.....	121
Figura 27. Relaciones entre los sistemas de representación de las razones trigonométricas	122
Figura 28. Problema 1.....	127
Figura 29. Problema 2.....	128
Figura 30. Problema 3.....	129
Figura 31. Problema 4.....	130
Figura 32. Problema 5.....	130
Figura 33. Problema 6.....	131
Figura 34. Problema 7.....	132

Figura 35. Problema 8.....	133
Figura 36. Problema 9.....	134
Figura 37. Problema 10	134
Figura 38. Orden de obtención de los resultados de la investigación.....	222



Introducción

La enseñanza y aprendizaje de la trigonometría suele ser una preocupación tanto para docentes como para estudiantes, esto se debe al poco conocimiento de buenas estrategias de enseñanza para desarrollar estos contenidos temáticos, lo cual no permiten lograr un aprendizaje significativo en el estudiante. De este modo, no es difícil encontrar estudiantes de Educación Básica que aseguren no haber aprendido trigonometría en su secundaria; o a quienes sí se les ha enseñado, manifiestan que esos conocimientos no tienen funcionalidad, son complejos y por ende no se interesan en ello. Lo mismo repercute en los maestros, quienes prefieren no enseñar temas de trigonometría porque estiman que los estudiantes no comprenderán dichas clases, además de no saber cómo impartir dichos conocimientos. Sin embargo, el aprendizaje y la enseñanza de la trigonometría no se puede dejar de lado en la Educación Básica ya que con ella el estudiante puede adquirir conceptos y procedimientos con un alto nivel de abstracción, además de mejorar su nivel de desarrollo de competencias y capacidades mediante la resolución de situaciones de contexto real.

En este sentido, con el fin de contribuir a la tarea docente y de favorecer el aprendizaje de los estudiantes en determinados conceptos de trigonometría, esta investigación plantea su objetivo de “Diseñar una propuesta pedagógica basada en actividades de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas relacionados con las razones trigonométricas, haciendo uso de espejos, gnomon y clinómetro como recursos didácticos, en estudiantes de cuarto de secundaria”. Así mismo, la presente investigación se organiza en cuatro capítulos, los mismos que se explican brevemente a continuación.

En el primer capítulo se plantea y justifica la investigación, de este modo se realiza la caracterización de la problemática, se enumeran los problemas y objetivos de investigación a desarrollar, y se sustentan las investigaciones que antecedieron a este estudio.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico que contiene toda la literatura que fundamenta a esta investigación. Así pues, entre los distintos aspectos que se abordarán se encuentra el estudio de las teorías del aprendizaje involucradas, de las actividades de enseñanza-aprendizaje, de la competencia de resolución de problemas, de los recursos didácticos para la enseñanza de la matemática, y del campo temático de razones trigonométricas.

En el tercer capítulo se presenta el marco metodológico donde se describe el tipo de investigación realizada, el diseño de la investigación, las variables o categorías involucradas, la técnica de análisis de contenido y la técnica de validación por juicio de expertos.

En el cuarto capítulo se aplica la técnica de análisis de contenido y se presentan los resultados de este estudio aterrizando en el diseño de una propuesta pedagógica. Esta propuesta consta de una serie de actividades de enseñanza-aprendizaje organizadas sistemáticamente, las cuales también se describen en este capítulo. Posteriormente, se discuten los resultados obtenidos por la técnica de

análisis de contenido y los resultados producto de la investigación que son: el listado de estrategias heurísticas, los problemas de razones trigonométricas y la propuesta pedagógica con su respectiva evaluación obtenida de la técnica de validación por juicio de expertos.

Finalmente, se describen las conclusiones y recomendaciones de la investigación que han sido obtenidas en función de la discusión de los resultados y objetivos de la investigación.



Capítulo 1

Planteamiento de la investigación

1.1 Caracterización de la problemática

El Ministerio de Educación (MINEDU, 2018) afirma que la matemática es un producto cultural dinámico, cambiante, en constante desarrollo y reajuste. Lo citado da a entender que el saber matemático evoluciona con el tiempo y es de gran ayuda para el desarrollo de las sociedades; esto se debe tener claro, pues de ese modo se comprenderá la utilidad que ha tenido y seguirá teniendo la matemática para las personas. Sin embargo, el problema en la educación peruana es que los estudiantes aún siguen considerando la matemática como poco atractiva y muy alejada de sus intereses. La presencia de este problema no favorece el logro del objetivo que tiene la educación en el Perú, el cual es formar personas preparadas para enfrentar los cambios constantes de la sociedad, ya que la matemática, por su interrelación con otras ciencias, no está exenta de dichos cambios. En este sentido, para atender esta problemática, se debe mostrar a los educandos cómo la matemática ha facilitado la vida de las personas a lo largo del tiempo, y para ello, como precisa Flores (2018) “La resolución de problemas debe plantearse en situaciones de contextos diversos, pues ello moviliza el desarrollo del pensamiento matemático” (p.19).

Para mejorar los aprendizajes en el área de matemática, es necesario trabajar en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas ya que esta es la facultad que permite utilizar un conjunto de capacidades, conocimientos y recursos matemáticos para formular, trabajar y dar solución a problemas de situaciones reales, lo que a su vez permite la mejora en las capacidades y la ampliación de los conocimientos utilizados. Por ello, esta competencia es de gran importancia para el éxito de los aprendizajes, razón por la cual ha sido de mucho interés en distintos países. Así pues, para desarrollar esta competencia, los estudiantes deberían lograr un aprendizaje significativo construyendo su propio conocimiento a través de actividades y técnicas propuestas por el docente que fomenten dicho aprendizaje, más no la mera repetición de conceptos y procedimientos (Morales y García, 2015). Además, según el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), es necesario para el buen desarrollo de esta competencia, que los estudiantes realicen permanentemente procesos cognitivos tales como la comprensión, descripción, representación, reflexión y comunicación (PISA, 2004); habilidades de mucha demanda para la mayoría de los puestos de trabajo a nivel mundial. Por ello, en las evaluaciones internacionales PISA para el área de matemática se hace énfasis en que el estudiante resuelva problemas contextualizados que además impliquen un esfuerzo intelectual, y no se reduzca a la aplicación de una fórmula o algoritmo.

De este modo, se hace cada vez más evidente la importancia de favorecer el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Entonces, es necesario recalcar que un problema involucra trabajar conceptos y procesos matemáticos los cuales se suelen relacionar mediante una situación de

contexto real. Sin embargo, la contextualización de los problemas no debe dejar de lado el dominio teórico de la matemática, ya que este es la base para lograr niveles más altos de abstracción; consecuencia de ello, es que sea muy común encontrarse con estudiantes quienes, si bien son capaces de resolver problemas contextualizados, lo hacen de manera muy incipiente. Cuando esto ocurre es evidente que se ha estado enseñando bajo una concepción errónea de lo que es un problema, ya que se reduce este a la mera presencia de un contexto, no dándole la debida importancia al desafío intelectual que debe significar para el estudiante. Por ello, es preciso plantear problemas contextualizados que permitan al estudiante alcanzar niveles altos de conocimientos respecto al tema que deben aprender.

Una manera de contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas es logrando que los profesores incorporen recursos didácticos en sus actividades de enseñanza de tal modo que no solo se logre captar el interés hacia el área de matemática, sino que sirvan de medios para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, como menciona Vera (2015), “a pesar de los esfuerzos realizados por cambiar el enfoque de la enseñanza de esta importante área, ésta se sigue desarrollando de manera algorítmica y tradicional” (p.3). Así pues, se rescata que el profesor, además de contar con un buen dominio del tema a enseñar, necesita poseer un gran arsenal de adecuadas y atractivas actividades de enseñanza-aprendizaje que le permitan desarrollar mejor su clase. Lo mencionado es parte de la problemática que se pretende abarcar con esta investigación, pues la propuesta pedagógica que se obtendrá formará parte de dicho arsenal de recursos que debe poseer el docente para optimizar su desempeño y los aprendizajes de sus estudiantes.

La percepción de los estudiantes respecto al área de matemática también es parte de la problemática, pues para la mayoría de ellos, la matemática carece de utilidad o funcionalidad; por ello, no se interesan por aprender, permanecen desmotivados y ello repercute negativamente en la comprensión de conceptos y procedimientos. Por consiguiente, existen estudiantes aparentemente buenos en matemática, aquellos que solucionan un sin número de ejercicios matemáticos con facilidad, pero no entienden los conceptos y procesos involucrados ya que han aprendido pasos y fórmulas de manera mecánica o algorítmica; por ende, cuando se les presenta un problema contextualizado, los estudiantes tienen dificultades para darle solución, pues no relacionan los conceptos con su realidad.

Respecto al campo temático de razones trigonométricas, este se ha escogido porque la complejidad de los conocimientos involucrados hace que el estudiante se enfrente a muchas dificultades y cometa errores al resolver problemas. Así lo manifiesta Arenas et al. (2014) quienes hacen una recopilación de las dificultades y errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Entre las principales dificultades mencionan el no poder reconocer, construir y representar elementos geométricos; ni realizar traducciones entre diferentes representaciones de las razones

trigonométricas. Estas dificultades llevan a los estudiantes a cometer errores como los siguientes: no identificar triángulos rectángulos, los lados de un triángulo con respecto a su ángulo, ni los datos de un problema dentro de su representación gráfica; no trazar correctamente la altura en un triángulo; no establecer de forma correcta la razón trigonométrica a partir del modelo gráfico del problema; no interpreta adecuadamente los valores obtenidos en la solución del problema; entre otros errores.

Con el fin de contribuir a la solución de la problemática descrita, surge la presente investigación, pues se pretende diseñar una propuesta pedagógica que permita el desarrollo de la competencia de resolución de problemas mediante el uso organizado y sistemático de actividades de enseñanza-aprendizaje que incluyan recursos didácticos (específicamente el gnomon, clinómetro y espejos) para generar situaciones de acción que le permitan al estudiante vincularse con su contexto, lo motiven y lo hagan conocedor de la funcionalidad de la matemática; sin minimizar la dificultad de los contenidos temáticos involucrados. De este modo, esta propuesta pedagógica será un recurso para los docentes, ya que facilitará la enseñanza del campo temático de razones trigonométricas y permitirá el desarrollo de la competencia mencionada. Pues, es claro que el nivel de desarrollo de la competencia de resolución de problemas que alcance el estudiante dependerá en gran medida de la labor del docente. Todo esto apoyado en las palabras de Zapata et al. (2008) quienes exponen lo siguiente: “El papel del alumno para el aprendizaje de las matemáticas dependerá de las actividades que son programadas por el profesor, los recursos que utilice y la metodología que aplique” (p. 112).

1.2 Problema de investigación

1.2.1 Problema general

- ¿Cuál y cómo debe ser una propuesta pedagógica basada en actividades de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas relacionados con las razones trigonométricas, haciendo uso de espejos, gnomon y clinómetro como recursos didácticos, en estudiantes de cuarto de secundaria?

1.2.2 Problemas específicos

- ¿Cuáles son las estrategias heurísticas que se utilizan para permitir el desarrollo de la competencia de resolución de problemas?
- ¿Qué problemas se deben diseñar usando los espejos, el gnomon y clinómetro como recursos didácticos para contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas de razones trigonométricas?
- ¿Qué criterios pedagógicos se deben utilizar para planificar, seleccionar y clasificar actividades de enseñanza-aprendizaje usando los espejos, el gnomon y clinómetro como recursos didácticos que permitan el desarrollo de la competencia de resolución de problemas de razones trigonométricas?

- ¿Qué propósitos de aprendizaje, actividades, metodología, recursos y tareas de evaluación deben integrarse en la elaboración de una propuesta pedagógica?

1.3 Justificación de la investigación

Esta investigación es importante ya que pretende atender parte de la problemática que la educación en el Perú busca solucionar desde hace ya unos años especialmente desde el área de matemática, esta problemática va relacionada con las actividades y recursos que el profesor debe planificar en la enseñanza para desarrollar la competencia de resolución de problemas en los estudiantes. Por esta razón, la presente investigación pretende diseñar una propuesta pedagógica en base a actividades de enseñanza-aprendizaje orientadas al desarrollo de la competencia de resolución de problemas, en el campo temático de razones trigonométricas. Así mismo, la investigación pretende seleccionar y diseñar problemas de contexto real cuya resolución requiera el uso de recursos manipulativos tangibles (el gnomon, el clinómetro y espejos), que permitan visualizar y aplicar de manera concreta los contenidos relacionados con este tema. Este trabajo pertenece a la línea de investigación de la Enseñanza-aprendizaje de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura en el campo de la Didáctica, porque se busca influir positivamente en un determinado aprendizaje diseñando una propuesta pedagógica para el área de matemática.

La importancia de esta investigación para la sociedad se refleja en la propuesta de una alternativa para la enseñanza; la cual, en teoría mejora el modo en el que comúnmente se imparten los conocimientos de trigonometría, ya que esta generalmente se enseña de modo tradicional, sin tener en cuenta el contexto, el interés, la motivación o el pensamiento crítico de los estudiantes. De este modo, esta investigación pretende alcanzar principalmente a todos los estudiantes de educación secundaria, pues como objetos de la educación serán los más beneficiados por este trabajo. Su alcance también apunta a los profesores de educación secundaria, especialmente los de la especialidad de Matemática; pues, en esta investigación se han diseñado actividades de enseñanza-aprendizaje secuenciadas didácticamente que se han obtenido a partir de una metodología investigativa que involucra las teorías provenientes del marco teórico y las técnicas de investigación como son: la recopilación de antecedentes, revisión de fuentes bibliográficas, la técnica de análisis de contenido, y la validación por juicio de expertos.

Las actividades propuestas son una secuencia didáctica que ayudan a sistematizar las acciones realizadas por el profesor; en este sentido, facilita la tarea docente y articula los procesos de enseñanza-aprendizaje (Bravo et al., 2014). Respecto a los recursos didácticos, en las actividades se han incorporado el gnomon, clinómetro y espejos que contribuirán a contextualizar el contenido y lograr en los estudiantes aprendizajes significativos. Estos recursos manipulativos tangibles incorporados en las actividades permitirán a los estudiantes aprender de manera concreta los contenidos del campo temático, tales como el ángulo, los triángulos, el triángulo rectángulo, la

semejanza de triángulos, y las razones trigonométricas (Arenas et al., 2014; Abonia y Miranda, 2017; Mateus, 2013).

Al igual que en los antecedentes que se describen posteriormente, esta investigación apoya la enseñanza con una metodología dinámica y motivadora. Del mismo modo, se cree que la enseñanza de los conocimientos básicos de trigonometría desde un punto de vista práctico contribuye a la motivación por aprender de los estudiantes y favorece el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Pues al igual que Barrantes et al. (2013) se considera a la resolución de problemas como un proceso de aprender que involucra al educando como creador de su propio aprendizaje, es decir, le permite ser autónomo y construir su propio conocimiento; mientras que el profesor se encarga de seleccionar las actividades más apropiadas para fomentar el interés y la creatividad.

Así pues, en la propuesta pedagógica se plantearán actividades de enseñanza-aprendizaje para dinamizar las clases del campo temático de razones trigonométricas y desarrollar la competencia en mención. Con las actividades, se pretende que los estudiantes reciban conocimientos teóricos y prácticos, adquiridos mayormente por ellos mismos y desde su realidad, además que elaboren los instrumentos (recursos didácticos) necesarios para la resolución de situaciones problemáticas. En otras palabras, el diseño de esta propuesta apunta a que el estudiante desarrolle problemas contextualizados mediante razonamientos para facilitar la comprensión de los conceptos y procedimientos involucrados. Finalmente, para comprobar el avance de los aprendizajes de los estudiantes en cada una de las actividades de enseñanza-aprendizaje se elaboran distintos instrumentos de evaluación.

1.4 Objetivos de la investigación

1.4.1 Objetivo general

- Diseñar una propuesta pedagógica basada en actividades de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas relacionados con las razones trigonométricas, haciendo uso de espejos, gnomon y clinómetro como recursos didácticos, en estudiantes de cuarto de secundaria.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar las estrategias heurísticas que se utilizan para contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas.
- Diseñar problemas usando los espejos, el gnomon y clinómetro como recursos didácticos para contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas de razones trigonométricas.
- Utilizar criterios pedagógicos para planificar, seleccionar y clasificar actividades de enseñanza-aprendizaje usando los espejos, el gnomon y clinómetro como recursos didácticos que

permitan el desarrollo de la competencia de resolución de problemas de razones trigonométricas.

- Formular los propósitos de aprendizaje, actividades, metodología, recursos y tareas de evaluación para integrarlos en la propuesta pedagógica.

1.5 Antecedentes de investigación

Luego de revisar la bibliografía correspondiente a nivel internacional, nacional y regional, es posible describir las investigaciones más relevantes que anteceden a esta, así pues, se tienen cinco antecedentes internacionales y dos nacionales:

Primer antecedente internacional. Corresponde a Arenas et al. (2014) quienes realizaron el trabajo titulado: “Razones Trigonómicas”, este es un trabajo de maestría que se llevó a cabo en el país de Colombia. En este estudio realiza un análisis didáctico que incluye un análisis de contenido sobre el campo temático de razones trigonométricas para elaborar una unidad didáctica. Dicha unidad pretende potenciar los aprendizajes de estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Distrital José Joaquín Castro Martínez, las edades de dichos estudiantes oscilaban entre 15 y 17 años.

El objetivo de este trabajo fue diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica del tema de razones trigonométricas como una propuesta innovadora. Para ello, dividen el trabajo en ocho apartados. En el primer apartado formulan el problema; en el segundo describen el contexto curricular, académico y socioeconómico; en el tercero realizan el análisis didáctico del tema; en el cuarto describen la secuencia de tareas de la unidad; en el quinto justifican el diseño de la unidad; en el sexto describen la implementación de la unidad; en el séptimo evalúan la implementación de la unidad; y en el octavo realizan un balance de la unidad y presentan una nueva propuesta.

Los autores concluyeron que para realizar una unidad didáctica o cualquier propuesta de enseñanza hay que realizar el análisis didáctico del tema a enseñar, ya que este análisis abre la posibilidad de considerar nuevas herramientas conceptuales y metodológicas que permiten mejorar el actuar docente. Además, la propuesta permitió que los estudiantes descubran nuevos contextos que les permitan constatar diversas formas de aplicación del tema de razones trigonométricas.

Este antecedente tiene mucha relación con la presente investigación ya que aborda un estudio exhaustivo del campo temático de razones trigonométricas. Particularmente, es de interés los resultados del análisis de contenido que realizaron estos autores para tomarlos en cuenta cuando se distribuyan los conceptos y procedimientos pertenecientes a este campo temático en la propuesta pedagógica; además, para el diseño de problemas sobre razones trigonométricas. Por otro lado, en este antecedente se diseñó una propuesta de enseñanza en base a actividades fundamentadas gracias al análisis de contenido; además, el grupo de estudiantes para los cuáles se diseñó la propuesta tiene aproximadamente la misma edad que los alumnos de cuarto grado de secundaria en Perú. Por último,

en el conjunto de actividades propuestas se consideró el uso del clinómetro como recurso didáctico con el fin de plantear tareas no rutinarias.

Segundo antecedente internacional. Corresponde a Mateus (2013), quien realizó el trabajo titulado: “Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo”, este estudio es una tesis de maestría que se llevó a cabo en el país de Colombia. El trabajo tuvo tres componentes: primero, un componente histórico-epistemológico; segundo, una componente conceptual y procedimental; y tercero, una componente didáctica; en esta última se diseñaron seis actividades, estas están enmarcadas en la teoría de situaciones didácticas y en la metodología de resolución de problemas. Para determinar los sujetos de la investigación se realizó un muestreo fijo, obteniéndose una muestra de 18 estudiantes de grados décimo y undécimo cuyas edades eran de entre 15 y 18 años.

El objetivo de este antecedente fue diseñar una propuesta de actividades de enseñanza basándose en una perspectiva histórica-epistemológica, didáctica e interdisciplinar relacionando trigonometría y astronomía, que ayude a potenciar el pensamiento científico y la utilidad de las herramientas matemáticas. Además, se desarrollaron conceptos matemáticos básicos de razón, ángulo, cuerda, razón trigonométrica y función trigonométrica.

La autora en su investigación concluyó que, se diseñaron seis actividades (de las cuales se aplicaron cinco); además, en su diseño se tuvo en cuenta el marco conceptual, la metodología de resolución de problemas y la teoría de situaciones didácticas. La experiencia resultó motivadora y significativa para los estudiantes ya que le encontraron utilidad a la trigonometría, ayudándoles en la conceptualización de conceptos básicos. En general, la propuesta de actividades y el diseño de esta constituyen un modelo innovador, un avance y un éxito en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática aplicada.

El propósito de la actual investigación es diseñar actividades de enseñanza-aprendizaje, para esto se usará recursos didácticos para resolver problemas de trigonometría; así pues, resulta importante este antecedente ya que también presenta una propuesta con actividades y entre sus objetivos específicos está el afianzar la resolución de problemas trigonométricos en los estudiantes. Por otro lado, los tres componentes de este antecedente serán de gran ayuda, pero en especial el primer y tercer componente. El primero porque de este modo el estudiante se motiva al encontrarle utilidad a la trigonometría, y el tercero porque sirve de guía para el diseño de las actividades de enseñanza-aprendizaje, además, el autor incluye el gnomon y el clinómetro como recursos didácticos principales en dos de las actividades.

Tercer antecedente internacional. Corresponde a Runza (2013), quien realizó el trabajo titulado “Las Razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas”, este estudio

es una tesis de maestría que se llevó a cabo en el país de Colombia. Este trabajo inició sustentando la importancia de la trigonometría a lo largo de la historia y la aparición de conceptos trigonométricos; posteriormente, se brindaron los conceptos matemáticos útiles para el correcto aprendizaje de las razones trigonométricas; finalmente, se diseñó una propuesta con actividades que permitieron introducir preconceptos ligados al tema en cuestión, y al planteamiento y resolución de problemas para estudiantes de grado décimo (14 – 15 años). Además, se usaron guías propuestas para cada actividad donde se detallaron los materiales necesarios para la correcta aplicación de cada una.

El objetivo de este antecedente fue diseñar actividades didácticas que favorezcan el planteamiento y la resolución de problemas con razones trigonométricas; para lo cual ha sido necesario hacer un análisis de las situaciones que evolucionaron los conceptos de trigonometría, desarrollar estrategias que posibiliten el aprendizaje de conocimientos matemáticos e identificar los conceptos necesarios para la enseñanza del tema de razones trigonométricas.

La autora llegó a la conclusión de que no existe una sola propuesta didáctica para trabajar un determinado campo temático, sino que, el docente debe de combinar sus conocimientos de didáctica, dominio del área y conocimiento de la realidad de sus alumnos para crear actividades que resulten ricas para ellos, con el fin de lograr un aprendizaje significativo. Como era de esperarse, el darle un enfoque epistemológico e histórico a la investigación hace que los estudiantes le encuentren utilidad a la matemática y, en particular, al área de trigonometría. Pues, como menciona la autora, el examinar las situaciones que dieron origen y evolución a cada uno de los conceptos que se utilizan en la escuela sirve de sustento para la solución de problemas actuales.

El modo de concebir la labor del profesor para el logro de los aprendizajes es un punto a tener en cuenta para la presente investigación, pues se menciona que este debe planear y proponer situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo para los educandos, permitiéndoles participar activamente en la reconstrucción y validación del saber matemático. Asimismo, el autor invita a seguir enriqueciendo la práctica pedagógica en cada uno de los conceptos y procedimientos a compartir con los educandos. Por último, las actividades que se propusieron sirven como modelo a considerar para el diseño y secuenciación de las actividades que se diseñarán en la presente investigación.

Cuarto antecedente internacional. Corresponde a Abonia y Miranda (2017), quienes realizaron el trabajo titulado “Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula”, este estudio es una tesis de licenciatura que se llevó a cabo en el país de Colombia. Este antecedente se fundamentó en el enfoque cualitativo, realizándose actividades en el aula que se llevaron a cabo por medio de tres fases de desarrollo las cuales incluyen actividades de apertura, desarrollo y cierre. La implementación de la experiencia en el aula se dirigió a 28 estudiantes de décimo grado de la educación media de la Institución Educativa Sagrado Corazón de Jesús – Bethlemitas ubicada en el municipio de Palmira.

Su objetivo general fue favorecer el aprendizaje de las razones trigonométricas seno y coseno por medio de una experiencia en el aula que involucre algunos elementos del desarrollo histórico de las razones trigonométricas. Entre sus objetivos específicos se planeó examinar algunos elementos históricos de las razones trigonométricas; adaptar e implementar una experiencia que involucre elementos de la historia sobre las razones seno y coseno; identificar las fortalezas y las debilidades presentes en los estudiantes al realizar actividades de tipo geométrico e histórico; y reconocer a las razones trigonométricas seno y coseno por medio de la adaptación e implementación de una experiencia en el aula.

Del mismo modo que en los antecedentes ya mencionados, era de esperarse que el carácter práctico para el aprendizaje de la trigonometría, favorezca a la resolución de problemas. Por lo tanto, se concluyó que es importante que los conocimientos se enseñen con buena didáctica, así se podrán adaptar a diferentes grados de la escolaridad e incluso la metodología se podría usar en distintas áreas. Además, es de gran importancia seguir creando estrategias de enseñanza que resulten amenas para los estudiantes, en especial en la matemática, pues esta se ha ganado el desprecio de la mayoría debido a la enseñanza tradicional.

Este antecedente es de gran ayuda y es base para la presente investigación, ya que tuvo en cuenta un carácter práctico para desarrollar actividades que resulten interesantes para los estudiantes, demostrando que sí es posible abordar temas de trigonometría apoyándose en la historia para desarrollar problemas de contextos cotidianos. Este antecedente también abre camino para futuras investigaciones que el autor mismo propone, pues él invita a desarrollar actividades educativas de carácter práctico y, preferiblemente, relacionadas con la historia, pero trabajando las razones trigonométricas de tangente y cotangente; lo cual promueve el éxito de esta investigación ya que aquí se pretende diseñar actividades de enseñanza aprendizaje que abarquen todas las razones trigonométricas. Por último, en la principal actividad el autor hizo uso del gnomon para la obtención de datos, lo cual evidencia la utilidad de este recurso didáctico para desarrollar la competencia de resolución de problemas.

Quinto antecedente internacional. Corresponde a Morales y García (2015), quienes realizaron el trabajo titulado “Un aprendizaje basado en proyecto en matemática con alumnos de undécimo grado”, este es un artículo de revista del país de Panamá. Este trabajo estuvo enmarcado en la modalidad de Aprendizaje basado en Proyectos, en el cual los alumnos son protagonistas de su propio aprendizaje. Esta innovación fue diseñada según las características de una investigación de campo con un diseño no experimental y transversal. La población de estudio estuvo constituida por los estudiantes del Instituto América de la Ciudad de Panamá; la muestra fue conformada por estudiantes de undécimo grado del turno vespertino (las edades de los participantes variaban entre 16 a 18 años), los

cuales estuvieron divididos en estratos de cinco salones de 31 alumnos. Estos estudiantes participaron en una serie de actividades divididas en siete etapas.

De manera general, este antecedente pretendió involucrar activamente al alumno en el desarrollo del proceso de aprendizaje; para ello, estos debieron tener dominio teórico y práctico de los conocimientos matemáticos, con el fin de elaborar un teodolito casero que les permita encontrar alturas y de este modo aplicar la matemática en contextos reales. Al hacer que los alumnos realicen un trabajo de campo, estos también desarrollaron las competencias trasversales de: aprender a trabajar en equipo planteándose objetivos, capacidad de organización de contenido y síntesis, y fomentar el espíritu crítico.

El poner en práctica los conocimientos teóricos contribuyó significativamente al aprendizaje de los alumnos; sin embargo, la investigación no quedó simplemente en adquirir contenido del área, sino que se aprovecharon las actividades para desarrollar otras capacidades como el trabajo en equipo, recolección de datos, entre otras que sirven para cualquier otra área curricular. Se consideró que, más que técnicas de aprendizaje, se necesitan técnicas de enseñanza que fomenten un verdadero aprendizaje y no una simple reproducción de textos, así se promueve el interés del estudiante hacia el área.

Este antecedente está muy relacionado con la presente investigación porque se utilizó uno de los recursos didácticos que se planea usar (el clinómetro), evidenciando que el adecuado uso de este resultará muy rico para el logro de aprendizaje de nociones trigonométricas en los estudiantes y el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Además, este estudio surgió con la intención de que el alumno conozca la aplicación de lo aprendido en clase, proponiendo actividades de enseñanza-aprendizaje para desarrollar en sus estudiantes la competencia mencionada, ya que las actividades resultarán interesantes y motivadoras, pero sobre todo funcionales. Así pues, este trabajo constata que actividades bien elaboradas con recursos adecuados contribuyen a la buena enseñanza y por ende al aprendizaje.

Primer antecedente nacional. Es una tesis de maestría elaborada por Avila (2015), quien planteó su investigación titulada “Estilo de aprendizaje autónomo y el nivel de competencia de resolución de problemas en el curso de Matemática I en los estudiantes de la Universidad San Ignacio de Loyola en el periodo 2015-II”. Fue una investigación de nivel aplicado, usando el enfoque de tipo cuantitativo y el diseño descriptivo-correlacional. La población de estudio estuvo constituida por 380 estudiantes del curso de Matemática I cuyas edades eran de 16 a 18 años; el muestreo realizado fue estratificado obteniéndose 201 estudiantes. Por otro lado, se establecieron 20 ítems para cada una de las variables mediante un cuestionario hacia los alumnos.

La investigación se centró en establecer una relación entre el estilo de aprendizaje autónomo y el nivel de la competencia de resolución de problemas; y esto lo hace en cuatro dimensiones, estas

son: recursos, heurísticas, control y sistemas de creencias en los estudiantes que conforman la población y muestra de este estudio.

Todo el trabajo estadístico detrás del análisis de los resultados, le dan un gran sustento a las conclusiones a las que se llegó; claro que son características propias del enfoque bajo el cual se ha investigado, sin embargo, en temas de educación es muy difícil reducir los resultados a términos cuantitativos, y el autor lo logró con un nivel de confianza considerablemente alto. En general, se concluyó que el estilo de aprendizaje autónomo influye significativamente en el nivel de competencia de resolución de problemas; en cada una de sus cuatro dimensiones.

Este antecedente está relacionado con la presente investigación porque una de sus variables es la competencia de resolución de problemas en matemática, la cual depende de un aprendizaje autónomo. Así pues, las actividades de enseñanza-aprendizaje que se diseñarán deberán dejar que el alumno, con cierto grado de autonomía, construya su propio aprendizaje para desarrollar la competencia mencionada y no dependa del profesor, ya que este es solo un guía. Además, este antecedente buscó atender una necesidad a nivel nacional (el desarrollo de la competencia de resolución de problemas), por lo tanto, esta investigación que se pretende realizar sería un gran modo de continuar mitigando la problemática al plantear una propuesta pedagógica basada en actividades de enseñanza-aprendizaje.

Segundo antecedente nacional. Es una tesis de licenciatura que pertenece a Apacclla y Paitan (2018) con su trabajo titulado “Geogebra en la resolución de problemas de funciones trigonométricas en quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Santa Isabel Antacocha – Huancavelica”. El tipo de estudio de esta investigación fue aplicativo y corresponde al nivel de investigación explicativo. Su diseño es pre-experimental y los métodos que se usaron fueron: el método científico como método general y el método experimental como método específico. El primer método lo usaron como normas para regular su investigación educativa, y el segundo método lo usaron para enfatizar que se manipuló y controló el software GeoGebra como variable de investigación. La muestra se obtuvo mediante un muestreo no probabilístico dando un total de 20 estudiantes del quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Santa Isabel Antacocha.

Esta investigación tuvo como objetivo general determinar de qué manera influye el uso del software GeoGebra en la resolución de problemas trabajando el tema de funciones trigonométricas, así mismo se identificó lo que los alumnos aprenden respecto a la resolución de problemas en el tema dado con la aplicación de dicho software. Al final se compararon los resultados de la aplicación del software con el aprender a resolver problemas de funciones trigonométricas.

Se concluyó que el software GeoGebra es una herramienta que influye favorablemente en la resolución de problemas de funciones trigonométricas en los estudiantes. Además, el software GeoGebra, mediante la resolución de problemas, permitió que la mayoría de los estudiantes estén en

el nivel de logro destacado, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todas las tareas propuestas.

Este antecedente se relaciona con la presente tesis ya que el tema que aprendieron los alumnos tiene mucha relación y similitud con el campo temático que se quiere abordar en la tesis actual, pues el tema de razones trigonométricas forma parte del análisis conceptual del tema de funciones trigonométricas; y esto sirve para comprobar qué conceptos y/o procedimientos les resulta más difícil a los estudiantes. Además, se empleó un recurso didáctico (el software GeoGebra) para evidenciar el modo en que este influye en la competencia de resolución de problemas de los alumnos, obteniéndose buenos resultados; de este modo, se evidenció que este recurso didáctico mejora significativamente dicha competencia en los alumnos. Esto sirve como base para garantizar que el adecuado uso de un recurso didáctico puede ayudar a los alumnos en el aprendizaje de la trigonometría.



Capítulo 2

Marco teórico

En el presente capítulo se abordan los fundamentos teóricos que sustentan esta investigación. Se inicia exponiendo concepciones sobre el aprendizaje, explicando dos tipos en específico, el aprendizaje significativo y el aprendizaje por descubrimiento. Luego se unifican ambos aprendizajes para llegar a lo que Pérez (2015) denomina “Aprendizaje por descubrimiento significativo”.

Posteriormente, se explica acerca de las “Actividades de enseñanza-aprendizaje” poniendo énfasis en su clasificación, en los criterios para su selección y en criterios para su diseño. Los recursos didácticos que se incluyen en las actividades de enseñanza-aprendizaje son, principalmente tres; los espejos, el gnomon y el clinómetro; de estos se expone su modo de uso e influencia en la enseñanza de la matemática.

Respecto a la “Competencia de Resolución de Problemas”, se presentan diferentes concepciones enfatizando en las más significativas y en aquellas que más se adapten al propósito de esta investigación. Dentro de esta competencia se incluyen cuatro capacidades que propone el MINEDU (2015), estas capacidades son de gran importancia ya que ayudan a verificar el desarrollo de dicha competencia.

Finalmente, se explican los principales conceptos y procedimientos vinculados al campo temático de razones trigonométricas, pues este se desarrolla a lo largo de toda la propuesta pedagógica.

2.1 Fundamentos teóricos constructivistas del aprendizaje

Toda persona e institución que labora en el campo de la educación no puede negar la gran importancia de esta para el logro de los aprendizajes y el desarrollo de la sociedad, lo que de manera general representarían las metas deseadas. Para el logro de estos objetivos se debe definir adecuadamente conceptos claves y uno de ellos es el de “aprendizaje”, ya que al no ser este un concepto unánime, cambia dependiendo del contexto y de la noción que se tenga sobre la educación. Por lo tanto, en primera instancia conviene analizar diferentes concepciones sobre el aprendizaje.

Pérez (2015) expone su definición de aprendizaje, planteando como idea general que este es “la actividad de la persona que apunta al conocimiento de la verdad” (p. 72). Se explica que en este participan diferentes facultades, pero de manera especial, las relacionadas con el conocimiento; además reconoce que el aprendizaje se realiza de manera consciente o inconsciente. El mismo autor recalca el concepto de aprendizaje mencionando que:

El esfuerzo para alcanzar la verdad y el camino que se recorre para ello constituye el aprendizaje. Se realiza a partir de la percepción, la actividad de la inteligencia y el aporte de la memoria. Lo logrado pasa a ser parte del ser personal. Lo adquirido puede tener distintos

niveles de comprensión, lo que alarga el aprendizaje a diversos momentos de profundización a partir de lo ya aprendido. (p. 78)

De lo expuesto por el autor se puede rescatar el énfasis que le da a la adquisición de conocimientos para el crecimiento personal. La persona humana, por sus facultades, no podrá conocer toda la verdad, por lo que el acto de aprender siempre estará presente, es decir, como una tarea que no acaba. Sin embargo, se puede lograr diferentes niveles de comprensión, lo cual dependerá de las facultades de la persona y de sus saberes previos, pues hay actividades que potencian mejor el desarrollo de ciertas facultades; y del mismo modo, poseer saberes previos más ricos será beneficioso cuando la persona se enfrente a una situación nueva. Partir de dicha concepción de aprendizaje es de suma importancia, puesto que en el presente trabajo de investigación se pretende diseñar actividades que potencien determinadas facultades y/o capacidades, de tal modo que faciliten en el estudiante la adquisición de ciertos conocimientos del área de matemática.

Otro concepto de aprendizaje que resulta de interés para esta investigación es el propuesto por Schunk (2012) quien expone que “El aprendizaje es un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de comportarse de cierta manera, el cual es resultado de la práctica o de otras formas de experiencia” (p. 3). Se debe recordar que acompañado del aprendizaje académico está la motivación y actitud ante el área, por ello, se debe involucrar a los estudiantes en experiencias nuevas y de mayor interés. Así pues, en esta investigación se propone involucrar al estudiante en experiencias fuera del aula con actividades que ya se detallarán posteriormente.

Schunk (2012) enriquece su definición explicando que “Aprender implica construir y modificar nuestro conocimiento, así como nuestras habilidades, estrategias, creencias, actitudes y conductas. Las personas aprenden habilidades cognoscitivas, lingüísticas, motoras y sociales, las cuales pueden adoptar muchas formas” (p. 2). El aprendizaje que adquieren los estudiantes dependerá del modo en el que lo han adquirido, procesado y utilizado; además se debe tener en cuenta que las personas lo hacen de manera muy distinta respecto a los otros, lo cual se ve influenciado por diversos factores tanto internos como externos al estudiante.

Se puede concluir respecto al aprendizaje, que las personas aprenden de distinta manera y a ritmos muy variados, pues son muchos los factores que influyen en el proceso de aprendizaje. En general, todo ese esfuerzo apunta al fortalecimiento de las facultades relacionadas con el conocimiento para lo cual se necesita de una buena enseñanza, con el propósito de que el estudiante logre los aprendizajes deseados en el tiempo requerido.

Dos tipos de aprendizaje que se consideran adecuados para esta investigación y que pertenecen a las teorías estructuralistas del aprendizaje son el Aprendizaje Significativo y el Aprendizaje por Descubrimiento que se definirán en los siguientes apartados.

2.1.1 *Aprendizaje significativo*

El aprendizaje significativo corresponde a uno de los modos de aprendizaje en los que el estudiante incorpora la nueva información en las estructuras cognoscitivas ya existentes. Lo que lo caracteriza es que el conocimiento nuevo establece fuertes enlaces con los saberes previos permitiendo una mayor fijación de lo aprendido y por ende una mayor comprensión y facilidad para evocar los conocimientos. Se presentarán ahora concepciones de diferentes autores sobre el aprendizaje significativo.

Por aprendizaje significativo, Pérez (2015) lo entiende como “aquel en que los nuevos conocimientos son incorporados a la estructura cognoscitiva de modo no arbitrario, relacionándose con los conocimientos poseídos de modo substancial” (p. 291). Este autor menciona que este aprendizaje requiere de un esfuerzo por establecer relaciones entre lo nuevo y lo ya existente en la estructura cognitiva, ayudado de experiencias y hechos. Un aporte más de dicho autor, hace referencia al aprendizaje significativo como aquel que conlleva un entendimiento del sentido del concepto, de la esencia. Por esta razón, este aprendizaje facilita la expresión de las ideas utilizando las propias palabras, pues conlleva una implicación afectiva para relacionar los conocimientos ya poseídos con los nuevos.

En palabras de Sánchez (2009) “El aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva y no literal” (p. 949). Tanto el conocimiento que ingresa en la estructura cognitiva como el que ya forma parte de esta se relacionan entre sí mediante ideas anclajes ya que no se utilizan todos los saberes previos, sino los que faciliten la adquisición del nuevo saber.

Se muestra ahora la definición de Moreira (1997) respecto a este tipo de aprendizaje desde la perspectiva de Ausubel; “Aprendizaje significativo es el proceso a través del cual una nueva información (un nuevo conocimiento) se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva (no-literal) con la estructura cognitiva de la persona que aprende” (p. 2). Este autor expone también el aprendizaje significativo, aunque desde una perspectiva humanista en la cual no basta que el material sea significativo, sino que, se necesita también una disposición de parte de quien aprende para que lo nuevo sea sustantivo y no arbitrario. Se evidencia pues la presencia de factores internos y externos al sujeto que aprende que influyen en el logro del aprendizaje significativo.

Por último, Ausubel (1983) expone que el aprendizaje significativo ocurre cuando la nueva información se conecta, de manera intencional, con el conocimiento ya existente dando como resultado la formación de relaciones no arbitrarias entre las ideas del alumno. Este autor menciona tres requisitos para que haya aprendizaje significativo:

- Debe de haber un conocimiento previo relevante almacenado en las redes neuronales para que la nueva información pueda relacionarse de manera no arbitraria.

- El material de aprendizaje debe ser significativo en sí mismo; es decir, debe contener conceptos y proposiciones importantes relacionadas con el conocimiento existente.
- El estudiante debe elegir conscientemente qué usar y qué no usar para incorporar de manera no arbitraria este material significativo en su conocimiento existente.

Las definiciones o concepciones de los autores citados sobre el aprendizaje significativo no son muy diferentes y tienen muchos aspectos en común, pues en todos los aportes se puede evidenciar: la presencia de un conocimiento nuevo, de un conocimiento previo, de una relación entre lo nuevo y lo ya existente, de un material significativo y de un querer aprender de parte del alumno; todo con el fin de lograr una incorporación sustantiva. Por lo tanto, forma parte del aprendizaje que se pretende lograr con esta investigación mediante las actividades y los recursos que ya se detallarán posteriormente; y la competencia que se pretende desarrollar.

2.1.2 *Aprendizaje por descubrimiento*

Bruner propone al descubrimiento como una fuente de motivación para el aprendizaje, pero para que este se dé de manera propicia es necesario que el sujeto posea un entrenamiento heurístico acompañado de un pensamiento crítico que le permita la adecuada organización de lo aprendido (Baro, 2011). En otras palabras, el aprendizaje por descubrimiento está más orientado a la participación interactiva la cual permite construir los significados. Estos significados son los resultados de la interacción de los estudiantes con el profesor, el contenido a estudiar y los materiales de estudio.

Bruner estaba convencido de que el aprendizaje, y en especial el aprendizaje de las ciencias, debía partir de situaciones o ejemplos específicos que permitan llegar a formalizaciones generales, es decir mediante razonamientos inductivos que incentive al estudiante a utilizar la imaginación y creatividad para resolver problemas. Así pues, en el aprendizaje por descubrimiento el docente asume el rol de facilitador del saber y no el tradicional rol de poseedor exclusivo de conocimientos, es decir, se permite el avance cognitivo de los estudiantes, pero sin trasladar la responsabilidad del aprendizaje al docente (Camargo y Hederich, 2010). El papel del profesor no se menosprecia, ya que su labor es orientadora, y evita que este tipo de aprendizaje se convierta en una acción netamente mecánica en la que abunde el ensayo y el error; pues, esto es muy probable que se dé si el profesor no tiene una buena base teórica. El profesor debe estar bien preparado y planificar cada detalle del proceso de aprendizaje que desea que los estudiantes sigan de manera ordenada, esto incluye los recursos que utilizará y un conocimiento de las capacidades que ya poseen sus estudiantes.

Conviene ahora presentar la concepción de este tipo de aprendizaje de Pérez (2015), este autor escribe que “El aprendizaje por descubrimiento tiene como rasgo esencial que lo principal de lo que debe ser aprendido no se da, sino que debe ser descubierto por el alumno para poder incorporarlo después a su estructura cognoscitiva” (p. 290). Entonces, si lo que se quiere aprender es descubierto

por el alumno, esto facilitará la incorporación de lo aprendido a la estructura cognoscitiva del aprendiz ya que gracias a sus capacidades mentales lo ha podido llegar a conocer.

Uno de los aspectos más destacados del pensamiento de Bruner es su insistencia en que el aprendizaje por descubrimiento se basa en un concepto muy amplio de la hipótesis. Además, la necesidad de novedad en el aprendizaje estimula la búsqueda de los conocimientos por descubrir los cuales se encuentran en el exterior. En otras palabras, la forma natural para aprender es mediante el descubrimiento, y la mente asume el papel de instrumento que permite la adaptación al mundo, a lo nuevo (Pérez, 2015). Como se mencionó en líneas anteriores el hecho de descubrir algo nuevo constituye por sí mismo una motivación para el estudiante, pues lo inclina a buscar la novedad seleccionando y utilizando estrategias y procedimientos heurísticos.

Como señalan Arias y Oblitas (2014) y, Camargo y Hederich (2010) inicialmente el aprendizaje significativo y el aprendizaje por descubrimiento eran incompatibles por críticas de Ausubel hacia el trabajo de Bruner en las que se menciona que uno de los problemas era la falta de experticia del estudiante para enfrentarse a situaciones nuevas y la necesidad de unos saberes previos. Además, para Ausubel la teoría de Bruner tenía sus deficiencias en que no todo conocimiento es descubierto por quien aprende, pues generalmente se necesita la ayuda del profesor, por lo tanto, difícilmente puede llevar a una buena organización e integración del conocimiento. Sin embargo, es de conocimiento que actualmente el aprendizaje por descubrimiento ha tenido importantes desarrollos para la didáctica de las ciencias y la pedagogía (Camargo y Hederich, 2010).

Se podría diferenciar el aprendizaje significativo del aprendizaje por descubrimiento mencionando que el primero se basa en la percepción, en este aprendizaje el profesor asume un rol protagónico tomando muy en consideración los saberes previos del estudiante para la organización de los conocimientos. Por otro lado, el segundo se basa en la acción, en un saber hacer; ya que el profesor interviene lo menos posible debido a su papel de guía y orientador (Arias y Oblitas, 2014).

Es de interés para esta investigación unificar ambos aprendizajes, tanto el aprendizaje significativo de Ausubel y el aprendizaje por descubrimiento de Bruner, logrando así una de las cuatro formas básicas de aprendizaje que Pérez (2015) denomina “Aprendizaje por descubrimiento significativo”. Lo que caracteriza a esta forma básica de aprendizaje es que no se proporciona el material completo, puesto que lo principal lo debe buscar el estudiante para posteriormente relacionar de forma sustancial lo descubierto con sus saberes previos, además con esta forma de aprendizaje se alcanza niveles de abstracción tan altos como los que proporciona una investigación científica.

2.2 Actividades de enseñanza-aprendizaje

En este apartado se describen los fundamentos referidos a las actividades de enseñanza-aprendizaje abordando distintos aspectos que comprende su estudio. De este modo, primero se establece una definición de este concepto para diferenciarlo de una acción cualquiera que se haga en

el salón de clase o de las sesiones de aprendizaje. Posteriormente, se aborda la clasificación de actividades de enseñanza-aprendizaje haciendo énfasis en la propuesta de Cooper (1999) y en la de Rodríguez (2007). Después, se abordan los fundamentos para una buena selección y diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje identificando una lista de criterios a tener en cuenta para facilitar y mejorar la tarea realizada; así pues, se comparan, contrastan y relacionan los aportes de distintos especialistas de la educación. Finalmente, se delimita las actividades de enseñanza-aprendizaje a la matemática apuntando al campo temático que compete a la propuesta pedagógica.

2.2.1 Definición de actividades de enseñanza – aprendizaje

Se pretende estudiar las actividades de enseñanza-aprendizaje poniendo especial interés en aquellas que contribuyan al aprendizaje del campo temático de esta investigación y que permitan desarrollar en los estudiantes la competencia de resolución de problemas. Por lo tanto, conviene en primer lugar establecer una definición o concepción acertada de lo que son, en sí mismas, las actividades de enseñanza-aprendizaje.

Una primera definición de las actividades de enseñanza-aprendizaje es que son consideradas como procedimientos que se realizan en un aula de clase para facilitar el conocimiento en los estudiantes, las cuales deben ser implementadas por los docentes en el aula de clase para motivar la participación en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Richards y Rodgers, 1992; y Cooper, 1999; citados en Villalobos, 2003). Estos autores consideran que una actividad de enseñanza-aprendizaje es igual a un procedimiento, pero esta o el conjunto de estas deben ser debidamente planificadas por el profesor para posteriormente ser integradas en el salón de clases. Entonces una actividad de enseñanza-aprendizaje tiene como creador al profesor, quien, por su preparación académica, es capaz de crear actividades adecuadas e introducirlas en su clase de manera propicia para mejorar el aprendizaje de sus estudiantes.

El siguiente aporte corresponde a Rodríguez (2007), para esta autora las actividades de enseñanza-aprendizaje representan un medio que los profesores utilizan para desarrollar los contenidos temáticos que se programen y para la consecución de los objetivos tanto generales como didácticos. Esta autora ve las actividades de enseñanza-aprendizaje dentro del ámbito de la programación curricular y más específicamente como parte integrada de una unidad didáctica. Es evidente pues, que como parte de una programación estas deben ser planificadas y organizadas de manera sistemática. Así pues, una actividad de enseñanza-aprendizaje no tiene sentido por sí sola, sino que va acompañada de otras más, de tal modo que formen parte de un conjunto integrado de actividades planificadas que apunten a objetivos claros y precisos.

Poniendo atención en el aporte de Villalobos (2003) cuando menciona que las actividades de enseñanza-aprendizaje son procedimientos, cabe introducir el aporte de Rajadell (2000); este último explica que los procedimientos se llegan a interiorizar gracias a las actividades, funcionando estas

como medios. Por lo tanto, cabe distinguir que el primer autor se refiere a procedimientos realizados por el docente, mientras que para el segundo autor los procedimientos constituyen un “saber hacer” de parte del estudiante pero que influye en los otros conjuntos de saberes comprendiendo muchos más conceptos; entre ellos el de capacidad, habilidad, técnica, y estrategia.

La última definición pertenece a Hernández (citado en Zapata y Blanco, 2014) donde se refiere a las actividades de enseñanza-aprendizaje como un conjunto de acciones a realizar por el docente y los alumnos cuyo objetivo es el logro de las capacidades. En esta definición se involucra más al estudiante, a su participación y a las capacidades que desarrollará en el proceso de aprender; pero todo parte desde el docente, quien planifica debidamente todas las acciones que se llevarán a cabo.

Se delimita entonces la definición o concepciones sobre las actividades de enseñanza-aprendizaje bajo las que se realizará esta investigación. En este sentido, las actividades de enseñanza-aprendizaje son un medio que incluye un conjunto de acciones a realizar por el profesor y los estudiantes en el salón de clase, las cuales están debidamente planificadas para desarrollar los contenidos temáticos facilitando su conocimiento y lograr así los objetivos de un proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.2.2 Clasificación de las actividades de enseñanza – aprendizaje

Ahora se fundamentará la clasificación de las actividades de enseñanza-aprendizaje ya que una secuencia organizada de estas no puede constar de actividades de un mismo tipo, pues en educación la riqueza está en la diversidad. Sin embargo, es propicio conocer qué actividad conviene introducir dada la variedad de situaciones o casos existentes en determinado contexto educativo. Por tal motivo, en este apartado se han propuesto dos clasificaciones de los tipos de actividades de enseñanza-aprendizaje; la primera está más centrada en aspectos internos del estudiante o de su aprendizaje, y la segunda más focalizada en enriquecer la metodología de enseñanza y brindar ayuda al docente para potenciar los aprendizajes.

2.2.2.1 Clasificación por categorías de las actividades de enseñanza-aprendizaje. Según Cooper (1999) las actividades de enseñanza-aprendizaje alcanzan distintos niveles en el aprendizaje de la persona; así pues, unas son más efectivas para estimular el nivel cognitivo, otras alcanzan el nivel afectivo con mayor éxito, mientras otras afectan más a la esfera de la conducta. Según este autor las actividades de enseñanza-aprendizaje se incluyen en las siguientes esferas:

- Actividades relacionadas con la esfera cognitiva.

A esta categoría pertenecen las actividades que estimulan principalmente el pensamiento y que contribuyen al análisis de información, sin embargo, estas dependerán del nivel de aprendizaje que se quiera alcanzar para poder involucrar a los estudiantes (Villalobos, 2003). Este autor menciona algunas actividades de enseñanza-aprendizaje que pertenecen a esta categoría, entre ellas están la lluvia de ideas, comentarios grupales, estudio de casos, debates, foros, entrevistas, paneles de

discusión, preguntas provocativas, historias inconclusas, escenificaciones, dramas, conferencias, etc. Es importante, aunque no necesario, que los estudiantes se involucren y participen de manera activa, ya que así generalmente se alcanza un nivel más rico de aprendizaje.

Por otro lado, las diferentes actividades pertenecientes a esta esfera no estimulan el aprendizaje del mismo modo. Hay actividades en las que inicialmente se proporciona toda la información y otras en las que sólo se proporciona parte de esta información; hay actividades cuyo procesamiento de la información se da de manera grupal y otras de manera individual, lo cual es aprovechado de distinta forma por los estudiantes ya que habrá quienes trabajen mejor de una manera individual y otros de manera grupal; del mismo modo se pueden mencionar distintas características.

En otras palabras, este conjunto de actividades de enseñanza-aprendizaje serían favorables cuando una sesión de clase se pretenda dar bajo el enfoque de búsqueda de la excelencia y enfatizando en el aprendizaje de los conocimientos correspondientes al campo temático a desarrollar.

– Actividades relacionadas con la esfera afectiva.

El aprendizaje no se limita solamente a la adquisición de conocimientos académicos que permitan aprobar un examen de determinada asignatura; se aprende para la vida, para desenvolverse en la sociedad y ahí no basta lo académico. Se trata ahora de educar la inteligencia emocional, los sentimientos, valores, entre otros; y todos estos aprendizajes pertenecen a la esfera afectiva.

“El campo afectivo trata con las emociones, valores, actitudes, convicciones y motivaciones humanas. Las actividades que ayudan a un docente a entrar en estas áreas del aprendizaje del estudiante por lo general requieren el uso de la historia” (Villalobos, 2003, pp. 171-172). El propósito en este caso no es adquirir información sobre las emociones, sentimientos o actitudes; sino que se da énfasis a la demostración del concepto llevado a la realidad, dando validez al enunciado “se aprende más del ejemplo que de lo que se enseña”.

Entre las actividades de enseñanza-aprendizaje que pueden ser incluidas a esta esfera Villalobos (2003) menciona las siguientes “los estudios de casos, historias, dramas, escenificaciones cortas, escritura creativa, debates y discusiones” (p. 172). De manera general pertenece a esta esfera cualquier actividad que no solo desarrolle el conocimiento académico, sino que también influya en el corazón del aprendiz.

– Actividades relacionadas con la esfera conducta.

“Estas actividades ayudan al estudiante a cambiar su conducta, desarrollar una nueva conducta deseable, aprender una habilidad o aumentar una habilidad que ya existe” (Villalobos, 2003, p. 172). Para adquirir una nueva conducta o eliminar una conducta mala son necesarios los hábitos, los cuales se consiguen mediante la repetición de acciones y un esfuerzo de parte de la persona. Una vez conseguida la conducta deseada sin esfuerzo del aprendiz, entonces el refuerzo ya no será necesario, puesto que ya se ha adquirido un hábito. Los aprendizajes que son estimulados por estas

actividades se dan de manera lenta y gradual en el tiempo, ya que estos en su mayoría no cambian al instante y demandan de mucha práctica.

Es importante motivar o reforzar las conductas que se desean adquirir para que el educando pueda encontrar una medida de satisfacción personal, así pues, no basta decirle al estudiante que se comporte de cierto modo, porque difícilmente una conducta cambiará radicalmente de un momento a otro. Lo que debe hacer el docente es brindar apoyo o reforzar ciertas acciones; así pues, se mencionarán algunas actividades que se incluyen en esta categoría: talleres, experimentos, premios, representar el papel de alguien, reconocimiento público, grupos de apoyo, sesiones prácticas, entre otras (Villalobos, 2003).

2.2.2.2 Clasificación por etapas de las actividades de enseñanza-aprendizaje. Rodríguez (2007) prefiere la siguiente clasificación de las actividades de enseñanza aprendizaje, las cuatro primeras están en relación con el momento de la sesión de aprendizaje en la que se quiere incorporar y una relacionada a las necesidades educativas especiales.

- Actividades de introducción/motivación.

La parte de la motivación es importante para captar el interés del estudiante hacia el tema que aprenderá, por lo que esta se debe lograr lo antes posible, de este modo se tendrá la atención del estudiante durante más tiempo. Una buena manera de motivar a los estudiantes es mostrarles la utilidad que pueden tener los campos temáticos en situaciones cotidianas, es decir, mostrarles la relación existente entre lo que han de aprender y la realidad; y esto se puede enriquecer más si se despierta la curiosidad en el estudiante.

Como expone Rodríguez (2007) el tema de estudio debe estar vinculado con el entorno social, cultural, económico y físico en el que se desarrolla la vida del estudiante o más general, la vida escolar. Es poco común encontrar en el salón de clase a estudiantes que esperan con entusiasmo e ilusión la llegada del profesor para que desarrolle su sesión, por lo que lograrlo es una gran hazaña que contribuirá mucho al aprendizaje de los estudiantes e incluso cambiaría su perspectiva respecto al área en general.

El mismo autor propone algunas actividades de enseñanza-aprendizaje que podrían ser de utilidad para desarrollar la motivación, estas son: análisis de videos, artículos de periódico o casos, experimentos en el laboratorio y juegos.

- Actividades de conocimientos previos.

La recolección de los saberes previos también forma parte de la etapa inicial en una sesión de aprendizaje y es de suma importancia, así pues, sería inútil tratar de enseñarle al estudiante un determinado campo temático si no está en condiciones de aprenderlo ya sea por su edad mental, edad cronológica o porque simplemente no logró aprender alguno de los temas que le anteceden al tema a aprender. Saber si el estudiante está en condiciones de iniciar el proceso de aprendizaje de un

respectivo campo temático, o recordarle algunos conocimientos ya aprendidos a tener en cuenta para el desarrollo de la sesión, es esencial. Por lo tanto, el docente debe manejar estrategias que le permitan recolectar información acerca de los saberes previos de los estudiantes en cada sesión de aprendizaje.

Según Rodríguez (2007) las actividades de enseñanza-aprendizaje que pertenecen a este grupo son las que se realizan con el fin de conocer las ideas, opiniones, aciertos o errores conceptuales de los estudiantes sobre el contenido temático a desarrollar. El autor menciona algunas estrategias o actividades que se pueden usar para la detección de ideas previas, entre estas se tienen: los test, pruebas previas o de entrada, representaciones gráficas o plásticas, entrevistas, Phillips 66, brainstorming, debates, role-playing, foro, dramatizaciones, etc.

- Actividades de desarrollo.

El momento de mayor duración en una sesión de aprendizaje es la correspondiente al desarrollo, además que es la parte en la que se muestra y explica al estudiante el nuevo conocimiento que aprenderá y este realizará los esfuerzos necesarios para lograr dicho aprendizaje. Por lo tanto, en esta parte de la sesión no deben faltar las actividades de enseñanza-aprendizaje que faciliten el proceso de adquisición de los nuevos conocimientos y enriquezca el arsenal de actividades que posea el docente.

Rodríguez (2007) explica que las actividades de enseñanza-aprendizaje pertenecientes a este grupo son aquellas que permiten conocer los conceptos, procedimientos, actitudes y comunicar la labor realizada; con el fin de desarrollar el análisis cualitativo, la formulación de hipótesis y un diseño experimental.

- Actividades de consolidación.

A este grupo pertenecen las actividades de enseñanza-aprendizaje que pueden ser incluidas en el momento de cierre de la sesión de aprendizaje. Este momento es importante ya que se sintetiza el tema aprendido y se verifica que tanto ha logrado aprender el estudiante en la sesión desarrollada e incluso se puede realizar una comparación de los saberes nuevos con los saberes que se tenían al inicio de la sesión.

Para Rodríguez (2007) en las actividades de consolidación se contrastan las nuevas ideas con las previas permitiendo al estudiante aplicar lo aprendido. Además, se apunta a desarrollar la capacidad de síntesis mediante la elaboración de esquemas, conclusiones y modelos de solución a problemas; por lo tanto, se le exige al estudiante una reestructuración de sus esquemas cognitivos.

- Actividades de necesidades educativas especiales.

Las necesidades educativas de los estudiantes pueden ser muy variadas aún dentro de la Educación Básica Regular y la casuística respecto a las actividades que se podrían incorporar para atender determinado nivel de aprendizaje en los estudiantes es muy diversa. Ante esto, Rodríguez (2007) expone su aporte refiriéndose a aquellas actividades de enseñanza-aprendizaje que son

diseñadas para los estudiantes que no han logrado adquirir los conocimientos trabajados, los que poseen altas capacidades, y los que no se incorporaron a tiempo al sistema educativo. La idea del autor es no tener estudiantes aburridos ya sea porque el tema les parece muy fácil o porque no entienden nada de este. Se puede identificar también que el autor no hace referencia a los estudiantes con necesidades educativas especiales por discapacidad ya que estas actividades de aprendizaje requieren de un estudio aparte.

Para las actividades de enseñanza-aprendizaje que se implementarán y desarrollarán en esta investigación se ha considerado conveniente identificarlas mediante ambas clasificaciones, por ejemplo, una actividad puede ser relacionada a la esfera cognitiva y a su vez servir de motivación.

2.2.3 Criterios de selección para las actividades de enseñanza – aprendizaje

Es tarea del docente determinar qué actividad de enseñanza-aprendizaje utilizar dependiendo de qué esfera cognitiva quiere desarrollar o en qué momento de la sesión la desea implementar. Pero hay muchos más criterios a tener en cuenta y estos se deben analizar de manera apropiada. Así pues, es importante que un docente seleccione la mejor o mejores actividades de enseñanza-aprendizaje y para ello Cooper (1999) propone filtrarlas por medio de cuatro criterios que se detallan a continuación.

- Los estudiantes.

El primer criterio que se debe tomar en cuenta para seleccionar actividades de enseñanza-aprendizaje es el nivel de estudio que se encuentran cursando los estudiantes, esto con el fin de que las actividades de enseñanza-aprendizaje se adecuen a su edad cronológica y al desarrollo de sus capacidades; todo esto referido al campo de la Educación Básica Regular. Por lo tanto, es tarea del profesor seleccionar solamente las actividades que estén dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante y eliminar aquellas muy difíciles o sencillas, ya que le puede resultar aburrido porque ya dominan el tema o porque no logran comprender para nada los conceptos. Por ejemplo, no se puede hacer sentir tontos a los adultos con actividades que no corresponden a su nivel intelectual; y del mismo modo, estudiantes de primaria se escandalizarían si se les muestra un tema de Filosofía. En resumen, es importante basarse en la edad y habilidades del grupo de educandos para la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje (Villalobos, 2003).

- El propósito de la lección.

Un segundo criterio a considerar para la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje es el propósito de la lección. Estas actividades deben reflejar el propósito al enseñar la lección, es decir, si el docente quiere desarrollar cierto desempeño en sus estudiantes, entonces debe enfocarse principalmente en lograr dicho desempeño.

Este criterio puede no cumplirse cuando al docente le parece muy atractiva dicha actividad, le gusta; pero esta actividad no es la adecuada para alcanzar la meta. Cuando pasa esto, es posible que el estudiante tenga un buen rato en clase, disfrute o se divierta pues pueden ser juegos de gran

estímulo, sin embargo, el objetivo de enseñanza-aprendizaje no se cumple; así pues, luego el docente se dará cuenta que dicha actividad ni remotamente se relaciona con la clase o con el desempeño a lograr (Villalobos, 2003). Un ejemplo sería ver un video de treinta minutos cuando el desempeño es que el estudiante indague sobre un tema; o utilizar una simple conferencia para intentar motivar a los estudiantes.

- El momento apropiado para la implementación de la actividad.

Un tercer factor a considerar es la parte o el momento de la sesión de aprendizaje en la cual es más propicio incluir cierta actividad. Así pues, ciertas actividades serán mejores para recolectar saberes previos o para motivar, por lo tanto, deberían ir en la parte inicial de la clase. Otras actividades pueden ser de más ayuda para el desarrollo de la sesión ya que, por ejemplo, facilitan la adquisición de los nuevos conocimientos. Del mismo modo se pueden seleccionar actividades para el momento del cierre de la sesión de aprendizaje, aquí se pueden incluir actividades que permitan sintetizar el tema aprendido.

En términos de Villalobos (2003) algunas actividades son útiles para ganar la atención de los estudiantes y otras para comunicar mejor la información, ambas actividades se incluirían en momentos distintos de la clase. En general, las actividades que el profesor decida implementar deben captar la atención del estudiante independientemente del momento en el que se desarrollen. Por ejemplo, contar una breve historia interesante permitirá que el estudiante se predisponga a la adquisición de conceptos e ideas nuevas.

- Los recursos.

Un último factor a tomar en cuenta para la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje son los recursos con los que dispone el docente para llevarla a cabo. Muchas veces el docente tiene ideas maravillosas para desarrollar su clase; sin embargo, estas requieren ciertos recursos los cuales pueden representar un obstáculo ya que son difíciles de conseguir o simplemente son muy caros. Por ejemplo, no es posible presentar una grabación que sea de interés para los estudiantes si la máquina de videos, proyector o pantalla están dañados o siendo utilizadas por otros docentes (Villalobos, 2003). Por lo tanto, es tarea del profesor ingeniárselas para remplazar los recursos que no puede utilizar por otros similares que cumplan la misma función, o en otro caso llegar a implementar otra actividad con distintos recursos pero que consiga el mismo propósito.

Dentro de este factor a considerar también se encuentran aspectos como el tamaño del aula, ambiente de la clase, tiempo disponible, equipo de trabajo, facilidades y ambiente de grupo (Villalobos, 2003). Estas variables pueden influir del mismo modo que las mencionadas anteriormente, pues el profesor, por causa de estas, puede llegar a modificar o eliminar ciertas actividades de su plan de clase. También es labor del profesor ingeniárselas para que el cambio de recursos no perjudique el aprendizaje de sus estudiantes.

Otra posibilidad es que el profesor cuente con todos los recursos necesarios, no obstante, carece de una buena preparación para hacer uso adecuado de estos. En tal situación, es obligación del profesor capacitarse o planificar la actividad anticipadamente para evitar pérdidas de tiempo durante el desarrollo de la actividad, ya que estos minutos pueden ser suficientes para interrumpir el aprendizaje o dificultar la enseñanza.

Un segundo aporte a tener en cuenta para la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje es el de la Subdirección de Currículo y Evaluación [INACAP] (2017) quien propone cuatro criterios a considerar, estos son:

- Criterio de coherencia.

Este criterio hace referencia a que entre el conjunto de actividades y los aprendizajes esperados debe existir una relación de congruencia. Así pues, se puede determinar que una actividad es coherente si favorece a lograr un aprendizaje significativo que tenga relación con los aprendizajes deseados, es decir, la actividad debe permitir el logro de los desempeños plasmados por el profesor.

- Criterio de secuenciación didáctica.

Para que este criterio se cumpla se debe decidir bien en qué momento de la lección se debe implementar (inicio, desarrollo o cierre), de tal modo que la actividad resulte lo más enriquecedora posible para los estudiantes. Una actividad podría ser incluida en dos momentos distintos de la sesión, pero, solo en uno de estos es donde se logra su mayor eficacia, por lo que es ahí donde se debe implementar la actividad, siempre teniendo en cuenta el propósito de la lección. Por esta razón, es tarea del docente analizar prudentemente lo que pretende lograr en cada momento de la sesión de aprendizaje junto con los beneficios que otorga cada actividad, para elaborar una adecuada secuencia didáctica que facilite el logro de los aprendizajes.

- Criterio de factibilidad.

Este criterio se refiere a la facilidad que tiene el docente de conseguir los recursos necesarios para el desarrollo de la actividad, ya sea los utilizados por él mismo o por el estudiante. Se deben tomar en consideración también factores externos como el tiempo disponible para la actividad, la cantidad de estudiantes, el clima en el caso de actividades al aire libre, entre otros factores que puedan dificultar el desarrollo de la actividad; aunque esta ya esté debidamente planteada por escrito.

- Criterio de adecuación.

En este último criterio considera si la actividad es adecuada o no a los estudiantes, por lo que se deben tomar en cuenta factores como sus saberes o experiencias previas. Durante la actividad es crucial que el estudiante participe de manera autónoma, lo que no logrará si la actividad no se adecua a su nivel de apropiación. También es importante considerar el nivel de apropiación del docente, es

decir, su experiencia que ha tenido con actividades similares a la actividad que va a desarrollar; por ejemplo, si es la primera vez que implementa la actividad es muy probable que se sienta inseguro.

Los aportes de Cooper (1999) y los de la Subdirección de Currículum y Evaluación [INACAP] (2017) respecto a los criterios para la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje son similares. Ambos autores proponen cuatro aspectos a tener en cuenta, además se puede observar la similitud entre pares de estos criterios; en la Tabla 1 se relaciona esta igualdad.

Tabla 1

Criterios para seleccionar las actividades de enseñanza-aprendizaje

Criterios según Cooper	Criterios según la Subdirección de Currículum y Evaluación [INACAP]	Similitudes
Los estudiantes.	Criterio de adecuación.	Toma en cuenta los saberes previos, experiencias previas y capacidades de los estudiantes.
El propósito de la lección.	Criterio de coherencia.	Se debe tomar en cuenta el desempeño a desarrollar y encaminar la actividad o conjunto de actividades al logro de este.
El momento apropiado para la implementación de la actividad.	Criterio de secuenciación didáctica.	Se determina en qué momento de la sesión de aprendizaje (inicio, desarrollo y cierre) la actividad tiene mejores beneficios, y es ahí donde debe ser incluida.
Los recursos.	Criterio de factibilidad.	Se deben utilizar recursos que no representen un obstáculo para la actividad, es decir, que sean fáciles de conseguir. Tomar en consideración también aspectos como el tamaño del aula, ambiente de la clase, tiempo disponible, clima, entre otros que puedan dificultar o facilitar el desarrollo de la actividad.

Nota. Esta tabla muestra una comparación entre los aportes de Cooper y la Subdirección de Currículum y Evaluación [INACAP], quienes, aunque con denominaciones distintas se refieren a los mismos criterios para la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje. Elaboración propia.

Para culminar con este apartado cabe mencionar que para la selección de actividades se deben tener en cuenta las demás actividades que se pretenden desarrollar, es decir, se insiste en que una actividad de enseñanza-aprendizaje no tiene sentido por sí sola, sino que adquiere valor como parte integrada de una sesión de aprendizaje. Los agrupamientos de las actividades serán variados y dependiente de los objetivos y del campo temático a desarrollar.

En resumen, existen distintos modos en los que la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje se pueden realizar, de tal forma que cada situación de aprendizaje presente estrategias propias de parte del profesor y desarrolle habilidades específicas en los estudiantes. Por lo tanto, una

actividad de enseñanza-aprendizaje ha sido bien seleccionada si enriquece la interacción alumno/alumno y alumno/profesor (Rodríguez, 2007).

2.2.4 Criterios para el diseño de actividades de enseñanza – aprendizaje

El diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje es un elemento pedagógico que permite una previsión elástica y dinámica para garantizar un adecuado proceso del aprendizaje escolar (Zapata y Blanco, 2014). El docente debe ser capaz de diseñar actividades de enseñanza-aprendizaje gracias a su previa formación académica; también un docente puede tomar actividades de enseñanza-aprendizaje ya diseñadas por otros especialistas de la educación, pero siempre adecuándolas a su propósito general de enseñanza lo cual lo llevará a incluir algunos cambios en su diseño. Por lo tanto, es importante delimitar ciertas características comunes que deben presentar los propósitos y la estructura de las actividades.

Un primer aporte por mencionar es el de Romero (2010) quien describe siete criterios básicos para el diseño de actividades, estos son:

- Las actividades de aprendizaje deben implicar la posibilidad de disfrutar lo aprendido: La idea es que las actividades no resulten aburridas, tediosas o monótonas para los estudiantes y se adapten a sus intereses. Los juegos y actividades lúdicas generalmente cumplen con este criterio.
- Las actividades deben promover el conocimiento del alumno con el entorno: Las actividades deben permitir que el alumno se familiarice con su entorno, relacione lo que aprende con su vida cotidiana e interprete y comprenda la realidad en la que vive. Este criterio está muy relacionado al criterio anterior, ya que al contextualizar las actividades se puede captar el interés de los estudiantes.
- Las actividades han de permitir que el alumno aprecie su grado inicial de competencia en los contenidos objeto de aprendizaje: Es importante que en el diseño de actividades se tenga en consideración los saberes previos del estudiante, y que este sea consciente de la diferencia entre lo que sabe y lo que va aprendiendo en el proceso. Esta información se obtiene gracias a la evaluación inicial y continua, las cuales permitirán que el profesor adecúe su enseñanza a lo que los estudiantes ya saben.
- Las actividades han de adaptarse al ritmo de realización y aprendizaje propio de cada alumno y alumna: En las actividades deben ser bienvenidas las dudas de los estudiantes y el profesor debe resolverlas de manera profesional; también se debe tomar en cuenta los errores que cometen los estudiantes como una oportunidad de aprender y lograr que ninguno se quede atrás. No se debe continuar exponiendo los conocimientos de los contenidos temáticos si los

estudiantes no han logrado comprender nada, pues lo que se aprenderá se debe adecuar al ritmo de cada uno.

- Las actividades han de permitir un desequilibrio en los conocimientos previos del alumnado: El estudiante debe lograr un saber objetivo de la realidad, lo cual muchas veces se aleja de lo adquirido mediante experiencias cotidianas; por lo tanto, es importante que el estudiante se cuestione sus ideas previas ya sea corrigiéndolas o comprobándolas. Se pretende pues, que el alumno cuestione la realidad o lo que sabe acerca de esta a partir de percepciones, sensaciones o experimentos; de este modo analizará lo que piensa y modificará sus planteamientos de partida logrando un conocimiento más objetivo.
- Las actividades que se proponen deben presentar una coherencia interna capaz de ser apreciada por el alumno: Este criterio es muy evidente, pues el estudiante debe comprender lo que el profesor pretende lograr con la actividad planteada; para esto es necesario que esta tenga coherencia y orden.
- Las actividades han de permitir el desarrollo de los distintos tipos de contenidos del área de una manera interrelacionada: Cuando el autor menciona contenidos del área se refiere a los conceptos, procedimientos y actitudes que estén involucradas en las actividades a realizar. Así pues, el profesor tiene que desarrollar apropiadamente los contenidos del área, aunque no necesariamente en la misma proporción.

Estos criterios se pueden considerar tanto para las actividades de manera individual como para el conjunto integrado de actividades, pues explica cómo deben ser las actividades respecto a los aprendizajes a lograr. No obstante, dichos criterios no proporcionan información sobre la estructura o un formato de estructura que debe tener cada una de las actividades de enseñanza-aprendizaje. Para esto, conviene revisar los aportes de Otero y Rodríguez (2016) quienes plantean siete pautas a seguir para diseñar actividades refiriéndose sobre todo a la estructura y organización que deberían tener estas. Estas pautas son:

- Definir el objetivo de aprendizaje: Aquí se incluye la precisión de los desempeños a desarrollar, siendo tarea del profesor identificar aspectos que quiere mejorar en los estudiantes. También se deben identificar las competencias y capacidades que se potenciarán en los estudiantes.
- Identificar el público al que va dirigido la actividad: Se debe colocar la edad de los estudiantes, además el profesor deberá tener en cuenta los saberes previos y deficiencias del grupo.
- Elegir la actividad de aprendizaje: La actividad se puede seleccionar de la documentación ya revisada por el docente e incluso utilizar referencias que ha ganado fruto de su experiencia; siempre siguiendo los criterios de selección de actividades.

- Preparación de la ficha de la actividad: Los autores proponen el uso de fichas como medios para plasmar la información que se obtiene al diseñar. En la primera ficha se plasma información general sobre la actividad a desarrollar y en la segunda se incluyen detalles sobre la actividad. Se adjuntan los dos modelos de fichas propuestos por los autores (Figuras 1 y 2).
- Elaborar la guía que describe la labor docente y la de los estudiantes: Estas son necesarias cuando las fichas no son suficientes para detallar el desarrollo de la actividad, puesto que la información necesaria es muy extensa.
- Diseñar plantillas para monitorizar las diferentes etapas del trabajo de la actividad de cada estudiante: Sirven para controlar las entregas previas a la entrega final, en el caso de que la actividad así lo requiera. Estas servirán para medir el desarrollo de la actividad en cuestiones de tiempo y para brindar retroalimentación a los estudiantes.
- Diseñar las rúbricas para evaluar la actividad: Es importante que el estudiante sea informado de los aspectos que el profesor evaluará en la actividad y el porcentaje correspondiente a cada uno. La evaluación deberá ser lo más objetiva posible.

Figura 1

Ficha de la actividad. Vista general

Nombre de la actividad: ¿Cuál es el nombre de la actividad?

Objetivos de la actividad: ¿Cuál es el producto previsto?

Prerrequisitos: ¿Qué deben conocer los alumnos y los profesores?

¿Quién la realiza?: La actividad es individual o en grupo.

Tiempo de preparación: ¿Cuánto tiempo le lleva al profesor diseñar la actividad? Este tiempo inicialmente puede estimarse y posterior a realizar la ficha de vista detallada, puede ajustarse.

Materiales: ¿Qué materiales utiliza el profesor en el diseño de la actividad?

Duración: ¿Qué tiempo le lleva al docente diseñar, aplicar y evaluar la actividad? ¿Qué tiempo le lleva al estudiante realizar la actividad?

Dificultades previstas: ¿Qué problemas podemos encontrar durante el desarrollo de la actividad?

Nota. Esta figura ha sido extraída del estudio realizado por Otero y Rodríguez (2016, p. 84).

Figura 2

Ficha de descripción de la actividad. Vista detallada

Nombre de la actividad: ¿Cuál es el nombre de la actividad? Carácter de la actividad: ¿Cuál es el carácter de la actividad: obligatoria u opcional? Objetivos de aprendizaje: ¿Cuáles son los objetivos temáticos que desarrolla la actividad? Competencias: ¿Cuáles son las competencias transversales que se desarrollan en la actividad? Prerrequisitos y bibliografía: ¿Qué deben conocer los alumnos y los profesores? ¿Cuál es la bibliografía asociada a los prerrequisitos? Planificada para realizar en: ¿Cuándo se inicia la actividad? Duración: ¿Cuál es el tiempo de desarrollo de cada etapa de la actividad? Este tiempo ¿pertenece a horas lectivas o corresponde a horas que no están contempladas en el horario de clase? Organización: ¿Cuál es la cantidad de estudiantes de cada grupo de trabajo? ¿Quién los elige? Espacio utilizado: ¿Cuáles son los espacios que pueden utilizar para realizar la actividad y durante cuanto tiempo pueden hacer uso de ellos? Descripción: ¿En qué consiste la actividad? Recursos para el aprendizaje: ¿Cuál es la bibliografía que debe consultarse para realizar la actividad? Entregas: ¿Cuántas entregas hay que realizar y cuando? Feedback: ¿Cuándo y cómo se realiza <i>feedback</i> de cada una de las entregas de la actividad? Evaluación: ¿Cómo se realiza la evaluación de la actividad? Resultados: ¿Cuáles son las conclusiones de haber realizado la actividad? ¿Cuáles han sido los resultados?
--

Nota. Esta figura ha sido extraída del estudio realizado por Otero y Rodríguez (2016, p. 85).

En este aporte de Otero y Rodríguez (2016) se puede apreciar un diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje mucho más específico y detallado, pues dentro de las pautas, también se incluyen formatos que guían la estructura para la elaboración y diseño de las actividades. Esto es de gran ayuda ya que permitirá al docente tener orden y una mejor organización en la presentación de las actividades, y a los estudiantes los ayudará a comprender mejor lo que el docente quiere expresar por escrito.

La Subdirección de Currículum y Evaluación [INACAP] (2017) también brinda su aporte sobre el diseño de las actividades de enseñanza-aprendizaje, el diseño se hace por cada actividad en específico; sin embargo, se rescatan las coincidencias en el diseño de cada una de las actividades propuestas, las cuales se mencionan a continuación.

- **Objetivos:** Los objetivos de la actividad deben tener claridad, estar orientados al logro de los aprendizajes esperados y tener relación con al menos un criterio de evaluación.
- **Instrucciones:** La actividad debe ser explicada a los estudiantes de manera detallada y clara, de tal modo que no haya dudas.
- **Motivación:** Se debe motivar a los alumnos a realizar un profundo análisis de la información brindada mediante actividades que sean de su interés.
- **Materiales y recursos:** Se debe preparar bien los materiales o recursos a utilizar y adecuar bien el tiempo disponible para el desarrollo de la actividad. Además, hay que tener en cuenta el espacio del aula y el ambiente del colegio.
- **Campo temático:** Se debe delimitar claramente la temática o campo temático que se abordará en la actividad. Todas las acciones de la actividad deben estar orientadas al aprendizaje del campo temático.
- **Estudiantes:** Decidir la cantidad de estudiantes que realizarán la misma actividad, además se debe tener en cuenta los saberes previos de estos para determinar la complejidad de la tarea.
- **Competencia:** Especificar la competencia o capacidades que desarrollarán los estudiantes durante la actividad.
- **Errores:** Identificar los posibles errores o dificultades que los estudiantes podrían presentar en el transcurso de la actividad y buscar alternativas de solución.
- **Producto:** Los estudiantes deben entregar un producto al final de cada actividad, esto les permitirá plasmar sus aprendizajes y por ende ser evaluados.

Se puede rescatar una estructura a seguir por parte del autor ya que usa la misma secuencia en cada actividad. Esta, expresada en una plantilla o ficha quedaría como se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Estructura de una actividad de enseñanza-aprendizaje

Nombre de la actividad	
• ¿Qué es? • ¿Qué características tiene? • ¿Cuándo es recomendable usar esta actividad? • ¿Cómo diseña el docente la actividad? • ¿Cómo se implementa? • ¿Cuáles son los roles del docente y de los estudiantes?	
Docente	Estudiantes

Nota: Si es necesario se puede agregar una tabla en la cual se especifique los aprendizajes esperados, tareas a realizar, materiales a utilizar y una descripción del producto.

Nota. Esta figura ha sido elaborada en base al estudio realizado por la Subdirección de Currículum y Evaluación [INACAP] (2017).

Un último aporte por considerar es el de Nervi (como se citó en Zapata y Blanco, 2014) quien menciona que para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje se ha de tener en cuenta los siguientes principios:

- Coherencia: El conjunto de actividades debe tener relación entre sí y apuntar todas a un mismo propósito común, de tal modo que no exista una actividad desvinculada de las demás. Su unidad dependerá del logro de los objetivos.
- Secuencia: No debe quedar nada libre, las actividades deberán estar integradas gradualmente y de manera ininterrumpida, desde la primera hasta la última.
- Elasticidad: Este principio se refiere a la flexibilidad que debe existir en las actividades o el conjunto de estas, de tal modo que se puedan introducir temas o subtemas ocasionales durante la marcha de las actividades, con el fin de enriquecer los contenidos a aprender.
- Realismo didáctico: Este principio se refiere a tener siempre presente las condiciones reales del lugar, el tiempo y el espacio; pero también tener en cuenta la disponibilidad de los recursos didácticos a utilizar. Lo diseñado debe tener una concepción realista del proceso de enseñanza-aprendizaje y de sus posibilidades.
- Precisión y objetividad: Este último principio hace referencia a la claridad que debe existir en los enunciados, los cuales deben ser objetivos y con buena sintáctica para evitar reproches. Por lo tanto, se deben evitar las ambigüedades y las dobles interpretaciones para no provocar confusión en los estudiantes.

Zapata y Blanco (2014) presenta su propuesta para organizar todo lo incluido en una actividad de enseñanza-aprendizaje, considerando los siguientes aspectos: el momento de la actividad, recursos y materiales, procesos mentales, técnicas e instrumentos de evaluación, y procedimientos y técnicas de enseñanza. Los autores elaboran dos esquemas para todos los momentos de la actividad, estos se plasman en las Tablas 2 y 3.

Tabla 2

Esquema de un diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje (Parte I)

Momento de la actividad	Recursos y materiales	Procesos mentales	Técnicas e instrumentos de evaluación
Motivación, exploración y problematización	Papelógrafos, tarjetas, plumones, cinta, tizas, pizarra, diapositivas, transparencias, videos.	Observación. Intuición. Exploración. Experimentación. Análisis. Elaboración de conjeturas.	Anecdótico. Lista de cotejo.
Procedimiento/métodos y técnicas de enseñanza			

Momento de la actividad	Recursos y materiales	Procesos mentales	Técnicas e instrumentos de evaluación
	Actividades: -Predisposición para estudiar el nuevo contenido. -Exploración de los alumnos. -Recoger los saberes previos (diagnóstico), dialogar. -Crear el conflicto cognitivo. -Presentar las capacidades u objetivos de la sesión. -Planteamiento de problemas. -Trabajar mediante juegos.		
	Técnicas: -Metaplan. -Lluvia de ideas. -Interrogatorio. -Lectura individual. -Formación de grupos y discusión en plenaria.		
	Descripción de la función del profesor y alumno en cada actividad.		
Elaboración construcción	o Notas técnicas, libros, páginas web, diapositivas, grabaciones, noticias recogidas de los medios de comunicación.	Comparación. Abstracción. Conocimiento del objeto mediante la exposición de los conceptos o procedimientos de inducción deducción o síntesis.	Mapa conceptual. Esquemas. Intervenciones orales en la pizarra. Exposiciones. Lista de cotejo. Anecdótico.
Procedimiento/métodos y técnicas de enseñanza			
	Actividades: -Explicar. -Comentar. -Exponer. -Esquematizar. -Coordinar grupos, actividades de descubrimiento. Sistematizar. -Resumir. -Presentar ejemplos y contraejemplos. -Evaluar conjeturas.		
	Técnicas: -Exposición dirigida. -Interrogatorio. -Llenado de tablas. -Discusión de plenaria. -Sistematización de la información. -Desarrollo de los contenidos.		
	Descripción de la función del profesor y alumnos en cada actividad.		

Nota. Esta tabla ha sido adaptada del estudio realizado por Zapata y Blanco (2014, pp. 67-69).

Tabla 3

Esquema de un diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje (Parte II)

Momento de la actividad	Procedimiento/métodos y técnicas de enseñanza	Recursos y materiales	Procesos mentales	Técnicas e instrumentos de evaluación
Práctico o aplicación	Actividades y técnicas: -Aclarar dudas. -Conocer a los alumnos lo más ampliamente posible (intelectual, social, afectiva y familiarmente). -Relacionar las matemáticas con otras materias y con la vida misma. -Aplicar métodos de recuperación, colaborar con el resto del equipo orientando y coordinando los trabajos en equipo. Los métodos que podemos aplicar son: -El rompecabezas. -Tándem. -Procedimientos de inducción y deducción. Descripción de la función del profesor y alumnos en cada actividad.	Talleres de problemas y ejercicios, modelos matemáticos, recursos y materiales de la zona, pizarra.	Aplicación de procesos algorítmicos. Análisis. Generalización. Aplicación de procesos heurísticos. Trasferencia del contenido a otros contextos.	Intervenciones en la pizarra mediante resolución de problemas y ejercicios, lista de cotejo y anecdotario, resolución de talleres o prácticas de problemas o ejercicios.
Cierre de la sesión	Actividades y técnicas: -Resumir presentando organizadores visuales. -Realizar la síntesis y metacognición.	Papelógrafos, plumones, pizarra, transparencias.	Síntesis y metacognición	Mapa conceptual. Intervención oral. Lista de cotejo.
Evaluación final	Actividades y técnicas: -Examen escrito. -Redacción de informes. -Mapas conceptuales. -Exámenes orales.	Cuadernos.	Procesos cognitivos descritos en las fases anteriores. Evaluación.	Examen escrito y oral, cuadernos y trabajos encomendados.
Extensión	Salidas culturales, aplicación del conocimiento a otro contexto.	Recursos y materiales de la zona.	Procesos cognitivos descritos en las fases anteriores.	Lista de cotejo y anecdotarios.

Nota. Esta tabla ha sido adaptada del estudio realizado por Zapata y Blanco (2014, pp. 69-70).

El esquema presentado por Zapata y Blanco (2014) sintetiza estrategias y métodos generales, cuyas acciones las secuencia en base a momentos. La investigación de estos autores se centra en la

formación inicial del profesorado, por lo que este esquema orienta a los estudiantes para profesor a realizar una mejor planificación.

2.2.5 Actividades de enseñanza – aprendizaje en la matemática

Ahora conviene vincular, específicamente, las actividades de enseñanza-aprendizaje y el área de matemática. La enseñanza de las matemáticas como en cualquier otra área debe estar compuesta por actividades debidamente planificadas, pero en matemática es importante que las actividades estén propuestas en contextos reales (Bishop, 2000). El hecho de contextualizar las actividades y por ende los contenidos temáticos permitirá mostrar a los estudiantes la importancia que tiene la matemática para el desarrollo de la sociedad y en la cultura, además eso servirá como fuente de motivación para el aprendizaje ya que se muestra la funcionalidad de los conceptos y procesos matemáticos.

“En matemáticas, los profesores planifican actividades con la finalidad de: recoger los conocimientos previos, realizar procesos de inducción-deducción, de desarrollo, de síntesis-resumen, de consolidación, de recuperación, de ampliación, de evaluación y actividades secuenciadas” (Zapata y Blanco, 2014, p. 79). En este sentido, las actividades de enseñanza-aprendizaje en el área de matemática pueden ser muy variadas y utilizarse para lograr diferentes propósitos de aprendizaje; pero siempre estableciendo una conexión entre los contenidos temáticos y el mundo al que pertenecen los estudiantes.

Otro aporte a tener en cuenta respecto al diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje en la matemática corresponde a Rodríguez, Ocampo y Escobar (2013) quienes mencionan que estas actividades deben pretender un mejor acercamiento entre docente y estudiante para adquirir conocimiento matemático con agrado y participativo; además de promover la integración de recursos, pedagogía y contenido a enseñar. Esto coincide y se complementa con lo mencionado por Zapata y Blanco (2014), pues ellos proponen siete objetivos que deben tener las actividades de enseñanza-aprendizaje en el área de matemática, estos son:

- Lograr una buena comunicación docente-discente que beneficie el desarrollo de la actividad, para ello se deben organizar los estímulos que favorezca la motivación de los agentes que participan del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Lograr que los contenidos temáticos sean asimilados por los estudiantes en el menor tiempo posible para el óptimo desarrollo de las capacidades.
- Jerarquizar, por dificultad, los contenidos de los saberes matemáticos; teniendo en consideración las características psicológicas y saberes previos de los estudiantes.
- Prever todas las acciones posibles de tal modo que se evite la improvisación.

- Implementar la actividad con total seguridad y firmeza, pero sin rigidez metodológica para lo cual se necesita flexibilidad.
- Estructurar de manera coherente, unitaria y clara los contenidos temáticos del área que se desarrollarán.
- Contribuir a que la tarea docente se lleve a cabo con total profesionalismo y con solvencia científica. No se debe dejar espacio para el azar.

Realizada ya la revisión bibliográfica respecto al diseño de actividades, proporciona un mejor acercamiento a la propuesta de actividades de enseñanza-aprendizaje de esta investigación tomando como referencia a todos los autores mencionados en este apartado. Sin embargo, con el fin de atender a parte del objetivo general de esta investigación, antes se debe revisar la literatura referente a los recursos didácticos.

2.3 Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática

Es mucha la cantidad de recursos didácticos que se pueden usar en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y la variedad de todos estos suele ser muy amplia. Así pues, es posible considerar como recursos didácticos a los mismos libros de textos, al cuaderno, al lápiz, a un papel, a los juegos o incluso a los dedos de la mano en el caso de que se enseñe al estudiante a contar; ya que cumplen con la condición de ayudar al alumno en su aprendizaje y al profesor en su enseñanza (Godino et al., 2003). Por ende, es importante la creatividad del docente para transformar un objeto cualquiera en algo que beneficie al proceso de enseñanza-aprendizaje, obteniendo así un recurso didáctico para el área de matemática.

2.3.1 Definición y función de los recursos didácticos

En la actualidad es muy común encontrar un gran abanico de recursos didácticos que pueden ser incluidos en las actividades de enseñanza-aprendizaje con distintos fines, los principales son motivar y ayudar a la comprensión. Pero antes de empezar a exponer las diferentes ideas sobre los recursos didácticos conviene delimitar su definición, ya que existen muchos aportes y concepciones planteadas por diversos autores. Entonces, se delimitará la definición que más se adapte al propósito de la investigación.

Primero es importante diferenciar los recursos didácticos de los materiales didácticos, los cuales, aunque estén muy relacionados, no son exactamente lo mismo. Para Valiente (2000) los materiales didácticos constituyen las formas de representación de los contenidos como dibujos, láminas y esquemas. De manera complementaria, para este autor un recurso didáctico es un acto que realiza el profesor fruto de su manejo de conocimiento para favorecer la acción de la enseñanza. Por lo tanto, el recurso didáctico no es el conocimiento, sino aquello que sirve de ayuda para la comprensión y legibilidad de los conocimientos que se quieren impartir.

En la misma línea, cabe introducir un segundo aporte plasmado en la siguiente cita, “En ocasiones los recursos didácticos se confunden con los materiales didácticos; algunas veces estos son la expresión materializada de aquellos que se utilizan como apoyo didáctico” (Zapata y Blanco, 2014, p. 92). De este modo, es válido aclarar que todo material didáctico constituye o representa un recurso didáctico, pero no viceversa. Por ejemplo, un geoplano, un tangram o una maqueta pueden actuar como recursos didácticos, aunque estén materializados.

Una vez explicada la estrecha relación y similitudes entre un material y un recurso didáctico es común encontrar autores que prefieren referirse a estos bajo una misma definición, y es válido ya que tienen muchas características en común. Se tiene en primer lugar a Zapata y Blanco (2014) quienes concluyen respecto a los recursos y materiales como “elementos didácticos, que ayudan a los alumnos a la comprensión de los contenidos y favorecen la consolidación de los aprendizajes” (p.93).

Bajo el mismo criterio, se presenta a Díaz (1996) quien se refiere de igual manera tanto a los recursos como a los materiales didácticos, tomando a ambos como todo elemento que el colegio debe tener, desde un lapicero hasta un edificio; así pues, el autor expone: “Los recursos y materiales didácticos son todo el conjunto de elementos, útiles o estrategias que el profesor utiliza, o puede utilizar como soporte, complemento o ayuda en su tarea docente” (p. 42). Por otro lado, el mismo autor, desde otra perspectiva, se refiere solamente a los recursos como aquellas estrategias que el docente utiliza para facilitar su labor, desde la organización de las sesiones hasta el modo de transmitir conocimientos. Por ende, entre ambas concepciones de este autor, es la segunda la que más se asemeja a lo que se pretende en esta investigación, ya que los recursos didácticos a utilizar no son objetos que comúnmente están presentes en el salón de clases, sino que, gracias a la tarea e ingenio del profesor sirven para facilitar la enseñanza y el aprendizaje.

Ahora se hará referencia simplemente a los llamados recursos didácticos. Conviene introducir el siguiente aporte de Godino et al. (2003) quienes denominan recurso didáctico a todo aquello que contribuya a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, que beneficie tanto al profesor en la enseñanza como al alumno en su aprendizaje. Esta definición es bastante amplia ya que hay demasiados factores, concretos y abstractos, que influyen positivamente en el proceso de aprendizaje; por ello, se considera de importancia lograr una definición más específica.

Otro aporte pertenece a Savage (2016), para este autor los recursos didácticos son propios del salón de clases, y aunque no menciona literalmente a los materiales didácticos, estos están implícitos en sus líneas.

Los recursos del salón de clases pueden tomar muchas formas, mismas que incluyen artículos específicos para las materias, como instrumentos musicales o dispositivos de medición científica, o tecnologías genéricas como el pizarrón blanco interactivo o simples lápices de colores. Cualquier forma que tomen, es crucial que considere cuidadosamente tanto su

elección de recursos para una lección, como el modo en que los usarán los estudiantes para alcanzar los objetivos y productos de aprendizaje particulares que ha planeado. (p. 68)

Por ello, cuando se realiza una comparación y un contraste entre los aportes de Savage (2016), Zapata y Blanco (2014) y los de Valiente (2000), aparecen similitudes al considerar los materiales didácticos como la representación física de los recursos didácticos. Entonces, un recurso didáctico puede ser algo abstracto como algún método o técnica, y algo material como algún instrumento, artefacto, etc. Esto ocasiona que la gama de recursos didácticos sea demasiado amplia y que algunos sean más obvios de identificar o más fáciles de utilizar que otros. Por su lado, un material didáctico es algo concreto y tangible; o, en otras palabras, la representación física del recurso didáctico que se incluye en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Revisados ya los aportes de diferentes autores, se puede concluir que un objeto o medio no es considerado un recurso didáctico por sí solo, sino que, adquiere valor cuando se incluye en una sesión de aprendizaje y dicho valor dependerá del uso que el profesional de la educación le pueda proporcionar. Por ende, para lograr introducir un objeto como recurso didáctico es necesaria una preparación previa y una planificación por parte del maestro de las acciones que se realizará con este, de tal modo que al introducirlos enriquezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que si lo entorpecen no serían considerados recursos didácticos. En este sentido, se define recurso didáctico como aquel objeto o medio que puede ser introducido en una sesión de aprendizaje, previa planificación, con la finalidad de facilitar la comprensión, legibilidad y consolidación de los conocimientos.

Conviene ahora analizar concretamente la función e importancia de los recursos didácticos. Para ello, cabe realizar la siguiente interrogante: ¿Es posible desarrollar una clase sin recursos didácticos? Si la respuesta es afirmativa, entonces la importancia de estos se reduciría; sin embargo, no es el caso. Incluso si el docente decide no usar objeto alguno y su clase es meramente expositiva; está usando su voz, las palabras que escoge e incluso la mímica empleada como recursos para lograr que sus estudiantes aprendan.

La importancia de los recursos didácticos en la matemática no es un factor que se reconoce recientemente, pues esto radica desde hace ya varios años. En España y otros países existen propuestas de reforma al currículo del área de matemática apoyadas por instituciones como la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), donde es casi obligatorio el uso de recursos didácticos tales como el geoplano, tangram, fichas, etc. Las propuestas planteadas en aquel entonces eran apoyadas por el argumento de que los materiales manipulativos ayudaban a los niños a comprender las ideas matemáticas mediante aplicaciones al mundo real (Godino et al., 2003). Entonces, es evidente que incluir recursos didácticos en el salón de clase tiene muchos beneficios en el proceso de enseñanza-aprendizaje, mejorando la acción docente a la vez que estimulan los aprendizajes, pues

facilitan las condiciones necesarias para que el estudiante obtenga el mayor provecho de las actividades programadas por el profesor (Díaz, 1996; Savage, 2016).

Corbalán (2011) expone la importancia de integrar diversos recursos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, exponiendo:

Hay que poner en cuestión el papel del profesor y afrontar la realidad con el espíritu de que los nuevos recursos disponibles, bien utilizados, pueden servir para potenciar la comunicación en el aula, entre profesor y alumnos y entre éstos entre sí. (p. 54)

De lo mencionado se puede rescatar que el arsenal de recursos didácticos disponibles para ser utilizados por el profesor es muy amplio; sin embargo, su función e importancia decaen drásticamente si no son bien utilizados. Por lo tanto, si el docente no está bien preparado se trunca la comunicación entre profesor y alumno generando consecuencias graves a los aprendizajes.

Un docente no puede limitarse a utilizar siempre los mismos recursos didácticos, ya que existe una inmensa variedad de campos temáticos en la matemática y un gran abanico de recursos disponibles que se pueden incluir en determinados momentos. De este modo, se hace notoria la importancia de la siguiente cita: “Los recursos constituyen un elemento esencial para la tarea docente. El profesorado necesita disponer de recursos de distinto tipo, y entre ellos los denominados materiales curriculares” (Pérez, 2010, p. 1).

Respecto a la funcionalidad de los recursos didácticos se recogen los aportes de Díaz (1996) y Pérez (2010). Estos autores, en sus escritos, enlistan una serie de funciones que deben cumplir los recursos didácticos. Se han contrastado los aportes y encontrado similitudes para proponer la siguiente lista que se puede tomar en cuenta para el área de matemática.

- Proporcionar información: Un recurso didáctico está muy vinculado al campo temático que los estudiantes deben aprender, por lo que les debe otorgar información sobre los conocimientos a adquirir.
- Contextualizar los conocimientos: Los recursos didácticos constituyen un medio entre el contenido temático y la realidad, por lo que guían al alumno a aplicar lo aprendido pudiendo incluso adquirir nuevos conocimientos.
- Motivar: Se debe captar el interés del aprendiz, por lo que un recurso didáctico debe resultar atractivo para los estudiantes y motivarlos a aprender.
- Facilitar la tarea docente: Un recurso debe facilitar aspectos como la evaluación, programación, registro de datos, enseñanza, entre otros. Por ningún motivo debe representar un obstáculo para el profesor.
- Ejercitar habilidades: Se deben estimular las habilidades intelectuales, de tal modo que se apunte al desarrollo de capacidades y competencias.

En resumen, los recursos didácticos cumplen una gran función y su importancia es aún mayor respecto al logro de los aprendizajes si el docente que los utiliza está bien preparado profesionalmente. Además, los recursos didácticos deben propiciar la enseñanza de los contenidos temáticos y posibilitar las actividades de enseñanza-aprendizaje.

2.3.2 Clasificación de los recursos didácticos

Es conveniente establecer una clasificación para los recursos didácticos, con el fin de poder representar todos estos de manera ordenada. Por ello, en este apartado se recoge específicamente los aportes de Godino et al. (2003) quienes plantean que existen principalmente dos tipos de recursos didácticos. Los primeros ayudan al estudio y los segundos que comprenden los materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático, frecuentemente utilizados por los estudiantes en el salón de clase. A continuación, se explican estos dos tipos de recursos didácticos.

2.3.2.1 Recursos de ayudas al estudio. A este tipo de recursos pertenecen aquellos que asumen parte de la función del profesor tanto para la organización de contenidos como para la presentación de problemas o conceptos (Godino et al., 2003). Los autores resaltan dos puntos que permiten explicar mejor los recursos de ayudas al estudio.

- Los libros de texto y apuntes.

El libro de texto es el recurso más común en la enseñanza de cualquier tema, y junto a estos se incluye cualquier material que conserve y trasmita el conocimiento de manera formal; por ejemplo, módulos y separatas. El fin de estos recursos es proporcionar al estudiante una referencia informativa a la cual acudir cuando quiera recordar una definición o propiedad (Godino et al., 2003). Además, estos autores exponen que el conocimiento matemático sufre un cambio para ser adaptado como objeto de enseñanza, mediante un proceso denominado trasposición didáctica. Por ello, es necesario que todo campo temático que se pretenda plasmar en los libros de textos, módulos o separatas hayan pasado por la trasposición didáctica para facilitar la comprensión de los estudiantes.

Los libros de texto suponen un gran esfuerzo de síntesis, planificación, estructuración y acomodación de conocimientos (Rico, 1990). Esto implica que no todos estos recursos están bien elaborados y que existen unos mejores que otros. Ante este problema, Godino et al. (2003) plantea que es importante el sentido crítico y el adecuado uso que el docente tenga al momento de utilizar un libro de texto ya que estos, además de ser agradables para el lector, deben de contener ejercicios y problemas idóneos, significativos y sin sesgos.

- Las tareas matemáticas y situaciones didácticas entendidas como recurso.

Las tareas y situaciones didácticas sirven para que el estudiante dote de significado a los conceptos matemáticos, y de manera general son un recurso que el profesor puede controlar con facilidad (Godino et al., 2003). Los autores también añaden que un buen aprendizaje matemático no se logra con las tareas por sí solas, sino que estas deben formar parte de algo más general y complejo,

es decir, de la secuenciación de situaciones didácticas. Así pues, las tareas asignadas por el profesor pueden tomar distintas formas, desde plantear un ejemplo hasta resolver algún problema, y estas sirven generalmente para que el estudiante compruebe o ponga en práctica sus conocimientos. Por otro lado, las situaciones didácticas son de ayuda para el docente ya que facilitan la exposición de los conceptos, y para los estudiantes porque estimula la comprensión de lo que se pretende aprender.

Estos dos aspectos se mezclan de tal forma que en los libros de texto es muy común encontrar múltiples situaciones didácticas, que consisten en presentar ejemplos reales antes o después de exponer un concepto; esto con la intención de brindar soporte a los estudiantes ya que seguidamente se le asigna una tarea, la misma que puede ser planteada de diversa manera.

2.3.2.2 Materiales manipulativos de ayuda para el razonamiento matemático. Pertenecen a este tipo de recursos los “Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc., que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático” (Godino et al., 2003, p. 128). Nótese que en esta clasificación ya se habla de materiales puesto que los recursos didácticos han sido representados por medio de objetos físicos o medios manipulables; de este modo, se resalta nuevamente la relación existente entre material y recurso didáctico que se planteó en líneas anteriores. Dentro de este tipo de recursos se presentan dos grupos.

- Manipulativos tangibles.

En este grupo se incluyen los materiales que permitan emplear la percepción tátil. Estos materiales también pueden desempeñar funciones simbólicas. Algunos ejemplos son las escuadras, canicas, balanzas, compás, etc. (Godino et al., 2003). Estos autores ponen de ejemplo la situación planteada por Resnick y Ford (1991) en la que una niña de nueve años aprende a restar utilizando como material manipulativo tangible los bloques de base diez de Dienes; estos materiales le permiten a la niña concretar las manipulaciones simbólicas que antes realizaba pero que no les atribuía significado.

- Manipulativos gráficos-textuales-verbales.

En este grupo se incluyen los materiales que permiten la participación de “la percepción visual y/o auditiva; gráficas, símbolos, tablas, etc.” (Godino et al., 2003, p. 132). Toda esta variedad de materiales es considerada manipulativa ya que es posible actuar sobre estos. En términos de los autores, estos son instrumentos de trabajo matemático que sirven para expresar técnicas y conceptos matemáticos. El ejemplo que proponen estos autores es el uso de Excel para analizar un conjunto de datos, así el estudiante puede introducirlos y representarlos mediante diversas tablas y gráficos de manera rápida. Esto le permitirá comparar y visualizar mejor distintos aspectos del análisis de los datos tales como las frecuencias, medidas de tendencia central, entre otros.

Los materiales manipulativos pueden ser vistos como puentes que conectan los objetos matemáticos con la realidad. Esto se da gracias a que en la actividad matemática se realizan interpretaciones abstractas, modelizaciones, simplificaciones e idealizaciones de objetos, sistemas o procesos que surgen de la realidad (Godino et al., 2003). Lo mencionado es muy importante para este estudio, ya que a lo largo de la historia el hombre ha utilizado instrumentos que ha podido manipular para enfrentarse a situaciones cotidianas que suponen la resolución de un problema matemático. De esta forma, esos instrumentos han vinculado el saber matemático de los humanos con su realidad, para lo cual se ha realizado procesos que cada vez han ido adquiriendo una mayor formalización.

Por último, cabe mencionar la relación de los materiales manipulativos con las situaciones didácticas. Para ello se recogen nuevamente los aportes de Godino et al. (2003) quienes mencionan que “El uso del material debe permitir el planteamiento de problemas significativos para los estudiantes, que puedan ser asumidos por ellos, que sean apropiados a su nivel e intereses, y pongan en juego los conceptos, procedimientos y actitudes buscadas” (p. 140). De lo último, se rescata la importancia del adecuado uso que se le dé al material para lograr un aprendizaje significativo mediante la solución de problemas. Por lo tanto, una buena propuesta de enseñanza debe generar situaciones de aprendizaje en donde el estudiante tenga que usar material manipulativo para resolver un problema de la realidad. Sin embargo, es posible que el material sea utilizado de manera inapropiada ya que ningún material ofrece una experiencia matemática por sí mismo. Por ello, es necesario una situación didáctica integral que atienda a la práctica y a la teoría de los conocimientos matemáticos (Godino et al., 2003).

2.3.3 Recursos manipulativos tangibles

Como se ha venido mencionando a lo largo del planeamiento de la investigación, este estudio incluirá en su propuesta de actividades de enseñanza-aprendizaje principalmente el uso de tres recursos didácticos: el gnomon, el clinómetro y los espejos. Si se identifican estos recursos didácticos dentro de la clasificación que se está tomando en cuenta, entonces pertenecen al grupo de recursos manipulativos tangibles. Además, por su relevancia en la investigación conviene dedicarle un espacio a cada uno de estos tres recursos, pero no sin antes comentar sobre el aprendizaje que se logra fuera del salón de clases, ya que está muy vinculado al modo en que se usarán estos recursos.

Existen sitios alternativos donde se puede enseñar y aprender fuera del típico salón de clase y que incluso se pueden vincular con experiencias más amplias en beneficio de los estudiantes (Savage, 2016). Estos sitios alternativos pueden ser diversos, tales como el hogar del estudiante, un lugar remoto y fuera del colegio, e incluso el patio de la escuela; pero siempre se debe cumplir que haya un aumento en el logro de los aprendizajes que justifique el dejar de lado el salón de clase. Para la presente investigación, dicho sitio alternativo será el patio de la escuela; lugar que, aunque puede no ser tan atractivo como una excursión a un lugar lejano, sí puede resultar igual o más gratificante si se

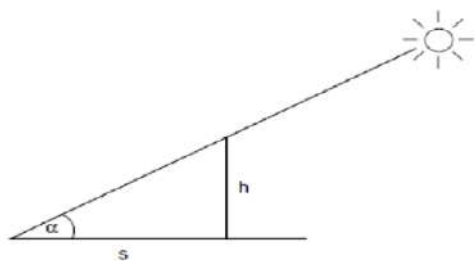
explora con imaginación; sin mencionar que resulta menos demandante que una excursión en términos de organización, tiempo y dinero.

Sin más preámbulos, se describirán cada uno de los tres principales recursos didácticos que se incluirán en la propuesta de actividades de enseñanza-aprendizaje y cuyo uso se propone que sea fuera del salón de clase.

2.3.3.1 El gnomon. Primeramente, conviene definir este recurso didáctico pues se suele confundir con otros instrumentos. Así pues, el gnomon consiste en una varilla que se utiliza para calcular la hora a partir de la medida de la longitud de su sombra proyectada en el suelo, el método que implica este instrumento era empleado por los antiguos griegos y fue recibido de los babilonios (Maor, 1998, citado en Mateus, 2013). Abonia y Miranda (2017) dan una definición similar y consideran el gnomon como una “barra posicionada de forma vertical y perpendicular sobre la superficie que servirá para proyectar la sombra” (p. 145). Se rescata que es un objeto que sirve para medir o realizar cálculos en base a la sombra que proyecta, y que ha sido utilizado desde la antigüedad. Por lo tanto, la definición que se tomará en cuenta en este estudio es: el gnomon es un objeto en forma de varilla posicionada vertical y perpendicularmente sobre el suelo, utilizado para realizar mediciones a partir de la sombra que proyecta (Figura 4).

Figura 4

Representación de la proyección de la sombra “s” de un gnomon de altura “h”



Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Maor (1998, citado en Mateus, 2013).

Cabe mencionar que conseguir este material no es complicado, pues el docente no va a buscar exactamente una varilla, sino que puede utilizar objetos alargados que cumplan con las siguientes características:

- No debe ser traslúcido, ya que debe proyectar una sombra lo suficientemente visible.
- Que sea rígido, pues sería un inconveniente que este se tuerza o se rompa cuando sea utilizado.
- Que tenga grosor adecuado. De preferencia que sea de forma cilíndrica cuyo radio de la base mida entre 1cm y 3cm. Un palo de escoba sería una buena opción.

- Su altura debe ser adecuada. No debe ser muy pequeño ya que puede haber mayor margen de error al momento de medir la sombra; y que no sea muy largo para que sea manejable por el estudiante. Se recomienda alturas aproximadas al metro.

Se brinda al docente las siguientes recomendaciones que debe tener en cuenta al utilizar este material en sus actividades de enseñanza-aprendizaje. Estas son:

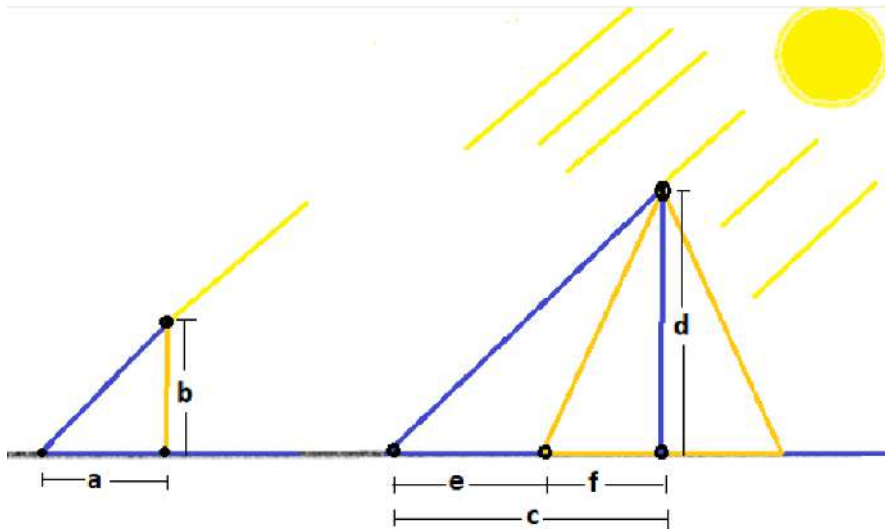
- La actividad se debe realizar en grupos, preferiblemente de 3 a 5 integrantes, pues hay distintas tareas a realizar tales como, manipular el instrumento, medir sombras y tomar datos.
- No realizar la actividad en una hora cercana al mediodía ya que la sombra que proyecte el gnomon sería muy pequeña lo que ocasionaría mayor margen de error. Tampoco realizarlas en el amanecer o anochecer ya que la sombra sería demasiado larga. Lo recomendable sería dos o tres horas antes o después del mediodía.
- Un inconveniente podría ser el clima, por lo que la actividad se debe realizar en un día no nublado, de preferencia un día despejado pues lo que se quiere es sol para obtener sombras.
- Asegurarse de que el objeto esté bien plantado en la superficie y formando un ángulo perpendicular, ya que si el objeto está un poco inclinado se presentarán errores al realizar los cálculos.

Además del trabajo fuera del aula, hay otros factores que pueden resultar motivadores para el estudiante, uno de estos es la historia de la matemática involucrada en el uso práctico de este recurso didáctico. A continuación, se hará una breve descripción de algunos aspectos históricos que se pueden mencionar a los estudiantes cuando se pretenda usar el gnomon; el objetivo es que el estudiante comprenda la utilidad que ha tenido este material y cómo ha ayudado a las personas a resolver problemas aparentemente complicados; resaltando su carácter práctico.

Un primer personaje por mencionar es Thales de Mileto quien contribuyó en los conceptos de ángulo y razón mediante el cálculo de alturas de las pirámides de Giza. Para ello, comparó las sombras de las pirámides con las de un gnomon de altura conocida en un mismo instante, utilizando las relaciones de semejanza en triángulos rectángulos (Abonia y Miranda, 2017; Maor, 1998; Mateus, 2013). El procedimiento que realizó Thales de Mileto para calcular la altura de las pirámides es detallado por Maor (1998) y Mateus (2013). Para explicarlo se usa la Figura 5.

Figura 5

Proyección de sombras: $a / b = c / d$, donde $c = e + f$



Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Mateus (2013).

Así pues, los valores que Thales conocía en un principio eran: b (altura del gnomon), a (distancia de la sombra proyectada por el gnomon), e (distancia de la sombra proyectada por la pirámide) y f (distancia del pie de la altura de la pirámide hasta su base). Posteriormente conoce el valor $c = e + f$, para obtener la medida de los catetos del par de triángulos rectángulos semejantes; y se plantea la siguiente ecuación con una incógnita: $a/b = c/d$ se despeja la incógnita d y queda:

$$d = \frac{bc}{a}$$

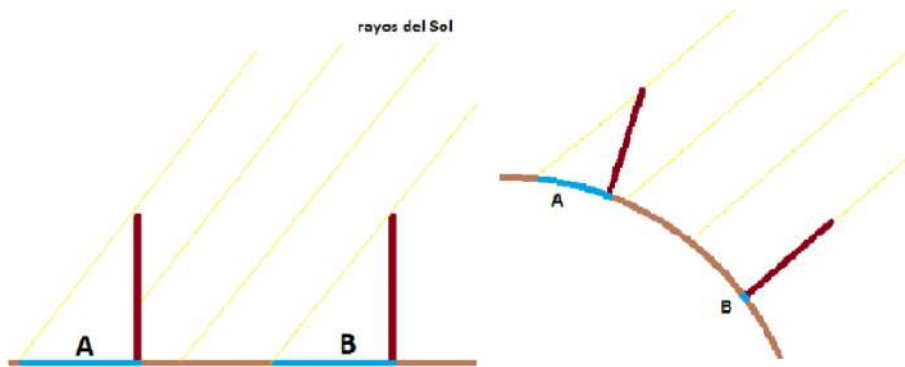
El trabajo de Thales de Mileto sirvió para épocas posteriores en las que se desarrolla por completo conceptos como razón trigonométrica y función trigonométrica. Cabe mencionar que estos dos conceptos aparecían intuitivamente en los estudios de Thales sobre triángulos rectángulos, ángulo, razón y proporción (Mateus, 2013). Sin embargo, el gnomon era principalmente utilizado por Thales como instrumento para calcular la hora; de hecho, Thales estaba más interesado en usar el gnomon como un controlador del tiempo gracias a la variación de la sombra a lo largo del día (Maor, 1998). Es decir, otro uso que se le puede dar al gnomon es como un reloj de sol.

Otro personaje que utilizó el gnomon como un reloj de sol fue Anaximandro al medir los solsticios y los equinoccios, además a él se le atribuye el introducir el uso del gnomon entre los griegos (Mateus, 2013). Los indios también utilizaron el gnomon; pues como indica Abonia y Miranda (2017) “La relación entre el álgebra, la geometría y la trigonometría fue posible gracias a la función seno y al estudio hecho por los indios de las sombras proyectadas por un gnomon” (p.64). Se evidencia pues que el uso de este instrumento se ha transmitido entre las diferentes culturas y ha perdurado a lo largo del tiempo.

Una última mención que se hará sobre el uso del gnomon tiene como protagonista a Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C). Este matemático pudo calcular las dimensiones de la tierra haciendo uso del gnomon y sus conocimientos de trigonometría; además se le reconoce por la gran precisión de sus resultados. Esta historia se enmarca en dos ciudades, Alejandría y Siena (la primera al norte de la segunda, y ambas ubicadas casi en el mismo meridiano). Eratóstenes notó que al mediodía en Siena las cosas no proyectaban sus sombras en el piso, además observó que la luz del sol caía directamente a la profundidad de un pozo. Sin embargo, en Alejandría las cosas sí proyectaban sombras y esta era significativa. La explicación que se planteó Eratóstenes era que la tierra era curva o esférica, ya que si la tierra era plana las sombras en todo lugar serían proyectadas bajo el mismo ángulo (Mateus, 2013). Esto se plasma en la Figura 6.

Figura 6

Ciudades de Alejandría y Siena

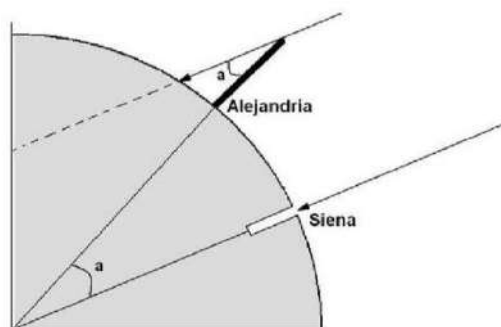


Nota. A y B representan las ciudades de Alejandría y Siena respectivamente. La imagen de la izquierda representa un modelo plano de la tierra; la imagen de la derecha representa un modelo esférico de la tierra (Mateus, 2013).

Eratóstenes pensó que al estar el sol tan alejado de la tierra entonces sus rayos llegarían de forma paralela. Además, proyectó el gnomon y el pozo hacia el centro de la tierra, obteniendo un gráfico como se plasma en la Figura 7. En la misma figura se observa también que los rayos de sol y el gnomon de Alejandría forman un ángulo “a” que equivale a $7,2^\circ$.

Figura 7

Ángulo formado por los rayos de sol con el gnomon de Alejandría y el pozo de Siena



Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Mateus (2013, p. 19).

Para que Eratóstenes pueda plantear sus ecuaciones necesitaba conocer la distancia entre las ciudades, se dice que para ello contrató a un viajero. Cabe mencionar que en aquella época las mediciones de longitud se realizaron en términos de estadios. Así pues, se calculó que la distancia entre ambas ciudades era de 5000 estadios. Lo que se planteó Eratóstenes fue: el ángulo $a = 7,2^\circ$ es al ángulo total $t = 360^\circ$, como la longitud del arco $d = 5000 \text{ estadios}$ es a la longitud de la circunferencia terrestre p (Mateus, 2013).

$$\begin{aligned} \frac{a}{t} &= \frac{d}{p} \\ 7,2^\circ \cdot p &= 360^\circ \cdot 5000 \text{ estadios} \\ p &= 250000 \text{ estadios} \end{aligned}$$

Con ese dato, fácilmente se puede calcular el radio con la expresión: $p = 2\pi r$

$$\begin{aligned} r &= 250000 \text{ estadios} / 2\pi \\ r &= 39788,74 \text{ estadios} \end{aligned}$$

Si se quiere transformar a metros se tiene que multiplicar por 185 ya que un estadio equivalía a 185 metros. Así pues, el valor del radio sería de 7360916 metros valor no muy alejado del real (Mateus, 2013).

Es posible reproducir lo hecho por Eratóstenes para enseñárselo a los estudiantes, para ello se recomienda revisar el estudio realizado por Abonia y Miranda (2017), en el cual se plantea una actividad con la finalidad de favorecer el aprendizaje de las razones trigonométricas. En la actividad que los estudiantes desarrollaron tienen que recrear el problema de Eratóstenes usando objetos matemáticos para determinar el radio de la tierra.

2.3.3.2 El clinómetro. Primero se elaborará la definición de este material ya que es común referirse a este con distintos nombres, además existen otros instrumentos muy parecidos. Por ejemplo, Morales y García (2015) se refieren al clinómetro como teodolito rudimentario o goniómetro el cual fue utilizado como un instrumento de medición angular, y es esta función la que caracteriza a

este instrumento. Entonces se define al clinómetro como un instrumento cuya función es medir ángulos de inclinación respecto a un objeto en relación con la horizontal o la vertical (Pinto et al., 2011).

Conviene ahora diferenciar un teodolito, un goniómetro y un clinómetro. Estos instrumentos no difieren en su función principal que es calcular la medida de ángulos, sin embargo, las formas o características de estos instrumentos es muy variada. Por un lado, se tiene al teodolito que puede medir distancias gracias a la taquimetría y es un aparato muy complejo; por otro lado, está el goniómetro simple que es el que se parece más al clinómetro, pero también existe el goniómetro universal que es el más complejo. Sin embargo, se puede hacer referencia a los tres instrumentos indistintamente cuando estos son adaptados; es el caso de Morales y García (2015) quienes agregan al sustantivo “teodolito” el adjetivo de “rudimentario” para hacer referencia a que la elaboración de dicho instrumento se centrará únicamente en lo más básico, en este caso, medir ángulos.

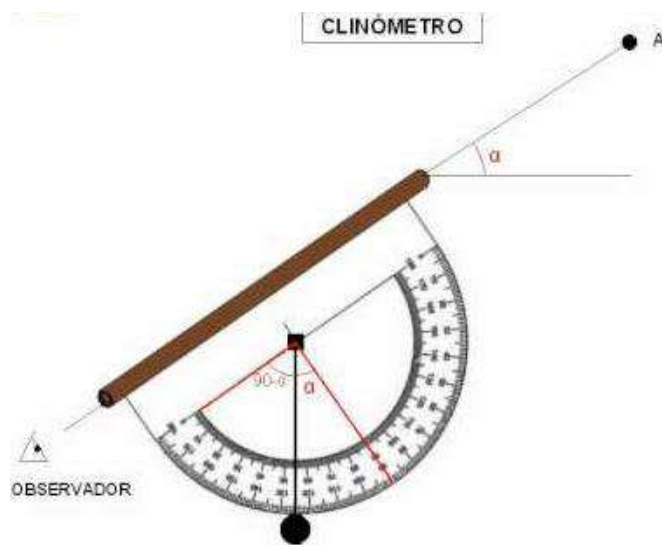
Existen clinómetros digitales, pero no se emplearán para las actividades de enseñanza-aprendizaje ya que el proceso de solucionar problemas de altura o distancia debe resultar sencillo y económico para el estudiante, tanto que ellos mismos pueden elaborar un clinómetro con materiales que pueden encontrar en casa. Para la construcción de dicho instrumento se necesitan los siguientes materiales:

- Un transportador de preferencia circular (de 360°), o uno de 180° .
- Un pedazo de hilo o cuerda, la medida de esta debe ser de entre 5 a 10 centímetros más que el radio del transportador circular.
- Un objeto pequeño que pueda ser amarrado por la cuerda; por ejemplo, una tuerca.
- Un pedazo de sorbete, pitillo plástico o tubo pequeño de lapicero; la medida de este objeto debe ser igual o, como máximo, un par de centímetros mayor que la medida del diámetro del transportador circular.

A continuación, se muestra en la Figura 8 la unión de estos materiales para construir un clinómetro sencillo.

Figura 8

Clinómetro Sencillo o Rudimentario



Nota. Esta figura ha sido recuperada de Santiago Uribe (2011).

Los materiales mencionados son los suficientes para realizar un clinómetro casero o rudimentario, no obstante, este instrumento se puede mejorar si el estudiante lo prefiere. Es el caso del clinómetro propuesto en el estudio hecho por Pinto et al. (2011) donde se le agrega una base rectangular y un listón de madera con el fin de fijarlo; así mismo, se le añade un nivel de burbuja para nivelar dicho instrumento (Figura 9). La intención de colocar estos adicionales consiste en mejorar la recolección de datos para que estos sean más precisos y así disminuir el margen de error.

Figura 9

Partes del clinómetro



Nota: Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Pinto et al. (2011, p. 24).

Cabe mencionar la importancia de que el docente analice las posibilidades que los estudiantes tienen de acceder a los materiales necesarios para la elaboración del clinómetro; sin embargo, siempre se debe aspirar a obtener un instrumento lo más preciso posible.

Ahora se darán algunas recomendaciones que el profesor debe tener en cuenta para el éxito de las actividades de enseñanza-aprendizaje que incluyan el uso del clinómetro como recurso didáctico. Estas recomendaciones son:

- Determinar un área fuera del aula lo suficientemente amplia para trabajar. Esta área debe tener objetos cuya altura sea considerable para que los alumnos realicen cálculos con esta, y debe ser extensa para que la distancia horizontal entre el objeto cuya altura se quiere calcular y el estudiante, sea significativa.
- Determinar los objetos cuya altura se quiere conocer y los puntos en donde se ubicará el observador con el clinómetro.
- Formar grupos de trabajo antes de salir del aula, se recomienda que sean los mismos grupos que trabajan con el gnomon.
- Proporcionar a los estudiantes diversidad de problemas, variados e interesantes.
- No se debe limitar el uso del clinómetro solo para encontrar ángulos de elevación, ya que también es posible usarlos para ángulos de depresión.
- Los estudiantes deben ser quienes elaboren el propio instrumento.

Por último, no olvidar que se debe continuar motivando a los estudiantes en el uso de este instrumento y un factor a incluir es su practicidad, para lograrlo el docente debe informarse sobre la trascendencia de este objeto y los beneficios que ha tenido para el ser humano.

2.3.3.3 Los espejos. Lo que permite utilizar un espejo como recurso didáctico es la reflexión que produce este en el rayo de luz que incide sobre su superficie. Por lo tanto, para entender el funcionamiento de los espejos como instrumento conviene primero explicar lo que es la reflexión de la luz.

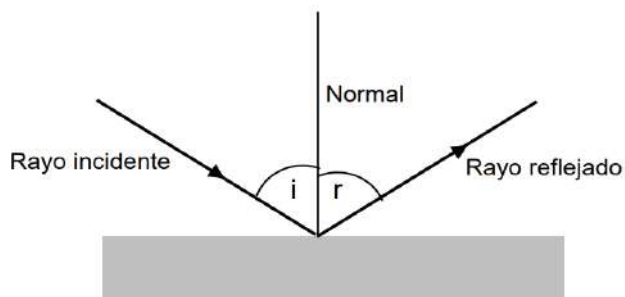
La reflexión es un fenómeno asociado a la luz, este se produce cuando un rayo de luz rebota al encontrarse con una superficie. “En la reflexión el rayo incidente y el reflejado se propagan en el mismo medio. La velocidad del rayo incidente y el reflejado es, por tanto, idéntica” (FisQuiWeb, 2016, p. 1). De la definición se rescatan tres elementos, un rayo incidente, un rayo reflejado, y la superficie; estos son visibles y podrían denominarse físicos; sin embargo, conviene agregarle tres elementos más; la normal, el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Estos seis elementos se unen para formar el fenómeno completo (Figura 10), sin embargo, se deben de cumplir ciertas leyes, denominadas “leyes de la reflexión”. Estas son dos:

- El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado pertenecen a un mismo plano.

- Los ángulos de incidencia y el ángulo de reflexión son iguales.

Figura 10

Reflexión de un rayo de luz en la superficie de un espejo



Nota: Esta figura ha sido recuperada de los aportes de FisQuiWeb (2016, p. 1).

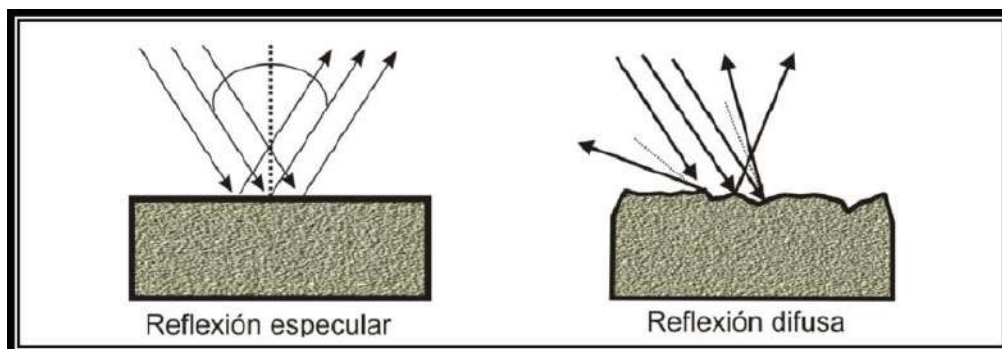
Para una mejor comprensión conviene explicar cada uno de los elementos que no son visibles en este fenómeno.

- Normal: Es una recta imaginaria perpendicular a la superficie sobre la cual cae el rayo incidente.
- Ángulo de incidencia: Es el ángulo formado entre el rayo incidente y la recta normal.
- Ángulo de reflexión: Es el ángulo formado entre el rayo reflejado y la recta normal.

Además, cabe mencionar que hay dos tipos de reflexión, la reflexión especular y la reflexión difusa (Figura 11). La diferencia entre estos dos tipos es que en el primero la superficie sobre la que inciden un conjunto de rayos de luz es plana, lisa o está pulida; por el contrario, en el segundo tipo la superficie reflectante es irregular por lo que la luz se refleja en distintas direcciones (FisQuiWeb, 2016). Entonces, es evidente que será la reflexión especular la que se tomará en cuenta para el uso de los espejos como recurso didáctico.

Figura 11

Tipos de reflexión: especular y difusa

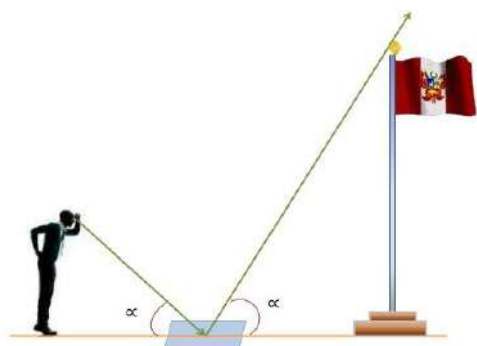


Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Ponce (s.f.).

Una vez revisada la bibliografía referida a la reflexión de la luz, se procede a introducir este fenómeno en el uso de espejos para el cálculo de alturas y distancias usando razones trigonométricas. Para ello, es necesario un observador, una superficie (espejo) y un punto observado; así pues, la luz del punto observado cae en el espejo y se refleja hacia el ojo del observador, pero como no interesa el sentido del rayo de luz se puede tomar como rayo incidente el que va desde el espejo hacia el ojo del observador y como rayo reflejado el que va desde el objeto observado hacia el espejo (Figura 12).

Figura 12

Uso del espejo como recurso



Nota. Esta figura ha sido recuperada del aporte titulado Medición de altura con espejo (2014).

Llámesse “d” a la distancia horizontal que separa el ojo del observador y el punto donde se refleja el rayo de luz, “D” a la distancia horizontal que separa este último punto con el punto que quiere ser observado, “h” es la altura a la que se encuentra el ojo del observador, y “H” es la altura a la que se encuentra el punto que quiere ser observado. Se forman así dos triángulos semejantes y las cuatro longitudes mencionadas vienen a ser sus catetos. Entonces se plantea la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{D} = \frac{h}{H}$$

Explicado ya el uso de los espejos, cabe dar algunas recomendaciones para evitar inconvenientes durante las actividades de enseñanza-aprendizaje que incluyen a este recurso didáctico. Estas recomendaciones son:

- El espejo no debe ser demasiado amplio para poder manipularlo con facilidad, se recomienda que sea de aproximadamente 15cm x 15cm (225cm²).
- Se debe tener cuidado con los filos del espejo ya que el estudiante se puede cortar al momento de manipularlos, se recomienda colocarles un marco protector alrededor.
- Se debe tener cuidado con la luz del sol, ya que esta incide en el espejo y se puede reflejar hacia la vista de un estudiante. De preferencia usar gafas de sol.
- Formar grupos de trabajo antes de salir del aula, se recomienda que sean los mismos grupos que trabajan con el gnomon y el clinómetro.

2.3.4 Criterios de elección y organización de los recursos didácticos

Actualmente la variedad de recursos disponibles para el docente, y en específico para el área de matemática, es demasiado amplia. Los profesionales de la educación gracias a sus investigaciones llevan a los colegios instrumentos manipulativos, nuevas tecnologías, libros de textos, entre otros, con el fin de incluirlos en las sesiones de aprendizaje. Ante esta situación, Arteaga (2006) se cuestiona sobre el adecuado uso que los docentes le están dando a todos estos recursos y materiales, o si simplemente los están acumulando en el departamento de Matemáticas con la falsa esperanza de que algún día sean bien utilizados. Frente al problema, es necesaria la adecuada preparación profesional del educador para que tenga criterio, creatividad y seguridad al momento de elegir y organizar los recursos a emplear.

Arteaga (2006) plantea la situación en la que el profesor tenga que enseñar a construir una circunferencia por medio de un dibujo. Para realizar esta acción, el docente podría usar un programa informático, un compás de pizarra, o simplemente una cuerda y una tiza. Para determinar cuál de las tres opciones utilizar como recurso, el autor explica que se deben tener en consideración distintos factores; tales como el contenido temático, las características de los alumnos y el carácter formativo de la matemática, así se podrá elegir el recurso o material que más se adecue a la situación de aprendizaje. Bajo esta idea, entonces, no se pueden elegir los recursos didácticos sin razón alguna, pues existen condiciones o criterios a tener en cuenta.

Savage (2016) también expone sus ideas sobre la importancia de escoger sabiamente los recursos en el salón de clase, para ello recomienda a los docentes cuestionar su propio pensamiento respecto a un determinado recurso y analizar las ventajas que este tiene para su trabajo. Otro aspecto que el autor propone tener en cuenta es la cuidadosa organización y preparación de los recursos del salón de clase; pues es deber del docente percatarse de que todos los recursos necesarios estén en su plan de clase, así como asegurar de que estos recursos estén bien preparados y funcionen adecuadamente.

Por otro lado, el docente debe proporcionar a los estudiantes un acceso rápido y fácil a los recursos necesarios; pues se recomienda que el movimiento de los estudiantes alrededor del salón de clases sea el mínimo, además que facilita el orden y la disciplina (Savage, 2016). Para demostrar lo dicho, este autor comparte su experiencia profesional mencionando que los inadecuados recursos y la falta de organización de estos, tiene un impacto negativo en el aprendizaje de los estudiantes e incluso puede resultar desmotivador.

Con el fin de obtener una lista de criterios de selección y organización de los recursos didácticos, se ha realizado un análisis de los aportes de Díaz (1996), Savage (2016), y principalmente los de Zapata y Blanco (2014); además estos criterios se han adaptado al área de matemática. Así pues, se mencionan los siguientes:

- Claridad y coherencia: Los recursos deben ser fáciles de entender para los estudiantes por lo que han de presentarse de manera ordenada y estructurada. Por ejemplo, si se utiliza un recurso textual estos tienen que ser legibles para el lector, además de respetar las normas ortográficas y gramaticales.
- Originalidad: Los recursos deben ser originales y creativos pero este criterio no se limita solamente a los recursos y materiales nuevos, pues también se incluyen los de mayor antigüedad si son utilizados de manera innovadora por el profesor.
- Adecuación al propósito de la lección: Los recursos seleccionados deben responder a aquello que se pretende enseñar, es decir, adecuarse a los contenidos y a los objetivos de aprendizaje. También se incluye aquí el hecho de que los recursos y materiales tengan concordancia con el nivel educativo de los estudiantes.
- Motivación y contextualización: Los recursos didácticos han de despertar el interés y la atención en los estudiantes para que permitan motivar, reforzar y consolidar los nuevos aprendizajes; el uso de las nuevas tecnologías es una gran propuesta. Ligado a la motivación está la contextualización, pues los recursos deben estar vinculados con la realidad del lugar donde serán utilizados; por ejemplo, el docente puede construir los recursos y materiales didácticos con elementos u objetos propios de la zona geográfica, e incluso invitar a los estudiantes a que los construyan.
- Brindar orientaciones: Las instrucciones para el uso de los recursos y materiales deben ser claras, y el profesor debe asegurarse de proporcionarlas todas. Además, con las orientaciones necesarias se facilita el adecuado uso de los recursos por parte del alumnado.
- Manejo del recurso por parte del docente: Los recursos deben ser bien utilizados tanto por el estudiante como por el profesor, pues si este no comprende el funcionamiento de lo que pretende emplear, menos logrará que sus estudiantes los usen de manera idónea. Por otro lado, muchas veces el docente se frustra por tanto material que ha incluido en su clase lo que puede afectar el orden y la disciplina del aula. También, el profesor debe estar listo para todas las interrogantes que su alumnado le pueda plantear referidas a los campos temáticos involucrados sin desvincular su respuesta de los recursos utilizados.
- Disponibilidad de los recursos: Se debe prever todo lo necesario para la sesión de aprendizaje, por ello, los recursos deben ser de fácil acceso para el docente y que puedan ser llevados al lugar de enseñanza. Además, se deben seleccionar aquellos recursos que realmente garanticen su utilidad práctica. Una recomendación es almacenar en el interior del salón los recursos utilizados frecuentemente.

En resumen, dada la gran cantidad de recursos para el área de matemática, se ha propuesto a los docentes siete criterios a tener en cuenta para que realicen una adecuada selección y organización de los recursos didácticos que pretenda utilizar. Por otro lado, el docente siempre puede cuestionar su propio pensamiento y el de los demás, respecto al uso de recursos gracias a su preparación profesional. La idea es enriquecer de la mejor manera las actividades de enseñanza-aprendizaje para lograr un impacto positivo en los aprendizajes.

2.4 Competencia de resolución de problemas

Para Godino et al. (2003), una de las áreas de investigación con mayor impacto en la didáctica de las matemáticas ha sido la resolución de problemas. En este apartado se llega a una definición sobre la competencia de resolución de problemas teniendo como referencia las diferentes concepciones que se tienen en la comunidad científica; así pues, se realiza un análisis del concepto haciendo un contraste con los términos capacidad, habilidad, destreza, solución de problemas, proceso, metodología, entre otros. Posteriormente, se describirán las capacidades involucradas en dicha competencia junto con algunas estrategias que el docente debe implementar para lograr un mejor nivel de desarrollo de esta.

2.4.1 Definición de competencia de resolución de problemas

A lo largo de los años, los distintos autores que han estudiado la competencia de resolución de problemas no han llegado a un consenso respecto a su definición, pues algunos investigadores consideran la resolución de problemas como una capacidad, habilidad, destreza, entre otras acepciones; incluso hay quienes usan indistintamente una acepción u otra para referirse a la resolución de problemas. Sin embargo, hay aspectos comunes entre los distintos aportes que son importantes de destacar para la educación en matemática. Por lo tanto, en este apartado se analizan dichas concepciones o definiciones para lograr establecer una que se adecue a los propósitos de esta investigación y de la propuesta pedagógica que se pretende diseñar. Por otro lado, es evidente que no entran en este estudio definiciones como las de Polya (1989) y Callejo (1998) quienes ven la resolución de problemas como una estrategia, una metodología o un proceso que establece una serie de pasos a seguir.

Para aceptar o rechazar aspectos de las diversas concepciones respecto a la competencia de resolución de problemas, es primordial definir lo que es una competencia en sí misma, y preferiblemente desde el punto de vista de la educación en el Perú. Así pues, en el Currículo Nacional de Educación Básica se expresa que “La competencia se define como una facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético” (MINEDU, 2018, p. 11). Entonces, es la competencia más amplia que una capacidad e incluso más que la suma de estas. Una competencia implica la combinación de recursos con los que cuenta la persona y supone el enfrentamiento de esta ante una situación que propicie su crecimiento y aprendizaje. Otra concepción

sobre el término competencia, muy similar y relacionada a la anterior, es la de Posada (2008) para quien, una competencia es la interrelación entre un conjunto de creencias, habilidades actitudes, aptitudes, conocimientos, valores, entre otras propias del sujeto y que le permitirán desempeñarse adecuadamente en diferentes contextos.

De la mano del concepto de competencia, está la definición de lo que es una persona competente, es decir, de una persona que tiene competencias. Cabe introducir nuevamente a MINEDU (2018) que menciona:

Ser competente supone comprender una situación que se debe afrontar y evaluar las posibilidades que se tiene para resolverla. Esto significa identificar los conocimientos y habilidades que uno posee o que están disponibles en el entorno, analizar las combinaciones más pertinentes a la situación y al propósito, para luego tomar decisiones; y ejecutar o poner en acción la combinación seleccionada. (p. 11)

Así pues, una persona competente es alguien preparada para el mundo, para enfrentar situaciones reales aprovechando sus recursos internos y los que le proporciona su entorno. El ser competente tiene bien establecido un fin específico o propósito al cual se dirige mediante la adecuada toma de decisiones y un actuar coherente. Por lo tanto, se evidencia la importancia de la educación para propiciar el desarrollo de competencias en los estudiantes, específicamente, en los estudiantes de Educación Básica.

Una vez establecida la definición de competencia y persona competente sobre las cuales se trabajará, ya es posible analizar las distintas concepciones, puntos de vista y definiciones sobre la competencia de resolución de problemas. Una primera aproximación que se debe realizar es mediante la delimitación de lo que es un problema en sí, entendido claro, desde el punto de vista de la matemática. Para ello, es conveniente citar el ejemplo de Schoenfeld (2013):

Solving a system of 100 linear equations in 100 unknowns without the use of technology might be a real challenge for me, but it is not a problem in the sense that I know how to go about getting an answer, even if it might take me a very long time and I agonize over the computations. (p.10)

En este sentido, la presencia de un verdadero problema no radica en el tiempo que se tarda en darle solución a determinada situación, sino en el esfuerzo intelectual que demanda y que conlleva a pensar en alternativas de solución ante la presencia de obstáculos. En otras palabras, el camino hacia la solución del problema se caracteriza por la presencia de obstáculos, más no debe ser un camino largo y fácil de recorrer. Lo mencionado da a entender que el problema dependerá de las capacidades del sujeto que se enfrenta a su resolución; y es aquí donde conviene introducir a Villalonga (2017) quien menciona que la resolución de problemas debe despertar en el estudiante el gusto de involucrarse en un desafío, que le permita indagar, experimentar, disfrutar del éxito y adquirir

confianza en sus capacidades. De este modo, gracias a un buen problema formulado, el estudiante se interesa y se motiva en la resolución del problema mismo.

Por lo tanto, la resolución de problemas siempre supone la existencia de una situación por resolver y de los esfuerzos de una persona por intentar darle solución, es decir, implica la interacción problema-sujeto (Fernández y Barbarán, 2017). Un sujeto puede enfrentarse a distintos tipos de problemas, y así lo constata Villalonga (2017) quien, de acuerdo con Borasi (1986) y Abrantes (1988), distingue siete tipos de problemas-ejercicio, estos son: ejercicio, ejercicio con palabras, problema para ecuacionar, problema para descubrir, problema de la vida real, situación problemática, y situación inicialmente no problemática. Según los autores, son los tres últimos los más significativos y conllevan a una práctica de la enseñanza de la matemática más interesante; por ello, deben abundar y no ser ignorados.

Es apropiado entonces, mencionar en qué consisten estos tres últimos tipos de problemas. El problema de la vida real consiste en la matematización de situaciones de contexto real, implica conocimientos extras relacionados con el contexto y no tienen una solución única. En la situación problemática el contexto es la misma matemática y necesita ser explorado para su solución; por ello, constantemente se formulan y se prueban conjeturas puesto que no tienen una única solución. En la situación inicialmente no problemática no se formula ningún problema, pero se invita a explorar un contexto determinado. Estos tres tipos son fundamentales ya que, como menciona Pinzón y Téllez (2016) “es dentro de la situación problema donde las matemáticas cobran sentido al abordar actividades cotidianas que se pueden solucionar por medio del conocimiento matemático” (p. 23).

Respecto a la resolución de un determinado problema, distintos autores exponen sus concepciones o definiciones. Una primera, es dada por Delgado (1998) quien afirma que el resolver problemas es una habilidad matemática que permite encontrar un método o vía que conduzca a la solución del problema. De este primer aporte se resalta el énfasis en encontrar una solución pues se considera un problema adecuadamente resuelto si se llega a dicha la solución después de determinado método; por otro lado, se reduce la resolución de problemas a una habilidad, mas no se le da el carácter de una competencia.

Iriarte (2011) expone su concepción respecto a la resolución de problemas matemáticos, resumiendo que esta constituye una actividad compleja e integral, tanto en sus funciones de fin y de medio para el aprendizaje, por lo que requiere la formación de sus elementos constitutivos tales como procedimientos específicos, modos de actuación y métodos de solución; a su vez, conocimientos cognitivos y metacognitivos. De este aporte, es de interés para el presente trabajo, la función de fin de la resolución de problemas, puesto que es algo que se pretende alcanzar, es decir, dicho fin sería el desarrollo de la competencia.

En el marco teórico de la evaluación PISA de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) sobre matemáticas y resolución de problemas, la noción del término competencia es fundamental, ya que responde al modelo funcional de la matemática en la escolaridad, aunque sea utilizada e interpretada de distinta manera. Así pues, en este marco del estudio PISA se encuentran términos como “Alfabetización Matemática”, “Competencia Matemática” o “Competencia de resolución de problemas” para referirse a las capacidades que permiten la formulación y resolución de problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones (OCDE, 2017; Rico, 2006). En este aporte, la resolución de problemas matemáticos ya es concebida como una competencia, aunque también es llamada de distintas maneras por su gran similitud con los otros términos mencionados.

Como es evidente, existen muchas definiciones sobre la resolución de problemas, aunque algunas más alejadas que otras respecto a lo que se definió líneas arriba como una competencia. Por su lado, la definición de Iriarte (2011) se asemeja mucho a dicha definición de competencia; pues el autor menciona que la resolución de un problema implica combinar una variedad de elementos, capacidades, conocimientos, habilidades, destrezas y conceptos adquiridos que conllevan a dar solución a determinada situación. Sin embargo, esta definición es aún muy general ya que no especifica el tipo de problema que se pretende resolver; por ello, no sería propicio considerarla por sí sola para la resolución de problemas matemáticos.

Es de conveniencia para la presente investigación delimitar la competencia de resolución de problemas dentro del ámbito de la matemática, es decir, referida a los problemas matemáticos. Un primer acercamiento tiene como autor a Flores (2018) quien explica las demandas educativas del área de matemática y su relación con la resolución de problemas, afirmando:

El Diseño Curricular Nacional plantea el desarrollo del pensamiento matemático como parte de todo un pensamiento que busca ser integral y crítico, por lo que la formación del ciudadano moderno, en el área, se orienta hacia el desarrollo y aplicación de estrategias de resolución de problemas en un mundo cultural, social, científico e intelectual. (pp. 16-17)

De esta cita, se rescata la importancia de lograr que los peruanos sean matemáticamente competentes para lograr su desarrollo personal en muchos aspectos y de este modo puedan atender por sí mismos las necesidades propias de su cotidianidad. Pero esta necesidad no es solamente peruana, y así lo refleja OCDE (2017), pues resalta el interés de que los jóvenes comprendan la matemática para desenvolverse en el mundo moderno, en la vida diaria, en contextos profesionales y otros aspectos que requieran de un razonamiento y herramientas matemáticas para ser entendidas y abordadas en su conjunto. Por ello, la OCDE usa los términos de Competencia Matemática y Competencia de Resolución de Problemas de manera indistinta; aunque le es más frecuente usar el primero.

Esta relación entre la competencia matemática y la competencia de resolución de problemas es resaltada desde la perspectiva de Villalonga (2017), para este autor la competencia de resolución de problemas es considerada como fundamental dentro de la competencia matemática. Así pues, el autor ubica a la competencia de resolución de problemas como una de las ocho sub-competencias que determinan lo que él denomina competencia matemática; y su concepción respecto a esta última la expresa del siguiente modo:

Poseer la competencia matemática significa dominar las matemáticas, en otras palabras, disponer de la capacidad de comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones distintas que tanto formen parte de las propias matemáticas como fuera de ellas, en el que las matemáticas juegan o pueden jugar un papel determinado. (Villalonga, 2017, p. 9)

Desde la concepción de este autor, la competencia matemática es diferente que la competencia de resolución de problemas, pero ambas muy vinculadas. Pues la primera hace referencia a la matemática en general, tanto teórica como práctica; esta misma competencia comprende dos grupos y la de resolución de problemas se ubica en el grupo de competencias relacionadas con la capacidad de formular y responder preguntas sobre y mediante la matemática. Específicamente, la competencia de resolución de problemas comprende el trabajar con problemas matemáticos incluyendo su formulación y resolución.

Villalonga (2017) distingue dos puntos de vista respecto a la resolución de problemas. El primero en sentido amplio, como medio a través del cual es posible conocer, aprender y profundizar la propia matemática. El segundo punto de vista hace referencia a una competencia en sí misma a través de la cual se aprende a pensar y razonar matemáticamente. Al igual que en su investigación, para efectos de este trabajo interesa el segundo; sin embargo, cabe mencionar que ambos puntos de vista están muy relacionados. De este modo, como manifiesta el mismo autor, gracias a la resolución de problemas todos los aspectos trabajados en la educación de la matemática se ponen de manifiesto y toman significado.

Hay más autores que consideran la resolución de problemas como una competencia y cuyo aporte se relaciona con los propósitos de la presente investigación. Así pues, se puede mencionar a Avila (2015) para quien la competencia de resolución de problemas en matemática supone dar solución a una situación problemática de tal modo que se evidencie la practicidad de los conocimientos matemáticos. De manera muy similar se pueden mencionar los aportes de la OCDE (2017), la cual expone que la competencia de resolución de problemas es aquella que permite al individuo desenvolverse exitosamente ante situaciones matemáticas. Estos dos últimos aportes hacen énfasis en la presencia de una situación problemática que se resuelve desde y para mejorar los conocimientos matemáticos.

Una última definición sobre la competencia de resolución de problemas, y muy acertada, corresponde a Mazzilli et al. (2016) quienes afirman:

Una de las competencias matemáticas, es la resolución de problemas la cual permite a los estudiantes desarrollar habilidades para aplicar conceptos matemáticos a situaciones cotidianas, implementar procesos de razonamiento matemático, usar eficientemente los recursos y estrategias disponibles y la capacidad lógica de reconocer patrones y similitudes que le permitirán resolver problemas en diferentes contextos. (p. 104)

Los autores destacan la resolución de problemas como una competencia matemática, cuyo desarrollo supone un incremento en los aprendizajes de la persona que se enfrenta al proceso de resolver un problema matemático asociado a un contexto específico. La definición también se adecua a lo definido previamente como competencia puesto que permiten la focalización de aspectos conceptuales.

Aunque existen diferentes posturas respecto a la resolución de problemas, unas más alejadas que otras, todas coinciden en destacar su importancia en el aprendizaje de la matemática. Esto lo resaltan Godino et al. (2003), pues ellos mencionan que la competencia de resolución de problemas es de gran importancia para lograr los objetivos educativos en el área de matemática y, lo que es clave, un aprendizaje significativo por descubrimiento.

No debemos pensar en esta actividad sólo como un contenido más del currículo matemático, sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas, y una fuente de motivación para los alumnos ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos. (Godino et al., 2003, pp. 62-63)

La importancia de esta competencia también la recalca Pinzón y Téllez (2016) pues ellos mencionan que quien posee esta competencia es capaz de realizar procesos de abstracción reflexiva de la realidad, pues el estudiante construye constantemente sus conocimientos matemáticos al armonizar sus estructuras mentales, las cuales caen en un desequilibrio después de enfrentarse a una situación problemática que necesita ser abordada desde la matemática. Por ello, es que para desarrollar la competencia de resolución de problemas en matemática es esencial un aprendizaje significativo y por descubrimiento por todas las ventajas que supone para el sujeto.

Dadas ya las condiciones necesarias y revisadas las diferentes concepciones respecto a la competencia de resolución de problemas, conviene delimitar una definición acertada a los propósitos de este trabajo. Se concluye entonces que la competencia de resolución de problemas es aquella facultad que permite utilizar un conjunto de capacidades, conocimientos y recursos matemáticos para formular, trabajar y dar solución a problemas de situaciones reales, lo que a su vez permite la mejora de las capacidades y la ampliación de los conocimientos matemáticos utilizados.

2.4.2 Capacidades involucradas en la competencia de resolución de problemas

Como se escribió líneas arriba, la relación entre una competencia y una capacidad la plantea MINEDU (2018), así pues, una competencia permite combinar un conjunto de capacidades; y estas últimas “son recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades, y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. Estas capacidades suponen operaciones menores implicadas en las competencias, que son operaciones más complejas” (p. 11). Así pues, para desarrollar una competencia es necesario desarrollar todas las capacidades involucradas en ella; además, cada capacidad supone el uso apropiado de conocimientos, habilidades y actitudes.

Como es de esperarse, la competencia de resolución de problemas también implica ciertas capacidades que se deben mejorar en conjunto para lograr un buen nivel de desarrollo de la competencia en sí. Por ello, es importante potenciar el desarrollo de dichas capacidades que involucran aspectos como interpretar, representar, formular, ejecutar y argumentar desde la matemática hacia la solución de una situación problemática contextualizada; de ahí la necesidad de mejorar en los estudiantes procesos y metodologías para la formulación y resolución de problemas (Pinzón y Téllez, 2016).

Cabe mencionar que debido al contenido temático de razones trigonométricas que se pretende abordar, las capacidades que se desarrollan, desde el punto de vista de la educación peruana, están relacionadas con la competencia que MINEDU (2018) denomina “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” y sus capacidades involucradas. Sin embargo, se ha creído conveniente tomar las capacidades que plasma MINEDU (2015) en las Rutas de Aprendizaje ya que no delimita el campo temático. Además, ambos conjuntos de capacidades consisten en lo mismo, pero las primeras están dirigidas a ciertos contenidos temáticos. Dichas capacidades presentadas en las Rutas de Aprendizaje son cuatro y se describen a continuación.

2.4.2.1 Matematiza situaciones. MINEDU (2015) define la matematización de situaciones como “la capacidad de expresar un problema, reconocido en una situación, en un modelo matemático. En su desarrollo se usa, interpreta y evalúa el modelo matemático, de acuerdo con la situación que le dio origen” (p. 29). Esta capacidad consiste en transcribir un problema de contexto real usando la matemática, de tal modo que dicha expresión o traducción permita su resolución desde la matemática. Cuando una persona resuelve una situación problemática en el área de matemática, siempre matematiza dicho problema, a pesar de que, por sus habilidades, no necesite hacerlo de manera escrita. Pero, hay que tener en cuenta, que el estudiante no puede obtener un modelo matemático de la realidad, si anteriormente no se ha matematizado el concepto involucrado o no tiene los conocimientos previos necesarios (Martínez et al., 2015).

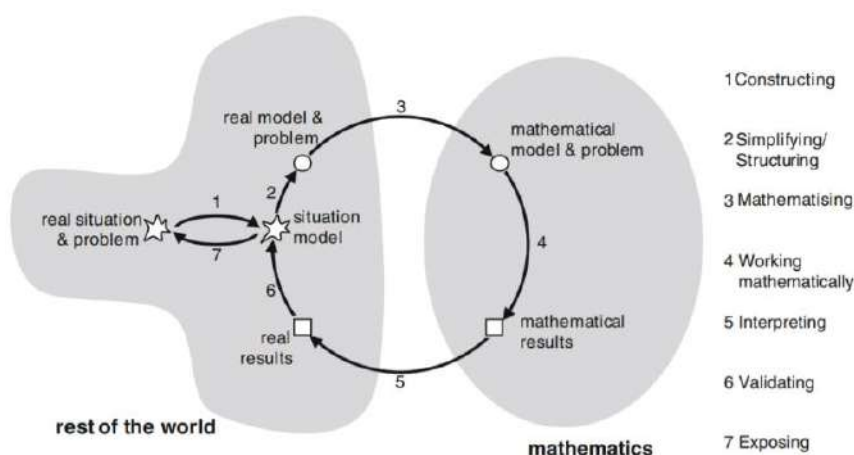
Lo más característico de esta capacidad es la creación de lo que se denomina un modelo matemático. Dicho modelo matemático es creado por el sujeto y se define como “un sistema que representa y reproduce las características de una situación del entorno” (MINEDU, 2015, p. 30). De este modo, se relaciona la matemática con las situaciones reales haciendo más fácil el trabajar, manipular, tratar y solucionar dicha situación. Es tan común realizar este proceso de matematización que gran parte de la matemática se describe a partir de dichas interpretaciones abstractas, simplificadas e idealizadas que representan una realidad (Godino et al., 2003).

Cuando el sujeto se enfrenta a una situación del mundo real tiene la necesidad de transformar dicho problema en una forma estrictamente matemática. Por lo tanto, dicha matematización viene representada por todas las actividades matemáticas implicadas en esa transformación (OCDE, 2017). Entonces se hace evidente la importancia de esta capacidad para que el estudiante inicie el proceso de resolución de un problema pues constituye un recurso esencial para la formulación matemática del problema.

El uso adecuado de esta capacidad como recurso para el éxito del desarrollo de la competencia de resolución de problemas, implica tres aspectos que se describen en MINEDU (2015), estos son:

- Construir un modelo matemático: Comprende el reconocer las características, datos, condiciones y variables de determinada situación para construir un modelo matemático que represente el comportamiento de dicha realidad.
- Usar el modelo matemático: Además de utilizar el modelo matemático en el problema desde el cual se construyó, se debe usar en nuevas situaciones que permitan su aplicabilidad para establecer conexiones con estas. De este modo, se reconocen las partes del modelo y su relevancia en situaciones similares a la ya estudiada.
- Validar el modelo matemático: Implica establecer las limitaciones y alcances del modelo creado lo cual se logra contrastando, valorando y verificando la validez del modelo. Además, el modelo se debe modificar en caso así lo requiera y eso no supone que haya estado mal, sino que dicho modelo es útil para determinadas situaciones, pero no para otras.

Lo mencionado hasta el momento, referido a esta capacidad, se puede expresar de manera gráfica en lo que Blum (2015) denomina “Seven step modelling schema” que representa el proceso de matematización de situaciones como un ciclo (Figura 13). Para este autor hay siete pasos que se pueden identificar en todo proceso de matematización, además, estos pasos son puentes que conectan seis etapas marcadas que aborda dicho proceso. Los siete pasos son: “constructing”, “simplifying”, “mathematising”, “working mathematically”, “interpreting”, “validating”, y “exposing”; y las seis etapas son: “real situation & problem”, “situation model”, “real model & problem”, “mathematical model & problem”, “mathematical results”, y “real results”.

Figura 13*Seven step modelling schema*

Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Blum (2015, p. 76).

Como se aprecia en la Figura 13 los pasos conectan las etapas, así pues, es necesario que el estudiante realice una construcción mental para pasar de la situación real a una situación modelo, del mismo modo, debe realizar una simplificación y estructuración de la situación modelo para obtener un modelo real. A partir de ello, el estudiante dejará la realidad, que se hizo cada vez más abstracta, para pasar a una etapa meramente matemática, que consiste en la obtención de un modelo matemático. Una vez obtenido el modelo tendrá que trabajarlo matemáticamente para obtener resultados matemáticos, estos últimos los interpretará para obtener resultados reales (regresa a la situación real para compararla con lo obtenido); si los resultados matemáticos coinciden con los reales entonces el modelo matemático será válido para la situación modelo. Finalmente, se constata que el modelo está acorde a la situación real inicial.

En resumen, un estudiante que matematiza situaciones es capaz de identificar datos y condiciones propias de la situación, aplicar el modelo matemático a distintas situaciones y evaluar su eficiencia. Por ello, la matematización consiste en la búsqueda de lo esencial de la realidad, es base para iniciar con la resolución de un problema y, por ende, para el desarrollo de la competencia que lo comprende.

2.4.2.2 Comunica y representa ideas matemáticas. MINEDU (2015) y Bornas y Mozo (2019) definen la comunicación y representación de ideas matemáticas como la capacidad de comprender y expresar el significado de las ideas matemáticas y la función que estas cumplen en diversas situaciones o problemas; para ello es necesario un lenguaje matemático apropiado, contar con diversas formas de representación y poder pasar de una representación a otra. Las formas de expresión pueden ser oral y/o escritas mientras que las formas de representación pueden ser con algún material concreto, símbolos, recursos TIC, gráficos, tablas, entre otros. Así pues, esta capacidad supone la comprensión

de la situación problemática sea cual sea la forma en la que se le presente (escrita, oral, concreta, etc.) para poder representarla de mejor manera, en comparación con su forma inicial. Esto se enriquece con el aporte de Aguilar (2015) quien menciona, “Tener soltura con el lenguaje y la notación matemática hace que los estudiantes puedan formar más fácilmente representaciones múltiples de ideas, expresar relaciones dentro de los sistemas de representación y así formular generalizaciones” (p. 44).

Respecto a la comunicación en sí misma, esta se da gracias a la formación de un modelo mental de la situación que permite la comprensión, clarificación y formulación del problema. El sujeto puede comunicar dicha comprensión de la situación resumiendo y presentando datos, procesos y/o resultados; así pues, la comunicación se da a lo largo de todo el proceso de resolución de un problema; aún después de hallada la solución puesto que se tienen que dar a conocer los resultados (OCDE, 2017).

Respecto a la representación en sí misma, esta consiste en plasmar una situación, en interactuar con el problema o en reformularlo. Dicha representación se logra incluyendo gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas, materiales, entre otros (OCDE, 2017); que MINEDU (2015) denomina formas de representación, y los organiza en cinco grupos:

- Representación pictórica: Dibujos e íconos.
- Representación gráfica: Tablas de conteo, listas, cuadros de doble entrada, entre otros.
- Representación simbólica: Símbolos y expresiones matemáticas.
- Representación vivencial: Acciones motrices tales como los juegos de roles y la dramatización.
- Representación con material concreto: Estos pueden ser estructurados o no estructurados.

Ejemplos de los primeros son los bloques lógicos, tangram, cubos, geoplano, cuentas, entre otros; mientras que algunos ejemplos de los segundos son las semillas, piedritas, palitos, tapas, canicas, etc.

Los estudiantes capaces de representar situaciones matemáticas logran esas cinco formas de representación, pero no se quedan ahí, sino que son capaces de pasar de una forma a otra bajo la misma situación. Es decir, un problema lo pueden representar inicialmente con una determinada forma de representación y son capaces de transitar a otra; y a partir de esa nueva forma de representación pueden transitar a otra nueva y así sucesivamente pasando por todos los caminos posibles. De manera complementaria se puede introducir los aportes de Gamarra (2017) quien expone que ciertos modos de representación son más complejos que otros, así pues, por ejemplo, la representación pictórica es más sencilla de lograr que la representación simbólica, ya que esta es más abstracta.

Un aspecto muy importante que ha aparecido en el estudio de esta capacidad es la comprensión, ya que esta contribuye a construir la representación mental inicial, identificar los

elementos de dicha representación, y a establecer relaciones entre ellos. Conviene mencionar que comprender una situación problemática consiste en relacionar los contenidos de representación de un concepto matemático, mas no implica pasar inmediatamente de una representación a dicho concepto (Aguilar, 2015). Además, esta misma autora expone que la comprensión es consecuencia de la habilidad del sujeto para trasladarse de una representación a otra y de relacionarlas entre ellas. Así pues, se evidencia que la comprensión está muy vinculada con la representación, entonces se puede decir que, si hay mejores y diversas formas de representación de una misma situación, consecuentemente, el grado de comprensión de esta será mayor.

Estas ideas sobre la comprensión en matemática también son reforzadas por Niss (2003), pues este autor expone que para poder expresarse a mayores niveles de precisión teórica y técnica es necesario poseer una variedad de registros lingüísticos referentes al contenido matemático. De manera similar ocurre con la representación, pues al comprender una situación matemática se pueden elegir y utilizar diferentes tipos de representaciones, y moverse de una a otra representación; pero sin dejar de serle fiel al contenido original.

La relación entre la comunicación y la representación la expresa MINDEU (2015) cuando menciona “Las ideas matemáticas adquieren significado cuando se usan diferentes representaciones y se es capaz de transitar de una representación a otra, de tal forma que se comprende la idea matemática y la función que cumple en diferentes situaciones” (p. 30). La comprensión de la matemática facilita las distintas formas de representación y del mismo modo, a medida que se logran distintos modos de representación, la comprensión del contenido temático se enriquece. Además, a medida que se construyen los conocimientos se va constituyendo también lo que es el lenguaje matemático fruto del manejo y uso de expresiones y símbolos matemáticos. En resumen, como indica MINEDU (2015), esta capacidad se va adquiriendo de forma gradual conforme el estudiante vaya explorando las nociones y relaciones para expresarlas inicialmente de modo coloquial. Pero a medida que el estudiante se va introduciendo e involucrando más en la situación, también va adquiriendo niveles más altos de lenguaje matemático hasta adquirir cierto grado de formalidad que le permita expresar con precisión las ideas matemáticas convencionales.

2.4.2.3 Elabora y usa estrategias. MINEDU (2015) define la elaboración y uso de estrategias como “la capacidad de planificar, ejecutar y valorar una secuencia organizada de estrategias y diversos recursos” (p. 31). Esta capacidad contribuye a la formulación y resolución de problemas matemáticos ya que permite elaborar un plan de solución, monitorear los procesos y estrategias, y reformular el plan elegido para llegar a la solución. En pocas palabras, el estudiante selecciona, adapta, combina y crea estrategias, procedimientos y recursos apuntando a la solución de la situación a la que se enfrenta.

Los procedimientos y estrategias utilizados constituyen el conocimiento heurístico del estudiante, este tipo de conocimiento es muy importante pues ha sido empleado por el ser humano para enfrentarse a distintas situaciones de tal modo que encuentre el camino más fácil para solucionarlas a través de procesos mentales, generalmente para resolver problemas de alta complejidad (Riofrío y Samaniego, 2015). De este modo, se entiende que esta capacidad facilita los caminos que tiene que recorrer el estudiante para la solución del problema, e incluso le puede mostrar cual de todos es el camino más adecuado o el más fácil.

Respecto al diseño de estrategias para resolver problemas, es una destreza que involucra una serie de procesos que guían al individuo a reconocer, formular y resolver eficazmente un problema. Esto supone la selección de un plan en el que se utilicen las matemáticas para resolver una situación problemática derivada de un contexto real (OCDE, 2017). Dicho plan tendrá éxito o será más eficaz en cuanto el estudiante tenga mejor dominio de los conocimientos matemáticos, de tal forma que ahorre esfuerzos y/o tiempo en la búsqueda de una solución.

Las estrategias diseñadas se optimizan con la incorporación de herramientas matemáticas que pueden ser físicas como instrumentos de medición y calculadoras; o pueden ser informáticas como los softwares. Sin embargo, hay que saber qué herramientas incorporar y cómo hacerlo, para ello, se debe conocer su funcionalidad y saber utilizarlas para que sea una verdadera ayuda en la resolución del problema; de lo contrario, dicha herramienta podría incluso representar un obstáculo para el estudiante (OCDE, 2017). El hecho de incorporar herramientas o recursos en el plan diseñado supone conocer las ventajas y limitaciones para el éxito de la tarea, no se debe forzar el uso de herramientas dentro de un plan que no le compete; sin embargo, si tanto la estrategia como la herramienta se complementan de manera idónea, se potenciará el logro de los aprendizajes.

Las estrategias junto con sus herramientas incorporadas son acciones conscientes e intencionales que guían la resolución de un problema matemático propio de un contexto; y en resumen implica tres aspectos según MINEDU (2015), estos son:

- Elaborar y diseñar un plan de solución.
- Seleccionar y aplicar procedimientos y estrategias de diverso tipo.
- Valorar las estrategias, procedimientos y los recursos que fueron empleados.

Por su lado, Gamarra (2017) prefiere desglosar esta capacidad en cuatro indicadores con muchas similitudes a lo planteado por MINEDU en las Rutas de Aprendizaje, estos son:

- Proponer un plan de acción con estrategias para solucionar el problema.
- Seleccionar procedimientos y estrategias de diverso tipo para solucionar problemas que implican el contenido temático involucrado.
- Aplica la estrategia o procedimiento seleccionado para la solución del problema.

- Evaluar el proceso de resolución de problema, poniendo énfasis en la valoración de la estrategia y del procedimiento utilizado; pudiendo incluso reformular lo planeado.

Es evidente que todo lo que se emplee para llevar a cabo satisfactoriamente esta capacidad debe de hacerse de manera flexible sin perder su eficacia, lo que supone un constante monitoreo de todo lo ejecutado en la resolución del problema. Así mismo, se puede decir que la facilidad con la que se realice esta capacidad dependerá del arsenal de conocimientos que posea el estudiante, es decir, de sus recursos internos; y esto se potenciará con la intervención de los recursos externos con los que disponga para hacerle frente al problema.

2.4.2.4 Razona y argumenta generando ideas matemáticas. Esta última capacidad hace referencia a que el estudiante a partir de los conocimientos presentes en el problema o situación, y por medio de un esfuerzo mental pueda generar nuevos conocimientos o ampliar los ya existentes. MINEDU (2015) define el razonamiento y argumentación para generar ideas matemáticas, exponiendo que:

Es la capacidad de plantear supuestos, conjeturas e hipótesis de implicancia matemática mediante diversas formas de razonamiento (deductivo, inductivo y abductivo), así como el verificarlos y validarlos usando argumentos. Esto implica partir de la exploración de situaciones vinculadas a la matemática para establecer relaciones entre ideas, establecer conclusiones a partir de inferencias y deducciones que permitan generar nuevas conexiones e ideas matemáticas. (p. 33)

En esta capacidad se ponen en juego las habilidades mentales del estudiante teniendo como punto de partida la exploración de la situación matemática para conocer todos los datos planteados, relacionarlos y obtener nuevos conocimientos; además, es necesario que el estudiante sea capaz de darle sustento a las relaciones o esquemas encontrados. Las ideas matemáticas generadas son conclusiones del conjunto de datos identificados y de las relaciones establecidas entre estos; por ello, si el proceso de generación de ideas se hace adecuadamente entonces no habrá inconveniente en la validación de dicha idea. Gamarra (2017) también enfatiza la importancia de expresar adecuadamente las conclusiones después de llegar a la solución del problema ya que estas llevan al estudiante a seguir razonando y a evaluar los resultados mediante argumentos sólidos. De este modo se enriquece la construcción constante de los conocimientos matemáticos en el sujeto resolutor del problema.

El razonar matemáticamente también supone evaluar una serie de argumentos de otros sujetos para descubrir ideas básicas dentro de estos, además el estudiante debe ser capaz de elaborar sus propios argumentos matemáticos formales e informales siempre y cuando estos no contradigan las condiciones del problema (Niss, 2003). Se hace manifiesto en esta capacidad la importancia de los recursos internos con los que cuente el estudiante (en especial las diferentes formas de razonamiento),

ya que argumentar y analizar argumentos requiere procesos mentales complejos, y poco se necesitan los recursos externos.

En esta capacidad son necesarios procesos de pensamiento conectados de manera lógica con elementos del problema para lograr una relación entre ellos. Algunos ejemplos pueden ser inferir nuevos datos, proporcionar una justificación a un enunciado, comprobar una justificación dada, refutar un argumento matemático, brindar contraejemplos, plantear conjeturas, plantear hipótesis, entre otros (MIDENU, 2015; OCDE, 2017). De manera específica y secuenciada esta capacidad implica cuatro aspectos, y así lo exponen MINEDU (2015) y Gamarra (2017), estos son:

- Explicar argumentos al plantear supuestos, conjeturas e hipótesis razonando de diversas formas.
- Observar los fenómenos y establecer diferentes relaciones matemáticas tratando de explicar procedimientos y resultados.
- Plantea conclusiones a partir de sus experiencias en la resolución del problema.
- Defender sus argumentos y refutar otros en base a sus conclusiones.

Razonar y argumentar matemáticamente demanda una gran actividad mental, destrezas, actitudes y muchos procesos del pensamiento relacionados de manera lógica, pero sin descuidar los elementos del problema a resolver. Así mismo, para elaborar argumentos sólidos es necesario un gran esfuerzo mental empezando desde lo menos complejo, es decir, desde la formulación de supuestos o hipótesis; estos se van enriqueciendo a medida que se resuelve el problema y se crean conclusiones que avalarán los argumentos; todo esto como producto de un largo proceso de razonamiento con ideas matemáticas.

2.5 Estudio del campo temático de razones trigonométricas

Es importante ahora describir el marco conceptual del campo temático sobre el cual se pretende trabajar. Así pues, en este apartado se aborda el estudio de las razones trigonométricas con sus subtemas involucrados, ya que para abarcar los conocimientos de razones trigonométricas es necesario revisar aspectos como la semejanza de triángulos, los triángulos rectángulos, las razones trigonométricas en sí mismas y proporcionar algunas aplicaciones, puesto que, se trabaja sobre situaciones problemáticas de contexto real.

2.5.1 Semejanza de triángulos

El estudio de las razones trigonométricas, aún desde tiempos muy remotos, parte de la semejanza de triángulos (Mateus, 2013). Para empezar, se especificará cuando existe dicha semejanza; así pues, los triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes tienen la misma medida; es decir, si sus ángulos son congruentes; lo que implica que sus lados correspondientes sean

proporcionales (Sauchelli, 2017, Ramos, 2013). Esta definición la matematiza Runza (2013) del siguiente modo:

Dados los triángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, su semejanza se denota $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y se verifican las siguientes condiciones:

- $\angle A \cong \angle D; \angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$
- $\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{FE} = \frac{CA}{FD}$

La semejanza de triángulos se deduce del conocido teorema de Thales, pues si un par de rectas paralelas son cortadas por otro par de rectas no paralelas, entonces se forman dos triángulos semejantes. Dicho teorema dice que “Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos determinados en la primera secante son proporcionales a los segmentos determinados en la segunda secante” (Coveñas, s.f., p. 225). La definición hace referencia a un mínimo de tres rectas paralelas porque en principio el teorema aborda la semejanza de segmentos. Sin embargo, respecto a los triángulos bastan solo dos rectas paralelas ya que serán los ángulos de los triángulos los que determinen su semejanza, sin ignorar la que surge de la longitud de sus lados.

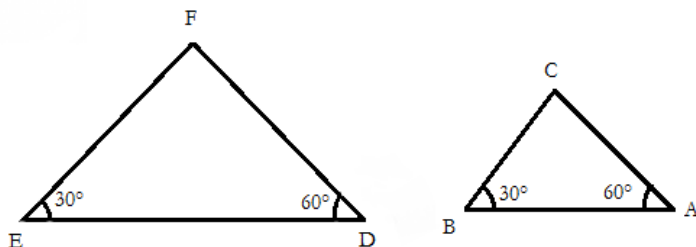
Aplicando el teorema de Thales a los triángulos se puede afirmar que una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, forma con las prolongaciones de los otros dos lados otro triángulo que es semejante al triángulo inicial; y de ese modo se puede obtener un conjunto infinito de triángulos semejantes a partir de uno solo. De la semejanza de triángulos se puede establecer, y así lo constata Runza (2013), tres criterios de semejanza de triángulos.

- Criterio 1. Ángulo-ángulo: Dos triángulos son semejantes si dos de los ángulos de uno de ellos son congruentes o iguales a dos ángulos del otro. Véase el ejemplo en la Figura 14 donde:

Si $\angle E \cong \angle B$ y $\angle D \cong \angle A$, entonces $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

Figura 14

Primer criterio de semejanza de triángulos: ángulo-ángulo

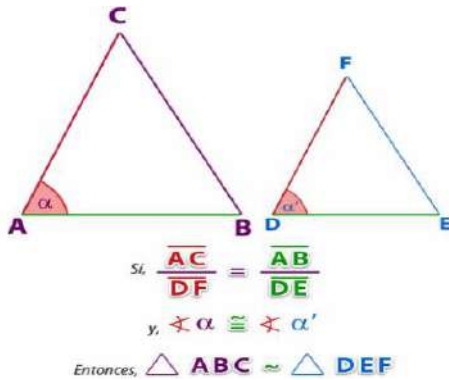


Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Arias (s.f.).

- Criterio 2. Lado-ángulo-lado: Dos triángulos son semejantes si las razones de dos pares de lados correspondientes son iguales, es decir, si están en proporción; y los ángulos que estos lados delimitan son congruentes. Véase la Figura 15.

Figura 15

Segundo criterio de semejanza de triángulos: lado-ángulo-lado

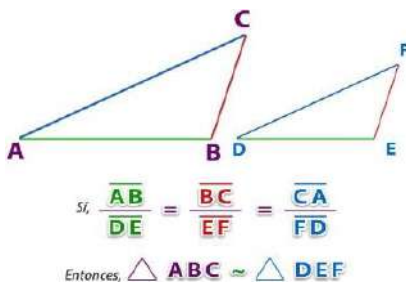


Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Ramírez (s.f.).

- Criterio 3. Lado-lado-lado: Existe semejanza entre un par de triángulos si los tres lados de uno de ellos son proporcionales a los tres lados del segundo triángulo. Véase la Figura 16.

Figura 16

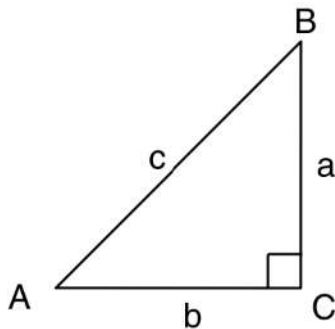
Tercer criterio de semejanza de triángulos: Lado-lado-lado



Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Ramírez (s.f.).

2.5.2 Triángulos rectángulos

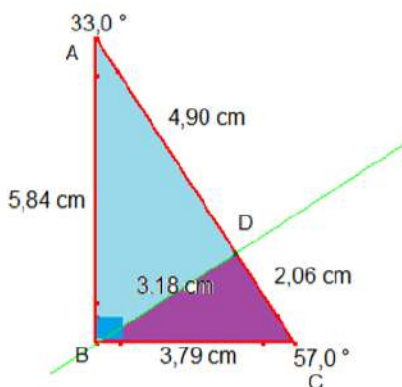
Ahora se centrará la atención en un tipo específico de triángulos, los denominados triángulos rectángulos. Este tipo de triángulo se caracteriza porque uno de sus ángulos es recto, es decir, los lados que lo delimitan son perpendiculares (Aguilar et al., 2009); regularmente se hace referencia al sistema sexagesimal, por lo que la medida, en este sistema, sería de 90°. Es muy común, en este tipo de triángulos la siguiente notación de Sauchelli (2017) plasmada en la Figura 17; este autor menciona que siendo C un ángulo recto y c la longitud de la hipotenusa, el opuesto al ángulo A es el lado a y el opuesto al ángulo B es el lado b.

Figura 17*Triángulo rectángulo*

Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Sauchelli (2017, p. 13).

De la definición anterior se resaltan dos elementos, hipotenusa y catetos, estos elementos son característicos de los triángulos rectángulos y dan origen a una serie de propiedades que resalta Runza (2013), pero se mencionarán sólo las que competen a este trabajo, estas son: la semejanza en un triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras.

Semejanza en un triángulo rectángulo: Si se traza la altura relativa a la hipotenusa se obtienen dos triángulos rectángulos semejantes cuya hipotenusa para cada uno es un cateto del triángulo rectángulo inicial. Estos dos triángulos nuevos, además de ser semejantes entre sí, son semejantes con el triángulo inicial. Véase el ejemplo de la Figura 18.

Figura 18*Semejanza en un triángulo rectángulo*

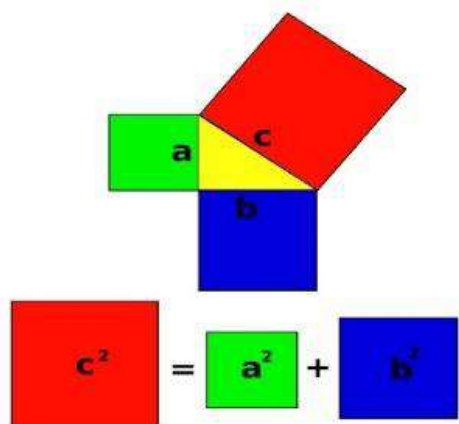
El $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ por criterio AA ($< 33^\circ$ y $< 90^\circ$).

El $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ por criterio AA ($< 57^\circ$ y $< 90^\circ$).

El $\triangle BDC \sim \triangle ADB$ por criterio AA ($< 33^\circ$ y $< 90^\circ$).

Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Runza (2013, p. 33).

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de cuadrados de las longitudes de los catetos. Véase Figura 19.

Figura 19*Teorema de Pitágoras*

Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Realini (2011).

2.5.3 Razones trigonométricas

Para resolver un triángulo es necesario calcular las medidas de sus lados y ángulos, para conseguir esto basta conocer tres de estos elementos, uno de los cuales debe ser necesariamente un lado del triángulo (“Compendio de trigonometría”, 2009, p. 652). Los teoremas mencionados en el apartado anterior permiten encontrar la medida de los lados de un triángulo rectángulo. Pero para tener un mayor alcance a toda la posible casuística en este contenido temático, es necesario involucrar en las operaciones matemáticas a la medida de los ángulos de un triángulo. Esto se logrará gracias a las razones trigonométricas.

Las razones trigonométricas muestran la relación entre los lados y los ángulos en un triángulo rectángulo, de manera específica una sola razón trigonométrica muestra la relación de un ángulo con todos los lados del mismo triángulo rectángulo. De este modo, las razones trigonométricas se definen como “la comparación entre dos lados de un triángulo rectángulo respecto a un ángulo agudo” (“Compendio de trigonometría”, 2009, p. 87).

Tomando como referencia la Figura 17, en dicho triángulo rectángulo se pueden establecer seis relaciones entre sus lados a , b , y c . Estas relaciones representan una razón y se expresan del siguiente modo (Runza, 2013):

$$\frac{a}{c}; \frac{b}{c}; \frac{a}{b}; \frac{b}{a}; \frac{c}{b}; \frac{c}{a}$$

A estas relaciones entre las medidas de sus lados se les denomina razones trigonométricas y varían según el ángulo agudo del triángulo rectángulo que se tome de referencia. Estas razones trigonométricas, en un triángulo rectángulo cualquiera, se mencionan en la Tabla 4 y cabe mencionar que para expresarlas se seguirá tomando como referencia la Figura 17.

Tabla 4*Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo*

Razón trigonométrica	Relación entre los lados	Tomando como referencia el ángulo A	Tomando como referencia el ángulo B
Seno	$\frac{CO}{H}$	$\sin A = \frac{a}{c}$	$\sin B = \frac{b}{c}$
Coseno	$\frac{CA}{H}$	$\cos A = \frac{b}{c}$	$\cos B = \frac{a}{c}$
Tangente	$\frac{CO}{CA}$	$\tan A = \frac{a}{b}$	$\tan B = \frac{b}{a}$
Cotangente	$\frac{CA}{CO}$	$\cot A = \frac{b}{a}$	$\cot B = \frac{a}{b}$
Secante	$\frac{H}{CA}$	$\sec A = \frac{c}{b}$	$\sec B = \frac{c}{a}$
Cosecante	$\frac{H}{CO}$	$\csc A = \frac{c}{a}$	$\csc B = \frac{c}{b}$

Nota. Esta tabla ha sido elaborada a partir del estudio de Runza (2013) y Sauchelli (2017).

2.5.4 Aplicaciones

Como se ha venido mencionando reiteradas veces, el campo temático de razones trigonométricas tienen muchas aplicaciones prácticas en diferentes campos como en la física, la astronomía e incluso en problemas cotidianos (Sauchelli, 2017), tal como se revisó en el estudio de los recursos didácticos. Esto lo recalca Gutierrez (como se citó en Cosquillo, 2015) quien menciona que la trigonometría tiene mucha utilidad en el mundo moderno a pesar de ser una ciencia antigua, empezando a tener un incremento en su estudio e importancia debido a su gran eficacia en la medida de ángulos y distancias. Como ya es evidente, la investigación se centrará en la resolución de dichos problemas de contexto real; es decir, para el cálculo de alturas, distancias y ángulos.

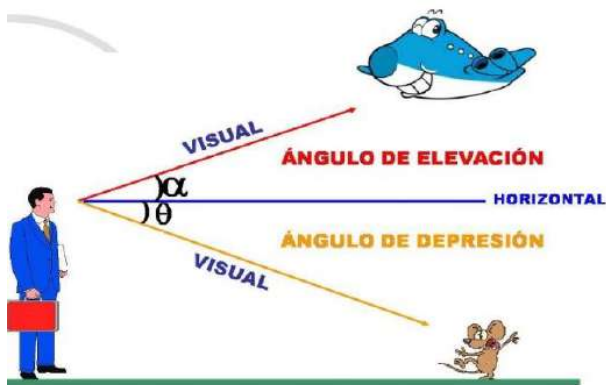
Para ello, es importante saber distinguir o identificar triángulos rectángulos que no están representados físicamente en contextos reales, para tal propósito, los ángulos de elevación y depresión son de gran ayuda. En ambos casos, siempre están presentes los siguientes elementos que el estudiante debe ser capaz de identificar, estos son: un observador o punto desde el cual se observa, una horizontal (a la altura del ojo del observador) paralela a la superficie, un objeto observado, una recta visual, y un ángulo de elevación o de depresión (Runza, 2013).

- Ángulos de elevación: Se da esta situación cuando la recta visual y el objeto están por encima de la horizontal, es decir, el observador ve el objeto hacia arriba.
- Ángulos de depresión: Se da esta situación cuando la recta visual y el objeto están por debajo de la horizontal, es decir, el observador ve el objeto hacia abajo.

En la Figura 20 se muestra una representación sencilla de los casos de ángulos de elevación y depresión, pero esto se puede complicar mucho más quitando o agregando algunos elementos, cambiando algunas variables del problema, etc. Pero siempre tendrán solución desde los conocimientos de razones trigonométricas.

Figura 20

Elementos en situaciones de ángulos de elevación y depresión



Nota. Esta figura ha sido recuperada de los aportes de Francisco Javier (2011).

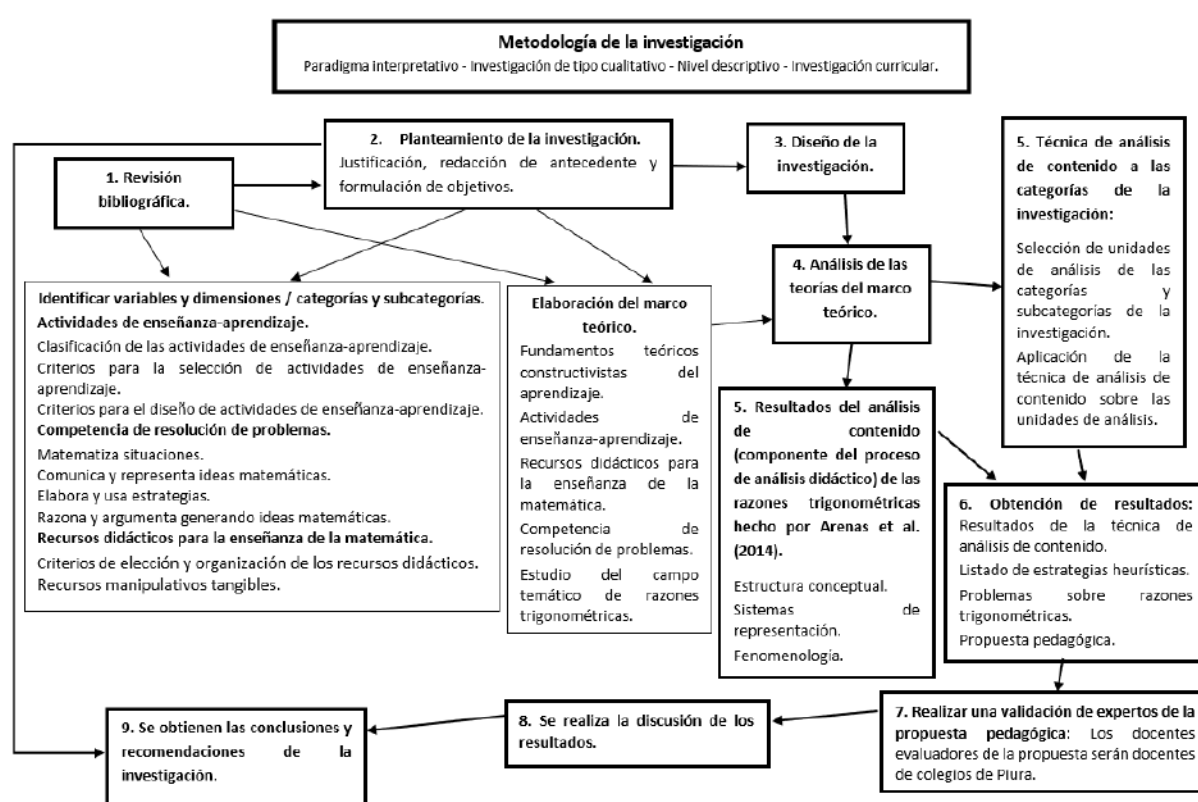
Capítulo 3

Metodología de la investigación

En este apartado se presenta el marco metodológico de la investigación abordando el paradigma, tipo, y diseño de investigación; así como, la técnica de investigación utilizada para el análisis de datos y la posterior obtención de resultados. Además, se incluye la técnica de validación por juicio de expertos para evaluar los resultados obtenidos. Todos los procesos metodológicos involucrados se resumen, organizan y estructuran en un organizador visual presentado en la Figura 21.

Figura 21

Estructuración de la metodología de investigación



Nota. Elaboración propia.

3.1 Paradigma y tipo de investigación

Esta investigación se basa en el paradigma interpretativo en un nivel descriptivo que implica una revisión bibliográfica y realizar un análisis de contenido sobre las actividades de enseñanza-aprendizaje, la competencia de resolución de problemas y los recursos didácticos para la enseñanza de la matemática. Así pues, a partir de dicha revisión bibliográfica se pretende interpretar las teorías fundamentadas para poder encaminar un conjunto de actividades de enseñanza-aprendizaje al desarrollo de la competencia de resolución de problemas; esto mediante el planteamiento de una propuesta pedagógica en el área de matemática. Ricoy (2006) sustenta lo mencionado al expresar que

en el paradigma interpretativo la teoría constituye una reflexión para la práctica, además se hace énfasis en la comprensión de los procesos desde las reflexiones del investigador. Por lo tanto, la presente investigación se queda en el plano descriptivo, mas no aplicativo.

La investigación es de tipo curricular, en Bolívar (1995) se define a esta investigación como una clasificación de la investigación educativa que está orientada a formular políticas y programas curriculares. Así mismo, la presente investigación se centra en el ámbito de la planificación curricular ya que con el diseño de la propuesta pedagógica se genera un conocimiento relevante que se debe tener en cuenta durante la toma de decisiones de la práctica docente.

La metodología aplicada es la cualitativa ya que la obtención de resultados provenientes de la técnica de análisis de contenido permitirá fundamentar con criterio y validar el diseño del conjunto de actividades de enseñanza-aprendizaje, priorizando la inclusión de determinados recursos didácticos manipulativos tangibles. En este sentido la metodología cualitativa hace énfasis en la validez mediante un análisis descriptivo-interpretativo de los datos obtenidos y su objeto es la captación e interpretación del significado (Ruiz, 2012). Así pues, la propuesta pedagógica constituye una concretización del análisis de datos producto de las inferencias y de las interpretaciones hechas por el investigador.

3.2 Diseño de investigación

El diseño planteado en esta investigación es mixto ya que se propone una parte del diseño emergente (Hernández et al., 2014) y otra conformada por el modelo para el diseño curricular planteado por Taba (1974).

Considerar el diseño de la investigación como emergente tiene sustento en los aportes de Hernández et al. (2014), quienes afirman que en una investigación cualitativa el proceso es iterativo y emergente, lo cual quiere decir que el investigador elabora, refina y realiza las revisiones necesarias hasta estar satisfecho con los resultados. Además, los mismos autores mencionan que el diseño de estas investigaciones debe ser abierto, flexible, y construido durante la realización del estudio. Por ello, al diseño de la presente investigación se le denomina diseño de tipo emergente.

Respecto al modelo de Taba (1974), es presentado por Chablé y Delgado (2010) como uno de los más representativos para el diseño curricular. Dicha autora plantea siete pasos para el diseño del currículum, estos son: diagnóstico de necesidades, formulación de objetivos claros, selección del contenido, organización del contenido, selección de actividades de aprendizaje, organización de actividades de aprendizaje, y determinación de lo que se va a evaluar y de las maneras y los modos para hacerlo. Estos pasos se han tomado como referencia y guía para la elaboración de las fases del diseño de la presente investigación, pues cabe recordar que cuando se trabaja con el currículum se hace de manera abierta y flexible a los cambios.

En consecuencia, se presenta el diseño de la investigación que se ha dividido en cuatro fases. En la Tabla 5 se describe cada una de las fases del diseño propuesto en esta investigación.

Tabla 5

Descripción de las fases del diseño de la investigación curricular

Fases	Actividades
Primera fase	✓ Realizar una revisión bibliográfica sobre las actividades de enseñanza-aprendizaje, recursos didácticos para la enseñanza de la matemática, y la competencia de resolución de problemas relacionados con las razones trigonométricas.
	✓ Analizar los criterios pedagógicos para clasificar, seleccionar y diseñar actividades de enseñanza-aprendizaje.
	✓ Analizar las teorías para conocer las capacidades involucradas en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.
Segunda fase	✓ Recoger los resultados del análisis de contenido hecho por Arenas et al. (2014).
	✓ Identificar las categorías, subcategorías y unidades de análisis, a partir del marco teórico, para aplicar la técnica de análisis de contenido.
Tercera fase	✓ Identificar un listado de estrategias heurísticas útiles en la resolución de problemas con razones trigonométricas.
	✓ Formular situaciones problemáticas relacionadas al tema de razones trigonométricas que permitan el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.
	✓ Formular los objetivos y seleccionar la metodología, las técnicas e instrumentos de evaluación para cada actividad de enseñanza-aprendizaje.
	✓ Diseñar actividades incluyendo el gnomon, el clinómetro y los espejos como recursos didácticos para la enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas.
	✓ Diseñar la propuesta pedagógica que involucra las actividades de enseñanza-aprendizaje.
Cuarta fase	✓ Realizar una validación de expertos de la propuesta pedagógica, los docentes evaluadores de la propuesta serán docentes de matemática de colegios de Piura.
	✓ Rediseñar la propuesta pedagógica de ser necesario.
	✓ Discutir los resultados del análisis de las teorías del marco teórico, los productos de la investigación y la validación por juicio de expertos.

Nota. Elaboración propia.

3.3 Variables de investigación

Respecto a las variables en una investigación cualitativa, el investigador confía en el proceso de la investigación para identificarlas y, de ser el caso, descubrir cómo se relacionan; además, puede fundamentarse en la revisión de la literatura para seleccionar y definir variables (Hernández et al., 2014). Sin embargo, es necesario tener en cuenta que, según Sierra (1994), cuando se trata de una investigación cualitativa la cual queda en el plano descriptivo, entonces las variables se consideran como categorías, ya que estas se van a analizar, interpretar y describir, mas no se van a medir. En este sentido, para este autor, una categoría es un conjunto de unidades inicialmente sin estructura, es decir, sin interrelación entre sí; pero, el investigador puede analizarlas de manera conjunta durante el proceso investigativo.

Así mismo, Sierra (1994) menciona que cuando las variables se presentan de manera aislada presentan dos características principales: “primero, ser características observables de algo, y segundo, ser susceptibles de cambio o variación con relación al mismo o diferentes objetos” (p. 98). Por otro lado, el mismo autor menciona que si las variables no son aisladas tienen la particularidad de variar unas a otras, acorde a diversos tipos de relaciones. Entonces, es evidente que en la presente investigación se trabaja con variables aisladas denominadas categorías porque son características observables de la propuesta pedagógica y son susceptibles de cambio con relación a sus propias dimensiones o subcategorías, mas no varían unas variables con relación a otras.

Las variables y dimensiones de esta investigación se describen en la Tabla 6. Cabe tener presente que, por ser una investigación básica, mas no aplicada; entonces, las variables no se consideran como dependiente e independiente. Sin embargo, se invita a realizar futuras investigaciones, en base a este estudio, en las que se consideren a las variables como tales.

Tabla 6

Definición conceptual y operacional de las variables de investigación

Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones
Variable 1 “Actividades de enseñanza–aprendizaje”. Las actividades de enseñanza–aprendizaje son un medio que incluye un conjunto de acciones a realizar por el profesor y los estudiantes en el salón de clase, las cuales están debidamente planificadas para desarrollar los temas facilitando su conocimiento y lograr así los objetivos de un proceso de enseñanza–aprendizaje.	Variable 1 “Actividades de enseñanza–aprendizaje” Conjunto de acciones debidamente clasificadas, seleccionadas y diseñadas por el docente de tal modo que constituyan un medio facilitador de la enseñanza de los contenidos temáticos y de los aprendizajes del estudiante.	D1 Clasificación de las actividades de enseñanza–aprendizaje. D2 Criterios para la selección de actividades de enseñanza–aprendizaje. D3 Criterios para el diseño de actividades de enseñanza–aprendizaje.
Variable 2 “Competencia de resolución de problemas”. Facultad que permite utilizar un conjunto de capacidades, conocimientos y recursos matemáticos para formular, trabajar y dar solución a problemas de situaciones reales, lo que a su vez permite la mejora en las capacidades y la ampliación de los conocimientos utilizados.	Variable 2 “Competencia de resolución de problemas” Facultad de una persona para combinar sus capacidades de matematización de situaciones; comunicación y representación de ideas matemáticas; elaboración y uso de estrategias; y razonamiento y argumentación para generar ideas matemáticas.	D1 Matematiza situaciones. D2 Comunica y representa ideas matemáticas. D3 Elabora y usa estrategias. D4 Razona y argumenta generando ideas matemáticas.
Variable 3 “Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática”. Aquellos objetos o medios que pueden ser introducidos en una sesión de aprendizaje, previa planificación, con la finalidad de facilitar la comprensión, legibilidad y consolidación de los conocimientos.	Variable 3 “Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática” Aquellos objetos o medios que son introducidos en actividades de enseñanza–aprendizaje cumpliendo los criterios de elección y organización, para facilitar la comprensión, legibilidad y consolidación de los conocimientos.	D1 Criterios de elección y organización de los recursos didácticos. D2 Recursos manipulativos tangibles.

Nota. Elaboración propia.

3.4 Descripción de la aplicación de la técnica de análisis de contenido

En este apartado se abordará la descripción de la técnica de análisis de contenido para una investigación de tipo cualitativa, para posteriormente ser aplicada con el fin de obtener resultados que fundamenten la propuesta pedagógica. De este modo, esta técnica se complementa con una investigación cualitativa, ya que en esta última se utilizan diversas técnicas de investigación de manera flexible y de acuerdo con los requerimientos de la situación (Hernández et al., 2014). Así mismo, el paradigma de investigación también va acorde con la aplicación de la técnica de análisis de contenido

ya que esta última se caracteriza por combinar intrínsecamente la observación, la producción y la interpretación de datos expresados en unidades de análisis; además de poder tomar como válidas las apreciaciones del investigador siempre que sea de manera sistemática y objetiva (Abela, 2002). Además, como resalta este mismo autor, para aplicar la técnica de análisis de contenido se recomienda establecer categorías y subcategorías dentro del contenido que se va a analizar. Por ello, dado que el contenido a analizar en este caso es parte de la revisión bibliográfica (marco teórico), entonces las categorías y subcategorías corresponden a las variables y dimensiones de investigación respectivamente. Estas categorías junto con sus subcategorías se plasman en la Tabla 7.

La relación entre las categorías, subcategorías y sus unidades de análisis es que las dos primeras son la forma de clasificar, conceptualizar o codificar un término o expresión de forma clara; y en estos están ubicados cada uno de los elementos que se someterán a estudio, es decir, las unidades de análisis (Chaves, 2005). Comúnmente cuando se aplica la técnica de análisis de contenido se recogen los datos por medio de audios, videos o escritos, para posteriormente identificar las unidades de análisis y estas últimas agruparlas determinando las categorías y subcategorías. Sin embargo, en esta investigación los datos que se van a analizar están presentes en el marco teórico, el cual está organizado por medio de apartados y subapartados, por ello las categorías y subcategorías se identifican con facilidad.

Tabla 7

Categorías y subcategorías del contenido a analizar

Categoría	Subcategoría
Actividades de Enseñanza-Aprendizaje.	Clasificación de las actividades de enseñanza aprendizaje.
	Criterios para la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje.
	Criterios para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje.
Competencia de Resolución de Problemas.	Matematiza situaciones.
	Comunica y representa ideas matemáticas.
	Elabora y usa estrategias.
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas.
Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática.	Criterios de elección y organización de los recursos didácticos.
	Recursos manipulativos tangibles.

Nota. Elaboración propia.

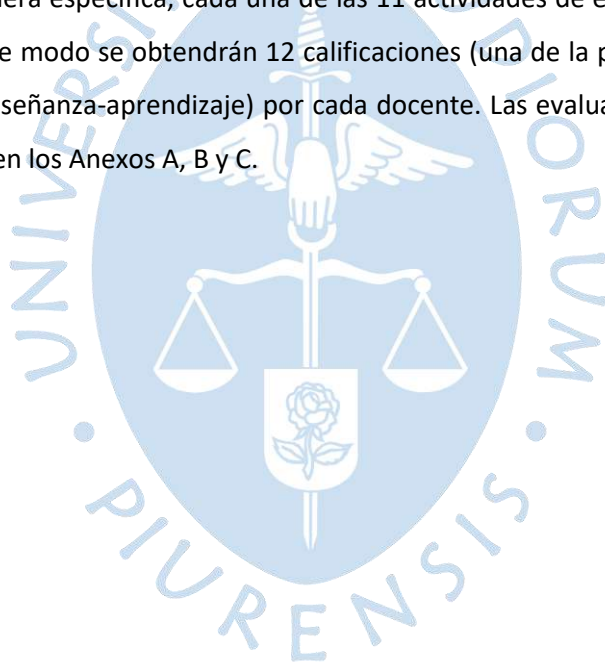
3.5 Descripción de la técnica para la validación de la propuesta pedagógica

La validación de la propuesta pedagógica que se diseña en este trabajo se realiza por medio de la técnica de validación por juicio de expertos. Para ello, se ha diseñado como instrumento una ficha de validación de la propuesta pedagógica (Apéndice B), la cual usarán los profesores expertos para

evaluar cada uno de sus aspectos, características y actividades de enseñanza-aprendizaje diseñadas en este estudio.

La técnica de validación por juicio de expertos es apropiada en este caso porque permite que personas con un buen conocimiento y trayectoria en el tema de investigación avalen la propuesta pedagógica que se propone, ya que por ser personas cualificadas en la materia pueden emitir juicios y valoraciones acertadas (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008). En este sentido, el diseño de la propuesta pedagógica será válido si el juicio de los expertos es aprobatorio, de lo contrario, pierde validez.

En este caso, son tres los profesores expertos que emitieron su juicio sobre la propuesta pedagógica diseñada. Estos profesores son licenciados en educación del nivel secundario y enseñan el curso de Matemática con ya más de 20 años de experiencia. La evaluación que realizarán los profesores se ha dividido en dos partes. La primera evalúa la propuesta pedagógica de manera general y la segunda evalúa, de manera específica, cada una de las 11 actividades de enseñanza-aprendizaje que se han diseñado. De este modo se obtendrán 12 calificaciones (una de la propuesta pedagógica y 11 de las actividades de enseñanza-aprendizaje) por cada docente. Las evaluaciones emitidas por estos profesores se adjuntan en los Anexos A, B y C.





Capítulo 4

Resultados de la investigación

En este capítulo se plasman los resultados obtenidos después de aplicar la técnica de análisis de contenido en cada una de las categorías de la investigación y los resultados tomados del análisis de contenido hecho por Arenas et al. (2014) sobre el campo temático de razones trigonométricas. Además, se plasma el resultado (producto) de esta investigación que vendría a ser el diseño de una propuesta pedagógica conformada por actividades de enseñanza-aprendizaje con las características que ya se han mencionado en reiteradas ocasiones; y su respectiva validación por docentes expertos.

4.1 Aplicación de la técnica de análisis de contenido

Por ser esta una investigación no aplicada y cuyo objetivo es la obtención de una propuesta pedagógica con ciertas características, entonces, se ha considerado conveniente aplicar la técnica de análisis de contenido sobre los datos que se plasmaron en el marco teórico. De dicho marco teórico se analizará la información referida a las variables de investigación (categorías) y sus respectivas dimensiones (subcategorías). De este modo, se analizará información sobre la “Competencia de resolución de problemas” y sobre las “Actividades de enseñanza-aprendizaje” de manera separada, pero la información referida a los “Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática” se incluirá en ambos de manera transversal. Todo esto con el fin de encontrar relaciones sobre cómo utilizar los recursos didácticos para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas y cómo incluir estos recursos en el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje.

De este modo, en este apartado se pretenden encontrar dos grupos de resultados. Los primeros que muestren cómo introducir recursos didácticos para el desarrollo de cada una de las capacidades de la competencia de resolución de problemas para proponer acciones dentro de las actividades de enseñanza-aprendizaje que permitan el buen desarrollo de dicha competencia. Los segundos son con el fin de hallar una propuesta de clasificación, criterios para la selección, y un esquema para las actividades de enseñanza-aprendizaje con el fin de ordenar todas las acciones que se pretendan realizar a partir del primer grupo de resultados.

Todo el proceso realizado para la obtención de resultados es necesario dado que la bibliografía existente es muy amplia y hay muchos aportes respecto al tema de estudio, por ello, es importante llegar a resultados que sinteticen todos estos aportes mediante un proceso ordenado y objetivo. Todo esto apuntando a la obtención de resultados que constituyan una guía para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje que permitan el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.

Atendiendo a las características de la técnica de análisis de contenido, primero se identifican en el marco teórico las unidades de análisis pertenecientes a cada categoría y subcategoría de la investigación. Las unidades de análisis correspondientes a la categoría “Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática” se plasman en el Apéndice C, las correspondientes a la categoría

“Competencia de resolución de problemas” se plasman en el Apéndice D; y las correspondientes a la categoría “Actividades de enseñanza-aprendizaje” se plasman en el Apéndice E. Por último, se agrupan las unidades de análisis en ideas núcleo para la posterior obtención de resultados, tal como se muestra en la tabla 8 y en la tabla 9.



Tabla 8

Variable/Categoría: Competencia de resolución de problemas

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de la competencia de resolución de problemas	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
Matematiza situaciones.	(42, 44, 50, 53, 55, 65)	(16, 26, 27, 28, 30).	IN 01: Los recursos didácticos ayudan a comprender la realidad y facilitan el enfrentarse a problemas derivados de esta. Por ende, los recursos didácticos contribuyen a transformar y transcribir una situación a través de idealizaciones de los objetos que la componen, permitiendo realizar interpretaciones abstractas de esta realidad. Todo ello con el fin de reproducir las características de una situación formulando matemáticamente el problema.	IN (02, 03, 05): El estudiante debe emplear recursos didácticos manipulativos tangibles para obtener información (datos numéricos) de la realidad y verificar su fiabilidad. Esta información le permitirá obtener el modelo matemático de la situación real, con todos los datos necesarios para trabajarlo.
	(42, 43, 47, 48, 56, 57, 58, 59, 65, 66, 69).	(10, 15, 31, 32, 33, 36, 39).	IN 02: La obtención de un modelo matemático que represente adecuadamente la realidad de la cual surge el problema, es lo característico de esta capacidad. En este sentido, los recursos didácticos manipulativos tangibles ayudan a la creación del modelo matemático porque permite la obtención de datos que el sujeto no puede percibir fácilmente en la realidad, pero que son necesarios para la resolución del problema. Además, el modelo matemático se debe trabajar para la obtención de datos (resultados matemáticos) que, por las limitaciones del sujeto y las condiciones del problema, no se pueden obtener directamente con el uso de los recursos didácticos.	
	(43, 56, 59, 69).		IN 03: Una vez construido el modelo matemático, este se debe usar y validar para constatar su eficacia y para verificar que los datos identificados, gracias a los recursos didácticos, estén acorde a la realidad. Una vez resuelto el modelo matemático, se debe cambiar las condiciones iniciales del problema con el fin de verificar si los resultados del modelo matemático coinciden con los datos que se podrían hallar directamente con los recursos didácticos; siempre teniendo en consideración las limitaciones y alcances de estos sobre la realidad.	
				IN (01, 04, 06, 07): El proceso o ciclo de matematización parte de una situación real inicial, y sobre esta el estudiante realiza abstracciones, simplificaciones e idealizaciones. A lo largo de todo este proceso, los recursos didácticos serán facilitadores de las tareas realizadas.

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de la competencia de resolución de problemas	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
	(43, 50, 51, 63, 68).		IN 04: Lo que le da origen a un modelo matemático es una situación del entorno, es decir, existe una situación real inicial. El propósito de dicho modelo es permitir trabajar, manipular y solucionar el problema que surge de dicha situación. Sin embargo, esta situación proporciona algunos datos que no son fácilmente identificables por el sujeto, quien necesita recurrir a los recursos didácticos para obtenerlos en la medida de sus posibilidades.	IN (02, 05, 06): El estudiante debe trabajar el modelo matemático desde sus conocimientos de matemática para la obtención de resultados matemáticos que permitan resolver el problema. De ser posible, se debe constatar los resultados con ayuda de los recursos didácticos utilizados.
	(44, 45, 46, 47, 51, 53, 54, 65, 66).		IN 05: Los datos que el sujeto puede obtener con los recursos didácticos son datos numéricos, que permitirán matematizar los conceptos involucrados para obtener el modelo matemático. Por ende, se relaciona la matemática con las condiciones de la realidad, transformando esta a una forma estrictamente matemática de tal modo que pueda ser trabajada con actividades matemáticas. Además, los resultados de esta etapa meramente matemática necesitan ser comparados con la realidad.	
	(49, 52, 54, 63, 64, 67, 68).		IN 06: Todos los esfuerzos mentales que realice el sujeto en esta capacidad son facilitados por el uso de los recursos didácticos, pues estos también resultan motivadores. Así pues, es el sujeto quien gracias a interpretaciones abstractas, simplificadas e idealizadas logra simplificar y estructurar la situación para obtener un modelo real; y de este modo hay un aumento en el logro de los aprendizajes.	
	(60, 61, 62).		IN 07: El proceso de matematización es un ciclo en el que el estudiante parte de la realidad, sale de ella y luego retorna a esta. En este proceso, según Blum (2015), hay pasos y etapas, pero para atravesar por todo ello es crucial la integración de recursos didácticos que faciliten la tarea del sujeto; en especial en ese traslado de la situación real a una situación meramente matemática, y viceversa.	
Comunica y representa ideas	(70, 74, 76, 85, 86, 87, 88, 92, 93)	(17, 27). (10, 15, 31,	IN 08: El hecho de que los estudiantes construyan los recursos didácticos a utilizar (gnomon, clinómetro y espejos), facilitará su comprensión sobre la situación problemática, así como de las ideas y conceptos involucradas	IN (09, 13): El carácter motivacional que tienen los recursos didácticos sobre los

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de la competencia de resolución de problemas	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
matemáticas.		32, 33, 36, 39).	en esta. La comprensión se da a lo largo de todo el proceso de resolución del problema, pues es esencial para iniciarlo y para mantener el buen desarrollo de este, ya que contribuye a realizar correctas interpretaciones. Así pues, el estudiante no puede enfrentarse a un problema si no lo ha comprendido.	aprendizajes de las matemáticas favorece a los estudiantes que no tienen la confianza necesaria para comunicar su comprensión del problema posibilitando el traslado entre sistemas de representaciones, dado que los conocimientos matemáticos adquieren mayor significado para ellos.
	(70, 72, 75, 76, 77, 78, 89, 96, 98)		IN 09: El estudiante demuestra su comprensión de la situación problemática expresando significados y relaciones encontradas en esta, lo cual realiza con un buen nivel de precisión teórica y técnica. La comunicación de las ideas, en principio, es de modo coloquial, pero será más formal a mayor sea la comprensión. Los recursos didácticos, por ser motivadores en el aprendizaje, facilitarán que el estudiante exprese con confianza lo aprendido.	
	(70, 75, 86, 89, 91, 92, 93, 98)		IN 10: Las situaciones problemáticas a desarrollar involucran una serie de conceptos, ideas, notaciones y contenidos matemáticos que el estudiante debe identificar, relacionar y conocer la función que cumplen en dicha situación. Para identificar todos estos aspectos matemáticos, es beneficioso que el estudiante se apoye de los recursos didácticos ya que estos ayudan a obtener datos matemáticos y a comprender cómo es que se obtienen para realizar adecuadas interpretaciones de la realidad.	IN (08, 10): Los estudiantes deben construir sus propios recursos didácticos para comprender la naturaleza de las ideas matemáticas involucradas en la obtención de datos con recursos didácticos.
	(71, 75, 89, 94, 95, 97)		IN 11: Para que el estudiante pueda comunicarse con mayor experticia matemática, debe poseer un buen lenguaje matemático con una gran variedad de registros lingüísticos. Se recomienda el uso de recursos didácticos para agilizar el manejo de expresiones matemáticas, debido a que estos ayudan a formular problemas significativos para los estudiantes y son potenciadores de los aprendizajes.	IN (11, 12): En esta capacidad es imprescindible tener un buen lenguaje matemático, para ello, los recursos didácticos son de gran ayuda ya que cuando se usan, agilizan el manejo de
	(71, 73, 74, 75, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 88,		IN 12: El problema real puede ser presentado mediante diferentes formas o sistemas de representación, de los cuales muchos pueden incluir el uso de recursos y materiales didácticos. Las formas de representación	

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de la competencia de resolución de problemas	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
	90, 93)		permiten diversos modos de plasmar un problema y de interactuar con este; además, algunas representaciones son más abstractas o complejas que otras, y el hecho de que el estudiante prefiera una u otra depende de su comprensión del problema.	expresiones matemáticas.
	(71, 82, 83, 87, 90, 91)		IN 13: El estudiante con un buen nivel de comprensión y que comunica eficazmente sus ideas, es capaz de trasladarse de un sistema de representación a otro y establecer relaciones entre estos. Esta actividad matemática permite realizar interpretaciones cada vez más abstractas; además, los conocimientos matemáticos adquieren más significado en aquel traslado entre sistemas de representaciones.	IN (12, 13): Los sistemas de representaciones más concretos demandan el uso de recursos didácticos; y estas representaciones son base para transitar a sistemas de representación más abstractos.
Elabora y usa estrategias.	(99, 100, 101, 106, 117, 118)	(11, 12, 18, 23, 30).	IN 14: El estudiante se debe enfrentar a un problema con un plan de solución bien organizado que le permita realizar todas las acciones necesarias para la resolución de este. En dicho plan se debe establecer adecuadamente la función que cumplen los recursos didácticos que se pretendan incorporar para que no obstaculicen la resolución del problema.	IN (14, 15, 16, 17): El estudiante debe planificar adecuadamente todas las estrategias y procesos que pretende realizar en la resolución del problema, y posteriormente evaluar su eficacia. Dicha eficacia será mejor si el estudiante hace buen uso de adecuados recursos didácticos.
	(99, 105, 117, 118)	(10, 15, 31, 32, 33, 36, 39).	IN 15: Todo lo pensado para llegar a la solución de un problema se debe aplicar de tal modo que todas las acciones ejecutadas permitan reconocer, formular y resolver eficazmente el problema. En este sentido, los recursos didácticos deben utilizarse apropiadamente y siguiendo las instrucciones, ya que estos deben garantizar su utilidad práctica.	
	(99, 117, 118, 120)		IN 16: Cuando el plan ya se haya ejecutado conviene valorar su eficacia, para ello se necesita un constante monitoreo de todo lo ejecutado en el proceso de resolución del problema. Los recursos didácticos no pueden ser excluidos de ese monitoreo, pues se debe verificar si su uso ha resultado provechoso para el estudiante, caso contrario, se debe evaluar si deben ser reemplazados por otros.	IN (17, 18): La incorporación de apropiadas herramientas o recursos enriquecen las estrategias y procedimientos, si es que

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de la competencia de resolución de problemas	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
	(99, 100, 101, 102, 103, 105, 115, 116, 117, 118)		IN 17: Esta capacidad incluye la planificación, ejecución y valoración de una serie de estrategias y procedimientos que potenciarán, de manera ordenada, la resolución de una situación problemática. Los recursos didácticos son parte de estas estrategias y procedimientos, por ende, se deben acomodar a estos y no entorpecerlos.	aquellos son utilizados de manera innovadora.
	(99, 101, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 121)		IN 18: Los diversos procesos y estrategias van acompañados de herramientas o recursos que van a facilitarle al estudiante la realización oportuna de todo lo planeado. Estos recursos, en general, son de tipo manipulativos tangibles ya que serán utilizados por el estudiante resolutor del problema; además, deben de ser incorporados y utilizados de manera innovadora.	IN (19, 20): El conocimiento heurístico del estudiante debe de ser amplio porque este le permitirá elaborar y usar óptimas estrategias y procesos heurísticos; además, sabrá cómo apoyarse de los recursos didácticos para encontrar caminos más fáciles hacia la solución del problema.
	(102, 103, 104, 108, 119)		IN 19: Esta capacidad apunta a que el estudiante encuentre y siga el camino que él considere más oportuno para resolver el problema, con el fin de ahorrar esfuerzos y/o tiempo. Así pues, con esta capacidad se incrementa específicamente un tipo de conocimiento en el alumno, que se denomina conocimiento heurístico. Escoger un determinado camino para resolver el problema puede resultar más o menos complejo si se cuenta con la presencia de recursos didácticos; por ello, la inclusión de estos debe ser flexible y sin que pierdan su eficacia.	
	(106, 107, 121)		IN 20: El estudiante tendrá mayor agilidad en plantear más y mejores estrategias heurísticas para resolver el problema que se le plantee si su arsenal de conocimientos matemáticos es amplio. Así mismo, el plan se llevará a cabo exitosamente si los cálculos matemáticos hechos por el estudiante son correctos; y los recursos didácticos le ayudarán a identificar los datos de la realidad que se necesitan para realizar dichos cálculos.	
Razona y argumenta generando	(122, 123, 126, 127, 132, 133, 135, 137, 138,	(27, 29, 35, 41).	IN 21: Esta capacidad demanda un gran esfuerzo mental por parte del estudiante, pues se requiere habilidades y procesos mentales complejos para poder realizar las distintas formas de razonamiento (deductivo,	IN (21, 22, 24): En esta capacidad, el estudiante mayormente usa recursos

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de la competencia de resolución de problemas	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
ideas matemáticas.	143, 144)	(10, 15, 31, 32, 33, 36, 39).	inductivo). Estos procesos del pensamiento mayormente necesitan que el estudiante haga uso de sus recursos internos, y de su dominio en el saber y hacer matemático.	internos ya que estos suponen procesos mentales complejos que favorecen la argumentación de ideas y el saber y hacer matemático; estos procesos mentales pueden ser estimulados con el uso de recursos didácticos.
	(122, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 140)		IN 22: El continuo esfuerzo mental realizado por el estudiante, permite que se generen nuevos conocimientos matemáticos y que se amplíen los ya existentes. Estos conocimientos son fruto de las relaciones encontradas entre los distintos datos y conceptos involucrados en el problema, lo cuales permiten la producción de ideas nuevas. Los recursos didácticos pueden ayudar a identificar mejor los datos y relacionarlos con los conceptos matemáticos presentes; esto posibilitará la formación de esquemas de ideas más fuertes.	IN (24, 25): A pesar del poco uso que se les dé a los recursos externos en esta capacidad, estos no deben quedar excluidos porque potencian el razonamiento matemático y el aprendizaje significativo.
	(123, 138, 139, 145)		IN 23: Después de que el estudiante ha logrado identificar, ordenar y relacionar las ideas matemáticas involucradas en el problema, entonces está apto para plantear contraejemplos, supuestos, hipótesis, conjeturas, entre otros que le permitan explicar el comportamiento de la realidad. Además, todo lo planteado se va enriqueciendo a medida que se resuelve la situación, de tal modo que, por ejemplo, al final del problema se acepta o rechaza la hipótesis propuesta.	
	(124, 129, 132, 133, 134, 135, 138, 139, 142, 144, 145)		IN 24: El estudiante debe ser capaz de darle sustento a todas sus afirmaciones planteadas haciendo uso de argumentos sólidos que las verifiquen y validen. En este sentido, la capacidad de argumentar también supone evaluar una serie de argumentos propios y ajenos para explicarlos, comprobarlos, defenderlos y/o refutarlos. En la argumentación, los recursos didácticos pueden servir de motivadores para que los estudiantes se expresen con mayor confianza, claridad y experticia; potenciando así un aprendizaje significativo.	IN (23, 24, 26): Todas las acciones mentales implicadas en esta capacidad parten del establecimiento de relaciones entre distintas ideas matemáticas identificadas en la realidad. Estas relaciones permitirán plantear conjeturas e hipótesis que se
	(125, 127, 136, 137, 140)		IN 25: En esta capacidad el estudiante se apoya muy poco de los recursos externos, pero el poco uso que se le suele dar a estos puede ser muy	

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de la competencia de resolución de problemas	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
			beneficioso para razonar y argumentar sobre ideas matemáticas. El principal recurso externo con el que cuenta el estudiante es la realidad la cual tiene que explorar para observar sus fenómenos; y por ello, conviene introducir recursos didácticos cuando se actúe sobre dicha realidad para apoyar y potenciar el razonamiento matemático.	argumentarán a lo largo del proceso de resolución, para finalmente aterrizar en la creación de conclusiones.
	(126, 130, 132, 141, 142, 145)		IN 26: Todas las acciones realizadas en esta capacidad aterrizan en la creación de conclusiones respecto a la situación problemática. Estas conclusiones deben estar bien elaboradas y argumentadas porque han surgido de un largo proceso de razonamiento realizado por el estudiante a lo largo de toda la resolución del problema.	

Nota. Elaboración propia.

Tabla 9

Variable/Categoría: Actividades de enseñanza-aprendizaje

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de las actividades de enseñanza- aprendizaje	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
Clasificación de las actividades de enseñanza aprendizaje.	(146, 147, 148, 149, 150, 151).	(9, 20, 21) (2, 19, 25, 31)	IN 01: Existen actividades de enseñanza-aprendizaje que estimulan la cognición, fortaleciendo el pensamiento y el análisis de información para lograr un nivel más rico de aprendizaje de los conocimientos referidos a los campos temáticos del área.	IN (01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08): Hay actividades de enseñanza-aprendizaje que se centran en lo que logran en el estudiante (clasificación por categorías) y otras que se centran en la sesión de aprendizaje (clasificación por etapas); pero ambas son importantes, por lo que las dos deben considerarse al momento de clasificar una actividad de enseñanza-aprendizaje.
	(152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159).		IN 02: Existen actividades de enseñanza-aprendizaje que estimulan la afectividad ya que influyen en el corazón del aprendiz. De este modo se educa la inteligencia emocional, sentimientos, valores y motivaciones; y esto no consiste en la mera adquisición de información, sino en la demostración del concepto llevado a la realidad, es decir, se aprende con el ejemplo.	
	(160, 161, 162, 163, 164, 165).		IN 03: Existen actividades de enseñanza-aprendizaje que estimulan la buena conducta gracias a la formación de hábitos, lo cual se consigue con la repetición de acciones y la motivación o refuerzo de conductas deseables. Sin embargo, este aprendizaje se da de manera lenta y gradual ya que demanda mucha práctica.	IN (01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08): Las actividades de enseñanza-aprendizaje se pueden clasificar en 15 tipos, que surgen de combinar la clasificación por categorías con la clasificación por etapas. Estos 15 tipos son: actividades para la cognición/motivación, actividades para la cognición/saberes previos, actividades para la cognición/desarrollo, actividades para la cognición/consolidación,
	(166, 167, 168, 169).		IN 04: Existen actividades de enseñanza-aprendizaje que son apropiadas introducir al inicio de una sesión de aprendizaje ya que captan fácilmente el interés del estudiante y por ende lo motivan a aprender. Con estas actividades se pretende mostrarle al estudiante la utilidad que tienen los campos temáticos en situaciones cotidianas reales, y cómo el tema de estudio se puede vincular con su entorno o vida escolar.	

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de las actividades de enseñanza- aprendizaje	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
	(170, 171, 172, 173, 174, 175).		IN 05: Existen actividades de enseñanza-aprendizaje que facilitan la recolección de saberes previos, por lo cual deben de ser introducidas al inicio de una sesión de aprendizaje. El propósito es determinar si el estudiante está en condiciones de iniciar un proceso de aprendizaje, es decir, saber con qué saberes cuenta y de qué saberes carece para lograrlo. Para lograrlo el docente debe valerse de estrategias que le permitan recolectar información sobre los saberes previos de los estudiantes.	actividades para la cognición/necesidades educativas especiales, actividades para la afectividad/motivación, actividades para la afectividad/saberes previos, actividades para la afectividad/ desarrollo, actividades para la afectividad/consolidación,
	(176, 177, 178, 179).		IN 06: Existen actividades de enseñanza-aprendizaje que estimulan el proceso de adquisición de nuevos conocimientos y, por ende, deben ser introducidas en el desarrollo de una sesión de aprendizaje. Estas actividades permiten conocer conceptos, facilitar procedimientos, y mejorar actitudes con el fin de desarrollar el análisis cualitativo, la formulación de hipótesis y un diseño experimental.	actividades para la afectividad/necesidades educativas especiales, actividades para la conducta/motivación, actividades para la conducta/saberes previos, actividades para la conducta/desarrollo, actividades para la conducta/consolidación, actividades para la conducta/necesidades educativas especiales.
	(180, 181, 182, 183, 184).		IN 07: Existen actividades de enseñanza-aprendizaje que son de gran utilidad para sintetizar un tema aprendido, evaluar los aprendizajes de los estudiantes, contrastar ideas nuevas con ideas previas, y ayudar a elaborar conclusiones para reestructurar los esquemas cognitivos del aprendiz; por tal motivo, conviene introducirlas en el cierre de una sesión de aprendizaje.	IN (01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08): Debido a que esta propuesta pedagógica es para el área de matemática, para desarrollar la competencia de resolución de problemas, y para estudiantes de
	(185, 186, 187).		IN 08: Existen actividades de enseñanza-aprendizaje orientadas a atender las necesidades educativas especiales, ya sea en estudiantes con muchas dificultades en la adquisición de conocimientos, estudiantes talentosos, o estudiantes que buscan recuperar su nivel académico. De preferencia, estas	

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de las actividades de enseñanza- aprendizaje	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
			actividades se dan de manera personalizada.	EBR; entonces, no se incluirán actividades de todos los 15 tipos. Los tipos que se incluirán son 4: actividades para la cognición/motivación, actividades para la cognición/saberes previos, actividades para la cognición/desarrollo, y actividades para la cognición/consolidación. IN (01, 04, 05, 06, 07): La propuesta pedagógica estará compuesta por cuatro tipos de actividades de enseñanza-aprendizaje, los cuales se caracterizan por desarrollar el pensamiento crítico y el análisis de información en cualquiera de los momentos de una sesión de aprendizaje (inicio, desarrollo o cierre).
Criterios para la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje.	(188, 189, 190, 191, 224, 225, 218).		IN 09: Un criterio de selección de las actividades de enseñanza-aprendizaje debe tomar en cuenta el nivel de estudio de los estudiantes, pues no se pueden llevar a cabo actividades que resulten muy complicadas o fáciles para los estudiantes y esperar buenos resultados en los aprendizajes. Es decir, este criterio toma en cuenta la edad y las habilidades de los estudiantes, con el fin de seleccionar actividades que estimulen su zona de desarrollo próximo.	IN (09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16): Para realizar una adecuada selección de actividades de enseñanza-aprendizaje se debe tener presente cuatro criterios. Estos son: criterio de adecuación a los estudiantes, criterio de coherencia con el propósito de la

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de las actividades de enseñanza- aprendizaje	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
	(192, 193, 194, 222, 223, 219).		IN 10: Un criterio de selección de actividades de enseñanza-aprendizaje debe tomar en consideración el propósito de la sesión o los desempeños que se van a trabajar, y vincularse a estos en todo momento. En este sentido, queda descartada cualquier actividad que no sea adecuada para alcanzar el objetivo de aprendizaje, aunque esta pueda resultar muy atractiva.	sesión, criterio de secuenciación didáctica, y criterio de factibilidad.
	(195, 196, 197, 198, 199, 200, 222, 223, 220).		IN 11: Un criterio de selección de actividades de enseñanza-aprendizaje debe tomar en cuenta el momento de la sesión en la que serán implementadas. Esto debido a que habrá actividades que deberían ser incluidas en la parte inicial, otras en el desarrollo, y otras en el cierre de una sesión; ya que en dicho momento la actividad tiene mejores beneficios. Las características de las propias actividades ayudarán a determinar en qué momento deben ser incluidas, pues algunas son de gran ayuda para recolectar saberes previos, para motivar, para facilitar la adquisición de conocimientos, para sintetizar la información, etc.	IN (09, 16): Criterio de adecuación a los estudiantes: Una actividad de enseñanza-aprendizaje cumple con este criterio de selección si se adecúa al nivel académico de los estudiantes (edad mental) y para ello toma en consideración sus capacidades y sus experiencias previas de aprendizaje.
	(201, 202, 203, 204, 205, 206, 221).	(1, 3, 4, 7, 8, 13, 14, 23, 24, 37, 38, 40) (2, 19, 25, 31)	IN 12: Un criterio de selección de actividades de enseñanza-aprendizaje debe tomar en cuenta los recursos didácticos con los que se dispone para la implementación de la misma. Un recurso didáctico se puede integrar a una actividad si no representa un obstáculo para el profesor (este sabe utilizarlo y lo puede conseguir fácilmente); caso contrario, el profesor debe ingeniárselas para reemplazar dichos recursos didácticos sin que esto lo aleje del propósito de la actividad.	IN (10, 13): Criterio de coherencia con el propósito de la sesión: Una actividad de enseñanza-aprendizaje cumple con este criterio de selección si en todo momento va encaminada a lograr el propósito de aprendizaje establecido previamente, esto supone, que se adecúe a los desempeños y al campo temático seleccionado.
	(207, 208, 209, 222, 223, 219).		IN 13: Un criterio de selección de actividades de enseñanza-aprendizaje debe hacer referencia a la coherencia existente	IN (11, 14): Criterio de secuenciación didáctica: Una actividad de enseñanza-

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de las actividades de enseñanza- aprendizaje	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
	(210, 211, 212, 222, 223, 220).		entre la misma y los aprendizajes esperados en los estudiantes. En este sentido, una actividad es coherente si permite lograr los objetivos de aprendizaje planteados, vinculándose a los desempeños y al campo temático establecido.	aprendizaje cumple con este criterio de selección si es adecuado desarrollarla en el momento de la sesión que se pretende implementar (inicio, desarrollo o cierre); y es en dicho momento donde la actividad logra mejores beneficios para los estudiantes; además, debe estar en relación con un conjunto más amplio de actividades para que todas se desarrollen de manera secuenciada.
	(213, 214, 221).	(1, 3, 4, 7, 8, 13, 14, 23, 24, 37, 38, 40) (2, 19, 25, 31)	IN 14: Un criterio de selección de actividades de enseñanza-aprendizaje debe hacer referencia a la secuencia didáctica de la cual forma parte dicha actividad. Así pues, una actividad adquiere mayor valor como parte integrada de una sesión de aprendizaje por lo que se debe analizar en qué momento de esta sesión debe ser incluida. La idea es elaborar una adecuada secuencia didáctica que facilite la adquisición de aprendizajes.	IN (12, 15): Criterio de factibilidad: Una actividad de enseñanza-aprendizaje cumple con este criterio de selección si en la misma se pretenden incluir recursos didácticos fáciles de conseguir y cuyo uso sea dominado por el profesor; en otras palabras, los recursos didácticos no representan un obstáculo para el desarrollo de la actividad.
	(215, 216, 217, 224, 225, 218).		IN 16: Un criterio de selección de actividades de enseñanza-aprendizaje debe considerar si esta se adecúa o no a los estudiantes a quienes va dirigida. Es decir, se toma en cuenta saberes previos y capacidades de los estudiantes para que estos puedan apropiarse de los aprendizajes que con la actividad se pretende impartir. Así mismo, se debe tener presente la experiencia que el profesor tiene desarrollando dicha actividad.	
Criterios para el diseño de actividades de	(226, 227, 264)	(4, 5, 6, 7, 13, 22, 24). (2, 19, 25,	IN 17: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje debe apuntar a que los estudiantes disfruten lo aprendido y que realicen un buen análisis de la información,	IN (17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26): Los criterios propuestos para el diseño de actividades de

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de las actividades de enseñanza- aprendizaje	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
enseñanza- aprendizaje.		31)	pues la actividad no debe resultar tediosa o monótona para el estudiante. Además, hay que tener siempre presente que los recursos didácticos preparados y organizados apropiadamente, hacen más atractivo el proceso de aprendizaje. IN 18: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje debe tener en consideración las condiciones reales del lugar donde se implementará dicha actividad y promover el conocimiento del estudiante con el entorno. Así pues, el diseño de una actividad debe permitir que el alumno interprete y comprenda la realidad y se desenvuelva en ella adecuadamente con el uso de recursos didácticos que enriquezcan el desarrollo de la actividad. IN 19: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje debe ser la descripción precisa de la competencia y el campo temático a desarrollar, de tal forma que todas las acciones realizadas en la actividad se orienten al desarrollo de aquellos. Así mismo, los recursos didácticos deben representar una ventaja para el aprendizaje del campo temático y de la competencia seleccionada, es decir, deben responder a aquello que se pretende enseñar. IN 20: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje debe ser el especificar la edad y el grado de estudios de los estudiantes, con el fin de tener una idea más acertada respecto a sus saberes previos. En este sentido, se propone que, de ser necesario, se coloque en la actividad una lista de conocimientos previos que debería tener el estudiante antes de desarrollarla, para que el docente pueda realizar un repaso de dicho tema previo.	enseñanza-aprendizaje se han sintetizado en la siguiente lista: • Motivación (IN 17, 18, 21): El diseño de una actividad de enseñanza-aprendizaje debe despertar el interés por aprender en los estudiantes, para ello, es posible apoyarse de distintos factores tales como: recursos y materiales didácticos, condiciones reales del lugar donde se implementa la actividad, situaciones propias del contexto en el que viven los estudiantes, y de las ideas erróneas implicadas al tema a aprender que puedan tener los estudiantes. • Unidad y flexibilidad (IN 23, 24): El diseño de una actividad de enseñanza-aprendizaje debe permitir que dicha actividad se conecte sistemática y gradualmente a un conjunto integrado de otras actividades con un mismo propósito común a largo plazo. Además, esta actividad debe de ser flexible,
	(228, 229, 265, 266, 278, 279).			
	(230, 232, 267, 268, 270).			
	(230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 247, 248, 269).			

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de las actividades de enseñanza- aprendizaje	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
	(237, 238, 239, 271).		IN 21: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje debe ser el permitir que el estudiante identifique sus posibles errores. Este reconocimiento de errores se logra si el estudiante cuestiona su realidad y sus ideas previas para corregirlas o comprobarlas; permitiendo de este modo un desequilibrio en sus conocimientos previos. En este sentido, los recursos didácticos son una gran herramienta para que el estudiante interactúe con su entorno y pueda cuestionar lo que sabe sobre este.	con posibilidades de ser reajustada y con la posibilidad de que se haga referencia a otros conocimientos si así lo requiere.
	(240, 241, 244, 245, 246, 262, 272, 274, 275).		IN 22: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje debe ser el colocar el objetivo de aprendizaje de manera clara, precisa y coherente, para que los estudiantes puedan saber lo que van a lograr y hacia dónde apunta su aprendizaje. De este modo, todas las acciones realizadas en una actividad y en un conjunto de actividades deben apuntar a un mismo propósito porque de eso depende su unidad. Además, se debe especificar la competencia, capacidades, desempeños y campo temático a desarrollar durante la actividad; y de ser necesario también el producto que el estudiante debe lograr.	Información a incluir en la actividad (IN 19, 20, 22, 25, 26): La información de la actividad de enseñanza-aprendizaje que se debe incluir en el diseño de la misma es la siguiente: nombre de la actividad; competencia, capacidad, desempeño y campo temático a desarrollar; objetivo de aprendizaje; edad y/o grado de estudios de los estudiantes; tiempo para la realización de la actividad; recursos y materiales didácticos a utilizar; prerequisites para iniciar la actividad; descripción de la actividad; instrucciones; evaluación; y otra información que se crea conveniente agregar. Además, toda esta información se debe describir de manera clara, coherente,
	(242, 243, 277).		IN 23: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje debe permitir la flexibilidad en el desarrollo de esta, de tal modo que se puedan enseñar distintos contenidos del área. En este sentido, los recursos didácticos pueden ser de mucha utilidad ya que de ellos se desligan muchos conocimientos e involucran procedimientos que pueden estimular determinadas actitudes en los estudiantes; a favor del aprendizaje de la matemática.	
	(249, 250, 276,		IN 24: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-	

Dimensiones/ Subcategorías	Unidades de análisis de las actividades de enseñanza- aprendizaje	Unidades de análisis de recursos didácticos	Ideas núcleo	Resultados
	283).		aprendizaje debe garantizar que las actividades estén integradas de manera sistemática y gradual; para ello, se debe hacer una buena elección de la actividad con los criterios de selección ya mencionados anteriormente.	precisa y ordenada.
	(251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 263, 273, 280, 281, 282, 283).		IN 25: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje debe establecer un esquema que facilite identificar la estructura de dicha actividad. Esta estructura se puede representar en base a fichas o plantillas que permitan plasmar de manera ordenada y clara la información sobre la actividad. La información que se debe colocar en estas fichas o plantillas es: nombre de la actividad, objetivos de la actividad, competencia y desempeño a desarrollar, tiempo para la realización de la actividad, recursos y materiales didácticos a utilizar, prerrequisitos para iniciar la actividad, descripción de la actividad, instrucciones, evaluación, y otra información que por características particulares de la actividad se considere conveniente agregar.	Estructura de la actividad (IN 25): Se sugiere utilizar el formato de la estructura de una actividad de enseñanza aprendizaje que se muestra en la Figura 22 y en la Figura 23.
	(259, 260, 261).		IN 26: Un criterio para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje debe especificar el modo en el que los estudiantes serán evaluados. El modo de evaluación debe ser informado a los estudiantes, además, este ha de ser lo más objetivo posible (se recomienda el uso de rúbricas).	

Nota. Elaboración propia.

Figura 22

Propuesta de ficha general de una actividad de enseñanza-aprendizaje

FICHA GENERAL DE UNA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE			
Actividad de enseñanza aprendizaje N°# Nombre de la actividad			
Tipo de actividad: (de los criterios para la clasificación de actividades)			
Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Campo temático	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Capacidad 1. • Capacidad 2.			Evidencia de aprendizaje. Instrumento de evaluación.
- Dirigida a estudiantes de _____ grado de secundaria. - Objetivo de aprendizaje: - Duración de la actividad: - Momento de implementación de la actividad: (Inicio, desarrollo o cierre)			
Prerrequisitos			
Saberes previos		Recursos didácticos	

Nota. Elaboración propia.

Figura 23

Propuesta de ficha específica de una actividad de enseñanza-aprendizaje

FICHA ESPECÍFICA DE UNA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE
Nombre de la actividad
- Descripción de la actividad. - Instrucciones y sugerencias para el desarrollo de la actividad. - Espacio utilizado.
Nota: Esta ficha debe ser muy flexible ya que depende de cada actividad, pero no deben faltar los tres aspectos que se describen en esta ficha.

Nota. Elaboración propia.

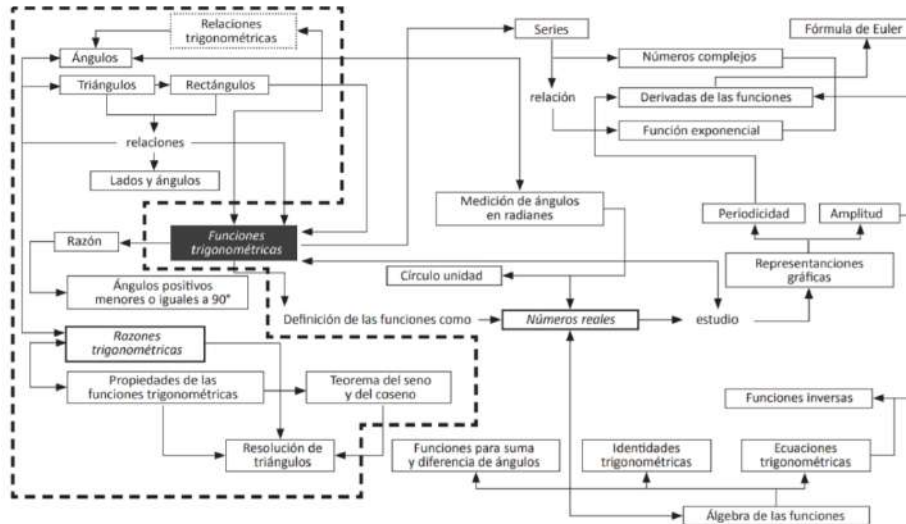
4.2 Análisis de contenido sobre el campo temático de razones trigonométricas

Este apartado tiene como eje principal el estudio realizado por Arenas et al. (2014), pues su investigación realiza un análisis didáctico de las razones trigonométricas, el cual incluye un análisis de contenido de las razones trigonométricas. Los autores mencionan que, para realizar cualquier análisis de contenido en cualquier tema de matemática, este se debe configurar en base a tres organizadores del currículo; estos son, la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología. Los autores ya realizaron el análisis de contenido de manera ordenada y objetiva en cada uno de estos tres aspectos, y sus resultados han sido los que se mencionan a continuación. Además, es conveniente tomar dichos resultados para sustentar el diseño de las actividades de enseñanza-aprendizaje que componen la propuesta pedagógica producto de este estudio.

a) Estructura conceptual de las funciones trigonométricas

Figura 24

Estructura conceptual general de las funciones trigonométricas

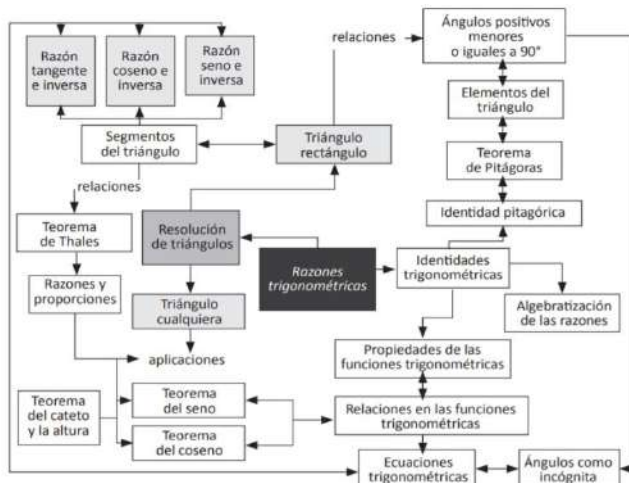


Nota. Extraído del estudio hecho por Arenas et al. (2014, p. 364).

Como se aprecia en la Figura 24, el campo temático de razones trigonométricas pertenece a un concepto más amplio denominado funciones trigonométricas. Como mencionan los autores, en el esquema se distinguen dos focos principales, el primero hace referencia al desarrollo de las razones trigonométricas y el segundo a la construcción de las funciones trigonométricas. Es de interés para este estudio centrarse en el primer foco, ya que este es el campo temático que se abordará; de este modo se obtiene la estructura conceptual de las razones trigonométricas plasmada en la Figura 25.

Figura 25

Mapa conceptual del contenido temático de razones trigonométricas



Nota. Extraído del estudio hecho por Arenas et al. (2014, p. 365).

Continuando con el análisis de contenido, en todo campo temático de matemática se puede identificar una estructura conceptual en la cual se distinguen dos campos, uno conceptual y otro procedimental. En el primero se abordan unidades de información que se relacionan con las razones trigonométricas (hechos), las relaciones del conjunto de los hechos (conceptos), y la relación entre los conceptos (estructuras conceptuales). En el segundo se hace referencia al procesamiento de los hechos y manipulaciones de los símbolos (destrezas), los razonamientos que se ejecutan sobre los conceptos (razonamientos), y las estrategias que se ejecutan sobre la estructura conceptual (estrategias). Los autores aclaran que ambos campos tienen la misma importancia. En la Tabla 10 se organizan ambos campos de las razones trigonométricas en sus diferentes niveles.

Tabla 10

Campo conceptual y procedimental de las razones trigonométricas

Campo conceptual		Campo procedimental	
Hechos		Destrezas	
Triángulos. Altura de un triángulo. Elementos de un triángulo rectángulo: catetos, hipotenusa y ángulos. Semejanza y congruencia. Medida del ángulo: radianes y grados. Medida de una magnitud. Clase de ángulos.		Identificar los elementos geométricos de un sólido (vértices, aristas, caras, medidas angulares diagonales, entre otros). Identificar los catetos, la hipotenusa y el ángulo de elevación y depresión de un triángulo rectángulo. Construir las alturas de un triángulo. Realizar conversiones de unidades de medida (radianes a grados). Medir las magnitudes y el ángulo. Clasificar los triángulos a partir de sus ángulos y lados. Calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Interpretar y relacionar los valores numéricos obtenidos, como la solución de problemas trigonométricos. Usar los recursos tecnológicos (calculadora, tablas, entre otros).	
Conceptos		Razonamientos	
Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Relaciones entre razones trigonométricas.		Deductivo: Aplicación de teoremas a partir de la evaluación de los datos conocidos y desconocidos de un triángulo rectángulo.	
Estructura		Estrategias	
Razones trigonométricas		Resolución de triángulos rectángulos conociendo algunos datos (lados y ángulos). Resolución de cualquier triángulo conociendo algunos datos (lados y ángulos). Resolución de cualquier triángulo, usando la medida de la altura para realizar triángulos rectángulos.	

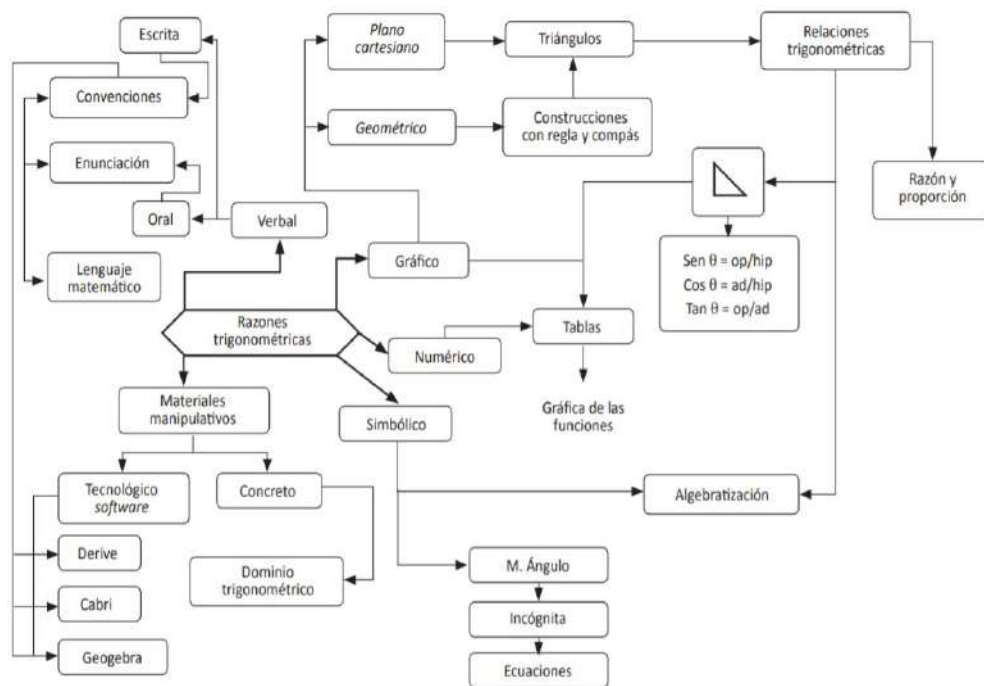
Nota. Extraído del estudio hecho por Arenas et al. (2014, pp. 366-367).

b) Sistemas de representación de las razones trigonométricas

Para el campo temático de razones trigonométricas, los autores han identificado cinco sistemas de representación que se le puede dar a un mismo concepto. Estos sistemas de representación son el verbal, el simbólico, el numérico, el gráfico y el manipulativo. La relación entre estos sistemas de representación se expresa en el esquema de la Figura 26.

Figura 26

Sistemas de representación de las razones trigonométricas

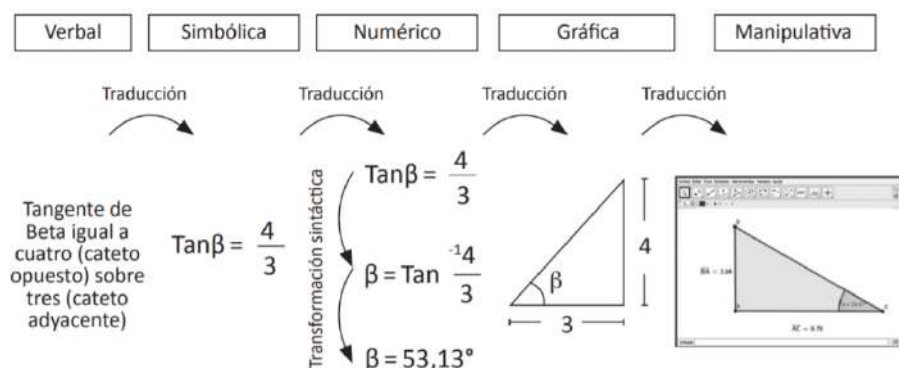


Nota. Extraído del estudio hecho por Arenas et al. (2014, p. 368).

En este campo temático existen dos relaciones importantes entre los sistemas de representación. La primera es la traducción entre sistemas de representación, es decir, el tránsito de un sistema a otro; la segunda es la transformación sintáctica, es decir, la transformación de elementos en el mismo sistema de representación. Estos cambios se pueden apreciar mejor en la Figura 27.

Figura 27

Relaciones entre los sistemas de representación de las razones trigonométricas



Nota. Extraído del estudio hecho por Arenas et al. (2014, p. 372).

c) Fenomenología de las razones trigonométricas

“La fenomenología consiste en describir cuáles son los fenómenos que son organizados por los conceptos matemáticos y determinar la relación que tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos” (Arenas et al., 2014, p. 372). Para el estudio de la fenomenología en las razones trigonométricas, un punto importante a tener en cuenta son los contextos, ya que estos agrupan características de los fenómenos desde un punto de vista matemático. Pues la variedad de fenómenos en los que pueden ser usados los conocimientos matemáticos se identifican a partir de la utilidad que puede tener su estructura matemática en una situación real, es decir, los fenómenos surgen de situaciones reales.

Para una mejor comprensión de lo que es la fenomenología, se ha establecido relaciones entre los fenómenos, subestructuras, situaciones y contextos implicados en el campo temático de las razones trigonométricas. Estas relaciones se muestran en la Tabla 11.

Tabla 11

Relación entre fenómenos, subestructuras, situaciones y contextos

Fenómeno	Subestructura	Situación	Contexto
Determinación de la altura de un poste conociendo la distancia de la sombra que proyecta en el suelo y el ángulo de elevación.	$\cos \theta = \frac{CA}{h}$	Personal	Datos conocidos: CA y h Datos conocidos: el ángulo y CA
Ángulo de referencia para la coordenada polar de un punto.	$\tan \theta = \frac{CO}{CA}$	Educativa	Datos conocidos: CO y CA Datos conocidos: el ángulo y CO
Cálculo de la componente vectorial de un vector a partir del ángulo director y la normal.	$\sin \theta = \frac{CO}{h}$	Científica	Datos conocidos: CO y h Datos conocidos: el ángulo y CO

Nota. Extraído del estudio hecho por Arenas et al. (2014, p. 373).

En resumen, los resultados obtenidos en el estudio realizado por Arenas et al. (2014), donde se usó la técnica de análisis de contenido aplicada al campo temático de las razones trigonométricas son los siguientes:

- Se obtuvo un esquema que describe la estructura conceptual a la cual pertenece el campo temático de razones trigonométricas. Además, se obtuvo un mapa conceptual que describe específicamente la estructura del campo temático de razones trigonométricas y organiza todos los conceptos matemáticos involucrados en él.
- Se estableció una relación entre el campo conceptual y el campo procedimental, campos que componen la estructura conceptual de las razones trigonométricas.
- Se identificaron cinco sistemas de representaciones en las que se puede expresar un mismo concepto del contenido temático de razones trigonométricas. Además, se explicó en qué consiste trasladar elementos de un sistema de representación a otro (traducción), y transformar elementos dentro de un mismo sistema de representación (transformación sintáctica).
- Se identificaron fenómenos en los cuales pueden usarse los conocimientos matemáticos sobre el campo temático de razones trigonométricas, y su relación con las subestructuras y contextos que puedan surgir en la resolución de problemas de situaciones reales.

Estos resultados son necesarios para esta investigación porque proporciona una comprensión adecuada de los conceptos y procedimientos involucrados en dicho campo temático por lo que el docente podrá enfocar sus esfuerzos en desarrollar aspectos específicos de este. Así mismo, estos resultados también facilitarán la distribución de todos los conocimientos necesarios para dominar el campo temático de las razones trigonométricas en las diferentes actividades de enseñanza-aprendizaje que se diseñarán. De este modo, una actividad de enseñanza-aprendizaje se centrará en permitir desarrollar conocimientos específicos, y distribuir los otros conocimientos entre las otras actividades. Estos resultados también dejan en claro la relación existente entre los diversos contextos y el campo temático de las razones trigonométricas, lo cual implica lograr una matematización de la realidad y otros procedimientos propios de la competencia de resolución de problemas.

4.3 Listado de estrategias heurísticas

El siguiente listado comprende una serie de estrategias heurísticas que se sugieren utilizar para facilitar el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. La propuesta de estas estrategias heurísticas es objetiva ya que surge de haber realizado la técnica de análisis de contenido sobre las categorías “Competencia de resolución de problemas” y “Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática”; y sobre el campo temático de razones trigonométricas. En adición, es conveniente recordar una definición de estrategias heurísticas vinculada a la resolución de problemas, pues, estas son reglas, métodos o técnicas generales que favorecen el avance del proceso de resolución de

problemas (Fernández, 2020). Otro autor que vincula a la resolución de problemas con la heurística es Polya (1981), pues este menciona que la heurística “trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso” (p. 182). De lo mencionado se puede afirmar que las estrategias heurísticas favorecen el proceso para llegar a la solución de un problema, y suponen acciones mentales que sean de utilidad para dicho propósito.

Particularmente, las estrategias heurísticas que se presentarán son propias del área de matemática y se pretende que sean usadas por los estudiantes en la resolución de problemas que involucre el campo temático de razones trigonométricas. El hecho de que el estudiante pueda usar una u otra estrategia heurística dependerá de las características del problema y de la actividad en la que se incluya. Entonces, las estrategias heurísticas que conforman este listado son las siguientes:

- a. Hacer distintas representaciones del problema: Existen distintas representaciones en las que se puede expresar un mismo concepto o idea matemática. Por ello, si el modo en el que este concepto o idea matemática es presentado originalmente resulta difícil de trabajar, entonces el estudiante puede transitar entre distintas representaciones y trabajar con la que mejor le convenga. Para el campo temático de razones trigonométricas estas representaciones pueden ser gráficas, verbales, simbólicas, numéricas o manipulativas.
- b. Construir modelos matemáticos: En ocasiones, los estudiantes inmediatamente después de conocer el problema tratan de darle una respuesta por mera intuición. Muchos optan por no hacer ningún cálculo, no plasmar ecuaciones o no hacer gráficas que le ayuden a expresar mejor el problema. En tal caso, es de gran ayuda matematizar la situación original, de tal modo que se obtenga un modelo matemático que sea más trabajable y entendible para el estudiante que resuelve el problema. Para conseguir este modelo matemático es necesario realizar abstracciones y simplificaciones de la situación original, pues lo que se pretende es plasmar como una unidad solamente los datos necesarios del problema.
- c. Contrastar resultados: Un buen medio para comprobar si la solución de un problema (o parte de esta) es correcta, se realiza mediante el contraste de los resultados. Esto se puede realizar mediante comparaciones que permitan encontrar similitudes o diferencias entre las respuestas; así mismo, se puede evaluar la eficacia de un método u otro.
- d. Buscar un problema análogo al que se está resolviendo: En muchas ocasiones el estudiante se enfrenta a problemas muy similares, incluso algunos se presentan bajo un mismo contexto problemático, pero con datos numéricos diferentes. En tal caso, resulta de gran ayuda revisar el proceso de resolución de dichos problemas semejantes al que se está resolviendo, pues pueden dar pistas de cómo avanzar hacia la solución si es que el estudiante se ha atascado en el proceso. También es posible modificar el problema original para facilitar la búsqueda de

problemas análogos, esto se logra mediante la particularización y la generalización del problema.

- e. Descomponer y recomponer el problema: Un problema matemático es presentado como una unidad estructurada y compleja, por ello, en muchas ocasiones conviene descomponerlo en problemas más pequeños, pero sin perder de mira el objetivo final. De este modo, se da solución a pequeños componentes del problema general, los cuales si se recomponen brindan un mejor acercamiento a la solución final del problema.
- f. Utilizar una notación adecuada: Usar una adecuada notación para plasmar el proceso de resolución del problema ayuda a que este se realice de manera ordenada. En matemática, y especialmente en la trigonometría, se debe tener orden al resolver el problema, pues las expresiones numéricas suelen ser diferentes a las que se acostumbra a usar en el álgebra, por ejemplo.
- g. Ejemplificar: En ocasiones el problema matemático puede resultar muy complejo y abstracto para el estudiante, en ese caso, este se puede apoyar de ejemplos concretos o específicos para resolver el problema.
- h. Dibujar un esquema de la situación: Realizar un esquema de la situación problemática puede ayudar a visualizarla de manera más atractiva y organizada, de este modo, se facilitaría la comprensión del problema. Esto es diferente a la matematización ya que no se busca precisamente un modelo matemático para resolver, si no, una mejor forma de organizar la información inicial del problema.
- i. Razonamiento a la inversa: Este razonamiento consiste en hacer de cuenta que ya se tiene la solución del problema, de este modo, se empieza a dar solución desde el final. Si todo este razonamiento no cae en incoherencias y si reproduce las características iniciales del problema, entonces se ha hecho correctamente; sin embargo, se debe tener mucho cuidado y siempre tener en cuenta las particularidades de cada problema a solucionar.
- j. Ensayo-error: Esto consiste en hacer simulaciones, en probar posibles valores que satisfagan el proceso de resolución del problema hasta verificar que dicho valor dado satisfaga la solución final del problema. Es posible que se haga el intento con muchas posibles alternativas hasta llegar a encontrar la correcta, por ello, es importante reducir la cantidad de alternativas con las que se va a intentar.
- k. Buscar un patrón: Una característica presente en la mayoría de los problemas de matemática es la existencia de patrones, los cuales se deben identificar para dar solución a un problema.
- l. Analizar propiedades vinculadas al problema: Generalmente los problemas matemáticos se plantean en torno a un campo temático, por ello, es de gran ayuda identificar qué campo temático o tema en específico se está abordando en un problema para priorizar el uso de

propiedades vinculadas a este. Por ejemplo, si se sabe que un problema trata sobre las razones trigonométricas es muy probable que se utilice el teorema de Pitágoras.

- m. Reproducir tu comprensión del problema: Es recomendable verificar si el problema se ha comprendido o no, para ello, se puede intentar explicar el problema de manera oral o escrita. También se pueden realizar preguntas específicas tales como ¿qué datos me presenta el problema? ¿qué me piden hallar en el problema? ¿qué conocimientos usaré para resolver este problema?
- n. Evaluar la estrategia elegida: Antes de iniciar con el proceso de resolución del problema se debe pensar bien lo que se pretende realizar y analizar si el plan ideado es adecuado o no; pues, es una estrategia determinar la estrategia más fácil para resolver el problema.
- o. Plantear conjeturas, hipótesis, afirmaciones y/o argumentos sobre el proceso de resolución del problema: Esto requiere un pensamiento muy abstracto pues se deben establecer relaciones entre los diferentes conceptos, procesos, e ideas matemáticas involucradas en el problema.
- p. Hacer proyecciones: En geometría y trigonometría, las proyecciones son muy utilizadas porque ayudan a incluir elementos geométricos en el modelo matemático que se ha planteado resolver. Estos elementos geométricos no son fáciles de identificar y hay que ser muy hábiles para poder identificarlos mediante proyecciones.

4.4 Problemas sobre razones trigonométricas

Para el producto final que es una propuesta pedagógica, es necesario tener ideados problemas sobre razones trigonométricas que permitan el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. El planteamiento de estos problemas se hace de manera objetiva ya que se han realizado en base a los resultados del análisis de contenido sobre las categorías “Competencia de resolución de problemas” y “Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática”; y sobre el campo temático de razones trigonométricas. Así pues, estos problemas han sido creados especialmente para permitir el desarrollo de esta competencia abarcándose dicho campo temático; y, en su mayoría, que permitan el uso del gnomon, clinómetro y espejos como recursos didácticos motivadores y facilitadores del aprendizaje. Además, los problemas que se proponen serán integrados en las actividades de enseñanza-aprendizaje, con la adecuación respectiva a cada actividad. Los problemas propuestos son los siguientes:

- Problema 1.

Este problema ha sido elegido para introducir los recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) que serán usados por los estudiantes de manera transversal en toda la propuesta pedagógica. Con este problema, el estudiante podrá salir a recoger datos de la realidad y verificar su fiabilidad

cuando dé solución a las preguntas planteadas, esta recolección de datos la hará haciendo uso de los recursos didácticos.

Este es un problema abierto, es decir, no se dan datos numéricos para que el estudiante los opere y encuentre una respuesta, sino que se da apertura para que el estudiante plantee estrategias que crea conveniente para solucionarlo, que pueda replantearla en caso de ser necesario y que recolecte los datos que necesite según su plan ideado. Así mismo, el estudiante podrá realizar diagramas de la situación y podrá matematizarla antes y después de haber recogido datos, para posteriormente trabajar este modelo y obtener resultados. Este problema debe ir acompañado de preguntas que evidencien si el estudiante ha comprendido dicha situación y que pueda argumentar sus ideas matemáticas haciendo uso de un correcto lenguaje matemático.

Además, el estudiante pondrá a prueba sus conocimientos sobre ángulos de elevación y depresión, semejanza de triángulos, razones trigonométricas en triángulos rectángulos, y arcos de las razones trigonométricas; esto debido a que el problema se puede incluir en más de una actividad de enseñanza-aprendizaje.

Figura 28

Problema 1

El director de tu colegio desea cambiar la cuerda del asta de la bandera, pues ya no necesita sacarla y ponerla porque está empotrada con cemento en el piso. Pero, ha olvidado tomar medida de la altura. El asta ya está puesta y el director necesita este dato porque quiere comprar cuerda que sostendrá la bandera. Para ello, solicita apoyo a un estudiante del cuarto grado. ¿Cómo medirías la altura del asta?

Halla la altura del asta y el ángulo de elevación con el que se observa la cima del asta.

Nota. Elaboración propia.

– Problema 2.

Este problema es específicamente para abordar el tema de ángulos de elevación y de depresión, en el cual se haga uso de los recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos). Este problema representa una situación abierta, donde no se le pide al estudiante hallar ningún número como respuesta al problema, sino que haga representaciones del mismo y plantee argumentos que evidencie su comprensión de los conceptos y procedimientos involucrados. De este modo, se hace especial énfasis en desarrollar la matematización de la situación ya que realizará diagramas y modelos matemáticos que reproduzcan las condiciones del problema. Así mismo, el estudiante podrá establecer relaciones entre las variables dadas mediante un diagrama o modelo matemático que obtenga simulando usar cada uno de los recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos).

Figura 29**Problema 2**

Un soldado se encuentra haciendo guardia y vigila la zona desde una garita. A una distancia horizontal " d " desde el pie de la garita, está el pie de una pared de altura " h " (mayor que la altura de la garita); además la vista del observador está a una altura " y " con respecto del suelo.

En un momento del día, un pájaro se posiciona en lo alto de la pared y el soldado lo visualiza gracias a su binocular; luego un perrito se pone a descansar en el pie de la pared y el soldado también lo visualiza gracias a su binocular. La situación se bosqueja en la siguiente figura. Se le pide graficar los elementos presentes para el ángulo de elevación y para el ángulo de depresión.

¿Puede el soldado observar el pájaro con un ángulo de depresión? ¿cómo?



Nota. Elaboración propia.

– Problema 3.

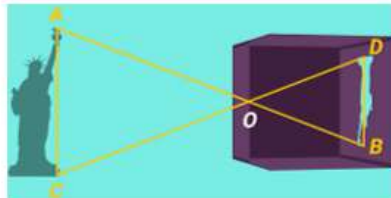
Este problema se ha creado para trabajar específicamente el teorema de Thales, pues, para resolver este problema el estudiante pondrá a prueba sus conocimientos sobre la semejanza de triángulos. En este problema se trabajan las cuatro capacidades de la competencia de resolución de problemas, pero especialmente, se trabaja la matematización de situaciones mediante la obtención y resolución de modelos matemáticos. Además, se incluye a los recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) para que el estudiante idee situaciones que involucre la aplicación del teorema de Thales.

Figura 30**Problema 3**

Hoy en día, casi siempre se cuenta con una cámara para fotografiar lo que queremos. Cuando enfocamos aquello que queremos fotografiar se forma un triángulo entre el objeto y el lente de la cámara (como se muestra en la figura).



Además, se sabe que la cámara fotográfica funciona gracias a un instrumento óptico llamado “cámara oscura”, este instrumento está formado por un recipiente cerrado y un pequeño agujero por el que entra una mínima cantidad de luz que proyecta en la pared opuesta la imagen que se ha encuadrado del exterior (como se muestra en la figura).



Sin embargo, en una cámara oscura tradicional la imagen se proyecta al revés. Esto es debido a que los rayos de luz siempre se propagan en línea recta. Por ejemplo, un rayo de luz va desde el punto A hasta el punto B, y otro rayo de luz va desde el punto C hasta el punto D; ambos pasando por el punto O. Si luego unimos con una recta el punto A con el punto C y el punto D con el punto B, entonces se forman dos triángulos.

Si se enfoca una estatua completa que se encuentra a 1000 metros de la cámara; y esta tiene una cámara oscura de 30 centímetros de largo, ¿cuánto será la altura real de la estatua si la altura de la imagen de la estatua en la cámara oscura es de 2,8 centímetros?

Crea situaciones en las que se aplique el teorema de Thales y se haga uso del gnomon, clinómetro y/o espejos para resolverlas.

Nota: Este problema ha sido extraído y adaptado de los aportes de Tekman education (2019).

Nota. Adaptado de los aportes de Tekman education (2019).

— Problema 4.

Este problema se ha creado específicamente para introducir el tema de razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos. El objetivo es que los estudiantes por sí mismos, descubran las relaciones existentes entre los ángulos y lados de un triángulo rectángulo. De este modo, después de realizar las mediciones a los lados y ángulos de los tres grupos de triángulos, los estudiantes encontrarán relaciones entre ellos que le permitan plantear afirmaciones al respecto usando un correcto lenguaje geométrico.

Figura 31**Problema 4**

Se tienen tres grupos de tres triángulos rectángulos. Con ayuda de una regla y de un transportador mide los lados y ángulos de los triángulos rectángulos para analizarlos y encontrar relaciones entre ellos. Responde a las siguientes interrogantes: ¿Qué características tienen los triángulos que pertenecen a un mismo grupo? ¿cómo deben ser los triángulos para que los cocientes entre sus lados tengan el mismo valor? ¿de qué depende que el valor del cociente de dos lados de un triángulo sea igual al de otro triángulo?

Nota: El docente debe entregar los triángulos rectángulos en cartulina y orientar al estudiante en el análisis de los lados y ángulos.

Nota. Elaboración propia.

– Problema 5.

Con este problema se puede desarrollar las cuatro capacidades de la competencia de resolución de problemas, pero especialmente se pretende potenciar la capacidad de “Elabora y usa estrategias”, pues el estudiante ideará diferentes estrategias y procedimientos para realizar diferentes comprobaciones sobre el teorema de Pitágoras. En principio este problema es abierto porque el estudiante será el que proponga diversos métodos para comprobar el teorema, pero luego el profesor recomendará realizar cuatro demostraciones para este teorema: demostración geométrica, demostración de Chou Pei Suan Ching, demostración de Leonardo Da Vinci, y una demostración algebraica.

Figura 32**Problema 5**

Piero tiene que resolver un problema donde necesita calcular la longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo, él no sabe cómo hacerlo y le pide ayuda a un compañero. Su compañero le dice que use el teorema de Pitágoras que dice: “En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”. Piero lo usa y el problema se soluciona muy rápido. Sin embargo, Piero quiere comprobar la veracidad de este teorema. ¿Cómo puedes ayudar a Piero a demostrar la veracidad del teorema de Pitágoras?

Se recomienda realizar demostraciones geométricas y/o algebraicas.

Nota. Elaboración propia.

– Problema 6.

Con este problema se puede desarrollar las cuatro capacidades de la competencia de resolución de problemas, pero especialmente se pretende potenciar las capacidades de “Matematiza situaciones” y “Comunica y representa ideas matemáticas”. De este modo, el estudiante relacionará

los lados y ángulos de triángulos rectángulos para representar las razones trigonométricas y luego elaborar un modelo matemático de la situación. Además, a lo largo del proceso de resolución, el estudiante expresará su comprensión sobre las razones trigonométricas usando un adecuado lenguaje geométrico. Este problema llevará al estudiante a usar las propiedades y relaciones que involucra a las razones trigonométricas y que ha aprendido a lo largo de esta propuesta pedagógica.

Figura 33

Problema 6

Se tiene un terreno en forma de triángulo rectángulo del cual se quiere calcular su perímetro, pero, lamentablemente no se cuenta con ningún instrumento de medida de longitud para ello. Sin embargo, se tienen los siguientes datos:

- La tangente del menor ángulo agudo es de $\frac{5}{12}$
- La diferencia entre los dos catetos es de 21m.

Nota. Elaboración propia.

— Problema 7.

Con este problema se puede trabajar las cuatro capacidades de la competencia de resolución de problemas y se puede hacer énfasis en la que se desee, esto debido a que el problema es abierto y no se dan datos numéricos para que se encuentre un valor correcto previamente establecido. La idea es enfrentar al estudiante a una situación problemática de contexto real con la cual puede interactuar y, con ayuda de instrumentos de medida (gnomon, clinómetro, espejos y/o cinta métrica), pueda recoger datos de la realidad que le ayuden a dar solución al problema. Respecto a los conceptos y procesos matemáticos involucrados, se puede decir que estos son sencillos y aborda el saber hallar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

La idea de que el estudiante elija el objeto cuya altura va a calcular, es para que él sea consciente de sus conocimientos y escoja la dificultad que él crea adecuada; y por un criterio de conveniencia, ya que no se conocen las características del colegio ni los objetos que hay allí. Por ello, el profesor puede indicar cualquier objeto que él estime conveniente para calcular su altura.

Figura 34*Problema 7*

Haciendo uso de los espejos, gnomon y el clinómetro calcula la altura de objetos en tu colegio, algunos de estos pueden ser: postes de luz, árboles, tanques de agua, edificios (pabellones), aulas, entre otros.

Elabora un diagrama para representar la situación utilizando cada uno de los instrumentos, luego, realiza tus cálculos y compara los resultados obtenidos con cada uno de los instrumentos. ¿Qué instrumento prefieres usar? ¿por qué?

Nota. Elaboración propia.

— Problema 8.

Este problema es similar al anterior, un problema con el que se puede trabajar todas las capacidades de la competencia de resolución de problemas y hacer énfasis en la que se desee. Igual que el problema 7, este es abierto y busca involucrar al estudiante en una situación de contexto real para que interactúe con ella y haga uso de instrumentos de medidas. Sin embargo, lo que lo distingue es que aumenta el grado de complejidad de la situación, pues el pie del objeto cuya altura debe ser encontrada no está en la misma horizontal que el observador; entonces, el estudiante deberá buscar relaciones y estrategias que le ayuden a llegar a la solución.

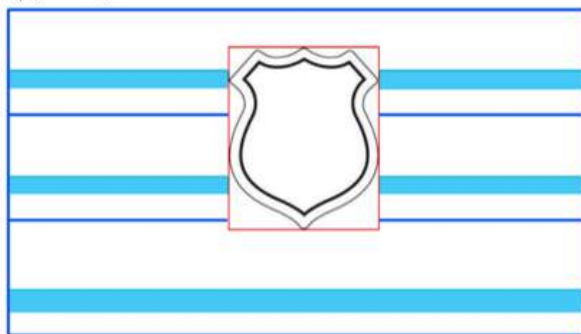
Respecto a los conceptos y procedimientos del campo temático de razones trigonométricas, todos los que se incluyen en este problema ya han sido abordados en los siete problemas anteriores. Pero, la solución no es sencilla y como ya se mencionó, habrá que realizar estrategias adecuadas que le permitan solucionarlo.

Figura 35**Problema 8**

Debido a que se acerca el aniversario de nuestra Institución Educativa, se ha colocado como adorno el escudo del colegio en el pabellón principal el cual tiene 3 pisos. Junto a este hermoso escudo se quiere seguir añadiendo más adornos, sin embargo, para que todo en conjunto se vea muy bien, es necesario conocer la altura del escudo que ya se colocó. El director del colegio no quiere sacarlo para medirlo porque demandaría mucho esfuerzo y tiempo, entonces, le pide a un estudiante de cuarto grado que calcule la altura de dicho adorno. ¿Cómo puedes dar solución al problema? ¿qué instrumentos necesitas? ¿qué conocimientos de matemática aplicarías?

La siguiente figura muestra un bosquejo simple de la vista frontal del pabellón del colegio, esto te ayudará a tener una idea de la ubicación del escudo.

Si no pudieses medir directamente la distancia horizontal que hay entre el observador y el pabellón del colegio, ¿cómo podrías hallar la altura del escudo?



Nota. Elaboración propia.

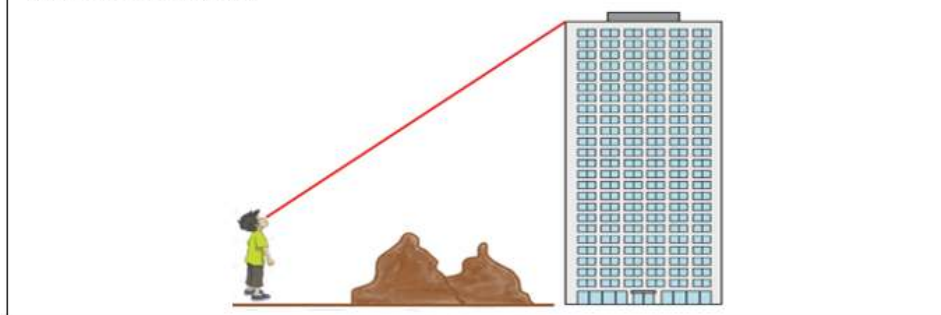
— Problema 9.

Con este problema se pueden trabajar las cuatro capacidades de la competencia de resolución de problemas y hacer énfasis en la que se desee. Al igual que el problema anterior no se dan datos numéricos, sino que se busca enfrentar al estudiante con una situación abierta y de contexto real para que interactúe con ella, recolecte datos que crea necesarios ayudándose de instrumentos de medida y encuentre la solución. Lo que caracteriza a este problema es la presencia de un obstáculo que impide al estudiante medir la distancia horizontal entre él y el objeto cuya altura se quiere calcular. Entonces, el estudiante deberá idear estrategias o procedimientos convenientes para resolver tal situación.

Respecto a los conceptos y procedimientos del campo temático de razones trigonométricas, todos los que se incluyen en este problema ya han sido abordados en los problemas anteriores. Pero, la solución no es sencilla y como ya se mencionó, habrá que realizar estrategias adecuadas que le permitan solucionarlo.

Figura 36**Problema 9**

Desde un punto en el suelo se observa la cima de un edificio. Se sabe también que no se puede acceder al pie del edificio porque hay obstáculos debido a una construcción, por ello, no se puede medir la distancia horizontal desde el observador hasta el pie del edificio. Se quiere calcular la altura del edificio y para ello puedes usar un instrumento (gnomon, espejos o clinómetro) y una cinta métrica si se cree conveniente. ¿Será posible calcular la distancia horizontal? La siguiente figura ilustra la situación.



Nota. Elaboración propia.

— Problema 10.

Con este problema se pueden trabajar las cuatro capacidades de la competencia de resolución de problemas y hacer énfasis en la que se desee. Al igual que el problema anterior no se dan datos numéricos, sino que se busca enfrentar al estudiante con una situación abierta y de contexto real para que interactúe con ella, recolecte datos que crea necesarios ayudándose de instrumentos de medida y encuentre la solución a la situación dada. Lo que caracteriza a este problema es la presencia de dos obstáculos, el primero es el mismo que se presentó en el problema 8 (el pie del obstáculo cuya altura se quiere medir está en una horizontal diferente a la del observador) y el segundo es el del problema 9 (hay un obstáculo que impide medir la distancia horizontal entre el obstáculo y el observador). Se observa que la dificultad es alta y el estudiante pondrá a prueba todo lo aprendido en esta propuesta pedagógica; entonces, para resolver la situación el estudiante deberá idear estrategias o procedimientos convenientes.

Figura 37**Problema 10**

En el mismo contexto del problema 8, se pide calcular la altura del escudo, pero en este caso hay un obstáculo que impide medir directamente la distancia horizontal entre el observador y el pabellón principal (un obstáculo como en el problema 9). Bajo esta nueva condición, ¿cómo puedes dar solución al problema? ¿qué instrumentos necesitas? ¿qué conocimientos de matemática aplicarías? ¿será posible calcular la distancia horizontal entre el observador y el pabellón principal?

Nota. Elaboración propia.

Para resolver los problemas descritos será necesario que el estudiante utilice estrategias heurísticas que puedan ser útiles para aprender el campo temático de razones trigonométricas y que a su vez permitan el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Por ello, en la siguiente tabla se sintetiza y organiza las estrategias heurísticas que se recomienda el estudiante use al resolver cada uno de los problemas.

Tabla 12

Estrategias heurísticas que se pueden incluir en los problemas creados

Estrategia heurística	Problema									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Hacer distintas representaciones del problema.	x	x			x	x	x	x	x	x
Construir modelos matemáticos.	x	x	x		x	x	x	x	x	x
Contrastar resultados.			x	x	x		x	x	x	x
Buscar un problema análogo al que se está resolviendo.						x	x	x	x	x
Descomponer y recomponer el problema.			x	x		x		x	x	x
Utilizar una notación adecuada.	x	x	x		x	x	x	x	x	x
Ejemplificar.		x		x	x					
Dibujar un esquema de la situación.	x	x	x		x	x	x	x	x	x
Razonamiento a la inversa.				x	x	x				
Ensayo-error.				x	x	x				
Buscar un patrón.				x						
Analizar propiedades vinculadas al problema.	x		x		x	x	x	x	x	x
Reproducir tu comprensión del problema.	x	x	x			x		x	x	x
Evaluar la estrategia elegida.			x		x	x	x	x	x	x
Plantear conjeturas, hipótesis, afirmaciones y/o argumentos sobre el proceso de resolución del problema.	x	x	x	x				x	x	x
Hacer proyecciones.			x		x		x	x	x	x

Nota. Elaboración propia.

4.5 Propuesta pedagógica

El listado de estrategias heurísticas, los problemas sobre razones trigonométricas y los resultados de la técnica de análisis de contenido, aterrizan en la obtención del diseño de una propuesta pedagógica integrada por 11 actividades de enseñanza-aprendizaje; por ello, es evidente que el proceso de obtención ha sido objetivo y ordenado. En el diseño de la propuesta pedagógica se ha creído conveniente no abordar todos los conceptos y procedimientos involucrados en el campo

temático de razones trigonométricas, sino que, solamente se abordó hasta las razones trigonométricas para ángulos agudos, pues, según los resultados de la técnica de análisis de contenido, este campo temático es demasiado amplio y la propuesta pedagógica sería demasiado extensa. Entonces, los conceptos y procedimientos que sí se han incluido han sido distribuidos en 11 actividades de enseñanza-aprendizaje, teniendo en cuenta también la distribución de los 10 problemas creados anteriormente.

En definitiva, la siguiente propuesta pedagógica junto con sus 11 actividades de enseñanza-aprendizaje constituyen el producto principal de este estudio. Por ello, es evidente mencionar que se diseñó con el fin de contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas en estudiantes de cuarto grado de secundaria, trabajando en el campo temático de razones trigonométricas.



TITULO DE LA PROPUESTA PEDAGÓGICA:
**“CALCULAMOS ALTURAS Y DISTANCIAS PARA ADQUIRIR CONOCIMIENTOS
 SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS”**

I. DATOS GENERALES:

Dirección regional de educación					
Unidad de gestión educativa local					
Institución Educativa					
Modalidad de enseñanza	Educación Básica Regular (EBR).				
Área	Matemática	Ciclo	VII	Grado	4°
Director					
Docente	Jean Pierre Gómez Espinoza.				

II. PROPÓSITOS DE APRENDIZAJE:

COMPETENCIA Y CAPACIDAD	DESEMPEÑOS PRECISADOS
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	- Expresa con dibujos, gráficos, material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre los ángulos, su implicancia en el cálculo de alturas y distancias, y sobre las propiedades de las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo; para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones. - Establece relaciones entre los atributos medibles de objetos reales y de un triángulo rectángulo, haciendo uso del teorema de Thales para dar origen a las razones trigonométricas. - Lee textos o gráficos que describen las propiedades de semejanza entre triángulos. - Plantea afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre objetos y formas geométricas, y entre formas geométricas. - Selecciona y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para establecer la relación métrica del teorema de Pitágoras en un triángulo, así como para determinar el área de formas bidimensionales. - Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para determinar la medida de ángulos, alturas y/o distancias inaccesibles, empleando unidades convencionales y razones trigonométricas. - Describe características de objetos reales o imaginarios, y las representa utilizando razones trigonométricas, ángulos de elevación y depresión.
	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE - Construcción del gnomon, clinómetro y espejos; y creación de situaciones en las que se puedan usar dichos instrumentos. - Gráfico de ángulos de elevación y depresión en una misma situación problemática. - Resolución de la ficha específica de la actividad 3. - Resolución de la ficha específica de la actividad 4. - Resolución de la ficha específica de la actividad 5. - Resolución de la ficha específica de la actividad 6. - Resolución de la ficha específica de la actividad 7. - Resolución de la ficha específica de la actividad 8.

		• Resolución de la ficha específica de la actividad 9. • Resolución de la ficha específica de la actividad 10. • Resolución de la ficha específica de la actividad 11.
	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	• Escalas de apreciación. • Rúbrica.
OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS		• Resuelve problemas de cantidad. • Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

III. SECUENCIA DE ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 1 (40 MINUTOS)	ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 2 (25 MINUTOS)
Título: “Construimos instrumentos que ayuden a medir ángulos, alturas y distancias”	Título: “Recordamos y graficamos ángulos de elevación y depresión”
Tema: Uso del gnomon, clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y distancias. Objetivo de aprendizaje: Construir un gnomon, un clinómetro y espejos para calcular ángulos, alturas y distancias. Descripción: • Se da una breve introducción del campo temático de razones trigonométricas y de las actividades que se desarrollarán en adelante. • Se presenta una situación problemática y los estudiantes expresan sus ideas para solucionarla. • El estudiante reproduce la situación haciendo uso de un dibujo, de manera textual u oralmente. • Se presentan los instrumentos de ayuda para el cálculo de alturas y distancias (gnomon, espejos y clinómetro), y se explica su funcionamiento. • Se explica cómo construir cada uno de los instrumentos mencionados. • El estudiante construye los instrumentos que usará. • El estudiante elabora un dibujo donde haga uso de cada instrumento simulando resolver la situación problemática inicial.	Tema: Ángulos de elevación y depresión. Objetivo de aprendizaje: Expresar la conveniencia de identificar ángulos de elevación y depresión en distintas situaciones. Luego, trazar estos ángulos dentro de un mismo problema haciendo referencia al uso del gnomon, clinómetro y los espejos como instrumentos de medida. Descripción: • Se explica lo que son los ángulos de elevación y depresión para recordar estos conceptos. • Se plantea una situación problemática. • El estudiante identifica y grafica los ángulos de elevación y depresión en la situación problemática. • El estudiante matematiza la situación problemática. • Se modifica la situación problemática para incluir el uso de los espejos. • El estudiante matematiza la situación modificada. • El estudiante analiza las situaciones respondiendo a una serie de preguntas.
ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 3 (30 MINUTOS)	ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 4 (40 MINUTOS)
Título: “Comprendemos el teorema de Thales”	Título: “Relacionando los lados del triángulo rectángulo”
Tema: Teorema de Thales. Objetivo de aprendizaje: Expresar la comprensión sobre un problema y representarlo haciendo uso de un modelo matemático que involucre conocimientos sobre el teorema de Thales. Descripción: • Se presenta una situación problemática para introducir el teorema de Thales.	Tema: Triángulos rectángulos - semejanza. Objetivo de aprendizaje: Medir los lados y ángulos de grupos de triángulos rectángulos para encontrar relaciones o similitudes entre ellos, además plantear afirmaciones sobre lo descubierto. Descripción: • Se recuerdan lo que son los triángulos rectángulos y se explican sus elementos.

• Se realizan una serie de preguntas para favorecer la comprensión de la situación. • Se explica el teorema de Thales. • Se explican los criterios para que exista la semejanza de triángulos. • El estudiante plantea y resuelve un modelo matemático de la situación problemática inicial. • El estudiante relaciona el teorema de Thales con el uso de los instrumentos (gnomon, espejos y clinómetro). • El estudiante crea situaciones problemáticas en las que se haga uso del teorema de Thales junto con un instrumento (gnomon, espejos o clinómetro). • El estudiante grafica las situaciones creadas.	• Se forman grupos de 3 a 5 integrantes. • Se entrega a cada grupo de estudiantes tres grupos de triángulos rectángulos de cartulina (los triángulos que pertenecen a un mismo grupo son semejantes entre sí). • El estudiante inicia el análisis de los lados y ángulos de los triángulos rectángulos. • El estudiante completa una tabla con la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos. • El estudiante completa una tabla con la medida de los lados de los triángulos rectángulos, y con el cociente que surge de dividir los lados entre sí. • El estudiante completa una serie de enunciados que le ayude a consolidar el análisis de los triángulos rectángulos. • El estudiante plantea afirmaciones sobre la relación que hay entre los lados y los ángulos de triángulos rectángulos semejantes.
ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 5 (60 MINUTOS) Título: “Demostramos el teorema de Pitágoras”	ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 6 (45 MINUTOS) Título: “Representamos razones trigonométricas en triángulos rectángulos”
Tema: Teorema de Pitágoras. Objetivo de aprendizaje: Comprender el teorema de Pitágoras como un método para resolver triángulos rectángulos y demostrar su veracidad utilizando diversas demostraciones. Descripción: • Se presenta una situación problemática que motive a los estudiantes a demostrar la veracidad del teorema de Pitágoras. • Se realiza la demostración geométrica del teorema de Pitágoras. • Se realiza la demostración de Chou Pei Suan Ching del teorema de Pitágoras. • Se realiza la demostración de Leonardo Da Vinci del teorema de Pitágoras. • Se realiza la demostración algebraica del teorema de Pitágoras.	Tema: Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Objetivo de aprendizaje: Representar las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo después de establecer relaciones entre sus lados y ángulos. Luego, resolver problemas aplicando lo aprendido. Descripción: • Se recuerda la situación problemática que se abordó en la actividad 1, pero en este caso el propósito es encontrar la altura del asta. • Se presentan las razones trigonométricas y cómo se identifican en los triángulos rectángulos. • El estudiante expresa las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. • Se dan a conocer los triángulos rectángulos notables. • Se plantea una situación problemática donde el estudiante ponga a prueba sus conocimientos sobre razones trigonométricas. El estudiante comprende la situación, la matematiza y la resuelve. • El estudiante retoma la situación problemática inicial y la resuelve.

ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 7 (30 MINUTOS) Título: “Ángulo como incógnita en razones trigonométricas”	ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 8 (30 MINUTOS) Título: “Aplicamos nuestros conocimientos de trigonometría para calcular alturas”
Tema: Arcos de las razones trigonométricas. Objetivo de aprendizaje: Emplear estrategias para calcular el ángulo agudo de un triángulo rectángulo, dada su razón trigonométrica. Descripción: • Se forman grupos de 3 a 5 integrantes y se dan indicaciones para trabajar en el patio del colegio. • Se retoma la situación problemática de la actividad 1, pero ahora se hará énfasis en el uso del gnomon y de los espejos para solucionarla. • Se realizan preguntas para favorecer la comprensión de la situación problemática. • El estudiante describe un plan para resolver la situación problemática. • Se explica lo que son los arcos de las razones trigonométricas y se ejemplifica. • Se resuelve la situación problemática inicial usando los espejos y el gnomon. El estudiante crea y resuelve modelos matemáticos para el uso de cada instrumento.	Tema: Razones trigonométricas. Cálculo de alturas. Objetivo de aprendizaje: Resolver un problema que ponga a prueba conocimientos sobre el cálculo de alturas usando razones trigonométricas. Descripción: • Se forman grupos de 3 a 5 integrantes y se dan indicaciones para trabajar en el patio del colegio. • Se presenta a los estudiantes posibles objetos de los cuales pueden calcular su altura haciendo uso de los instrumentos (gnomon, espejos o clinómetro). • El estudiante deberá identificar un objeto y calcular su altura usando cada uno de los tres instrumentos mencionados. • El estudiante realiza un diagrama de la situación generada al tratar de calcular la altura del objeto seleccionado. Hace un diagrama para el uso de cada instrumento. • Los grupos de estudiantes comparan sus resultados con otros grupos que hayan calculado la altura del mismo objeto. Se discute en el caso de que los resultados sean muy diferentes.
ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 9 (35 MINUTOS) Título: “Altura de un objeto cuyo punto de pie se ubica en una horizontal diferente”	ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 10 (50 MINUTOS) Título: “Altura de un objeto con punto de pie inaccesible”

Tema: Razones trigonométricas. Cálculo de alturas. Objetivo de aprendizaje: Resolver un problema donde se calcule la altura de un objeto cuyo pie se ubique en una horizontal diferente a la del observador; además, plantear afirmaciones sobre las relaciones geométricas involucradas. Descripción: • Se forman grupos de 3 a 5 integrantes y se dan indicaciones para trabajar en el patio del colegio. • Se presenta una situación problemática en la que se tiene que calcular la altura de un objeto cuyo punto de pie se encuentra en una horizontal diferente a la del observador. • Se realizan preguntas para favorecer la comprensión de la situación problemática. • El estudiante plantea una estrategia o plan para resolver el problema y la ejecuta. • El estudiante matematiza la situación problemática. • El estudiante resuelve el modelo matemático y da respuesta a la situación problemática. • El estudiante resuelve la misma situación problemática, pero haciendo uso de otro instrumento. • El estudiante explica que la situación no puede ser resuelta usando el gnomon.	Tema: Razones trigonométricas. Cálculo de alturas y/o distancias. Objetivo de aprendizaje: Resolver un problema donde se calcule la altura de un objeto cuyo punto de pie sea inaccesible; para ello, se idean estrategias y procedimientos. Descripción: • Se forman grupos de 3 a 5 integrantes y se dan indicaciones para trabajar en el patio del colegio. • Se presenta una situación problemática en la que se tiene que calcular la altura de un objeto cuyo punto de pie es inaccesible, es decir, que no se pueda medir la distancia horizontal desde el objeto al observador. • Se realizan preguntas para favorecer la comprensión de la situación problemática. • El estudiante plantea una estrategia o plan para resolver el problema y la ejecuta. • El estudiante matematiza la situación problemática. • El estudiante resuelve el modelo matemático y da respuesta a la situación problemática. • El estudiante resuelve la misma situación problemática, pero haciendo uso de otro instrumento. • El estudiante explica que la situación no puede ser resuelta usando el gnomon.
ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE 11 (60 MINUTOS) Título: “Altura de un objeto con punto de pie inaccesible y ubicado en una horizontal diferente”	
Tema: Razones trigonométricas. Cálculo de alturas y/o distancias. Objetivo de aprendizaje: Resolver un problema donde se calcule la altura de un objeto cuyo punto de pie sea inaccesible y esté ubicado en una horizontal diferente a la del observador; para ello, se idean estrategias y procedimientos. Descripción: • Se forman grupos de 3 a 5 integrantes y se dan indicaciones para trabajar en el patio del colegio. • Se presenta una situación problemática en la que se tiene que calcular la altura de un objeto cuyo punto de pie es inaccesible y esté ubicado en una horizontal diferente a la del observador. • Se realizan preguntas para favorecer la comprensión de la situación problemática. • El estudiante plantea una estrategia o plan para resolver el problema y la ejecuta. • El estudiante matematiza la situación problemática. • El estudiante resuelve el modelo matemático y da respuesta a la situación problemática. • El estudiante resuelve la misma situación problemática, pero haciendo uso de otro instrumento. • El estudiante explica que la situación no puede ser resuelta usando el gnomon.	

IV. MATERIALES Y RECURSOS PARA UTILIZAR EN LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Materiales y recursos didácticos	Espacios de aprendizaje
• Cuaderno del curso. • Escuadras y transportador. • Lápices, lapiceros, plumones. • Cartulinas de colores. • Cinta métrica. • Calculadora científica o del celular. • Gnomon, clinómetro y espejos (los materiales para construirlos). • Fichas de las actividades de enseñanza-aprendizaje.	• Salón de clases. • Patio del colegio.

V. ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS RECOMENDADAS

Estrategias heurísticas
• Hacer distintas representaciones del problema. • Construir modelos matemáticos. • Contrastar resultados. • Buscar un problema análogo al que se está resolviendo. • Descomponer y recomponer el problema. • Utilizar una notación adecuada. • Ejemplificar. • Dibujar un esquema de la situación. • Razonamiento a la inversa. • Ensayo-error. • Buscar un patrón. • Analizar propiedades vinculadas al problema. • Reproducir tu comprensión del problema. • Evaluar la estrategia elegida. • Plantear conjeturas, hipótesis, afirmaciones y/o argumentos sobre el proceso de resolución del problema. • Hacer proyecciones.

VI. REFERENCIAS

- Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., y Reyes, R. (2009). *Geometría y trigonometría*. México: Pearson Educación.
- Arias, E. (s.f.). *Triángulos semejantes*. Matemáticas Modernas. <https://matematicasmodernas.com/triangelos-semejantes/>
- Coveñas, M. (s.f.). *Matemática 4*. Lima, Perú: Editorial Coveñas.
- FisQuiWeb (2016). *Óptica. Reflexión y Refracción*. <https://n9.cl/tc70f>
- Maor, E. (1998). *Trigonometric Delights*. Universities Press. <https://press.princeton.edu/books/maor>
- Ramírez, F. (s.f.). *Semejanza de triángulos*. TOMi. <https://n9.cl/gdyjf>
- Runza, G. (2013). *Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN.
- Sauchelli, D. (2017). *Trigonometría*. Argentina: Editorial de la Universidad Católica de Córdoba. <https://n9.cl/xbx2m>

- Tekman education. (27 de junio de 2019). *El Teorema de Thales, como nunca lo habían visto* [Video]. Facebook. <https://n9.cl/f2z4f>
- <https://astro.aytoyebes.es/images/documentos/Priorientacionesciclo1.pdf>
- <https://n9.cl/ibqf>
- <https://i.pinimg.com/originals/30/1b/17/301b17b0c7fd992281e4432574f39e04.jpg>
- https://i.ytimg.com/vi/Eq_JPAMAU04/hqdefault.jpg
- <https://illustoon.com/photo/371.png>
- <https://illustoon.com/photo/5432.png>
- <https://n9.cl/081ic>
- <https://n9.cl/2dq9>
- <https://n9.cl/3dsx6>
- <https://n9.cl/6bgne>
- <https://n9.cl/6h48c>
- <https://n9.cl/gv34t>
- <https://n9.cl/k380c>
- <https://n9.cl/twk30>
- <https://neutrongeek.files.wordpress.com/2012/09/ensamblado.jpg>
- <https://portal.andina.pe/EDPfotografia3/Thumbnail/2016/11/01/000384356W.jpg>
- <https://n9.cl/0kx50>
- <https://www.disfrutalasmaticas.com/geometria/images/pythagorean-theorem-proof.png>
- https://www.seekpng.com/png/full/200-2006475_tringulo-rectngulo-seno-en-un-triangulo-rectangulo.png
- https://www.youtube.com/watch?v=WHVjmd_9OKk



Gómez Espinoza Jean
Pierre

4.5.1 Actividades de enseñanza – aprendizaje 1

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°1

Construimos instrumentos que ayuden a medir ángulos, alturas y distancias

Tipo de actividad: actividad para la cognición/motivación.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Tema	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Expresa con material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre los ángulos y su implicancia en el cálculo de alturas y distancias.	Uso del gnomon, clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y distancias.	Evidencia de aprendizaje: Construcción del gnomon, clinómetro y espejos; y creación de situaciones en las que se puedan usar dichos instrumentos. Instrumento de evaluación: Escalas de apreciación.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- Objetivo **de aprendizaje:** Construir un gnomon, un clinómetro y espejos para calcular ángulos, alturas y distancias.
- **Duración de la actividad:** 40 minutos.
- **Momento de implementación de la actividad:** Inicio o desarrollo (motivación).

Prerrequisitos	Recursos o materiales
✓ Se debe dominar el tema de ángulos, ángulos externos e internos. ✓ Se debe saber medir ángulos con un transportador. ✓ Se debe dominar el sistema sexagesimal de los ángulos. ✓ Se debe conocer las características básicas de los triángulos.	✓ Espejos pequeños (10cm x 10cm) con un marco que cubra su perímetro. ✓ Transportador, reglas. ✓ Tijeras, plumones. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°1



Construimos instrumentos que ayuden a medir ángulos, alturas y distancias

INTRODUCCIÓN:

A lo largo del desarrollo del campo temático de razones trigonométricas, se van a resolver diferentes problemas de situaciones de contexto real haciendo uso de instrumentos que ayuden a medir ángulos, alturas y distancias. Estos instrumentos específicamente son tres: el gnomon, el clinómetro y los espejos. Por ello, es importante conocer su uso y funcionamiento para lograr la adecuada resolución de problemas.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

El director de tu colegio desea cambiar la cuerda del asta de la bandera, pues ya no necesita sacarla y ponerla porque está empotrada con cemento en el piso. Pero, ha olvidado tomar medida de la altura del asta. El asta ya está puesta y el director necesita este dato porque quiere comprar cuerda que sostendrá la bandera. Para ello, solicita apoyo a un estudiante del cuarto grado. ¿Cómo medirías la altura del asta de la bandera?

El director te encomienda esa tarea. Expresa tus ideas para solucionar dicho problema. Puedes hacerlo con un dibujo, de manera textual u oralmente.

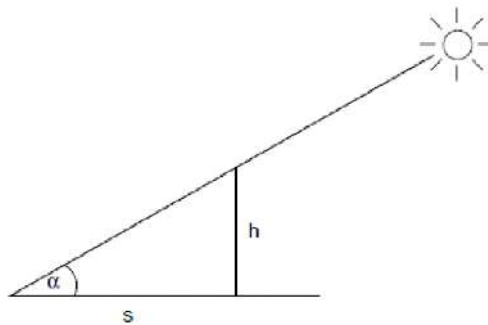
AHORA TE PRESENTAMOS ALGUNOS INSTRUMENTOS QUE TE PUEDEN AYUDAR A SOLUCIONAR DICHA SITUACIÓN:

1. El gnomon:

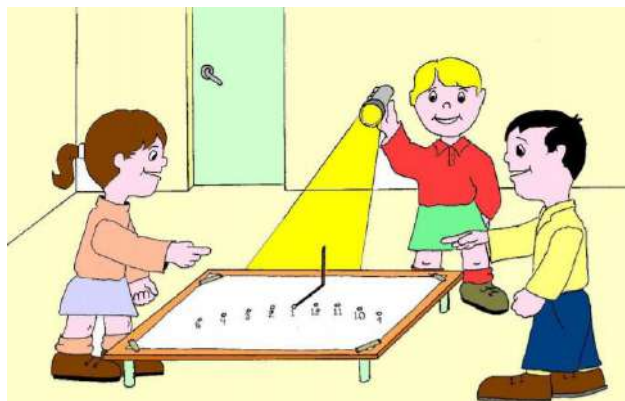
Conocemos el funcionamiento del gnomon

El gnomon consiste en una varilla que comúnmente se usa para calcular la hora a partir de la medida de la longitud de su sombra proyectada en determinado momento del día. De hecho, muchos matemáticos han realizado asombrosos cálculos gracias a este; por ejemplo, Anaximandro lo utilizó para medir los solsticios y los equinoccios, Thales de Mileto lo utilizó para calcular las alturas de las pirámides de Giza, y Eratóstenes de Cirene (276 – 194 a.C.) lo utilizó para calcular el diámetro aproximado de la tierra. Así pues, **el gnomon es un objeto en forma de varilla posicionada vertical y perpendicularmente sobre el suelo, utilizado para realizar mediciones a partir de la sombra que proyecta.**

En la siguiente figura se puede ver la representación de la sombra “s” de un gnomon de altura “h” proyectada por la luz del sol bajo un ángulo.



RECUERDA: El uso del gnomon para el cálculo de alturas se puede dar siempre que tengamos una fuente de luz que permita proyectar su sombra.



Construimos un gnomon

Para la elaboración del gnomon, este debe tener las siguientes características:

- No debe ser traslúcido, ya que debe proyectar una sombra lo suficientemente visible.
- Que sea rígido, pues sería un inconveniente que este se tuerza o se rompa cuando sea utilizado.
- Que tenga un grosor adecuado. De preferencia que sea de forma cilíndrica cuyo radio de la base mida entre 1cm y 3cm. Un palo de escoba sería una buena opción.
- Su altura debe ser adecuada. No debe ser muy pequeño ya que puede haber mayor margen de error al momento de medir la sombra; y que no sea muy largo para que sea manejable por el estudiante. Se recomienda alturas aproximadas al metro.

2. El clinómetro:

Conocemos el funcionamiento del clinómetro

Es común referirse a este con distintos nombres, pues existen otros instrumentos muy parecidos. De manera general, se define al clinómetro como un instrumento cuya función es medir ángulos de inclinación respecto a un objeto en relación con la horizontal o la vertical. Su funcionamiento se basa en la inclinación del instrumento cuando se observa un determinado objeto, pues permite apreciar cuántos grados (medida angular) se ha inclinado el instrumento para poder visualizar determinado objeto.

Su complejidad puede variar, pero para este caso la elaboración será sencilla y económica.

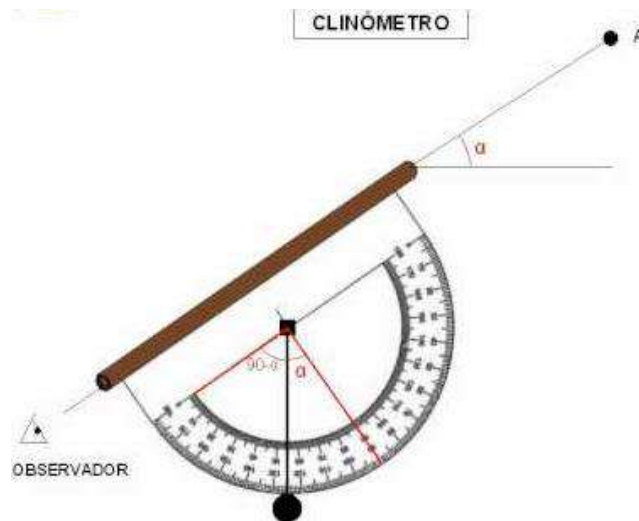


Construimos un clinómetro.

Construir este instrumento puede ser sencillo y económico, para ello, se necesitan materiales como los siguientes:

- Un transportador de preferencia circular (de 360°), o uno de 180° .
- Un pedazo de hilo o cuerda, la medida de esta debe ser de entre 5 a 10 centímetros más que el radio del transportador circular.
- Un objeto pequeño que pueda ser amarrado por la cuerda; por ejemplo, una tuerca.
- Un pedazo de sorbete, pitillo plástico o tuvo pequeño de lapicero; la medida de este objeto debe ser aproximadamente igual que la medida del diámetro del transportador circular.

A continuación, se muestra la disposición de estos materiales para construir un clinómetro sencillo.



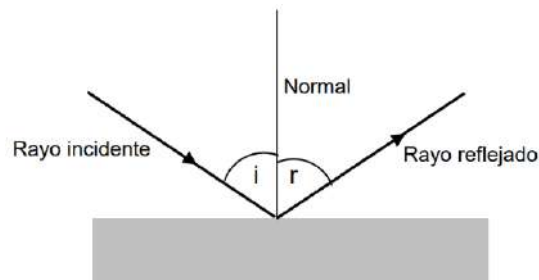
3. Los espejos:

Conocemos el funcionamiento de los espejos

Lo que permite utilizar un espejo como instrumento de medida es la reflexión que produce este en el rayo de luz que incide sobre su superficie. Por lo tanto, para entender el funcionamiento de los espejos como instrumento conviene primero explicar lo que es la reflexión de la luz.

En la reflexión de la luz hay un rayo incidente que choca sobre una superficie reflectante plana, y pasa a ser un rayo reflejado. De este modo aparecen elementos no visibles como: la normal, el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. En la ocurrencia de este fenómeno se cumplen las denominadas leyes de la reflexión, estas son dos:

- El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado pertenecen a un mismo plano.
- Los ángulos de incidencia y el ángulo de reflexión son iguales.



Para una mejor comprensión conviene explicar cada uno de los elementos que no son visibles en este fenómeno.

- Normal: Es una recta imaginaria perpendicular a la superficie sobre la cual cae el rayo incidente.
- Ángulo de incidencia: Es el ángulo formado entre el rayo incidente y la recta normal.
- Ángulo de reflexión: Es el ángulo formado entre el rayo reflejado y la recta normal.

Construimos un espejo

Para la elaboración del espejo, sigue las siguientes recomendaciones:

- El espejo no debe ser demasiado amplio para poner manipularlo con facilidad, se recomienda que sus dimensiones sean aproximadamente de 15cm de largo x 15cm de ancho (225cm^2).
- Se debe tener cuidado con los filos del espejo ya que se puede cortar al momento de manipularlos, se recomienda colocarle un marco protector alrededor.
- Se debe tener cuidado con la luz del sol, ya que esta incide en el espejo y se puede reflejar hacia la vista. De preferencia usar gafas de sol.

Ahora que ya conoces estos instrumentos, elabora un dibujo donde se haga uso del gnomon, clinómetro o espejos para resolver la situación problemática.

Elabora un dibujo donde se haga uso del gnomon, clinómetro o espejos para resolver cualquier otro problema que implique el cálculo de alturas y/o distancias.



RESPONDE LA SIGUIENTE PREGUNTA: ¿Basta con tener el instrumento (gnomon, clinómetro, espejo) para calcular alturas y distancias? ¿por qué?

REFERENCIAS

- FisQuiWeb(2016). *Óptica. Reflexión y Refracción.*
<https://fisquiweb.es/Apuntes/Apuntes2Fis/ReflexionRefraccion.pdf>
- Maor, E. (1998). *Trigonometric Delights.* Universities Press.
<https://press.princeton.edu/books/maor>
- <https://astro.aytoyebes.es/images/documentos/Priorientacionesciclo1.pdf>
- <https://n9.cl/twk30>
- https://i.ytimg.com/vi/Eq_JPAMAu04/hqdefault.jpg

Gómez Espinoza Jean
Pierre

ESCALA DE APRECIACIÓN

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

DESEMPEÑO: Expresa con material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre los ángulos y su implicancia en el cálculo de alturas y distancias.

[illegible]

4.5.2 Actividades de enseñanza – aprendizaje 2

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°2

Recordamos y graficamos ángulos de elevación y depresión

Tipo de actividad: actividad para la cognición/saberes previos.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Tema	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Establece relaciones entre los atributos medibles de objetos reales. Expresa con gráficos y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre los ángulos y su implicancia en el cálculo de alturas y distancias.	Ángulos de elevación y depresión.	Evidencia de aprendizaje: Gráfico de ángulos de elevación y depresión en una misma situación problemática. Instrumento de evaluación: Escala de apreciación.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Expresar la conveniencia de identificar ángulos de elevación y depresión en distintas situaciones. Luego, trazar estos ángulos dentro de un mismo problema haciendo referencia al uso del gnomon, clinómetro y los espejos como instrumentos de medida.
- **Duración de la actividad:** 25 minutos.
- **Momento de implementación de la actividad:** Inicio o desarrollo.

Prerrequisitos	Recursos o materiales
✓ Saber en qué consiste el uso del gnomon, el clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y distancias. ✓ Se debe conocer el sistema sexagesimal de medida angular. ✓ Saber identificar elementos de un triángulo: ángulos, lados, vértices, rectas internas.	✓ Regla, escuadra. ✓ Lápiz, borrador, plumones. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°2



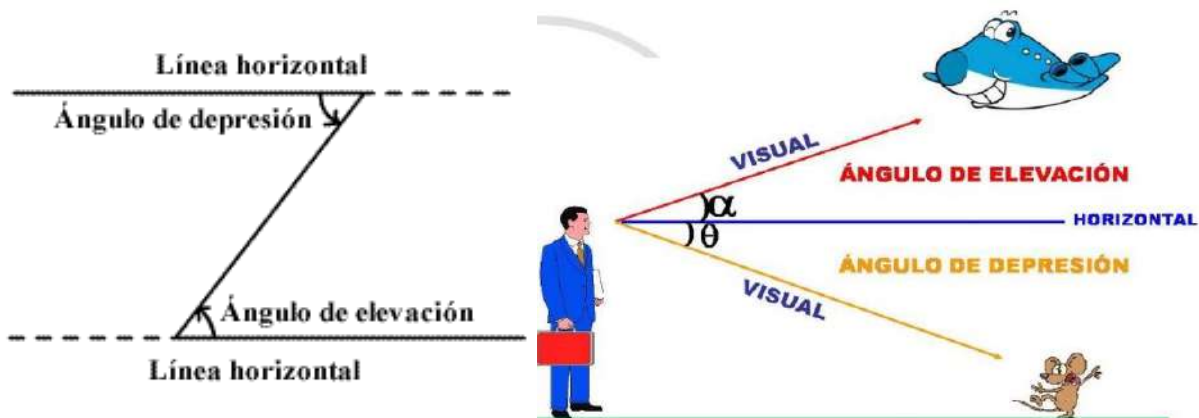
Recordamos y graficamos ángulos de elevación y depresión

RECORDAMOS LO QUE SON LOS ÁNGULOS DE ELEVACIÓN Y LOS ÁNGULOS DE DEPRESIÓN:

Cuando nos enfrentamos a un problema matemático de contexto real en la cual se tiene que calcular alturas, distancias y/o ángulos, es importante saber identificar figuras como triángulos o rectángulos. Sin embargo, estas figuras no están representadas físicamente en la situación real, por ello, es importante saber ubicarlas ayudándose de los ángulos de elevación y de los ángulos de depresión.

Tanto para los ángulos de elevación como para los ángulos de depresión, siempre están presentes los siguientes elementos los cuales hay que identificar: un observador o punto desde el cual se observa, una horizontal paralela a la superficie (a la misma altura del ojo del observador), un objeto observado, una recta visual, y un ángulo de elevación o de depresión (Runza, 2013).

- Ángulos de elevación: Se da esta situación cuando la recta visual y el objeto están por encima de la horizontal, es decir, **el observador ve el objeto hacia arriba**.
- Ángulos de depresión: Se da esta situación cuando la recta visual y el objeto están por debajo de la horizontal, es decir, **el observador ve el objeto hacia abajo**.



SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Un soldado se encuentra haciendo guardia y vigila la zona desde una garita. A una distancia horizontal " d " desde el pie de la garita, está el pie de una pared de altura " h " (mayor que la altura de la garita); además la vista del observador está a una altura " y " con respecto del suelo.

En un momento del día, un pájaro se posiciona en lo alto de la pared y el soldado lo visualiza gracias a su binocular;

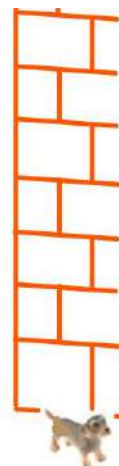
luego un perrito se pone a descansar en el pie de la pared y el soldado también lo visualiza gracias a su binocular. La situación se bosqueja en la figura de la derecha. **Se le pide graficar los elementos presentes para el ángulo de elevación y para el ángulo de depresión.**



Grafica el ángulo de elevación y señala sus elementos



Grafica el ángulo de depresión y señala sus elementos



Matematizo la situación problemática

Grafica un triángulo indicando todos sus elementos (ángulos, lados, rectas internas, etc.) que puedas identificar en la situación problemática.

Después de graficar la situación, responde a las siguientes preguntas: (No resolver ninguna ecuación, solamente explica cómo afrontarías cada caso dado).

- ¿Será posible hallar las longitudes “d”, “y” y “h” conociendo solo la medida de los ángulos? Explica.

- ¿Será posible calcular la altura “h” conociendo los ángulos y la distancia “d”? Explica.

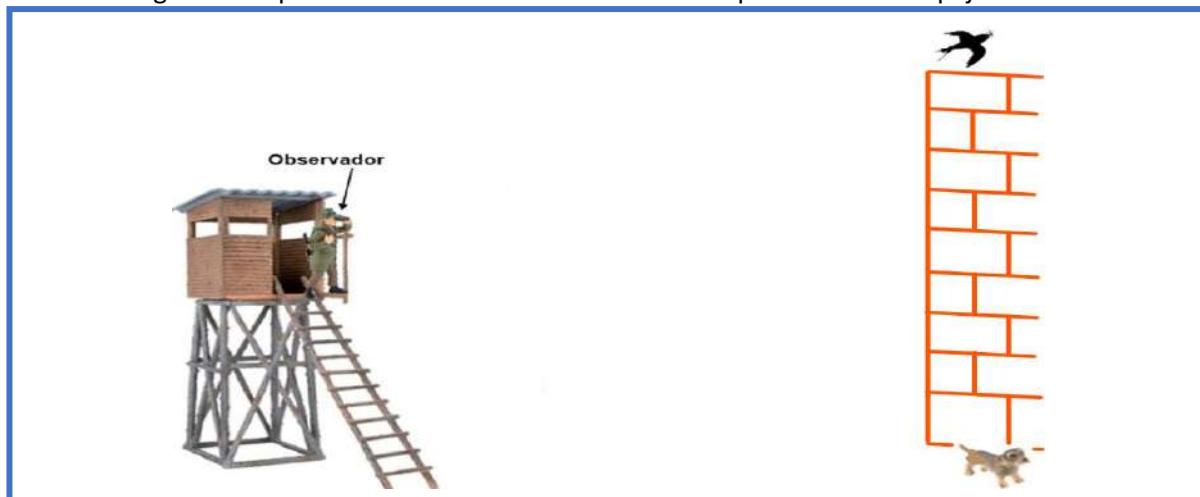
- ¿Será posible hallar alturas si se trabaja solo con un triángulo rectángulo? Explica.

Modificamos la situación dada

El soldado (ubicado en el mismo punto de observación) está visualizando el pájaro (ubicado en el mismo lugar) mediante un ángulo de depresión; sin embargo, está utilizando un instrumento como ayuda. **¿Qué instrumento crees que sea? ¿cómo se realiza la observación del pájaro mediante un ángulo de depresión?**

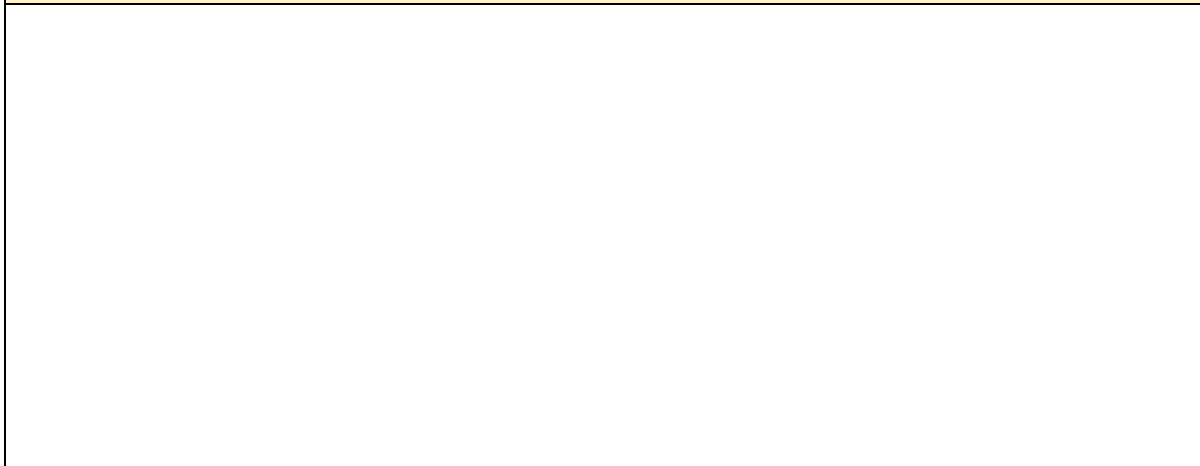
¿Qué instrumento crees que sea? _____

Grafica el ángulo de depresión haciendo uso del instrumento para observar el pájaro.



Matematizo la nueva situación

Grafica los triángulos indicando todos sus elementos (ángulos, lados, rectas internas, etc.) que puedas identificar en la nueva situación.



Después de graficar la situación, responde a las siguientes preguntas: (No resolver ninguna ecuación, solamente explica cómo afrontarías cada caso dado).

- ¿Será posible hallar las longitudes “d”, “y” y “h” conociendo solo la medida del ángulo de depresión? Explica.

- ¿Será posible calcular la altura “h” conociendo el ángulo y la distancia “d”? Explica.

- ¿Qué datos crees que son los mínimos necesarios cuyo valor se debe conocer para poder encontrar los valores restantes? Explica.

REFERENCIAS

- <https://n9.cl/2dq9>
- <https://n9.cl/6h48c>
- <https://n9.cl/k380c>
- Runza, G. (2013). *Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN.



Gómez Espinoza Jean
Pierre

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

[illegible][illegible]

4.5.3 Actividades de enseñanza – aprendizaje 3

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°3

Comprendemos el teorema de Thales

Tipo de actividad: actividad para la cognición/desarrollo.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Tema	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos haciendo uso del teorema de Thales. Lee textos o gráficos que describen las propiedades de semejanza entre triángulos.	Teorema de Thales.	Evidencia de aprendizaje: Resolución de la ficha específica de la actividad. Instrumento de evaluación: Escala de apreciación.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Expresar la comprensión sobre un problema y representarlo haciendo uso de un modelo matemático que involucre conocimientos sobre el teorema de Thales.
- **Duración de la actividad:** 30 minutos.
- **Momento** de implementación de la actividad: Desarrollo.

Prerrequisitos	Recursos o materiales
✓ Conocer las características de los ángulos de elevación y ángulos de depresión. ✓ Conocer las características de las rectas paralelas y de las rectas secantes. ✓ Saber simplificar y resolver ecuaciones con fracciones. ✓ Saber identificar elementos de un triángulo: ángulos, lados, vértices, rectas internas.	✓ Regla, escuadra. ✓ Lápiz, borrador, plumones. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



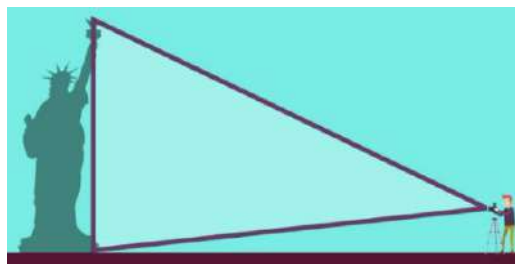
Actividad de enseñanza aprendizaje N°3



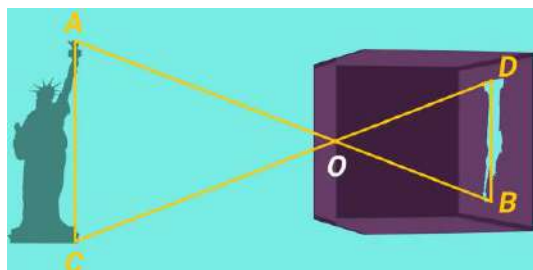
Comprendemos el teorema de Thales

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Hoy en día, es muy común contar con una cámara para fotografiar lo que se desea. Cuando enfocamos aquello que queremos fotografiar se forma un triángulo entre el objeto y el lente de la cámara (como se muestra en la figura de al lado).



Además, se sabe que la cámara fotográfica funciona gracias a un instrumento óptico llamado “cámara oscura”, este instrumento está formado por un recipiente cerrado y un pequeño agujero por el que entra una mínima cantidad de luz que proyecta



en la pared opuesta la imagen que se ha encuadrado del exterior (como se muestra en la figura de al lado).

Sin embargo, en una cámara oscura tradicional la imagen se proyecta al revés. Esto es debido a que los rayos de luz siempre se propagan en línea recta. Por ejemplo, un rayo de luz va desde el punto A hasta el punto B, y otro rayo de luz va desde el punto C hasta el punto D; ambos pasando por el punto O. Si luego unimos con una recta el punto A con el punto C y el punto D con el punto B, entonces se forman dos triángulos.

Si se enfoca una estatua completa que se encuentra a 1000 metros de la cámara; y esta tiene una cámara oscura de 30 centímetros de largo, **¿cuál será la altura real de la estatua si la altura de la imagen de la estatua en la cámara oscura es de 2,8 centímetros?**

COMPRENDEMOS LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Para verificar nuestra comprensión de la situación problemática respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué datos puedo identificar en la situación?

- ¿Qué debo responder en esta situación?

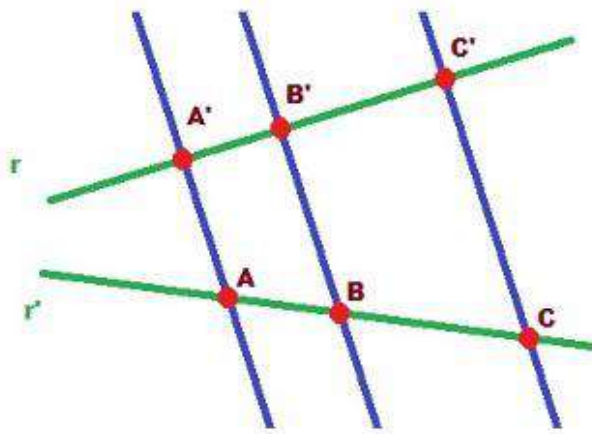
- ¿Qué similitud tienen los triángulos amarillos que se visualizan en la figura? ¿Cómo son sus ángulos y lados?

NOTA: Para resolver la situación problemática, será de gran ayuda conocer el teorema de Thales. Veamos de qué trata.



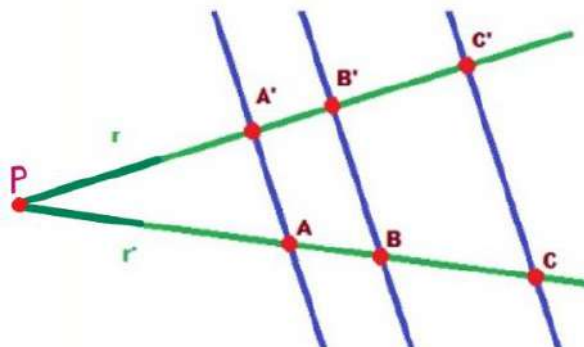
¿QUÉ ENUNCIA TEOREMA DE THALES? ¿PARA QUÉ SIRVE?

En un principio, este teorema aborda lo que es la semejanza de segmentos por lo que se enuncia de la siguiente manera: “Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos determinados en la primera secante son proporcionales a los segmentos determinados en la segunda secante” (Coveñas, s.f., p. 225).

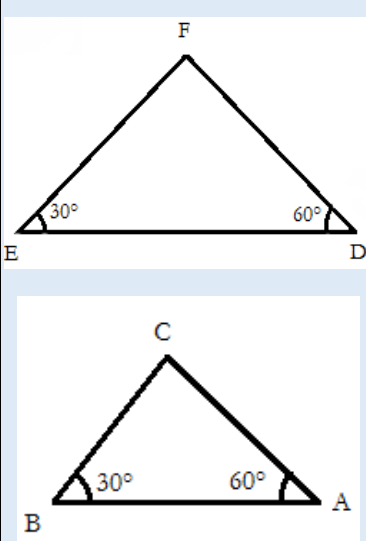
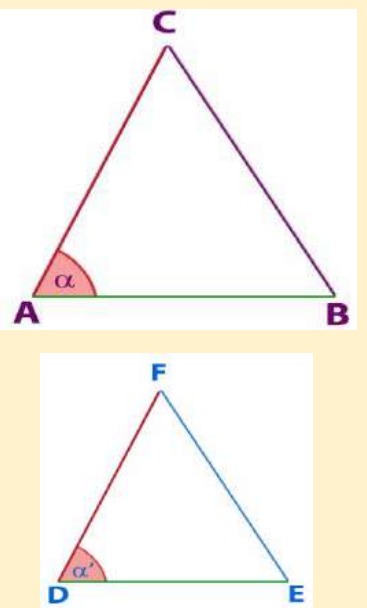
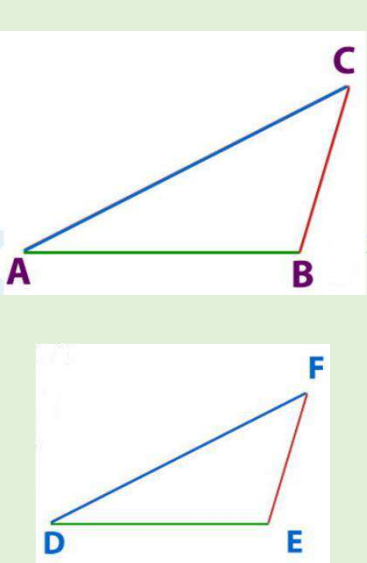


$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Nótese que, en el caso de la semejanza de segmentos, si se prolongan las rectas secantes hasta que estas se corten entre sí; entonces, se obtienen triángulos. De este modo, se aprecia cómo surge la semejanza de triángulos a partir de la semejanza de segmentos.



Se puede afirmar que: Los triángulos PAA' , PBB' y PCC' , son triángulos semejantes entre sí. Por ello, aplicando el teorema de Thales a los triángulos se puede afirmar que: una recta paralela a uno de los lados de un triángulo forma con las prolongaciones de los otros dos lados, otro triángulo que es semejante al triángulo inicial; y de ese modo se puede obtener un conjunto infinito de triángulos semejantes a partir de uno solo. De la semejanza de triángulos se puede establecer, y así lo constata Runza (2013), tres criterios de semejanza de triángulos.

Criterio 1	Criterio 2	Criterio 3
Angulo-ángulo	Lado-ángulo-lado	Lado-lado-lado
		
Si $\angle E \cong \angle B$ y $\angle D \cong \angle A$, entonces $\triangle DEF \sim \triangle ABC$	Si, $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$ y, $\angle \alpha \cong \angle \alpha'$ Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	Si, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$ Entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Ahora que ya conocemos el teorema de Thales, podemos continuar con la resolución de la situación problemática.



REALIZO UN MODELO MATEMÁTICO DE LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Grafica los triángulos semejantes presentes en la situación indicando sus ángulos, lados y relaciona estos mediante una expresión matemática.

Resuelvo el modelo matemático que he planteado para dar solución a la situación problemática

Solución: La altura de la estatua real es de _____

Responde las siguientes preguntas desafiantes:

¿Cómo puedo aplicar el teorema de Thales usando el gnomon, el clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y/o distancias?

Completa los cuadros siguiendo las orientaciones de tu profesor.

Idea una situación en la cual se haga uso del **gnomon** y del **teorema de Thales**. **Grafica y matematiza** la situación creada.

Idea una situación en la cual se haga uso de **los espejos** y del **teorema de Thales**. **Grafica y matematiza** la situación creada.

Idea una situación en la cual se haga uso del **clinómetro** y del **teorema de Thales**. Grafica y **matematiza** la situación creada.

REFERENCIAS

- Arias, E. (s.f.). *Triángulos semejantes*. Matemáticas Modernas. <https://matematicasmodernas.com/triangelos-semejantes/>
- Coveñas, M. (s.f.). *Matemática 4*. Lima, Perú: Editorial Coveñas.
- Ramírez, F. (s.f.). *Semejanza de triángulos*. TOMi. <https://n9.cl/gdyjf>
- Runza, G. (2013). *Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN.
- Tekman education. (27 de junio de 2019). *El Teorema de Thales, como nunca lo habían visto* [Video]. Facebook. <https://n9.cl/f2z4f>



Gómez Espinoza Jean
Pierre

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

[illegible][illegible]

4.5.4 Actividades de enseñanza – aprendizaje 4

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°4 Relacionando los lados del triángulo rectángulo

Tipo de actividad: actividad para la cognición/consolidación.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Tema	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Plantea afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre objetos y formas geométricas, y entre formas geométricas.	Triángulos rectángulos - semejanza.	Evidencia de aprendizaje: Resolución de la ficha específica de la actividad. Instrumento de evaluación: Escala de apreciación.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Medir los lados y ángulos de grupos de triángulos rectángulos para encontrar relaciones o similitudes entre ellos, además plantear afirmaciones sobre lo descubierto.
- **Duración de la actividad:** 40 minutos.
- **Momento** de implementación de la actividad: Desarrollo.

Prerrequisitos	Recursos y materiales
✓ Saber en qué consiste la semejanza de triángulos. ✓ Conocer las características básicas de los triángulos rectángulos. ✓ Saber usar regla y transportador.	✓ Regla, escuadra y transportador. ✓ Lápiz, borrador, plumones. ✓ Tres grupos de tres triángulos semejantes hechos con cartulina (el docente se los entrega previamente a cada grupo de estudiantes). ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°4



Relacionando los lados del triángulo rectángulo

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

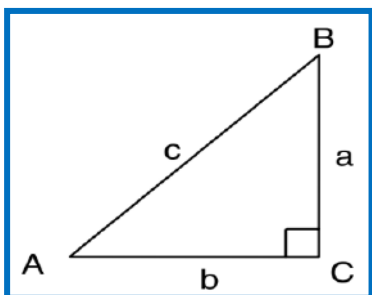
Se tienen tres grupos de tres triángulos rectángulos. Con ayuda de una regla y de un transportador mide los lados y ángulos de los triángulos

Para realizar esta actividad vamos a formar grupos de 3 a 5 integrantes.



rectángulos para analizarlos y encontrar relaciones entre ellos. Luego, responde a las siguientes interrogantes: **¿Qué características tienen los triángulos que pertenecen a un mismo grupo? ¿cómo deben ser los triángulos para que los cocientes entre sus lados tengan el mismo valor? ¿de qué depende que el valor del cociente de dos lados de un triángulo sea igual al de otro triángulo?**

RECORDEMOS LOS ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO:



Este tipo de triángulo se caracteriza porque uno de sus ángulos es recto, es decir, los lados que lo delimitan son perpendiculares (Aguilar et al., 2009); regularmente se hace referencia al sistema sexagesimal, por lo que la medida del ángulo recto, en este sistema, sería de 90° .

De la figura de al lado se puede decir lo siguiente: Siendo C un ángulo recto y c la longitud de la hipotenusa, el opuesto al ángulo A es el lado a y el opuesto al ángulo B es el lado b. Se deduce también que la medida del ángulo A más la medida del ángulo B es igual a 90° .

Los lados de un triángulo rectángulo se denominan hipotenusa y catetos, la hipotenusa es el lado mayor del triángulo, mientras que los catetos son los otros dos lados. Estos elementos son característicos de los triángulos rectángulos.

INICIAMOS EL ANÁLISIS DE LOS GRUPOS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

- Primero identifico la hipotenusa y los catetos de los triángulos rectángulos. A la hipotenusa le coloco la letra c, al cateto que se le opone al mayor ángulo agudo le coloco la letra a, y al cateto restante le coloco la letra b.

Para ello, ayúdame completando la siguiente tabla con **la medida de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos** dados por el profesor.

- En la siguiente tabla escribo los resultados de las medidas (en centímetros) de los lados de los triángulos rectángulos proporcionados. Luego encuentro el valor del cociente de la razón de dos de los lados del triángulo.

[illegible]

- Completa los siguientes enunciados respondiendo **igual(es)** o **diferente(s)**:
 - ✓ Los lados de los triángulos 1, 2 y 3 tienen _____ tamaño.
 - ✓ La medida de los ángulos del triángulo 1 es _____ a la medida de los ángulos del triángulo 2.
 - ✓ Los ángulos de los triángulos del grupo 1 son _____ a los ángulos de los triángulos del grupo 2.
 - ✓ Los ángulos de los triángulos del grupo 2 son _____ a los ángulos de los triángulos del grupo 3.

Respecto al grupo 1 de triángulos rectángulos:

- ✓ El cociente de los lados a/c de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados b/c de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados a/b de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados b/a de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados c/b de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados c/a de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____

Respecto al grupo 2 de triángulos rectángulos:

- ✓ El cociente de los lados a/c de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados b/c de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados a/b de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados b/a de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados c/b de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados c/a de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____

Respecto al grupo 3 de triángulos rectángulos:

- ✓ El cociente de los lados a/c de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados b/c de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados a/b de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados b/a de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados c/b de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados c/a de los triángulos 1, 2 y 3 son: _____

Comparamos los tres grupos de triángulos:

- ✓ El cociente de los lados a/c de los triángulos del grupo 1 y 2 son: _____
- ✓ El cociente de los lados b/c de los triángulos del grupo 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados a/b de los triángulos del grupo 1 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados b/a de los triángulos del grupo 1 y 2 son: _____
- ✓ El cociente de los lados c/b de los triángulos del grupo 2 y 3 son: _____
- ✓ El cociente de los lados c/a de los triángulos del grupo 1 y 3 son: _____

- Respondo las siguientes preguntas de manera oral y/o escrita.

¿Qué características tienen los triángulos que pertenecen a un mismo grupo? Plantea afirmaciones.

¿Cómo deben ser los triángulos para que los cocientes entre sus lados tengan el mismo valor? Explica y argumenta.

REFERENCIAS

- Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., y Reyes, R. (2009). *Geometría y trigonometría*. México: Pearson Educación.
- Sauchelli, D. (2017). *Trigonometría*. Argentina: Editorial de la Universidad Católica de Córdoba. <https://n9.cl/xbx2m>



Gómez Espinoza Jean
Pierre

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

[illegible]

4.5.5 Actividades de enseñanza – aprendizaje 5

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°5

Demostramos el teorema de Pitágoras

Tipo de actividad: actividad para la cognición/desarrollo.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Tema	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Selecciona y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para establecer la relación métrica del teorema de Pitágoras en un triángulo, así como para determinar el área de formas bidimensionales.	Teorema de Pitágoras.	Evidencia de aprendizaje: Resolución de la ficha específica de la actividad. Instrumento de evaluación: Escala de apreciación.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Comprender el teorema de Pitágoras como un método para resolver triángulos rectángulos y demostrar su veracidad utilizando diversas demostraciones.
- **Duración de la actividad:** 60 minutos.
- **Momento** de implementación de la actividad: Desarrollo.

Prerrequisitos	Recursos didácticos
✓ Conocer las características básicas del área de triángulos y cuadrados. ✓ Saber realizar rotaciones sencillas. ✓ Saber en qué consiste la semejanza de triángulos. ✓ Conocer las características básicas de los triángulos rectángulos. ✓ Plantear ecuaciones y gráficos (traducir de un enunciado textual a una expresión matemática).	✓ Regla, escuadra. ✓ Lápiz, borrador, plumones. ✓ Tijeras, cartulinas. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°5



Demostramos el teorema de Pitágoras

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Piero tiene que resolver un problema donde necesita calcular la longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo, él no sabe cómo hacerlo y le pide ayuda a un compañero. Su compañero le dice que use el teorema de Pitágoras que dice: “**En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos**”. Piero lo usa y el problema se soluciona muy rápido. Sin embargo, Piero quiere comprobar la veracidad de este teorema. ¿Cómo puedes ayudar a Piero a demostrar la veracidad del teorema de Pitágoras?

Recordatorio:



Recuerda que el área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura entre dos:

$$\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Recuerda que el área de un cuadrado se calcula elevando al cuadrado la medida de uno de sus lados:

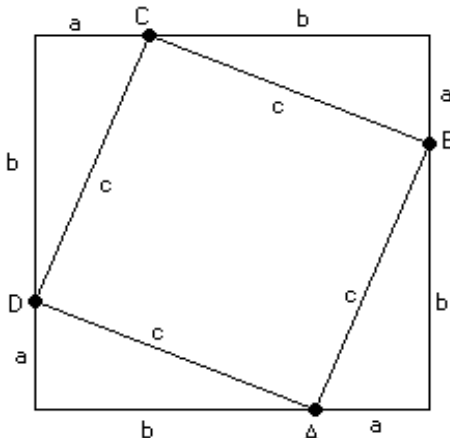
$$\text{lado}^2$$



DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA

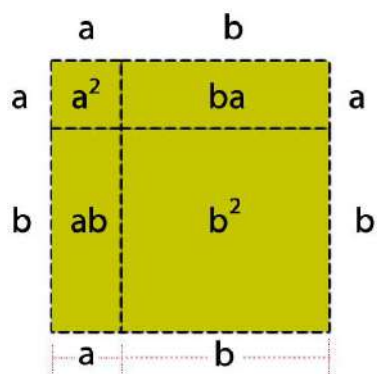
Sigue los siguientes pasos para realizar esta demostración:

1. Recorta una cartulina de lado $a + b$, y dentro traza un cuadrado de lado c tal y como se muestra en la imagen. Luego expresa algebraicamente el área total del cuadrado mayor.



$$(a + b)^2 =$$

2. En otra cartulina de lado $a + b$ (misma medida que la anterior) reproduce los siguientes cuadriláteros (ver figura). Luego expresa algebraicamente el área total del cuadrado mayor.



$$(a + b)^2 =$$

3. Iguala los valores de $(a + b)^2$ expresados en los dos pasos anteriores.

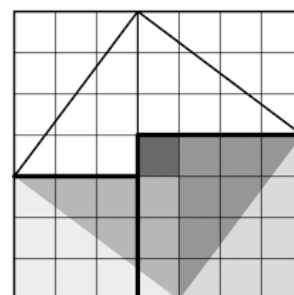
4. Simplifica la ecuación del tercer paso.

5. ¿Se demostró el teorema de Pitágoras? ¿Sí o no? _____.

DEMOSTRACIÓN DE CHOU PEI SUAN CHING

Sigue los siguientes pasos para realizar esta demostración:

1. Se parte de un cuadrado de lado 7 unidades ($a = 3$ unidades y $b = 4$ unidades) y se traza dentro de este un cuadrado cuya área es c^2 , el cual debemos recortar (los vértices de este cuadrado se encuentran en los lados del cuadrado de lado igual a 7 unidades).
2. Dentro del cuadrado de lado c formamos cuatro triángulos rectángulos iguales de catetos a y b , de este modo en el centro del cuadrado de lado c resulta un cuadrado de menor tamaño.



3. Expresa algebraicamente la longitud del lado del cuadrado de menor tamaño.



4. Expresa algebraicamente el área del cuadrado de menor tamaño.



5. Tomando en cuenta las áreas que conforman el área del cuadrado de lado c , encuentra una equivalencia de c^2 .



6. ¿Se demostró el teorema de Pitágoras? ¿Sí o no? _____.

DEMOSTRACIÓN DE LEONARDO DA VINCI

Sigue los siguientes pasos para realizar esta demostración:

1. Se parte de un triángulo rectángulo de lados a, b y c , siendo este último la hipotenusa. En este triángulo se dibujan tres cuadrados de lado a, b y c . **Dibuja la figura descrita.**



2. Desde el cuadrado de la hipotenusa se construye un triángulo igual al triángulo original pero girado 180° . Luego, desde los cuadrados de los catetos del triángulo original se construye otro triángulo igual al original (para formar este último basta con unir dos vértices de los cuadrados de los catetos). **Dibuja la figura descrita.**



3. Sobre la figura que has construido anteriormente, nombra los vértices de la figura con letras mayúsculas. Luego, a los ángulos agudos de los tres triángulos colócales las variables α y β .

4. Posteriormente observarás que existen dos hexágonos que comparten el triángulo original, además se pueden dividir en dos cuadriláteros si se traza una línea que una los dos extremos más alejados del hexágono. Podrás observar que estas líneas son líneas rectas. **Traza estas dos rectas sobre la figura que has ido construyendo.**

5. Ahora vas a comprobar si la figura que has estado construyendo es correcta o no. Para ello, observa las siguientes figuras que han sido construidas correctamente y compara.

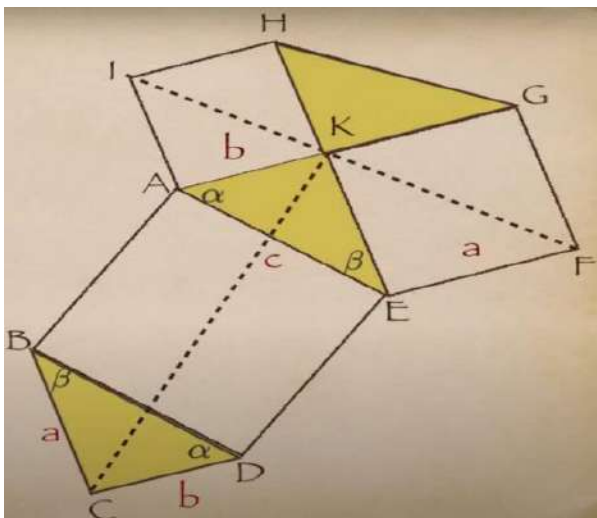


FIGURA A

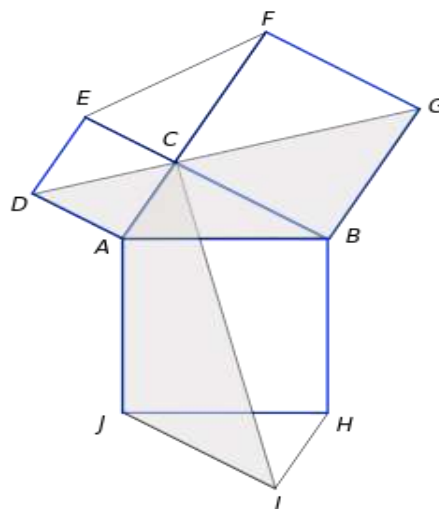


FIGURA B

6. (Se tomará como referencia la FIGURA A para continuar el proceso). Ahora se **comprobará que el cuadrilátero CBAK es congruente (igual) al cuadrilátero IAEF**, para ello, es necesario rotar este último cuadrilátero 90° tomando como centro de rotación el punto A, y el giro en sentido horario. **Visualiza la rotación. Se recomienda girar primeramente los segmentos AI y AE; luego, compara si los ángulos y los otros dos lados del cuadrilátero IAEF coinciden con los del cuadrilátero CBAK.**

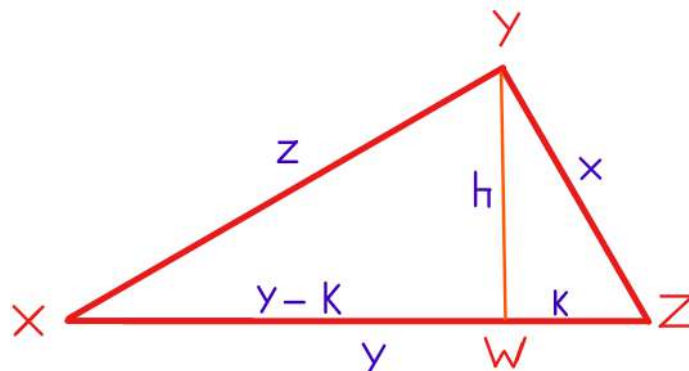
Establece equivalencias entre los ángulos de los cuadriláteros para ayudarte a visualizar la rotación. **Escribe algunas equivalencias.**

7. Como ya se ha comprobado que los cuadriláteros IAEF y CBAK son congruentes y, por ende, también lo son los hexágonos IAEFGH y CBAKED. Entonces, se procede a retirar los tres triángulos rectángulos, de este modo la igualdad no se altera, porque le estamos quitando dos partes iguales de área a cada hexágono. **Se obtiene la figura que se graficó en el primer paso.**

8. Se concluye que el área de ABDE es igual a la suma del área de AKHI más la de KGFE. **Plantea una expresión matemática respecto a la longitud de los lados de estos cuadrados.**

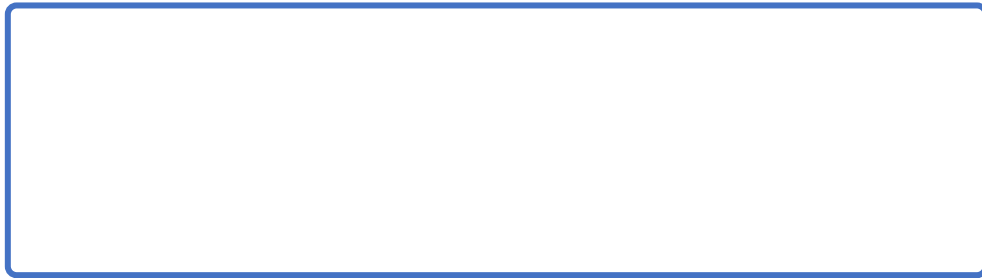
9. ¿Se demostró el teorema de Pitágoras? ¿Sí o no? _____.

DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA



Sigue los siguientes pasos para realizar esta demostración:

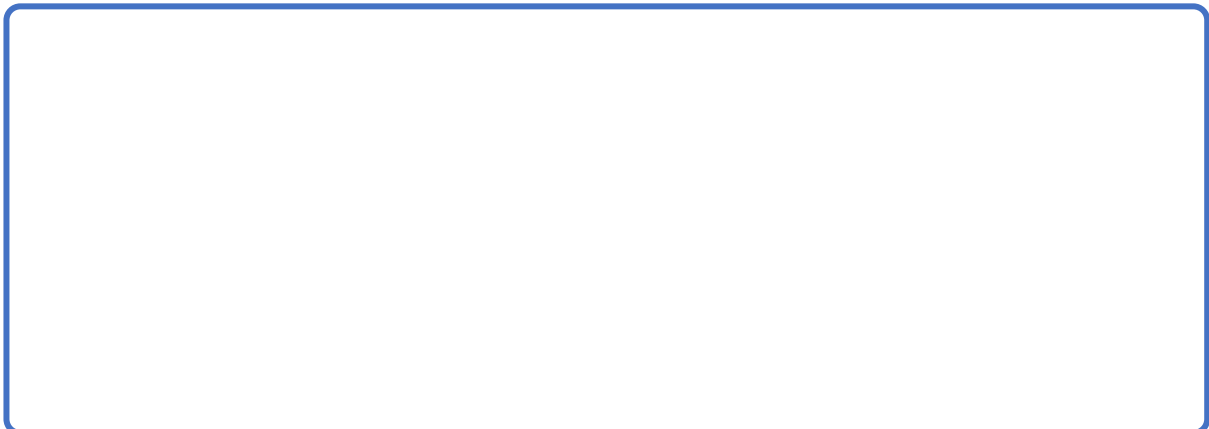
1. Visualiza la figura. Es un triángulo rectángulo de lados x , y y z (donde y es la hipotenusa), cuyos vértices son X , Y y Z . Luego, se ha trazado la altura (h) relativa a la hipotenusa, la cual divide a esta en dos segmentos, uno de longitud k y otro de longitud $y - k$.
2. Al trazar la altura relativa a la hipotenusa, esto ocasiona que aparezcan más triángulos. **Identifica cuántos triángulos semejantes existen e indica cuáles son.**



3. Luego de haber identificado los triángulos semejantes, en el siguiente cuadro se tiene que establecer relaciones entre los lados de los triángulos semejantes.



4. Por último, determina cómo llegar al teorema de Pitágoras estableciendo semejanzas entre los lados de los triángulos rectángulos.



5. ¿Se demostró el teorema de Pitágoras? ¿Sí o no? _____.

REFERENCIAS

- <https://www.disfrutalasmaticas.com/geometria/images/pythagorean-theorem-proof.png>
- <https://neutrongeek.files.wordpress.com/2012/09/ensamblado.jpg>
- <https://n9.cl/0kx50>
- <https://n9.cl/ibqf>
- https://www.youtube.com/watch?v=WHVjmD_9OKk



Gómez Espinoza Jean
Pierre

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

[illegible]

4.5.6 Actividades de enseñanza – aprendizaje 6

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°6

Representamos razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Tipo de actividad: actividad para la cognición/desarrollo.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Tema	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de un triángulo rectángulo para dar origen a las razones trigonométricas. Expresa con lenguaje geométrico su comprensión sobre las propiedades de las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.	Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.	Evidencia de aprendizaje: Resolución de la ficha específica de la actividad. Instrumento de evaluación: Escala de apreciación.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Representar las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo después de establecer relaciones entre sus lados y ángulos. Luego, resolver problemas aplicando lo aprendido.
- **Duración de la actividad:** 45 minutos.
- **Momento** de implementación de la actividad: Desarrollo.

Prerrequisitos	Recursos y materiales
✓ Saber identificar el cateto opuesto y adyacente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. ✓ Conocer el concepto de proporción. ✓ Saber en qué consiste la semejanza de triángulos. ✓ Saber usar el gnomon, el clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y distancias.	✓ Regla, escuadra. ✓ Lápiz, borrador, lapiceros. ✓ Clinómetro y cinta métrica. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°6



Representamos razones trigonométricas en triángulos rectángulos

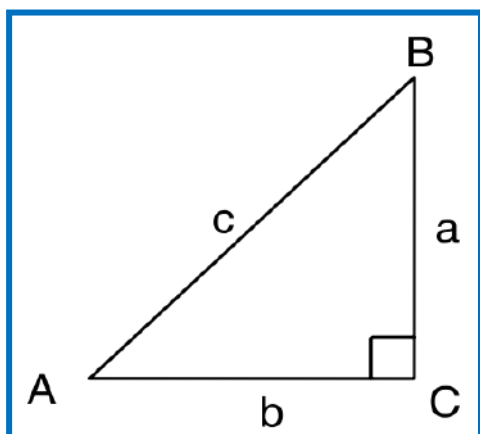
SITUACIÓN PROBLEMÁTICA: (RECUERDA QUE ESTA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA YA LA REVISAMOS EN LA ACTIVIDAD 1)



El director de tu colegio desea cambiar la cuerda del asta de la bandera, pues ya no necesita sacarla y ponerla porque está empotrada con cemento en el piso. Pero, ha olvidado tomar medida de la altura. El asta ya está puesta y el director necesita este dato porque quiere comprar cuerda que sostendrá la bandera. Para ello, solicita apoyo a un estudiante del cuarto grado. ¿Cómo medirías la altura del asta?

CONOCEMOS LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Te recomiendo repasar o revisar lo desarrollado en la actividad 4, ya que tiene mucha relación con lo que vamos a realizar en esta actividad.



Las razones trigonométricas de ángulos agudos (en triángulos rectángulos) son aquellos números que resultan de dividir dos lados de un triángulo rectángulo. Es decir, si se tiene un triángulo rectángulo de lados a , b y c , entonces las razones trigonométricas surgen realizar las siguientes divisiones:

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$$

Entonces son seis las razones trigonométricas que se pueden determinar, y a cada una se le denomina de manera diferente. Entonces, dado el triángulo ABC, recto en "C", se establecen las siguientes definiciones:

$$\bullet \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

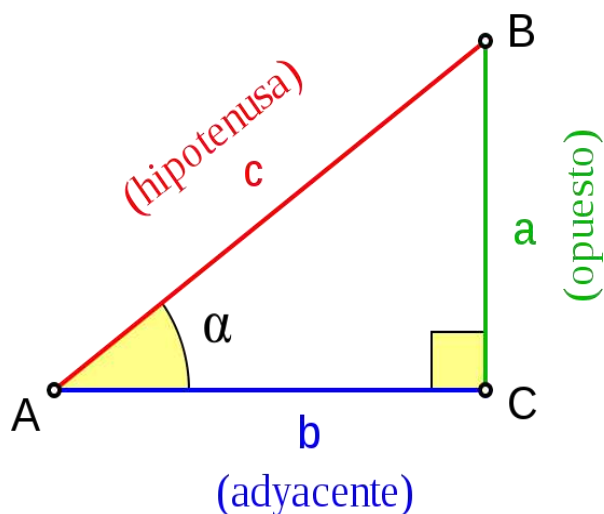
$$\bullet \quad \cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\bullet \quad \tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\bullet \quad \cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\bullet \quad \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\bullet \quad \csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

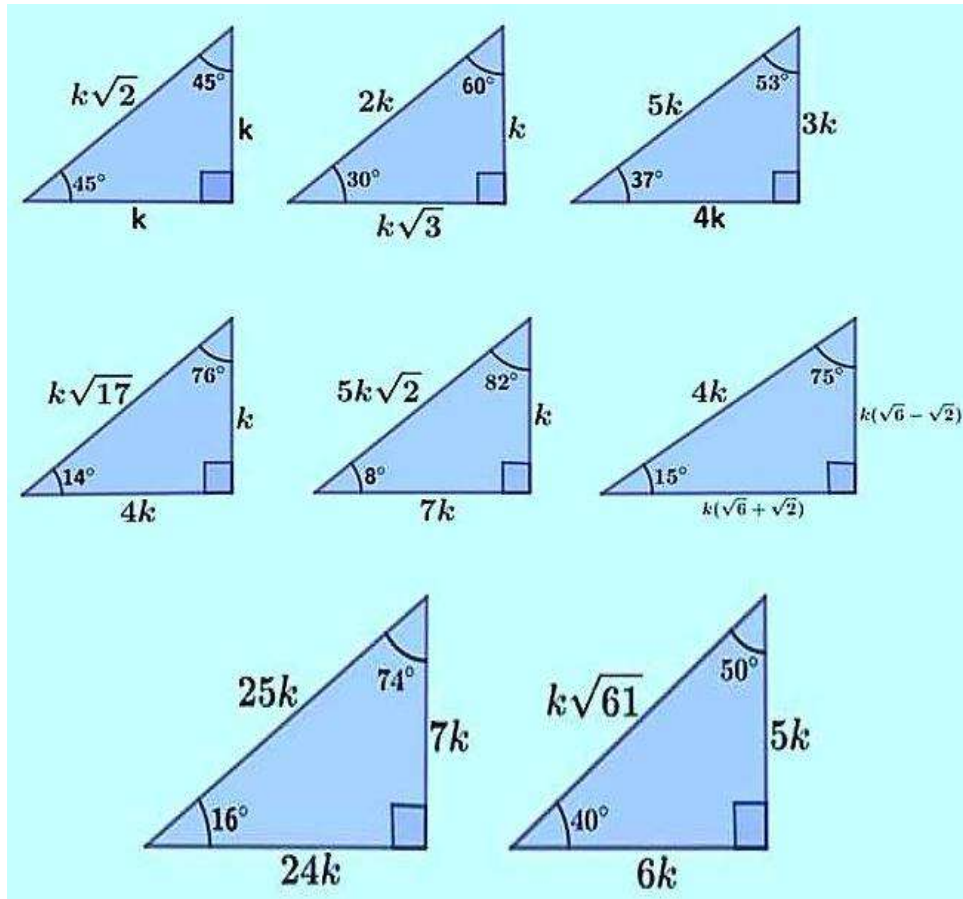


Expresar las razones trigonométricas del **otro ángulo agudo** al cual denominaremos β .

sen β	
cos β	
tan β	
cot β	
sec β	
csc β	

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo en un triángulo rectángulo se pueden hallar fácilmente haciendo uso de una calculadora, pero cabe mencionar que, calcularlas de manera manual es un poco complejo. Sin embargo, existen triángulos notables que facilitan el cálculo (sin calculadora) de las razones trigonométricas de ciertos ángulos. A continuación, se presentan ocho triángulos rectángulos notables, aunque los más usados y conocidos son los tres primeros.



PONEMOS A PRUEBA NUESTROS CONOCIMIENTOS SOBRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Resuelve el siguiente problema:

Se tiene un terreno en forma de triángulo rectángulo del cual se quiere **calcular su perímetro**, pero, lamentablemente no se cuenta con ningún instrumento de medida de longitud para ello. Sin embargo, se tienen los siguientes datos:

- La tangente del menor ángulo agudo es de $\frac{5}{12}$
- La diferencia entre los dos catetos es de $21m$.

Comprendo el problema. Responde las siguientes preguntas.

- ¿Qué datos puedo identificar en la situación?

- ¿Qué debo responder en esta situación?

- ¿En qué proporción están los catetos del triángulo rectángulo?

- ¿En qué proporción está la hipotenusa en relación a los catetos? ¿cómo puedo determinarla?

Solucionamos el problema

- **Plantea una estrategia o plan para resolver el problema. Describe tu plan para dar solución al problema.**

- **Matematiza la situación. Grafica el problema y ubica todos los datos posibles.**

- Resuelve lo planteado y da solución al problema. Da respuesta a la incógnita del problema.

SOLUCIONAMOS LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA INICIAL



Cómo habrás notado en la situación inicial no hay datos numéricos para calcular la altura del asta. Por ello, bajo el mismo contexto, vas a **calcular la altura del asta de la bandera de tu colegio**. Además, harás uso del **clinómetro** que has construido en actividades anteriores y de una **cinta métrica**.

Comprendo el problema. Responde las siguientes preguntas.

- ¿Qué datos necesito saber para dar solución al problema?

- ¿Qué debo responder en esta situación?

- ¿Qué datos puedo obtener con la cinta métrica?

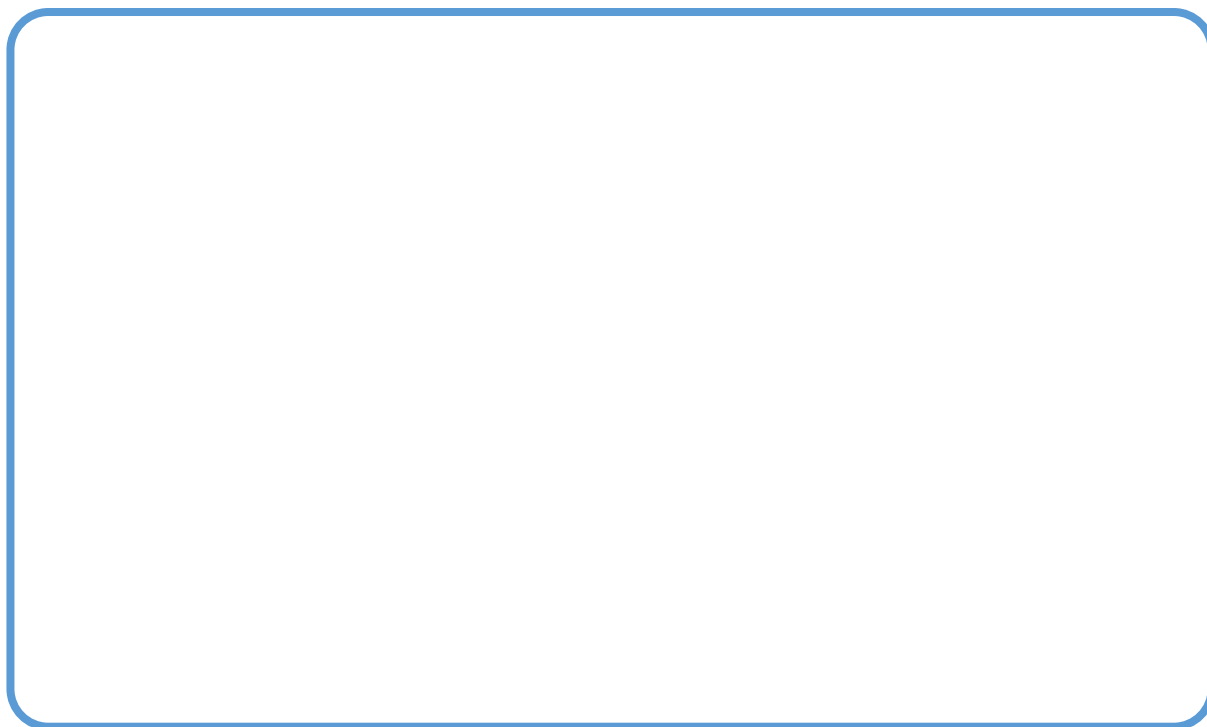
- ¿Qué datos puedo obtener con el clinómetro?

Uso el clinómetro y la cinta métrica para obtener datos. Ve al patio de manera ordenada y mide los siguientes datos:

Dato	Medida
Altura desde la superficie o suelo hasta la vista del observador.	
Ángulo de elevación con el que se observa la cima del asta de la bandera.	
Distancia horizontal desde el pie del asta de la bandera hasta el pie del observador.	
Si debido a la ubicación de la bandera de tu colegio necesitas medir otro dato, indica cuál es y explica por qué necesitas medirlo. Luego, procede a medirlo.	

Solucionamos el problema

- **Matematiza la situación. Grafica el problema y ubica todos los datos posibles.**



- Resuelve lo planteado y da solución al problema. Da respuesta a la incógnita del problema.

PREGUNTA RETADORA

¿Se podrá hacer uso de los espejos y del gnomon para resolver la situación problemática inicial (la de la bandera)? ¿Sería más fácil o complicado? ¿Bastaría saber lo aprendido en esta actividad sobre razones trigonométricas? **Explica.**

Referencias

- Sauchelli, D. (2017). *Trigonometría*. Argentina: Editorial de la Universidad Católica de Córdoba. <https://n9.cl/xbx2m>
- https://www.seekpng.com/png/full/200-2006475_tringulo-rectngulo-seno-en-un-triangulo-rectangulo.png
- <https://i.pinimg.com/originals/30/1b/17/301b17b0c7fd992281e4432574f39e04.jpg>



Gómez Espinoza Jean
Pierre

ESCALA DE APRECIACIÓN

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

DESEMPEÑO: Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de un triángulo rectángulo para dar origen a las razones trigonométricas. Expresa con lenguaje geométrico su comprensión sobre las propiedades de las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.

Estudiantes	Criterios de evaluación				
	De 0 a 4 puntos	De 0 a 4 puntos	De 0 a 4 puntos	De 0 a 4 puntos	De 0 a 4 puntos
	Establece relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo para obtener las razones trigonométricas.	Matematiza de manera adecuada el problema del perímetro del terreno y el problema de la altura del asta.	Expresa con lenguaje geométrico su comprensión de las razones trigonométricas a lo largo de la actividad.	Resuelve de manera adecuada el problema del perímetro del terreno y el problema de la altura del asta.	Implementa correctamente el uso de instrumentos de medida en la interpretación o solución del problema del asta.

4.5.7 Actividades de enseñanza – aprendizaje 7

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°7

Resolvemos problemas de razones trigonométricas que tienen el ángulo como incógnita

Tipo de actividad: actividad para la cognición/desarrollo.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Tema	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para determinar la medida de ángulos de razones trigonométricas.	Ángulo como incógnita en razones trigonométricas.	Evidencia de aprendizaje: Resolución de la ficha específica de la actividad. Instrumento de evaluación: Escala de apreciación.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Emplear estrategias para calcular el ángulo agudo de un triángulo rectángulo, dada su razón trigonométrica.
- **Duración de la actividad:** 30 minutos.
- **Momento** de implementación de la actividad: Desarrollo.

Prerrequisitos	Recursos y materiales
✓ Saber identificar las razones trigonométricas de ángulos agudos en triángulos rectángulos. ✓ Saber usar la opción “arco de una razón trigonométrica” en una calculadora científica. ✓ Saber usar el gnomon, el clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y distancias.	✓ Regla, escuadra. ✓ Lápiz, borrador, lapiceros. ✓ Espejos y gnomon. ✓ Calculadora. ✓ Cinta métrica. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°7



Resolvemos problemas de razones trigonométricas que tienen el ángulo como incógnita



Para esta actividad se formarán **grupos de 3 a 5 integrantes** para compartir ideas sobre la solución de la siguiente situación problemática. De ser necesario, ve con tu grupo al patio para recolectar algunos datos; recuerda hacerlo ordenadamente.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA: (RECUERDA QUE ESTA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA YA LA REVISAMOS EN ACTIVIDADES ANTERIORES)



En la actividad anterior calculaste la altura del asta de la bandera de tu colegio haciendo uso de un clinómetro; este instrumento te ayudó a determinar el ángulo de elevación (dato necesario para resolver el problema). Sin embargo, ahora ya no cuentas con este instrumento, pero sí te puedes apoyar del uso de los **espejos** y del **gnomon** como instrumentos. Además, ya no necesitas calcular la altura

del asta, ahora vas a **hallar el ángulo de elevación o de depresión con el cual se observa la cima del asta** (o en el caso del gnomon, calcular el **ángulo de los rayos del sol que permiten que se proyecte la sombra**). **¿Puedes determinar estos ángulos con ayuda de los espejos y del gnomon? ¿cómo?**

Comprendo el problema. Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué datos de los obtenidos en la actividad anterior me pueden ayudar a resolver esta situación?

- ¿Con qué recursos o instrumentos cuento para resolver esta situación?

- ¿Qué debo responder en esta situación?

- ¿Necesitas medir algún otro dato? ¿Cuál?

Plantea una estrategia o plan para resolver el problema. Describe tu plan para dar solución al problema.

Antes de que continúes con la resolución del problema, te presentamos una información que te puede ser de mucha ayuda en la resolución de este.



ARCOS O ÁNGULOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Si la razón trigonométrica (rt) de un ángulo desconocido cualquiera (α) es igual a un número (n) cuyo valor se conoce, entonces es posible hallar el valor de dicho ángulo; pues:

Si:

$$rt(\alpha) = n$$

Entonces:

$$\alpha = \text{arcr}t(n) = rt^{-1}(n)$$

Recuerda que:

$$rt^{-1}\alpha \neq \frac{1}{rt\alpha}$$

Ejemplo:

$$sen^{-1}\alpha \neq \frac{1}{sen\alpha}$$



Se pueden presentar dos casos donde se tenga que hallar el arco o ángulo de una razón trigonométrica, estos son los siguientes:	
Cuando el ángulo pertenece a un triángulo rectángulo notable.	Cuando el ángulo NO pertenece a un triángulo rectángulo notable.
En este caso se puede hallar de manera manual y sin ayuda de calculadora .	Se recomienda usar calculadora para hallar estos ángulos. Tu profesor te enseñará cómo realizar esta operación dependiendo de la calculadora que uses.
Ejemplo: - Si: $\operatorname{tg} \alpha = 1$, entonces: $\alpha = 45^\circ$ - Si: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$, entonces: $\alpha = 30^\circ$	Ejemplo: $\cos \alpha = 0,64$ $\alpha = \cos^{-1}(0,64)$ $\alpha = 50,21^\circ$ $\operatorname{sen} \alpha = 0,4$ $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0,4)$ $\alpha = 23,58^\circ$

Ahora que ya conoces cómo hallar el arco de una razón trigonométrica, entonces prosigue con la resolución de la situación problemática.



Resuelve el problema usando los espejos. Describe tu plan para dar solución al problema.

- **Matematiza la situación.** Realiza un modelo matemático de la situación ubicando todos los datos necesarios.

- **Resuelve el modelo matemático.** Da solución al problema resolviendo lo que planteaste en el apartado anterior.

Resuelve el problema usando el gnomon. Describe tu plan para dar solución al problema.

- **Matematiza la situación.** Realiza un modelo matemático de la situación ubicando todos los datos necesarios.

- **Resuelve el modelo matemático.** Da solución al problema resolviendo lo que planteaste en el apartado anterior.



Gómez Espinoza Jean
Pierre

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

[illegible][illegible]

4.5.8 Actividades de enseñanza – aprendizaje 8

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°8

Aplicamos nuestros conocimientos de trigonometría para calcular alturas

Tipo de actividad: actividad para la cognición/consolidación.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Tema	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para calcular alturas y/o distancias usando conocimientos sobre razones trigonométricas.	Razones trigonométricas. Cálculo de alturas.	Evidencia de aprendizaje: Resolución de la ficha específica de la actividad. Instrumento de evaluación: Escala de apreciación.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Resolver un problema que ponga a prueba conocimientos sobre el cálculo de alturas usando razones trigonométricas.
- **Duración de la actividad:** 30 minutos.
- **Momento** de implementación de la actividad: Cierre.

Prerrequisitos	Recursos y materiales
✓ Saber usar cinta métrica. ✓ Saber identificar las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. ✓ Saber usar el gnomon, el clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y distancias. ✓ Saber calcular el arco de una razón trigonométrica.	✓ Regla, escuadra. ✓ Lápiz, borrador, lapiceros. ✓ Clinómetro, espejos y gnomon. ✓ Calculadora. ✓ Cinta métrica. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°8



Aplicamos nuestros conocimientos de trigonometría para
calcular alturas



Para esta actividad se formarán **grupos de 3 a 5 integrantes** para compartir ideas sobre la solución de los problemas que surjan. De ser necesario, ve con tu grupo al patio para recolectar algunos datos; recuerda hacerlo ordenadamente.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Haciendo uso de los espejos, gnomon y el clinómetro calcula la altura de objetos en tu colegio, algunos de estos pueden ser: postes de luz, árboles, tanques de agua, edificios (pabellones), aulas, entre otros.



En cada caso se recomienda elaborar un diagrama para representar la situación utilizando cada uno de los instrumentos, luego, realizar los cálculos respectivos y compara los resultados obtenidos con cada uno de los instrumentos. **¿Qué instrumento prefieres usar? ¿por qué?**



Escoge uno de los objetos mencionados anteriormente y calcula su altura con las indicaciones dadas. Para escoger, ten en cuenta las características de tu colegio.



Encuentro la altura del objeto elegido: Represento la situación.

Elabora un diagrama que represente la situación utilizando el gnomon como instrumento de ayuda.

Elabora un diagrama que represente la situación utilizando el espejo como instrumento de ayuda.

Elabora un diagrama que represente la situación utilizando el clinómetro como instrumento de ayuda.

Encuentro la altura del objeto elegido: Realizo cálculos para obtener la solución.

Realiza los cálculos necesarios para encontrar el valor de la altura del objeto utilizando el gnomon.

Realiza los cálculos necesarios para encontrar el valor de la altura del objeto utilizando el espejo.

Realiza los cálculos necesarios para encontrar el valor de la altura del objeto utilizando el clinómetro.

Gómez Espinoza Jean
Pierre

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

[illegible][illegible]

4.5.9 Actividades de enseñanza – aprendizaje 9

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°9

Altura de un objeto cuyo punto de pie se ubica en una horizontal diferente

Tipo de actividad: actividad para la cognición/desarrollo.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Campo temático	Evaluación
Competencia de Resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Describe características de objetos reales o imaginarios, y las representa utilizando razones trigonométricas, ángulos de elevación y depresión. Plantea afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos y formas geométricas.	Razones trigonométricas. Cálculo de alturas.	Evidencia de aprendizaje: Resolución de la ficha específica de la actividad. Instrumento de evaluación: Rúbrica.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Resolver un problema donde se calcule la altura de un objeto cuyo pie se ubique en una horizontal diferente a la del observador; además, plantear afirmaciones sobre las relaciones geométricas involucradas.
- **Duración de la actividad:** 35 minutos.
- **Momento** de implementación de la actividad: Desarrollo.

Prerrequisitos	Recursos y materiales
✓ Saber usar cinta métrica. ✓ Saber identificar las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. ✓ Saber usar el gnomon, el clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y distancias. ✓ Saber hallar el ángulo como incógnita en una razón trigonométrica.	✓ Regla, escuadra. ✓ Lápiz, borrador, lapiceros. ✓ Clinómetro, espejos, gnomon. ✓ Calculadora. ✓ Cinta métrica. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°9

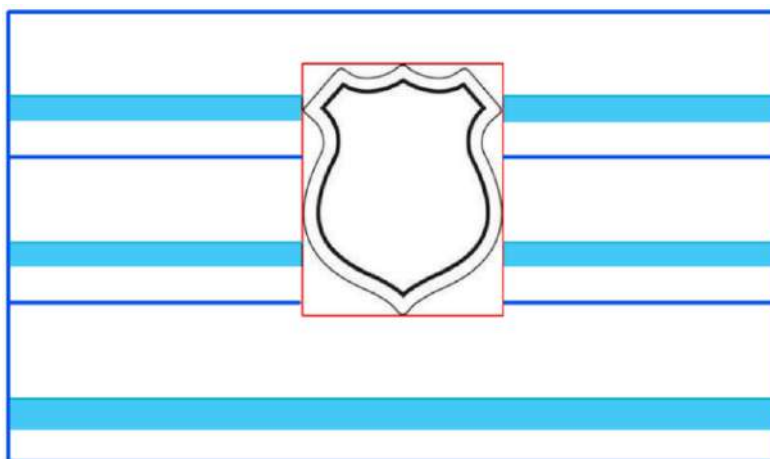

Altura de un objeto cuyo punto de pie se ubica en una horizontal diferente


Para esta actividad se formarán **grupos de 3 a 5 integrantes** para compartir ideas sobre la solución de la situación problemática. De ser necesario, ve con tu grupo al patio para recolectar algunos datos; recuerda hacerlo ordenadamente.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Debido a que se acerca el aniversario de nuestra Institución Educativa, se ha colocado como adorno el escudo del colegio en el pabellón principal el cual tiene 3 pisos. Junto a este hermoso escudo se quiere seguir añadiendo más adornos, sin embargo, para que todo en conjunto se vea más atractivo, es necesario conocer la altura del escudo que ya se colocó. El director del colegio no quiere sacarlo para medirlo porque demandaría mucho esfuerzo y tiempo, entonces, le pide a un estudiante de cuarto grado que calcule la altura de dicho adorno. **¿Cómo puedes dar solución al problema? ¿qué instrumentos necesitas? ¿qué conocimientos de matemática aplicarías?**

La siguiente figura muestra un bosquejo simple de la vista frontal del pabellón del colegio, esto te ayudará a tener una idea de la ubicación del escudo.



Comprendemos la situación problemática. Para ello, respondemos las siguientes preguntas.

- ¿Qué datos puedes identificar en la descripción del problema?

- ¿Qué piden hallar en este problema?

- ¿Qué otros datos necesitas obtener para encontrar la solución del problema? ¿Cómo los puedes hallar? ¿Necesitas apoyarte de algún instrumento?

Ideamos un plan para resolver la situación problemática. Justificamos con argumentos el plan que se pretende seguir.

- ¿Crees que necesitas de alguna propiedad especial de la trigonometría para resolver el problema, alguna fórmula? ¿por qué?

- **Plantea una estrategia o plan para resolver el problema.**

Indica de manera ordenada los pasos que seguirás para resolver el problema. Así mismo, incluye los instrumentos que necesitarás y los datos que pretendes recolectar con ellos.

Matematizamos la situación problemática.

Realiza un modelo matemático de la situación ubicando todos los datos necesarios.

Damos respuesta a la situación problemática.

Realiza los cálculos necesarios para encontrar la solución de la situación problemática.

USAMOS OTRO INSTRUMENTO PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Si usaste el clinómetro, ahora soluciona el problema usando los espejos; pero, si usaste los espejos, ahora soluciona el problema usando el clinómetro.

¿Será posible solucionar la situación haciendo uso del gnomon? ¿cómo?

REFERENCIAS

- <https://n9.cl/3dsx6>



Gómez Espinoza Jean
Pierre

RÚBRICA

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

DESEMPEÑO: Describe características de objetos reales o imaginarios, y las representa utilizando razones trigonométricas, ángulos de elevación y depresión.

Plantea afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos y formas geométricas.

Indicador	Niveles de logro			
	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente
Logra matematizar la situación problemática y resolver el modelo matemático de manera adecuada.	Logra matematizar la situación problemática y resolver el modelo matemático de manera adecuada.	Logra matematizar la situación problemática, pero no resuelve el modelo matemático de manera adecuada.	El modelo matemático que ha construido es incorrecto, pero lo resolvió adecuadamente.	El modelo matemático que ha construido es incorrecto, además lo resolvió de manera errónea.
Plantea afirmaciones sobre las relaciones que descubre entre los objetos y formas geométricas.	Plantea afirmaciones correctas y bien estructuradas sobre las relaciones que descubre entre los objetos y formas geométricas.	Plantea afirmaciones acertadas sobre las relaciones que descubre entre los objetos y formas geométricas.	Plantea afirmaciones poco acertadas sobre las relaciones que descubre entre los objetos y formas geométricas.	No plantea afirmaciones.
Describe y justifica adecuadamente la estrategia o plan que usará para resolver la situación problemática.	Describe y justifica adecuadamente la estrategia o plan que usará para resolver la situación problemática.	La estrategia o plan ideado está descrito en su totalidad, pero está poco justificado.	La estrategia o plan ideado está descrito en su totalidad, pero carece de justificación.	No describe ningún plan o estrategia para dar solución a la situación problemática.
Argumenta y justifica el uso de determinado instrumento para resolver la situación problemática; y los usa adecuadamente para recolectar datos.	Plantea argumentos adecuados para justificar el uso de determinado instrumento; y estos los usa adecuadamente para recolectar datos.	Plantea argumentos acertados para justificar el uso de determinado instrumento; y estos los usa adecuadamente para recolectar datos.	Plantea argumentos poco adecuados para justificar el uso de determinado instrumento; además, estos los usa incorrectamente para recolectar datos.	No plantea argumentos que justifiquen el uso de los instrumentos.

4.5.10 Actividades de enseñanza – aprendizaje 10

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°10

Altura de un objeto con punto de pie inaccesible

Tipo de actividad: actividad para la cognición/desarrollo.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Campo temático	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Expresa con dibujos, con material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las propiedades de las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones. Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para determinar longitudes y distancias inaccesibles empleando unidades convencionales.	Razones trigonométricas. Cálculo de alturas y/o distancias.	Evidencia de aprendizaje: Resolución de la ficha específica de la actividad. Instrumento de evaluación: Rúbrica.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Resolver un problema donde se calcule la altura de un objeto cuyo punto de pie sea inaccesible; para ello, se idean estrategias y procedimientos.
- **Duración de la actividad:** 50 minutos.
- **Momento** de implementación de la actividad: Desarrollo.

Prerrequisitos	Recursos y materiales
✓ Saber usar cinta métrica. ✓ Saber identificar las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. ✓ Saber usar el gnomon, el clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y distancias. ✓ Saber hallar el ángulo como incógnita en una razón trigonométrica.	✓ Regla, escuadra. ✓ Lápiz, borrador, lapiceros. ✓ Clinómetro, espejos, gnomon. ✓ Calculadora. ✓ Cinta métrica. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°10



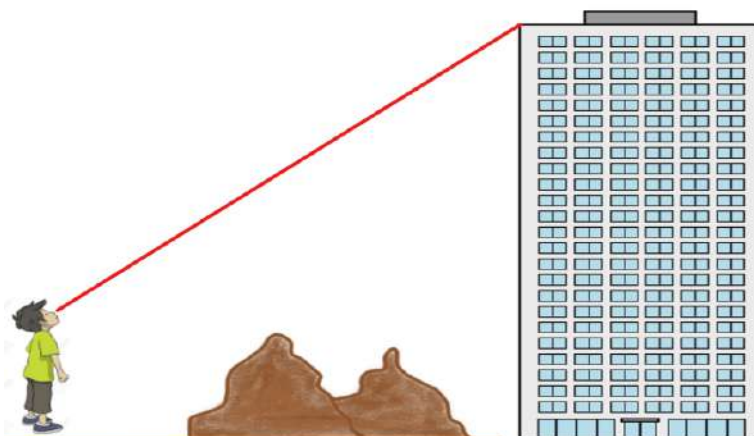
Altura de un objeto con punto de pie inaccesible



Para esta actividad se recomienda formar **grupos de 3 a 5 integrantes** para compartir ideas sobre la solución de la situación problemática. De ser necesario, ve con tu grupo al patio para recolectar algunos datos; recuerda hacerlo ordenadamente.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Desde un punto en el suelo se observa la cima de un edificio. Se sabe también que no se puede acceder al pie del edificio porque hay obstáculos debido a una construcción, por ello, no se puede medir la distancia horizontal desde el observador hasta el pie del edificio. **Se quiere calcular la altura del edificio y para ello puedes usar un instrumento** (gnomon, espejos o clinómetro) y una cinta métrica si se cree conveniente. **¿Será posible calcular la distancia horizontal?** La figura de al lado ilustra la situación. **Comprendemos la situación problemática.**



- ¿Qué datos puedes identificar en la descripción del problema?

- ¿Qué te piden hallar en este problema?

- ¿Qué obstáculo nuevo se te presenta en este problema? ¿qué puedes hacer frente a esta situación?

- ¿Qué otros datos necesitas obtener para encontrar la solución del problema? ¿Cómo los puedes hallar? ¿Necesitas apoyarte de algún instrumento?

Ideamos un plan para resolver la situación problemática. Justificamos con argumentos el plan que se pretende seguir.

- ¿Crees que necesitas de alguna propiedad especial de la trigonometría para resolver el problema, alguna fórmula? ¿por qué?

- **Plantea una estrategia o plan para resolver el problema.**

Indica de manera ordenada los pasos que seguirás para resolver el problema. Así mismo, incluye los instrumentos que necesitarás y los datos que pretendes recolectar con ellos.

Matematizamos la situación problemática.

Realiza un modelo matemático de la situación ubicando todos los datos necesarios.

Damos respuesta a la situación problemática.

Realiza los cálculos necesarios para encontrar la solución de la situación problemática.

USAMOS OTRO INSTRUMENTO PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Si usaste el clinómetro, ahora soluciona el problema usando los espejos; pero, si usaste los espejos, ahora soluciona el problema usando el clinómetro.

¿Será posible solucionar la situación haciendo uso del gnomon? ¿cómo?

Referencias

- <https://n9.cl/6bgne>
- <https://illustoon.com/photo/5432.png>



Gómez Espinoza Jean
Pierre

RÚBRICA

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

DESEMPEÑO: Expresa con dibujos, con material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las propiedades de las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones. Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para determinar longitudes y distancias inaccesibles empleando unidades convencionales.

Indicador	Niveles de logro			
	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente
Logra matematizar la situación problemática y resolver el modelo matemático de manera adecuada.	Logra matematizar la situación problemática y resolver el modelo matemático de manera adecuada.	Logra matematizar la situación problemática, pero no resuelve el modelo matemático de manera adecuada.	El modelo matemático que ha construido es incorrecto, pero lo resolvió adecuadamente.	El modelo matemático que ha construido es incorrecto, además lo resolvió de manera errónea.
Expresa con dibujos, con material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las propiedades de las razones trigonométricas.	Expresa con dibujos, con material concreto y con lenguaje geométrico, una adecuada comprensión sobre las propiedades de las razones trigonométricas.	Expresa con lenguaje geométrico una adecuada comprensión sobre las propiedades de las razones trigonométricas.	Expresa con dibujos, con material concreto o lenguaje geométrico, una comprensión poco clara sobre las propiedades de las razones trigonométricas.	No demuestra comprensión de las propiedades de las razones trigonométricas.
Describe y justifica adecuadamente la estrategia o plan que usará para resolver la situación problemática.	Describe y justifica adecuadamente la estrategia o plan que usará para resolver la situación problemática.	La estrategia o plan ideado está descrito en su totalidad, pero está poco justificado.	La estrategia o plan ideado está descrito en su totalidad, pero carece de justificación.	No describe ningún plan o estrategia para dar solución a la situación problemática.
Argumenta y justifica el uso de determinado instrumento para resolver la situación problemática; y los usa adecuadamente para recolectar datos.	Plantea argumentos adecuados para justificar el uso de determinado instrumento; y estos los usa adecuadamente para recolectar datos.	Plantea argumentos acertados para justificar el uso de determinado instrumento; y estos los usa adecuadamente para recolectar datos.	Plantea argumentos poco adecuados para justificar el uso de determinado instrumento; además, estos los usa incorrectamente para recolectar datos.	No plantea argumentos que justifiquen el uso de los instrumentos.

4.5.11 Actividades de enseñanza – aprendizaje 11

FICHA GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Actividad de enseñanza aprendizaje N°11

Altura de un objeto con punto de pie inaccesible y ubicado en una horizontal diferente

Tipo de actividad: actividad para la cognición/desarrollo o cognición/consolidación.

Competencia y capacidades	Desempeño precisado	Campo temático	Evaluación
Competencia de resolución de problemas. • Matematiza situaciones. • Comunica y representa ideas matemáticas. • Elabora y usa estrategias. • Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	Describe características de objetos reales o imaginarios, y las representa utilizando razones trigonométricas, ángulos de elevación y depresión. Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para determinar alturas y/o distancias inaccesibles empleando unidades convencionales.	Razones trigonométricas. Cálculo de alturas y/o distancias.	Evidencia de aprendizaje: Resolución de la ficha específica de la actividad. Instrumento de evaluación: Rúbrica.

- Dirigida a estudiantes de **cuarto** grado de secundaria.
- **Objetivo de aprendizaje:** Resolver un problema donde se calcule la altura de un objeto cuyo punto de pie sea inaccesible y esté ubicado en una horizontal diferente a la del observador; para ello, se idean estrategias y procedimientos.
- **Duración de la actividad:** 60 minutos.
- **Momento** de implementación de la actividad: Desarrollo o Cierre.

Prerrequisitos	Recursos y materiales
✓ Saber usar cinta métrica. ✓ Saber identificar las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. ✓ Saber usar el gnomon, el clinómetro y los espejos para el cálculo de alturas y distancias. ✓ Saber hallar el ángulo como incógnita en una razón trigonométrica.	✓ Regla, escuadra. ✓ Lápiz, borrador, lapiceros. ✓ Clinómetro, espejos, gnomon. ✓ Calculadora. ✓ Cinta métrica. ✓ Ficha específica de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

FICHA ESPECÍFICA DE LA ACTIVIDAD DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE



Actividad de enseñanza aprendizaje N°11



Altura de un objeto con punto de pie inaccesible y ubicado en una horizontal diferente



Para esta actividad se formarán **grupos de 3 a 5 integrantes** para compartir ideas sobre la solución de la situación problemática. De ser necesario, ve con tu grupo al patio para recolectar algunos datos; recuerda hacerlo ordenadamente.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

En el mismo contexto de la situación problemática de la actividad 9, se pide calcular la altura del escudo, pero en este caso hay un obstáculo que impide medir directamente la distancia horizontal entre el observador y el pabellón principal (un obstáculo como en la actividad 10). Bajo esta nueva condición, **¿cómo puedes dar solución al problema? ¿qué instrumentos necesitas? ¿qué conocimientos de matemática aplicarías? ¿será posible calcular la distancia horizontal entre el observador y el pabellón principal?**

Comprendemos la situación problemática. Para ello, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué datos puedes identificar en la descripción del problema?

- ¿Qué te piden hallar en este problema?

- ¿Qué obstáculo nuevo se te presenta en este problema? ¿qué puedes hacer frente a esta situación?

- ¿Qué otros datos necesitas obtener para encontrar la solución del problema? ¿Cómo los puedes hallar? ¿Necesitas apoyarte de algún instrumento?

Ideamos un plan para resolver la situación problemática. Justificamos con argumentos el plan que se pretende seguir.

- ¿Crees que necesitas de alguna propiedad especial de la trigonometría para resolver el problema, alguna fórmula? ¿por qué?

- **Plantea una estrategia o plan para resolver el problema.**

Indica de manera ordenada los pasos que seguirás para resolver el problema. Así mismo, incluye los instrumentos que necesitarás y los datos que pretendes recolectar con ellos.

Matematizamos la situación problemática.

Realiza un modelo matemático de la situación ubicando todos los datos necesarios.

Damos respuesta a la situación problemática.

Realiza los cálculos necesarios para encontrar la solución de la situación problemática.

USAMOS OTRO INSTRUMENTO PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Si usaste el clinómetro, ahora soluciona el problema usando los espejos; pero, si usaste los espejos, ahora soluciona el problema usando el clinómetro.

¿Será posible solucionar la situación haciendo uso del gnomon? ¿cómo?



Gómez Espinoza Jean
Pierre

RÚBRICA

COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

DESEMPEÑO: Describe características de objetos reales o imaginarios, y las representa utilizando razones trigonométricas, ángulos de elevación y depresión. Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para determinar longitudes y distancias inaccesibles empleando unidades convencionales.

Indicador	Niveles de logro			
	Muy bien	Bien	Regular	Insuficiente
Logra matematizar la situación problemática y obtiene un modelo matemático.	El modelo matemático que obtiene reproduce correctamente la situación e incluye todos los datos necesarios para ser resuelto.	El modelo matemático que obtiene reproduce correctamente la situación, pero no incluye todos los datos necesarios para ser resuelto.	El modelo matemático que obtiene no reproduce correctamente la situación, además, no incluye todos los datos necesarios para ser resuelto.	No obtiene modelo matemático alguno.
Resuelve el modelo matemático realizando cálculos con razones trigonométricas.	Realiza los cálculos correspondientes de manera adecuada y obtiene la respuesta correcta de la situación.	Realiza los cálculos correspondientes de manera adecuada, a pesar de ello, no obtiene la respuesta correcta de la situación.	Los cálculos que realiza son incorrectos, por ello, no obtiene la respuesta correcta de la situación.	No realiza cálculos para resolver el modelo matemático.
Describe y justifica adecuadamente la estrategia o plan que usará para resolver la situación problemática.	Describe y justifica adecuadamente la estrategia o plan que usará para resolver la situación problemática.	La estrategia o plan ideado está descrito en su totalidad, pero está poco justificado.	La estrategia o plan ideado está descrito en su totalidad, pero carece de justificación.	No describe ningún plan o estrategia para dar solución a la situación problemática.
Argumenta y justifica el uso de determinado instrumento para resolver la situación problemática; y los usa adecuadamente para recolectar datos.	Plantea argumentos adecuados para justificar el uso de determinado instrumento; y estos los usa adecuadamente para recolectar datos.	Plantea argumentos acertados para justificar el uso de determinado instrumento; y estos los usa adecuadamente para recolectar datos.	Plantea argumentos poco adecuados para justificar el uso de determinado instrumento; además, estos los usa incorrectamente para recolectar datos.	No plantea argumentos que justifiquen el uso de los instrumentos.

4.6 Validación de la propuesta pedagógica

La propuesta pedagógica junto con sus 11 actividades de enseñanza-aprendizaje se han validado mediante la técnica de validación por juicio de expertos. Han sido tres los profesores expertos que han emitido su juicio mediante una ficha de evaluación de la propuesta pedagógica (ver Anexos A, B y C). Además, este instrumento de evaluación ha permitido expresar la calificación hecha por los expertos mediante un coeficiente de validez. De este modo, los resultados de dicha evaluación, hecha por los tres expertos, se plasman en la Tabla 13.

Tabla 13

Puntajes otorgados por los expertos en la validación de la propuesta pedagógica

Expertos	Validación de la propuesta pedagógica	Validación de las actividades de enseñanza-aprendizaje										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Experto 1	0,94	0,96	0,96	0,96	0,91	0,94	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96
Experto 2	0,94	0,98	0,98	0,98	0,97	0,94	0,98	1,00	1,00	0,98	0,98	0,98
Experto 3	0,97	0,98	0,96	1,00	0,94	0,88	0,98	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Promedio	0,95	0,97	0,97	0,98	0,94	0,92	0,97	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98

Fuente: Elaboración propia.

Como se aprecia en la tabla anterior, todos los promedios son mayores que 0,9 lo que significa, según la ficha de evaluación de la propuesta pedagógica, un coeficiente que expresa una “validez muy buena”. Entonces, tanto la propuesta pedagógica de manera general como cada actividad de enseñanza-aprendizaje de manera específica, tienen esta calificación dada por los expertos que se traduce en una “validez muy buena”.

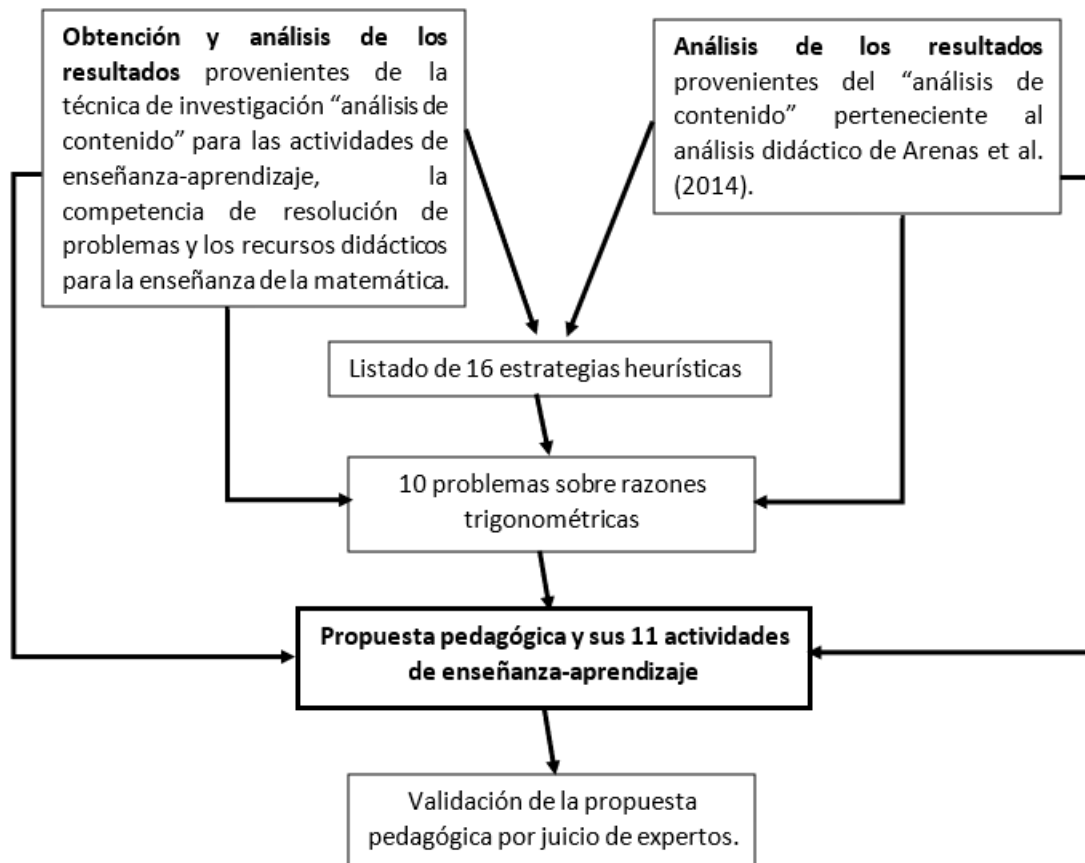
4.7 Discusión de los resultados

En este apartado se discuten todos los resultados obtenidos en este estudio, los cuales dan sustento a todas las acciones incluidas en el diseño de la propuesta pedagógica que es el producto principal de esta investigación. Primero, se discuten los resultados provenientes de la aplicación de la técnica de análisis de contenido para cada una de las variables de la investigación; posteriormente, se discuten los productos obtenidos en esta investigación, los cuales son: el listado de estrategias heurísticas, los 10 problemas diseñados y la propuesta pedagógica con sus 11 actividades de enseñanza-aprendizaje. Se hace referencia también a los resultados obtenidos del estudio realizado por Arenas et al. (2014) y a los resultados obtenidos de la técnica de validación por juicio de expertos.

Para una mejor comprensión de este apartado, tómese como referencia el esquema plasmado en la Figura 38. Dicho esquema grafica el orden en el que son obtenidos los resultados y qué resultados fueron necesarios para obtener los productos.

Figura 38

Orden de obtención de los resultados de la investigación



Nota. Elaboración propia.

En la Figura 38 se describe la forma de obtención de los productos de la investigación. Los datos provenientes del marco teórico se han analizado mediante la técnica de investigación “análisis de contenido” obteniendo los resultados que han permitido seleccionar las estrategias heurísticas, formular los problemas sobre razones trigonométricas, diseñar la propuesta pedagógica y establecer criterios para elaborar las actividades de enseñanza-aprendizaje. Así mismo, el análisis de los resultados provenientes del “análisis de contenido” perteneciente al análisis didáctico de Arenas et al. (2014) han aportado para el logro de los productos de esta investigación.

A continuación, se describe la discusión de los resultados de la investigación en los siguientes dos apartados.

4.7.1 *Discusión de los resultados provenientes de la técnica de análisis de contenido*

4.7.1.1 Variable: Actividades de enseñanza-aprendizaje. Estos resultados revelan cómo se deben clasificar, seleccionar y diseñar las actividades de enseñanza-aprendizaje para que estén acordes con las características de la propuesta pedagógica producto de este estudio; de tal modo que puedan ser incluidas en sesiones de aprendizaje del área de matemática.

En principio, se determinó que las actividades de enseñanza-aprendizaje se deben clasificar en 15 tipos, los cuales surgen de contrastar los aportes de Rodríguez (2007) y Villalobos (2003). Pero, las actividades que integran esta propuesta pedagógica producto de este estudio son de cuatro tipos: actividades para la cognición/motivación, actividades para la cognición/saberes previos, actividades para la cognición/desarrollo, y actividades para la cognición/consolidación; porque estos son los que más se acomodan a las características de la propuesta pedagógica. Además, para identificar si una actividad es de un tipo u otro se debe tener en cuenta en qué momento de la sesión de aprendizaje dicha actividad puede lograr máximos beneficios para el estudiante, y es ahí donde se ha incluido. Así mismo, se tuvo en cuenta si una actividad es más idónea para desarrollar saberes previos, para motivar, para desarrollar conceptos y procedimientos, o para consolidar aprendizajes.

Respecto a la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje, se realizó en base a cuatro criterios que coinciden con los aportes de la Subdirección de Currículo y Evaluación [INACAP] (2017) y Villalobos (2003). Estos cuatro criterios son: criterio de adecuación a los estudiantes, criterio de coherencia con el propósito de la sesión, criterio de secuenciación didáctica, y criterio de factibilidad.

El primer criterio de selección se evidencia porque todas las actividades están dirigidas a estudiantes de cuarto grado de secundaria, por ende, la descripción de los logros de aprendizaje está en base a los estándares de aprendizaje para los estudiantes de dicho nivel académico. El segundo criterio se evidencia porque todas las actividades de enseñanza-aprendizaje apuntan a la adquisición de los conceptos y procedimientos pertenecientes al campo temático de razones trigonométricas y se orientan a potenciar el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. El tercer criterio se evidencia porque todas las actividades de enseñanza-aprendizaje están articuladas entre sí de manera ordenada, de tal modo que es recomendable realizar determinada actividad antes que otra. Finalmente, el cuarto criterio se evidencia porque la inclusión de recursos didácticos en las actividades de enseñanza-aprendizaje se realiza de manera ordenada y clara con el fin de enriquecerlas, esto también implica que dichos recursos sean fáciles de conseguir y manejar tanto por los estudiantes como por el docente.

Respecto al diseño de las actividades de enseñanza-aprendizaje, se determinó realizarlo en base a cuatro criterios que coinciden con los aportes de Otero y Rodríguez (2016), Romero (2010), Subdirección de Currículo y Evaluación [INACAP] (2017), y Zapata y Blanco (2014). Estos cuatro

criterios de diseño se denominan de la siguiente manera: criterio de motivación, criterio de unidad y flexibilidad, criterio de información a incluir en la actividad, y criterio de estructura de la actividad.

El primer criterio de diseño se evidencia de manera transversal en todas las actividades de la propuesta pedagógica, pues no hay ninguna actividad que no busque motivar a los estudiantes en los aprendizajes y eso se plasma en acciones como el tipo de letra y colores usados para redactar el diseño de la actividad, las figuras y los gráficos que ilustren la actividad, las situaciones problemáticas incluidas, los recursos didácticos incorporados, entre otros. El segundo criterio se evidencia en el hecho de que todas las actividades apuntan a un mismo propósito en común, que estén vinculadas entre sí, y que la realización de una sea necesaria para seguir avanzando gradual y exitosamente hacia el objetivo general de la propuesta pedagógica. El tercer criterio es fácil de evidenciar ya que se puede apreciar de manera literal la información que contienen las actividades, tal como: nombre de la actividad; competencia, capacidad, desempeño y campo temático a desarrollar; objetivo de aprendizaje; edad y/o grado de estudios de los estudiantes; tiempo para la realización de la actividad; recursos y materiales didácticos a utilizar; prerrequisitos para iniciar la actividad; descripción de la actividad; el instrumento de evaluación; y otra información que se crea conveniente. Finalmente, el cuarto criterio se evidencia porque la información del tercer criterio se organizó en base a la ficha general y ficha específica de las actividades que han sido plasmadas en las Figuras 22 y 23, respectivamente.

4.7.1.2 Variable: Competencia de resolución de problemas. Estos resultados revelan que se deben realizar para permitir el desarrollo de la competencia de resolución de problemas atendiendo a cada una de sus capacidades. En este sentido, se han considerado acciones que potencian mejor la capacidad de Matematiza situaciones, otras para la capacidad Comunica y representa ideas matemáticas, otras para la capacidad Elabora y usa estrategias, y otras para la capacidad Razona y argumenta generando ideas matemáticas.

Estos resultados, acordes con los aportes de Godino et al. (2003) y MINEDU (2015), revelan que la capacidad de Matematiza situaciones se potencia cuando se propone que el estudiante realice abstracciones de la realidad para crear un modelo matemático que reproduzca las características del contexto, para posteriormente resolverlo a partir de sus conocimientos del área. Por ello, es importante que el docente le presente al estudiante situaciones problemáticas abiertas y de contexto real, que lo lleven a realizar diagramas, esquemas o gráficos para visualizar mejor el problema y no se apresure a obtener una solución. Por otro lado, en ocasiones la información presentada no es suficiente para obtener un modelo matemático que se pueda resolver, en ese caso, el estudiante puede recolectar datos de la realidad con ayuda de instrumentos que vendrían a ser recursos didácticos facilitadores del proceso de matematización.

Respecto a los resultados de la capacidad Comunica y representa ideas matemáticas, los cuales coinciden con los aportes de Aguilar (2015), Bornas y Mozo (2019), y MINEDU (2015), revelan que su desarrollo se potencia cuando se propone que el estudiante sea capaz de expresar (de manera oral o escrita) su comprensión de un problema, ya que de este modo se agiliza el manejo de expresiones matemáticas lo cual enriquece el lenguaje matemático del estudiante. Así mismo, el buen desarrollo de esta capacidad supone el hecho de que el estudiante se traslade entre los 5 sistemas de representaciones en los que se pueden expresar los conceptos del campo temático de razones trigonométricas plasmados en la Figura 26. Por ello, es importante proponer que el estudiante realice distintas representaciones del problema (procurando pasar desde sistemas de representaciones concretos hacia los más abstractos), realice ejemplificaciones, y demuestre una adecuada comprensión del problema antes, durante y después de su resolución. En beneficio de lograr una adecuada comprensión de las ideas matemáticas, se propone el uso de instrumentos como recursos didácticos por parte del estudiante, ya que facilitan la comprensión y expresión de los conceptos y procesos matemáticos implicados en su uso.

Respecto a los resultados de la capacidad Elabora y usa estrategias, los cuales coinciden con los aportes de Gamarra (2017), MINEDU (2015), y OCDE (2017), revelan la importancia de que el estudiante planifique previamente todas las acciones que pretende realizar antes de iniciar el proceso de resolución de un problema. Esto supone que el estudiante elabore un plan donde describa las estrategias, procesos, materiales y recursos que pretende usar, para posteriormente aplicarlo y evaluar su eficacia. Esta capacidad permite enriquecer el arsenal de estrategias heurísticas que posee el estudiante cuando solucione problemas de matemática e identificar la más adecuada para cada caso. Para beneficio de esta capacidad, el docente puede proponer problemas que puedan ser solucionados de distintas maneras (unas más complejas que otras) y que el estudiante pueda deliberar sobre la conveniencia de usar una u otra. Además, el plan que se pretenda aplicar puede resultar más fácil de llevar a cabo si se incorporan recursos didácticos utilizados de manera adecuada e innovadora.

Respecto a los resultados de la capacidad Razona y argumenta generando ideas matemáticas, los cuales coinciden con los aportes de Godino et al. (2003), MINEDU (2015), y OCDE (2017), revelan la importancia de que el estudiante establezca relaciones entre ideas matemáticas por medio de razonamientos y distintos procesos mentales, con el fin de plantear argumentos sólidos que sustenten su accionar a lo largo de la resolución de un problema. Así pues, se trata de estimular el razonamiento sobre ideas, conceptos y procesos matemáticos involucrados en la resolución de un problema, orientando al estudiante en su hacer matemático para mejorar su saber matemático. En beneficio del desarrollo de esta capacidad, el docente debe plantear situaciones de contexto real para que el estudiante se enfrente con la realidad y relacione ideas matemáticas presentes en ella; debe formular preguntas y repreguntas respecto a los problemas (por ejemplo: “¿qué pasaría si...?”, “¿por qué...?” y

“¿será posible...?”); y debe orientar al estudiante hacia el planteamiento de afirmaciones, argumentos o conclusiones.

4.7.1.3 Variable: Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática. Estos resultados revelan las características que tienen los recursos didácticos que se han incluido en las actividades de enseñanza-aprendizaje. En principio, los recursos didácticos han sido elegidos y organizados adecuadamente, con criterio, seguridad y creatividad de parte del docente investigador. Para ello, se determinó qué recursos utilizar en base al análisis de sus ventajas y desventajas en la enseñanza-aprendizaje del campo temático de razones trigonométricas. En este sentido, y tomando en consideración los aportes de Díaz (1996), Savage (2016), y Zapata y Blanco (2014), se establecieron criterios de selección y organización de los recursos didácticos que se tomaron en cuenta en la planificación de la propuesta pedagógica. Los criterios que se han tomado en cuenta para incluir los recursos didácticos en las actividades de enseñanza-aprendizaje son: criterio de claridad y coherencia, criterio de originalidad, criterio de adecuación al propósito de la lección, criterio de motivación y contextualización, un criterio que hace referencia a brindar orientaciones e instrucciones idóneas respecto al uso de los recursos didácticos, un criterio que hace referencia al adecuado manejo de los recursos didácticos que debe tener el docente para que pueda explicar dicho funcionamiento a los estudiantes, y un último criterio que hace referencia a la disponibilidad de los recursos.

Debido a la gran variedad de recursos didácticos, conviene prestar atención en aquellos que permiten el desarrollo de la competencia de resolución de problemas y la enseñanza de las razones trigonométricas. Para ello, se han considerado los aportes de Godino et al. (2003), quienes afirman que los recursos didácticos usados apropiadamente potencian el desarrollo de cada una de las capacidades de la competencia en mención, ya que permiten recoger datos de la realidad lo cual facilita el proceso de matematización de la misma; sirven de motivadores para que los estudiantes expresen su comprensión sobre el problema y las ideas matemáticas involucradas en él; pueden ser incluidos en el plan o estrategias de resolución del problema que elabore el estudiante; y ayudan al razonamiento para establecer relaciones entre conceptos y procedimientos matemáticos. Por otro lado, los resultados del análisis de contenido de Arenas et al. (2014), brindan una idea de cuáles son los recursos didácticos que favorecen la enseñanza del campo temático de razones trigonométricas, ya que los autores han identificado el cálculo de alturas y distancias como un contexto (fenómeno) que se debe incluir en beneficio del aprendizaje de dicho campo temático; por ello, los recursos didácticos que predominan en la propuesta pedagógica buscan facilitar la realización de esta tarea.

De este modo, los recursos didácticos incluidos en esta propuesta pedagógica benefician al estudiante en la tarea de calcular alturas y distancias y a su vez lo enfrentan a un problema de contexto real, estos recursos son de tipo manipulativo tangible. Los recursos que se han considerado en esta propuesta pedagógica para la enseñanza del campo temático de razones trigonométricas son: la regla,

el transportador, la cinta métrica, el gnomon, el clinómetro, y el espejo. Algunos de estos recursos, como el gnomon, el clinómetro y los espejos mayormente demandan que el aprendizaje se realice fuera del salón de clase para enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, por ello, se dan orientaciones claras respecto a su uso.

4.7.2 Discusión de los productos de esta investigación

4.7.2.1 Producto: Listado de estrategias heurísticas. El listado conformado por 16 estrategias heurísticas es el primer producto obtenido en esta investigación y es necesario porque el desarrollo de la competencia de resolución de problemas supone que el estudiante haga uso de adecuadas estrategias cuando resuelva un problema. Por ello, estas estrategias son propias del área de matemática y se pretende que sean usadas por los estudiantes en la resolución de problemas que involucre el campo temático de razones trigonométricas. Además, el hecho de que el estudiante pueda usar una u otra estrategia heurística dependerá de las características del problema y de la actividad en la que se incluya.

En este sentido, hay estrategias heurísticas que se proponen que sean usadas por el estudiante, para que pueda desarrollar cada una de las capacidades de la competencia de resolución de problemas.

Para la capacidad de Matematiza situaciones, las estrategias heurísticas consideradas en este estudio son las siguientes: “hacer distintas representaciones del problema”, “construir modelos matemáticos”, “utilizar una notación adecuada”, “dibujar un esquema de la situación”, “analizar propiedades vinculadas al problema”, y “hacer proyecciones”. Se incluyen estas estrategias debido a que ayudan al estudiante en la realización adecuada y ordenada del proceso de matematización, lo que supone realizar abstracciones sobre la situación real. Con estas estrategias, la matematización se puede dar de distintas maneras (un diagrama, un gráfico, entre otros), pero siempre apuntando a la obtención de un modelo matemático que el estudiante pueda resolver desde sus conocimientos del área.

Para la capacidad Comunica y representa ideas matemáticas, las estrategias heurísticas consideradas son las siguientes: “ejemplificar”, “reproducir tu comprensión del problema” y “hacer distintas representaciones del problema”. Se incluyen las dos primeras estrategias debido a que buscan orientar al estudiante para que compruebe si ha comprendido el problema antes, durante y después de su resolución; y pueda expresar dicha comprensión. La última estrategia se plantea con el fin de orientar al estudiante para que pueda plasmar un concepto matemático en distintos sistemas de representación, preferiblemente, que inicie plasmando representaciones concretas para luego pasar a las más abstractas.

Para la capacidad Elabora y usa estrategias, se han incluido todas las estrategias heurísticas del listado debido a todas se plantean con el fin de facilitar el proceso hacia la solución de situaciones

problemáticas. En este sentido, parte del plan elaborado por el estudiante debe describir qué estrategia o estrategias utilizar a lo largo de la resolución del problema.

Para la capacidad Razona y argumenta generando ideas matemáticas, las estrategias heurísticas son las siguientes: “contrastar resultados”, “descomponer y recomponer el problema”, “razonamiento a la inversa”, y “plantear conjeturas, hipótesis, afirmaciones y/o argumentos sobre el proceso de resolución del problema”. Se incluyen estas estrategias debido a que estimulan los procesos mentales, especialmente, el razonamiento sobre las ideas, conceptos y procesos matemáticos involucrados.

4.7.2.2 Producto: Problemas sobre razones trigonométricas. Estos problemas han sido creados especialmente para permitir el desarrollo de la competencia de resolución de problemas que involucre el campo temático de razones trigonométricas; y, en su mayoría, que permitan el uso del gnomon, clinómetro y espejos como recursos didácticos motivadores y facilitadores del aprendizaje. Así mismo, estos problemas han sido repartidos en las actividades de enseñanza-aprendizaje y en algunos casos retomados en otras actividades, pero con algún enunciado nuevo que permita abordar los objetivos de la actividad respectiva.

Específicamente, para permitir el desarrollo de la competencia de resolución de problemas se ha tomado como criterio el diseño de problemas abiertos, es decir, aquellos que no proporcionen directamente datos numéricos al estudiante para que realice cálculos con ellos; sino que, se pretende que el estudiante pueda enfrentarse a una situación de contexto real para interactuar con ella, analizarla, plantear estrategias y solucionarla (Arenas et al., 2014). En este sentido, estos problemas han sido diseñados tomando en cuenta que el estudiante realice un esfuerzo mental para resolverlos; pues este debe deliberar sobre qué acciones realizar para responder a las interrogantes planteadas en cada uno de los problemas.

En este sentido, todos los problemas diseñados involucran el cálculo de alturas, distancias o la resolución de triángulos que el estudiante debe identificar; pues estos problemas representan situaciones de contexto real diseñadas para ser solucionadas a partir de los conocimientos de razones trigonométricas. La estructura conceptual del campo temático (plasmadas en las Figuras 24 y 25) fue otro resultado del estudio de Arenas et al. (2014) que contribuyó al diseño de los problemas, ya que proporciona una visión general de todos los conceptos y procedimientos involucrados, por ello, se decidió no diseñar problemas que abarquen conceptos y procedimientos más allá de las razones trigonométricas para ángulos agudos; pues el campo temático de razones trigonométricas en su totalidad es muy amplio.

Por último, estos problemas han sido diseñados con la intención de que el estudiante los resuelva utilizando las estrategias heurísticas del listado creado previamente. De este modo, en un problema el estudiante puede usar una o varias estrategias heurísticas, dependiendo de las

características de este. En la Tabla 12, se hacen recomendaciones de qué estrategias heurísticas puede usar el estudiante cuando se enfrenta a cada uno de los problemas; sin embargo, este puede usar una u otra estrategia del listado e incluso alguna que no se haya considerado dentro del mismo. Pues, el propósito es orientar al estudiante a que use determinadas estrategias heurísticas al solucionar un problema, mas no obligarlo a usar dichas estrategias.

4.7.2.3 Producto: Propuesta pedagógica. El resultado principal es la obtención de la propuesta pedagógica que comprende 11 actividades de enseñanza-aprendizaje. Sobre este producto aterrizan todos los demás resultados obtenidos anteriormente, pues esta propuesta pedagógica integra los propósitos de aprendizaje, actividades, una metodología específica, recursos y materiales didácticos determinados, e instrumentos de evaluación. Así mismo, las acciones descritas en estas actividades giran en torno a los problemas sobre razones trigonométricas elaborados previamente, con el fin de orientar al estudiante en el uso de estrategias heurísticas para su resolución.

Esta es una propuesta pedagógica para enseñar el campo temático de razones trigonométricas, sin embargo, teniendo como sustento la estructura conceptual de este campo temático hecha por Arenas et al. (2014), no se han distribuido todos sus conceptos y procedimientos en las 11 actividades de enseñanza-aprendizaje porque son demasiados y la propuesta sería muy extensa; por ello, solo se distribuyeron los necesarios para abordar las razones trigonométricas para ángulos agudos. En este sentido, es evidente que los resultados de Arenas et al. (2014) también contribuyeron a precisar los temas y desempeños a incluir en cada una de estas actividades. Sin embargo, aunque el campo temático no se haya abordado en su totalidad, los esfuerzos para permitir el desarrollo de la competencia de resolución de problemas no se ven afectados dado que las actividades de enseñanza-aprendizaje comprenden acciones que tienen sustento en los resultados de la técnica de análisis de contenido aplicada a las categorías “Competencia de resolución de problemas” y “Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática”.

Después de diseñada la propuesta pedagógica, esta se sometió a la técnica de validación por juicio de expertos. Al aplicar esta técnica, se obtuvieron como resultados 12 coeficientes de validez comprendidos entre 0,9 y 1, los valores de estos coeficientes pertenecen al intervalo cuyo resultado se traduce en una “validez muy buena”, que es la calificación más alta. De este modo, se puede afirmar que, según los expertos, el diseño de esta propuesta pedagógica es adecuado para ser aplicado y desarrollar la competencia de resolución de problemas en estudiantes de cuarto grado de secundaria, mediante el campo temático de razones trigonométricas. De manera general, la propuesta pedagógica obtuvo un coeficiente de validez promedio igual a 0,95. Además, en este caso los tres expertos coincidieron en darle un puntaje de “2” al último ítem, lo cual refleja que los expertos prefieren que en la propuesta pedagógica se abarquen más conceptos del campo temático de razones trigonométricas.

A continuación, se discuten las 11 actividades de enseñanza-aprendizaje que integraron la propuesta pedagógica.

- La actividad de enseñanza-aprendizaje 1 pertenece al tipo de actividades para la cognición/motivación, y obtuvo un coeficiente de validez igual a 0,97. Esta actividad es introductoria, por ello se hace especial énfasis en el carácter motivacional. Así pues, en esta actividad se presentan los recursos didácticos que el estudiante usará como instrumentos de medida para facilitar la resolución de problemas, con el fin de despertar su interés en el inicio de estos aprendizajes. Además, se propone que el propio estudiante construya dichos instrumentos, comprenda su uso e idee situaciones de contexto real en las cuales pueda utilizarlos. En esta actividad, no se proporcionan conceptos propios del campo temático de razones trigonométricas, pero sí se recuerdan conceptos necesarios como el de ángulo y triángulo rectángulo; por ejemplo, en esta actividad se incluye el Problema 1 para que el estudiante represente el modo correcto de usar los instrumentos (gnomon, clinómetro y espejos) en la resolución de una situación de tal contexto.
- La actividad de enseñanza-aprendizaje 2 pertenece al tipo de actividades para la cognición/saberes previos, y obtuvo un coeficiente de validez igual a 0,97. Esta actividad está más centrada en los saberes previos, pues se da importancia en recordar lo que son los ángulos de elevación y depresión, conceptos claves para el uso del clinómetro y espejos en el cálculo de alturas y distancias. En la actividad anterior, los estudiantes aprendieron a utilizar los instrumentos de medida, ahora deben identificar los elementos abstractos que aparecen en el uso de dichos instrumentos. Para ello se incluyó el Problema 2, pues el estudiante debe trazar y graficar los elementos de los ángulos de elevación y depresión para representar un modelo matemático de dicha situación problemática.
- La actividad de enseñanza-aprendizaje 3 pertenece al tipo de actividades para la cognición/desarrollo, y obtuvo un coeficiente de validez igual a 0,98. Esta actividad se centra en iniciar el estudio de lo que es una razón en geometría (razón entre segmentos y entre lados de un triángulo), para ello se aborda el estudio del teorema de Thales y la semejanza entre triángulos. En esta actividad se presenta una situación problemática que incluye el Problema 3, pues este problema está orientado a trabajar los conceptos y procedimientos del teorema de Thales. Además, se orienta al estudiante para que logre una buena comprensión de la situación problemática, plantee un modelo matemático de esta y pueda encontrar su solución. Por último, se propone que el estudiante indique cómo el teorema de Thales está presente en el uso del gnomon, clinómetro y espejos.

- La actividad de enseñanza-aprendizaje 4 pertenece al tipo de actividades para la cognición/consolidación, y obtuvo un coeficiente de validez igual a 0,94. Esta actividad se centra en consolidar los conocimientos de semejanza de triángulos y de razón entre segmentos de los lados de un triángulo, pero limitándole solamente a los triángulos rectángulos. Por ello, se incluyó el Problema 4 para que el estudiante relacione los lados y ángulos de triángulos rectángulos semejantes y descubra por sí mismo las razones trigonométricas. En este sentido, esta actividad es una guía que orienta al estudiante hacia el descubrimiento de dichos conocimientos, por ello se agregan tablas que este debe completar en el proceso y un espacio para que plantee afirmaciones y argumentos sobre lo descubierto. No se incluyen en esta actividad el uso del gnomon, clinómetro y espejos; pero, sí otros recursos didácticos (triángulos de cartulina, regla, transportador) para lograr el objetivo de aprendizaje.
- La actividad de enseñanza-aprendizaje 5 pertenece al tipo de actividades para la cognición/desarrollo, y obtuvo un coeficiente de validez igual a 0,92. Esta actividad puede ser incluida en una clase que se centre en la enseñanza del teorema de Pitágoras y en comprobar su veracidad. Por ello, se incluye el Problema 5 que lleva al estudiante a realizar cuatro demostraciones de este teorema, la primera es denominada “demostración geométrica”, la segunda “demostración de Chou Pei Suan Ching”, la tercera “demostración de Leonardo Da Vinci” y la última “demostración algebraica”. Todas estas demostraciones agilizan el conocimiento geométrico del estudiante ya que propone trabajar con triángulos, rectángulos y otras figuras planas; además de trabajar con el área, y realizar rotaciones y proyecciones. Por otro lado, esta actividad puede considerarse como una de tipo cognición/saberes previos; ya que puede suceder que los estudiantes hayan estudiado anteriormente este teorema, sin embargo, si se considera como tal, entonces se sugiere realizar solamente una demostración. Por último, cabe mencionar que esta actividad no pierde el carácter motivador, pues generalmente el estudiante se interesa en las demostraciones del área de matemática, ya que de este modo se convence de la veracidad de los conocimientos matemáticos que está aprendiendo.
- La actividad de enseñanza-aprendizaje 6 pertenece al tipo de actividades para la cognición/desarrollo, y obtuvo un coeficiente de validez igual a 0,97. Esta actividad se centra en poner en práctica los conocimientos sobre razones trigonométricas para que el estudiante logre una mayor agilidad al trabajar con los conceptos y procedimientos de este campo temático. Para ello, se retoma el Problema 1, pero en este caso el estudiante ya debe calcular la altura del asta de la bandera aplicando sus conocimientos de razones trigonométricas y usando el gnomon, el clinómetro y/o el espejo como instrumentos de ayuda. Con este problema el estudiante se inicia en el uso de estos instrumentos para recolectar datos de la

realidad necesarios para resolver el problema; además, esto permite salir del tradicional salón de clases para interactuar en un nuevo escenario de aprendizaje (patio de la escuela); lo cual, según Savage (2016), resulta muy motivador. Para complementar, se agrega el Problema 6 bajo el mismo propósito de lograr que el estudiante tenga mejor agilidad al trabajar con las razones trigonométricas; sin embargo, este problema es más abstracto y sí proporciona datos numéricos que el estudiante debe relacionar por medio de operaciones matemáticas para hallar la respuesta.

- La actividad de enseñanza-aprendizaje 7 pertenece al tipo de actividades para la cognición/desarrollo, y obtuvo un coeficiente de validez igual a 0,99. Esta actividad se centra en desarrollar los conocimientos del ángulo como incógnita en una razón trigonométrica. Para ello se retoma el Problema 1, pero lo que se va a hallar es el ángulo de elevación o depresión al usar el espejo para observar la cima del asta de la bandera o, en el caso del gnomon, el ángulo de los rayos del sol que permiten que se proyecte la sombra. Así pues, para hallar el arco de las razones trigonométricas, el estudiante puede usar su calculadora o los triángulos notables que conozca; la idea es que combine estrategias y procedimientos para encontrar el valor de dicho ángulo. En esta actividad también se propone que el patio de la escuela sea un espacio de aprendizaje por las ventajas ya mencionadas.
- Las actividades de enseñanza-aprendizaje 8, 9 y 10 obtuvieron un coeficiente de validez de 0,99, 0,98 y 0,98; respectivamente. Estas actividades se centran en la practicidad y aplicabilidad de todos los conocimientos adquiridos respecto al campo temático de razones trigonométricas, para lograrlo, se incluyen los Problemas 7, 8 y 9, respectivamente. En estas tres actividades se guía al estudiante para que plantee un plan de resolución del problema, matematice la situación problemática, resuelva el modelo matemático y plantee afirmaciones según sus resultados; todo esto, incluyendo al gnomon, clinómetro y espejos como instrumentos de medida que ayuden a hallar la solución. Además, al igual que en las dos actividades anteriores, se propone el patio de la escuela como un escenario para el aprendizaje por sus beneficios mencionados. Por otro lado, lo que diferencia a estas tres actividades es el tipo de actividad al que pertenecen, así pues, la primera es una actividad para la cognición/consolidación y las dos últimas son actividades para la cognición/desarrollo. También los diferencia la presencia de un obstáculo en el problema que se incluye en cada una; de este modo, el Problema 7 es una situación básica, pero el Problema 8 y el Problema 9 agrega un obstáculo a este que demanda una resolución más compleja.
- La actividad de enseñanza-aprendizaje 11 pertenece al tipo de actividades para la cognición/consolidación o también podría considerarse como actividad para la cognición/desarrollo; y obtuvo un coeficiente de validez igual a 0,98. Esta actividad se centra

en consolidar todos los conocimientos adquiridos a lo largo de la propuesta pedagógica, además, de ponerlos en práctica al incluir el Problema 10 ya que es el más complejo de todos, pues incluye los obstáculos presentes en los Problemas 8 y 9. Entonces, es evidente que en esta actividad se propone el uso del gnomon, clinómetro y espejos como instrumentos de ayuda para resolver la situación problemática, y el uso del patio de la escuela como un escenario para el aprendizaje. Así mismo, en las acciones descritas en esta actividad se guía al estudiante para que plantee un plan de resolución del problema, matematice la situación problemática, resuelva el modelo matemático y plantee afirmaciones según sus resultados.





Conclusiones

Primero. La técnica de análisis de contenido ha permitido que la obtención de resultados se dé de manera progresiva, ordenada y objetiva. Gracias a esta técnica todos los esfuerzos realizados apuntaron a la creación de una propuesta pedagógica adecuada para los fines planteados, pues se reunieron aportes de diferentes autores y se complementaron con las apreciaciones del investigador (las cuales son válidas porque el proceso a seguir en dicha técnica ha sido sistemático y objetivo). Con esta técnica se pudo sintetizar toda la amplia bibliografía del tema de estudio, aterrizando en la obtención de resultados objetivos sobre cómo desarrollar la competencia de resolución de problemas usando recursos didácticos, cómo diseñar actividades de enseñanza-aprendizaje incluyendo recursos didácticos, y cómo abordar los conceptos, procedimientos y fenómenos del campo temático de razones trigonométricas.

Segundo. Se identificaron 16 estrategias heurísticas, que pueden ser utilizadas para contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Estas estrategias van acorde a los propósitos planteados, pues han sido obtenidas de manera objetiva en base a los resultados de la aplicación de la técnica de análisis de contenido. De este modo, se considera que los estudiantes podrán emplear una o varias de estas 16 estrategias heurísticas cuando intenten resolver los problemas que han sido incluidos en las actividades de enseñanza-aprendizaje.

Tercero. Se diseñaron 10 problemas sobre el campo temático de razones trigonométricas y que, en su mayoría, puedan ser resueltos mediante el uso del gnomon, clinómetro y espejos como recursos didácticos para contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Estos problemas van acorde a los propósitos planteados, pues han sido obtenidos de manera objetiva en base a los resultados de la aplicación de la técnica de análisis de contenido y teniendo en cuenta la lista de las 16 estrategias heurísticas. Estos 10 problemas han sido distribuidos en las actividades de enseñanza-aprendizaje, acorde a las particularidades del campo temático de razones trigonométricas de ángulos agudos. Además, algunos de estos problemas pueden ser retomados en más de una actividad, pero se les debe agregar algún dato o incógnita extra; en otras palabras, se vuelve a utilizar el contexto del problema, pero con un propósito diferente.

Cuarto. Se utilizaron criterios pedagógicos para planificar, seleccionar y clasificar actividades de enseñanza-aprendizaje que incluyan el uso del gnomon, clinómetro y espejos como recursos didácticos que permitan el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. Respecto a los criterios para la clasificación, se han determinado que las actividades de esta propuesta se pueden clasificar en cuatro, estos son: actividades para la cognición/motivación, actividades para la cognición/saberes previos, actividades para la cognición/desarrollo, y actividades para la cognición/consolidación. Respecto a los criterios para la selección, se han determinado que las actividades se pueden seleccionar en base a cuatro, estos son: criterio de adecuación a los estudiantes,

criterio de coherencia con el propósito de la sesión, criterio de secuenciación didáctica y criterio de factibilidad. Por último, respecto a los criterios para la planificación o para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje, se han determinado que pueden ser diseñados en base a cuatro, estos son: motivación, unidad y flexibilidad, información a incluir en la actividad, y la estructura de la actividad. Además, todos estos criterios han sido obtenidos de manera ordenada y objetiva gracias a la técnica de análisis de contenido.

Quinto. Se diseñó una propuesta pedagógica basada en actividades de enseñanza-aprendizaje y en el uso de los espejos, el gnomon y el clinómetro, como recursos didácticos, para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas en los estudiantes de cuarto grado de secundaria; a través del contenido temático de razones trigonométricas. Asimismo, esta propuesta pedagógica integró propósitos de aprendizaje, una metodología de enseñanza específica, recursos didácticos y criterios de evaluación; todo esto plasmado y distribuido en sus 11 actividades de enseñanza-aprendizaje. Estas actividades de enseñanza-aprendizaje no pretenden reemplazar a las sesiones de aprendizaje, sino, enriquecerlas; pues una o alguna de estas actividades se pueden incorporar en una o más sesiones de aprendizaje que quiera realizar el profesor, y adecuarlas si se cree necesario ya que se puede introducir otros conceptos ocasionales durante la marcha de las actividades.

Sexto. No existe una sola propuesta pedagógica para trabajar el campo temático de razones trigonométricas junto con la competencia de resolución de problemas; sino que, el docente debe combinar sus conocimientos de didáctica, dominio del área y conocimiento de la realidad de sus estudiantes para crear actividades de enseñanza-aprendizaje que resulten ricas para ellos, con el fin de lograr un aprendizaje significativo. Por esa razón, la propuesta pedagógica que se ha diseñado en este estudio constituye un aporte en el campo de la pedagogía y de la didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Séptimo. Se validó la propuesta pedagógica como un recurso para la enseñanza del campo temático de razones trigonométricas y para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas. La validación fue realizada por tres docentes expertos en la materia, quienes emplearon para ello una “ficha de validación de la propuesta pedagógica”. A la propuesta pedagógica de manera general, los expertos le otorgaron una alta calificación promedio de 0,95 que se traduce en una “validez muy buena”. A cada una de las 11 actividades de enseñanza-aprendizaje de manera específica se les otorgaron calificaciones diferentes, pero todos estos puntajes corresponden a un mismo intervalo que los traduce en una “validez muy buena”. Por otro lado, la actividad de enseñanza-aprendizaje con el coeficiente de validación más bajo es la actividad 5, y aunque su calificación pertenece al grupo de “validez muy buena”, puede considerarse realizar algunos cambios teniendo en cuenta los ítems en los que los expertos coincidieron en no otorgar el puntaje completo.

Recomendaciones

Primero. Se sugiere que, en la planificación de propuestas pedagógicas, unidades de aprendizaje, actividades de enseñanza-aprendizaje o sesiones de aprendizaje sobre el campo temático de razones trigonométricas, consideren el uso del gnomon, clinómetro y espejos como recursos didácticos debido a todos sus potenciales beneficios para el aprendizaje de los estudiantes, particularmente, para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.

Segundo. Esta investigación se presenta como una alternativa a las futuras consultas de trabajos basados en la misma línea de la planificación curricular y sirve de precedente para la planificación de actividades de enseñanza-aprendizaje o sesiones de aprendizaje; sin embargo, esta propuesta pedagógica puede estar sujeta a cambios y mejoras dependiendo de la realidad educativa en la que se pretenda aplicar.

Tercero. Se recomienda realizar una futura investigación en la que se aplique esta propuesta pedagógica para verificar su eficacia en la práctica educativa. Para ello, se propone realizar una evaluación de entrada para comparar los niveles de logro de la competencia de resolución de problemas antes y después de implementada la propuesta pedagógica.

Cuarto. Se recomienda utilizar los resultados de la aplicación de la técnica de análisis de contenido a las categorías de la investigación, cuando se pretenda diseñar actividades para enseñar el campo temático de razones trigonométricas y si se propone desarrollar la competencia de resolución de problemas.

Quinto. Se sugiere diseñar alguna planificación con los propósitos de la propuesta pedagógica elaborada en este estudio, pero que sí logre abordar todos los conceptos y procedimientos del campo temático de razones trigonométricas, ya que aquí solo se abordó hasta las razones trigonométricas para ángulos agudos.



Lista de referencias

- Abela, J. A. (2002). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. <https://n9.cl/j0kqn>
- Abonia, L. y Miranda, W. (2017). *Un acercamiento histórico a las razones trigonométricas seno y coseno para la implementación de una actividad en el aula* [tesis de pregrado, Universidad del Valle]. <http://funes.uniandes.edu.co/11099/1/Abonia2017Un.pdf>
- Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, (8), 7-35. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/download/127/120>
- Aguilar, A. (2015). *Metodología con el software Geogebra para desarrollar la capacidad de comunicar y representar ideas matemáticas con funciones lineales* [tesis de maestría, Universidad de Piura]. Repositorio Institucional Pirhua. https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/3188/MAE_EDUC_209.pdf?sequence=2
- Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., y Reyes, R. (2009). *Geometría y trigonometría*. México: Pearson Educación.
- Apacclla, J. y Paitan, L. (2018). *Geogebra en la resolución de problemas de funciones trigonométricas en quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa "Santa Isabel" Antacocha – Huancavelica* [tesis de pregrado, Universidad Nacional de Huancavelica]. Repositorio Institucional UNH. <https://n9.cl/7cqkt>
- Arenas, F., Becerra, M., Morales, F., Urrutia, L., y Gómez, P. (2014). Razones trigonométricas. En Gómez, P. (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 359-435). Bogotá: Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/1895/1/Capitulo7_G6_Razonestrigonometricas_.pdf
- Arias, E. (s.f.). *Triángulos semejantes*. Matemáticas Modernas. <https://matematicasmodernas.com/triangulos-semejantes/>
- Arias, W. L. y Oblitas, A. (2014). Aprendizaje por descubrimiento vs. Aprendizaje significativo: Un experimento en el curso de historia de la psicología. *Boletim Academia Paulista de Psicologia*, 34 (87), 455-471.
- Arteaga, B. (2006). *La educación adaptativa: una propuesta para la mejora del rendimiento en matemáticas de los alumnos de enseñanza secundaria obligatoria* [tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid]. <https://eprints.ucm.es/7424/1/T29532.pdf>
- Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, 1(1-10), 1-10.
- Avila, R. (2015). *Estilo de aprendizaje autónomo y el nivel de competencia de resolución de problemas en el curso de Matemática I en los estudiantes de la Universidad San Ignacio de Loyola en el periodo 2015-II* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación]. Repositorio Institucional UNE. <https://n9.cl/jkmmn>

- Baro, A. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*, 40, 1-11.
- Barrantes, M., Balletbo, I. y Fernández, M. (2013). Enseñar Geometría en la secundaria. *Académicus*, 1(3), 26-33.
- Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas ¿Cómo beneficiar a todos los alumnos? En N. Gorgorió, J. Deulofeu, y A. Bishop (coords.). *Matemáticas y Educación Retos y Cambios desde una Perspectiva Internacional* (pp. 35-36). Barcelona, España: Editorial GRAÖ de IRIF.
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. S.J. Cho (ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Bolivar, A. (1995). *El conocimiento de la enseñanza, epistemología de la investigación curricular*. Andalucía, España: FORCE.
- Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational studies in mathematics*, 17(2), 125-141.
- Bornas, Y. M., y Mozo, Y. F. (2019). *Determinar el Nivel de las Capacidades Matemáticas (Matematizar – Elaborar y Usar Estrategias/ Procedimiento Matemáticos) de los Estudiantes del 3er Grado de Educación Secundaria de un Colegio Privado, Ubicado en el Distrito de Ate, Ugel 06* [tesis de pregrado, Instituto Pedagógico Nacional Monterrico]. Repositorio Institucional IPNM. <http://repositorio.ipnm.edu.pe/bitstream/ipnm/1677/1/TESIS%202019%20-%20BORNAS%20Y%20MOZO.pdf>
- Bravo, M., González, N. y Paz, A. (2014). *Secuencias didácticas para el aprendizaje de las razones trigonométricas* [tesis de pregrado, Universidad Católica de Manizales]. Repositorio Institucional UCM.
- Callejo, L. (1998). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid, España: Narcea.
- Camargo, A. y Hederich, C. (2010). Jerome Bruner: dos teorías cognitivas, dos formas de significar, dos enfoques para la enseñanza de la ciencia. *Psicogente*, 13 (24), 329-346.
- Chablé, G. V., y Delgado, L. T. (2010). Modelos para el diseño curricular. *Pampedia*, 6, 55-65.
- Chaves, C. R. (2005). La categorización un aspecto crucial en la investigación cualitativa. *Revista de investigaciones Cesmag*, 11(11), 113-118.
- Compendio de trigonometría. (2009). Lima, Perú: San Marcos.
- Cooper, J. (1999). *Estrategias de enseñanza. Guía para una mejor enseñanza*. México: Limusa Noriega Editors.
- Corbalán, F. (2011). Los recursos que utilizar. En J. M. Goñi. (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp.53-74). Barcelona, España:GRAÖ.

- Cosquillo, R. (2015). *Lectura como Estrategia para el Aprendizaje de la Trigonometría en Estudiantes de Secundaria de la Institución Educativa "San Agustín" de Cajas* [tesis de maestría, Universidad Nacional del Centro del Perú]. Repositorio Institucional UNCP. <https://n9.cl/cs06y>
- Coveñas, M. (s.f.). *Matemática 4*. Lima, Perú: Editorial Coveñas.
- Delgado, R. (1998). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: dos aspectos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del contenido y el desarrollo de habilidades generales matemáticas* [tesis doctoral, Universidad de la Habana]. Repositorio Institucional UH.
- Díaz, J. (1996). Los recursos y materiales didácticos en Educación Física. *Apunts: Educación Física y Deportes*, (43), 42-52.
- Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, 6(1), 27-36.
- Fernández, A. (2020). *Estrategias Heurísticas para desarrollar la Capacidad de Resolución de Problemas Matemáticos en Estudiantes del Instituto Superior Pedagógico Público Víctor Andrés Belaunde de Jaén – Cajamarca* [tesis de maestría, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio Institucional UNPRG. <https://n9.cl/yksi6>
- Fernández, J. y Barbarán, J. (2017). El desarrollo de competencias matemáticas a través de modelos de situaciones problemáticas. *Educación y futuro: revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 36, 153-176.
- FisQuiWeb (2016). *Óptica. Reflexión y Refracción*. <https://fisquiweb.es/Apuntes/Apuntes2Fis/ReflexionRefraccion.pdf>
- Flores, E. (2018). *La aplicación de funciones trigonométricas en situaciones concretas* [tesis de pregrado, Universidad Nacional de Trujillo]. Repositorio Institucional UNITRU. <https://n9.cl/8oetg>
- Francisco Javier. (2011). *09 ángulos de elevación y depresión*. Slideshare. <https://www.slideshare.net/matematicas3/09-ngulos-de-elevacin-y-depresin/2>
- Gamarra, Y. (2017). *Taller "Jugando con el Tangram", bajo el Enfoque del Aprendizaje Sociocultural, para Mejorar la Resolución de Problemas de Medida, con Unidades de Longitud y Superficie en Figuras Geométricas Planas en los Estudiantes de 4° Grado "A" de Educación Primaria de la Institución Educativa N° 84129 "Cesar Vallejo", Distrito de Yauya, Provincia Carlos Fermín Fitzcarrald, Departamento de Ancash, en el año 2016* [tesis de pregrado, Universidad Católica de los Ángeles de Chimbote]. Repositorio Institucional ULADECH. <https://n9.cl/eke2m>
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada, España: Los autores.

- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6.^a ed.). Editorial McGraw Hill.
- Iriarte, A. J. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona próxima: revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación*, (15), 2-21.
- Maor, E. (1998). *Trigonometric Delights*. Universities Press. <https://press.princeton.edu/books/maor>
- Martínez, A. M., Cobos, J. C., y Torres, E. (2015). Matematización y modelización: experiencias y saberes. Una propuesta de aula. *Espiral. Revista de Docencia e Investigación*, 5(2), 9-22.
- Mateus, K. (2013). *Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN. <https://n9.cl/8d9ge>
- Mazzilli, D. M., Hernández, L. E. y De La Hoz, S. I. (2016). Procedimiento para Desarrollar la Competencia Matemática Resolución de Problemas. *Escenarios*, 14 (2), 103-119.
- Medición de altura con espejo. (2014, 06 de noviembre). Slideshare. <https://n9.cl/7dnd>
- Ministerio de Educación (2015). *Rutas de aprendizaje. ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? (VII Ciclo). Área Curricular Matemática 3. ° 4. ° y 5. ° grados de Educación Secundaria*. Lima, Perú: MINEDU.
- Ministerio de Educación (2018). *Currículo Nacional de Educación Básica*. Lima, Perú: Editorial MV Fenix E.I.R.L.
- Morales, L. y García, O. (2015). Un aprendizaje basado en proyecto en matemática con alumnos de undécimo grado. *Números*, 90, 21-30.
- Moreira, M.A. (1997). Aprendizaje Significativo: Un Concepto Subyacente. En M.A. Moreira, M.C. Caballero y M.L. Rodríguez (Eds.), *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo* (pp. 19-44). España: Burgos.
- Niss (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124). <https://n9.cl/j7vc>
- OCDE (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*. Versión preliminar, OECD Publishing, Paris.
- Otero, B. y Rodríguez, E. (2016). Un modelo para diseñar actividades de aprendizaje en la enseñanza de ingenierías. *Revista de docencia universitaria*, 14 (2), 79-101.
- Pérez, P. (2015). *Una teoría educativa. Fundamentos del aprendizaje*. Piura, Perú: Universidad de Piura.
- Pérez, S. (2010). Los recursos didácticos. *Temas para la Educación. Revista digital para profesionales de la enseñanza*, (9), 1-6.

- Pinto, J. A., Mateus, J. y Yhang, A. (2011). *Uso del clinómetro para el planteamiento de problemas sobre razones trigonométricas* [tesis de doctoral, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio Universidad de Santander.
- Pinzón, D. M., y Téllez, F. J. (2016). Herramientas neuropedagógicas: una alternativa para el mejoramiento en la competencia de resolución de problemas en matemáticas. *Actualidades Pedagógicas*, 1(68), 15-41.
- PISA (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemática, Lectura, Ciencia y Solución de problemas*. Madrid, España: OCDE.
- Polya, G. (1981). *Como plantear y resolver problemas*. México. Editorial Trillas.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Ponce, L. (s.f.). *Reflexión especular y difusa de una superficie*. ResearchGate. <https://n9.cl/f75vo>
- Posada, R. (2008). *Competencias, Currículo y aprendizaje en la formación superior*. Barranquilla, Colombia: Gente Nueva.
- Rajadell, N. (2000). Estrategias didácticas para el desarrollo de procedimientos. *Revista española de pedagogía*, 58(217), 573-592.
- Ramírez, F. (s.f.). *Semejanza de triángulos*. TOMi. <https://n9.cl/gdyjf>
- Ramos, F. (2013). *Geometría*. Lima, Perú: Empresa Editora Macro.
- Realini, S. (2011). *Teorema de Pitágoras*. Plan Ceibal. <https://n9.cl/39beh>
- Resnick, L. B. y Ford, W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona, España: Paidós-MEC.
- Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares, y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Sevilla, España: Alfar.
- Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación, extraordinario*, 274-294. <http://funes.uniandes.edu.co/531/1/RicoL06-2803.PDF>
- Ricoy, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Santa maría*, 31(1), 11-22.
- Riofrío, E. y Samaniego, A. (2015). *Guía Didáctica para la Enseñanza de la Trigonometría para Segundo Año de Bachillerato del Colegio Fray Vicente Solano Mediante Geogebra* [tesis de pregrado, Universidad de Cuenca]. Repositorio Institucional Universidad de Cuenca. <http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/23165/1/Tesis.pdf>
- Rodríguez, E. J. A., Ocampo, J. W. M., & Escobar, R. M. E. (2013). Diseño de actividades mediante la metodología ABP para la Enseñanza de la Matemática. *Scientia et technica*, 18(3), 542-547.
- Rodríguez, M. (2007). *La programación didáctica en educación primaria y secundaria*. <https://n9.cl/p9z50>

- Romero, I. (2010). Recursos didácticos: Actividades de enseñanza-aprendizaje. *Temas para la Educación. Revista digital para profesionales de la enseñanza*, (10), 1-8.
- Ruiz, J. I. (2012). *Metodología de la investigación cualitativa 5.a edición*. Bilbao, España: Universidad de Bilbao.
- Runza, G. (2013). *Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UN. <https://n9.cl/ad13o>
- Sánchez, I. R. (2009). Propuesta de aprendizaje significativo a través de resolución de problemas por investigación. *Educere*, 13(47), 947-959. <https://www.redalyc.org/pdf/356/35616673007.pdf>
- Santiago Uribe. (2011, 14 de febrero). *Clinómetro* [video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=OTQK4lwU7o8>
- Sauchelli, D. (2017). *Trigonometría*. Argentina: Editorial de la Universidad Católica de Córdoba. <https://n9.cl/xbx2m>
- Savage, J. (2016). *Planeación de la clase: conceptos claves y habilidades para el maestro*. Ciudad de México, México: Trillas.
- Schoenfeld, A. H (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10 (1y2), 9-34.
- Schunk, D. H. (2012). *Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa* (6.ª ed.). México: Pearson Educación.
- Sierra, R. (1994). *Técnicas de Investigación Social. Teoría y ejercicios* (9.ª ed.). Madrid: Editorial Paraninfo.
- Subdirección de Currículum y Evaluación, Dirección de Desarrollo Académico, Vicerrectoría Académica de Pregrado, Universidad Tecnológica de Chile INACAP. (2017). *Manual de Actividades de Enseñanza- Aprendizaje: Orientaciones para su selección, diseño e implementación*. Santiago, Chile: Ediciones INACAP.
- Taba, H. (1974). *La elaboración del currículo*. Argentina: Troquel.
- Tekman education. (27 de junio de 2019). *El Teorema de Thales, como nunca lo habían visto* [Video]. Facebook. <https://n9.cl/f2z4f>
- Valiente, S. (2000). *Didáctica de la matemática el libro de los recursos*. Madrid, España: Editorial la Muralla. S.A.
- Vera, M. (2015). *Aplicación de una metodología usando el software Geogebra para desarrollar la argumentación matemática en el contenido de las propiedades de los triángulos* [tesis de maestría, Universidad de Piura]. Repositorio Institucional Piura.
- Villalobos, J. (2003). El docente y actividades de enseñanza/aprendizaje: algunas consideraciones teóricas y sugerencias prácticas. *Educere*, 7(22), 170-176.

- Villalonga, J. M. (2017). *La competencia matemática: caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria* [tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. Repositorio Institucional TDR. https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2017/hdl_10803_457718/jmvp1de1.pdf
- Zapata, M. y Blanco, L. (2014). *Las prácticas de Enseñanza en la Formación inicial del profesorado de Matemáticas (2 ed.)*. Piura, Perú: Universidad de Piura.
- Zapata, M., Blanco, L. y Contreras, L. (2008). Los estudiantes para profesores y sus concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 12 (4), 109-122.





Apéndices

Apéndice A. Matriz de consistencia

Problemas	Objetivos	Variables	Metodología
Problema general: ¿Cuál y cómo debe ser una propuesta pedagógica basada en actividades de enseñanza-aprendizaje y en el uso de los espejos, el gnomon y el clinómetro, como recursos didácticos, para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas en los estudiantes de cuarto grado de secundaria; a través del contenido temático de razones trigonométricas? Problemas específicos: a) ¿Cuáles son las estrategias heurísticas que se utilizan para permitir el desarrollo de la competencia de resolución de problemas? b) ¿Qué tipo de problemas se deben diseñar usando los espejos, el gnomon y clinómetro como recursos didácticos para contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas de razones trigonométricas? c) ¿Qué criterios pedagógicos se deben utilizar para	Objetivo general: Diseñar una propuesta pedagógica basada en actividades de enseñanza-aprendizaje y en el uso de los espejos, el gnomon y el clinómetro, como recursos didácticos, para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas en los estudiantes de cuarto grado de secundaria; a través del contenido temático de razones trigonométricas. Objetivos específicos: a) Identificar las estrategias heurísticas que se utilizan para contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas. b) Diseñar problemas usando los espejos, el gnomon y clinómetro como recursos didácticos para contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas de razones trigonométricas. c) Utilizar criterios pedagógicos para planificar, seleccionar y clasificar actividades de	Variable 1: Actividades de enseñanza-aprendizaje. Las actividades de enseñanza-aprendizaje son un medio que incluye un conjunto de acciones a realizar por el profesor y los estudiantes en el salón de clase, las cuales están debidamente planificadas para desarrollar los contenidos temáticos facilitando su conocimiento y lograr así los objetivos de un proceso de enseñanza-aprendizaje. Variable 2: Competencia de resolución de problemas. Facultad que permite utilizar un conjunto de capacidades, conocimientos y recursos matemáticos para formular, trabajar y dar solución a problemas de situaciones reales, lo que a su vez permite la mejora en las capacidades y la ampliación de los conocimientos utilizados. Variable 3: Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática. Aquellos objetos o	Paradigma: Interpretativo. Tipo de investigación: Cualitativo. Nivel de investigación: Descriptivo. La propuesta pedagógica diseñada pretende quedar en un plano descriptivo. Técnica de investigación: a) Análisis de contenido: Implica el análisis objetivo y ordenado de la revisión bibliográfica para obtener resultados que sustenten la propuesta pedagógica. b) Validación por juicio de expertos: Tres expertos cualificados en la materia evalúan cada uno de los aspectos de la propuesta pedagógica para los fines propuestos.

planificar, seleccionar y clasificar actividades de enseñanza-aprendizaje usando los espejos, el gnomon y clinómetro como recursos didácticos que permitan el desarrollo de la competencia de resolución de problemas de razones trigonométricas? d) ¿Cómo elaborar una propuesta pedagógica que integre los propósitos de aprendizaje, actividades, metodología, recursos y evaluación?	enseñanza-aprendizaje usando los espejos, el gnomon y clinómetro como recursos didácticos que permitan el desarrollo de la competencia de resolución de problemas de razones trigonométricas. d) Elaborar la propuesta pedagógica integrando los propósitos de aprendizaje, actividades, metodología, recursos y evaluación.	medios que pueden ser introducidos en una sesión de aprendizaje, previa planificación, con la finalidad de facilitar la comprensión, legibilidad y consolidación de los conocimientos.	
--	--	---	--

Apéndice B. Ficha de validación de la propuesta pedagógica

FICHA DE VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA PEDAGÓGICA

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador :

1.2 Cargo e institución donde labora :

1.3 Nombre de la propuesta pedagógica evaluada :

1.4 Autor de la propuesta pedagógica :

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. Deficiente (D).
2. Regular (R).
3. Buena (B).

III. INSTRUCCIONES:

La evaluación se divide en dos partes, una para validar la propuesta pedagógica de manera general y la otra para validar cada actividad de enseñanza-aprendizaje de manera específica.

En la primera parte se deberá marcar con un aspa el puntaje para cada uno de los indicadores (1, 2 o 3), y hacer los cálculos respectivos para calcular el coeficiente de validez.

En la segunda parte se deberá escribir el puntaje de cada indicador para cada una de las 11 actividades de enseñanza aprendizaje. Luego se deberá sumar el puntaje para cada una de las 11 actividades y dividir este entre 48 (para las actividades 1-3 y 6-11) o entre 33 (para las actividades 4 y 5).

Primera parte:

Evaluación de la propuesta pedagógica en general				
Aspectos de validación de la propuesta pedagógica	1	2	3	Observaciones
Indicadores	D	R	B	Sugerencias
Integra apropiadamente los siguientes aspectos curriculares: competencia, capacidades y desempeños.				
La propuesta pedagógica agrupa y ordena sistemáticamente las diferentes actividades de enseñanza-aprendizaje que la componen.				
La propuesta pedagógica proporciona una visión clara de cómo se desarrollarán, evaluarán y alcanzarán los propósitos de aprendizaje.				
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante realizar una matematización a partir de situaciones de contexto real.				
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante trabaje sobre un modelo matemático para resolverlo y dar solución a problemas matemáticos.				
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante comunique su comprensión sobre un problema utilizando lenguaje matemático.				
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante se traslade entre los distintos sistemas de representaciones de un mismo concepto matemático.				
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que al estudiante planificar todas las estrategias, procedimientos y recursos que utilizará para resolver una situación problemática.				
La propuesta pedagógica comprende actividades que pongan a prueba el conocimiento heurístico y permitan potenciar el mismo.				
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante argumentar ideas sobre la solución de un problema, y favorezcan su saber y hacer matemático.				
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante establecer relaciones entre distintas ideas matemáticas para plantear conclusiones respecto a una situación problemática.				
A lo largo de las actividades de enseñanza-aprendizaje se desarrollan todos los conceptos que abarca el campo temático de razones trigonométricas.				
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)				
	C	B	A	Total

Coefficiente de validez

$$\frac{A + B + C}{36}$$

=

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Piura, setiembre de 2021.

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

Firma del validador

Segunda parte:

Evaluación de las actividades de enseñanza-aprendizaje en particular													
Aspectos de validación de las actividades de enseñanza-aprendizaje	Actividad de enseñanza-aprendizaje											Observaciones	
												Sugerencias	
Indicadores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
Las acciones descritas en las actividades de enseñanza-aprendizaje promueven el desarrollo de los desempeños propuestos.													
Las actividades de enseñanza-aprendizaje planteadas en la propuesta pedagógica permiten el desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes.													
Los procedimientos, criterios y estrategias de evaluación tienen congruencia con los desempeños planteados.													
Las actividades de enseñanza-aprendizaje promueven el interés por aprender en los estudiantes, pues integran recursos y materiales didácticos adecuados; además, incluyen situaciones problemáticas de contexto real.													
Estas actividades se conectan unas con las otras de manera sistemática y gradual, pues comparten un mismo propósito general en común. Además, su diseño es flexible ya que están abiertas a la adaptación y al reajuste.													
La ficha general de la actividad de enseñanza-aprendizaje se presenta de manera clara, coherente, precisa y ordenada.													
El contenido temático de razones trigonométricas guarda relación con los desempeños en todas las actividades de enseñanza-aprendizaje.													
Los conceptos del campo temático de razones trigonométricas son distribuidos adecuadamente en las actividades de enseñanza-aprendizaje.													
En las actividades de enseñanza-aprendizaje se planifican técnicas y estrategias para enseñar de manera didáctica los conceptos del campo temático de razones trigonométricas.													
Las situaciones problemáticas en las actividades de enseñanza-aprendizaje apuntan al aprendizaje de los conceptos y procedimientos involucrados en el campo temático de razones trigonométricas.													
Se propone que la evaluación se realice en base a criterios e instrumentos de evaluación pertinentes.													
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje.													

Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.											
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten la enseñanza del campo temático de razones trigonométricas.											
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) son integrados en las actividades de enseñanza-aprendizaje de manera ordenada y organizada.											
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten captar el interés del estudiante por lo que resultan atractivos y motivadores en el aprendizaje.											
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)											Total

Intervalos	Resultado	Para las actividades 1-3 y 6-11			Para las actividades 4 y 5		
0,00 – 0,49	• Validez nula	Coeficiente de validez CALIFICACIÓN GLOBAL Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado. 	Suma total 48 =		Coeficiente de validez CALIFICACIÓN GLOBAL Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado. 	Suma total 33 =	
0,50 – 0,59	• Validez muy baja						
0,60 – 0,69	• Validez baja						
0,70 – 0,79	• Validez aceptable						
0,80 – 0,89	• Validez buena						
0,90 – 1,00	• Validez muy buena						

Resultados de las actividades de enseñanza-aprendizaje										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Piura, setiembre de 2021.

Firma del validador

Apéndice C. Unidades de análisis de “Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática”

Unidades de análisis de Recursos didácticos para la enseñanza de la matemática.

Criterios de elección y organización de los recursos didácticos.

1. Es necesaria la adecuada preparación profesional del educador para que tenga criterio, creatividad y seguridad al momento de elegir y organizar los recursos a emplear.
2. El profesor debe tener en consideración distintos factores; tales como el contenido temático, las características de los alumnos y el carácter formativo de la matemática, para elegir el recurso o material que más se adecue a la situación de aprendizaje.
3. No se pueden elegir los recursos didácticos sin razón alguna.
4. Los docentes deben cuestionar su propio pensamiento respecto a un determinado recurso y analizar las ventajas que este tiene para su trabajo.
5. El docente debe asegurar la cuidadosa organización y preparación de los recursos del salón de clase.
6. Es deber del docente percatarse de que todos los recursos necesarios estén en su plan de clase.
7. El docente debe asegurar que todos los recursos estén bien preparados y funcionen adecuadamente. El docente debe proporcionar a los estudiantes un acceso rápido y fácil a los recursos necesarios.
8. Se recomienda que el movimiento de los estudiantes alrededor del salón de clases sea el mínimo, pues facilita el orden y la disciplina.
9. Los inadecuados recursos y la falta de organización de estos, tiene un impacto negativo en el aprendizaje de los estudiantes e incluso puede resultar desmotivador.
10. Los recursos deben ser fáciles de entender para los estudiantes por lo que han de presentarse de manera ordenada y estructurada.
11. Los recursos deben ser originales y creativos, se incluyen los de mayor antigüedad si son utilizados de manera innovadora.
12. Los recursos seleccionados deben responder a aquello que se pretende enseñar, es decir, adecuarse a los contenidos y a los objetivos de aprendizaje.
13. Los recursos y materiales deben tener concordancia con el nivel educativo de los estudiantes.
14. Los recursos didácticos han de despertar el interés y la atención en los estudiantes.
15. Los recursos deben estar vinculados con la realidad del lugar donde serán utilizados.
16. El profesor puede invitar a los estudiantes a que construyan los recursos didácticos a utilizar.
17. Las instrucciones para el uso de los recursos y materiales deben ser claras, y el profesor debe asegurarse de proporcionarlas todas.
18. Los recursos deben ser bien utilizados tanto por el estudiante como por el profesor.

19. Si el profesor no comprende el funcionamiento de lo que pretende emplear, menos logrará que sus estudiantes los usen de manera idónea
20. Muchas veces el docente se frustra por tanto material que ha incluido en su clase, lo que puede afectar el orden y la disciplina del aula.
21. Los recursos deben ser de fácil acceso para el docente y que puedan ser llevados al lugar de enseñanza.
22. Se deben seleccionar aquellos recursos que realmente garanticen su utilidad práctica.
23. El docente siempre puede cuestionar su propio pensamiento y el de los demás, respecto al uso de recursos gracias a su preparación profesional.
24. La idea de incluir recursos didácticos es enriquecer las actividades de enseñanza-aprendizaje.

Recursos manipulativos tangibles.

25. Los materiales manipulativos pueden ser vistos como puentes que conectan los objetos matemáticos con la realidad.
26. En la actividad matemática se realizan interpretaciones abstractas, modelizaciones, simplificaciones e idealizaciones de objetos, sistemas o procesos que surgen de la realidad.
27. A lo largo de la historia el hombre ha utilizado instrumentos que ha podido manipular para enfrentarse a situaciones cotidianas que suponen la resolución de un problema matemático.
28. Esos instrumentos han vinculado el saber matemático de los humanos con su realidad.
29. Los procesos involucrados en la utilización de materiales manipulativos han ido adquiriendo una mayor formalización.
30. El uso del material debe permitir el planteamiento de problemas significativos para los estudiantes, que puedan ser asumidos por ellos, que sean apropiados a su nivel e intereses, y pongan en juego los conceptos, procedimientos y actitudes buscadas.
31. Es de mucha importancia el adecuado uso que se le dé al material para lograr un aprendizaje significativo mediante la solución de problemas.
32. Una buena propuesta de enseñanza debe generar situaciones de aprendizaje en donde el estudiante tenga que usar material manipulativo para resolver un problema de la realidad.
33. Es posible que el material sea utilizado de manera inapropiada ya que ningún material ofrece una experiencia matemática por sí mismo.
34. Es necesario una situación didáctica integral que atienda a la práctica y a la teoría de los conocimientos matemáticos.
35. El gnomon, el clinómetro y los espejos pertenecen al grupo de recursos manipulativos tangibles.
36. Existen sitios alternativos donde se puede enseñar y aprender fuera del típico salón de clase y que incluso se pueden vincular con experiencias más amplias en beneficio de los estudiantes.

37. Estos sitios alternativos pueden ser diversos, tales como el hogar del estudiante, un lugar remoto y fuera del colegio, e incluso el patio de la escuela.
38. Debe haber un aumento en el logro de los aprendizajes que justifique el dejar de lado el salón de clase.
39. Para el uso de estos recursos (gnomon, clinómetro y espejos) se propone como sitio alternativo el patio de la escuela.
40. Los materiales manipulativos apoyan y potencian el razonamiento matemático.



Apéndice D. Unidades de análisis de la “Competencia de resolución de problemas”

Unidades de análisis de la Competencia de resolución de problemas.

Matematiza situaciones.

41. Es la capacidad de expresar un problema, reconocido en una situación, en un modelo matemático.
42. En su desarrollo se usa, interpreta y evalúa el modelo matemático, de acuerdo con la situación que le dio origen.
43. Esta capacidad consiste en transcribir un problema de contexto real usando la matemática.
44. La matematización permite la solución de un problema desde la matemática.
45. Cuando una persona resuelve una situación problemática en el área de matemática, siempre matematiza dicho problema de una u otra manera.
46. El estudiante no puede obtener un modelo matemático de la realidad, si anteriormente no se ha matematizado el concepto involucrado o no tiene los conocimientos previos necesarios.
47. Lo más característico de esta capacidad es la creación de lo que se denomina un modelo matemático.
48. Dicho modelo matemático es creado por el sujeto.
49. El modelo matemático se define como un sistema que representa y reproduce las características de una situación del entorno.
50. Gracias al modelo matemático se relaciona la matemática con las situaciones reales haciendo más fácil el trabajar, manipular, tratar y solucionar dicha situación.
51. Gran parte de la matemática se describe a partir de interpretaciones abstractas, simplificadas e idealizadas que representan una realidad.
52. Cuando el sujeto se enfrenta a una situación del mundo real tiene la necesidad de transformar dicho problema en una forma estrictamente matemática.
53. La matematización viene representada por todas las actividades matemáticas implicadas en esa transformación de la realidad.
54. Esta capacidad es importante para que el estudiante inicie el proceso de resolución de un problema pues constituye un recurso esencial para la formulación matemática del problema.
55. La matematización implica construir, usar y validar el modelo matemático, de ese modo se garantiza el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.
56. Un modelo matemático bien construido representa adecuadamente el comportamiento de una realidad.
57. El modelo matemático se debe utilizar en el problema desde el que se construyó y en otras situaciones que permitan su aplicabilidad.

58. Se debe establecer las limitaciones y alcances del modelo creado lo cual se logra contrastando, valorando y verificando la validez del modelo.
59. Esta capacidad se puede expresar de manera gráfica en lo que Blum (2015) denomina “Seven step modelling schema” que representa el proceso de matematización de situaciones como un ciclo.
60. Hay siete pasos que se pueden identificar en todo proceso de matematización, estos son: constructing, simplifying, mathematising, working mathematically, interpreting, validating, y exposing.
61. Cada uno de los siete pasos es un puente para conectar las siguientes etapas: real situation & problema, situation model, real model & problema, mathematical model & problem, mathematical results, y real results.
62. Es necesario que el estudiante realice una construcción mental para pasar de la situación real a una situación modelo.
63. El estudiante debe realizar una simplificación y estructuración de la situación modelo para obtener un modelo real.
64. Cuando el estudiante deja la realidad, la cual hizo cada vez más abstracta, pasa a una etapa meramente matemática que consiste en la obtención de un modelo matemático.
65. El modelo matemático obtenido se tiene que trabajar matemáticamente para obtener resultados matemáticos.
66. Los resultados matemáticos se deben interpretar para obtener resultados reales (regresa a la situación real para compararla con lo obtenido).
67. Si los resultados matemáticos coinciden con los reales entonces el modelo matemático será válido para la situación real inicial.
68. Un estudiante que matematiza situaciones es capaz de identificar datos y condiciones propias de la situación, aplicar el modelo matemático a distintas situaciones y evaluar su eficiencia.

Comunica y representa ideas matemáticas.

69. Es la capacidad de comprender y expresar el significado de las ideas matemáticas y la función que estas cumplen en diversas situaciones o problemas.
70. Es necesario un apropiado lenguaje matemático, contar con diversas formas de representación y poder pasar de una representación a otra.
71. Las formas de expresión pueden ser oral y/o escritas.
72. Las formas de representación pueden ser con algún material concreto, símbolos, recursos TIC, gráficos, tablas, entre otros.

73. Esta capacidad supone la comprensión de la situación problemática sea cual sea la forma en la que se le presente (escrita, oral, concreta, etc.) para poder representarla de un modo mejor a la presentada inicialmente.
74. Tener soltura con el lenguaje y la notación matemática hace que los estudiantes puedan formar más fácilmente representaciones múltiples de ideas, expresar relaciones dentro de los sistemas de representación y así formular generalizaciones.
75. La comunicación se da gracias a la formación de un modelo mental de la situación que permite la comprensión, clarificación y formulación del problema.
76. El sujeto puede comunicar dicha comprensión de la situación resumiendo y presentando datos, procesos y/o resultados.
77. La comunicación se da a lo largo de todo el proceso de resolución de un problema; aún después de hallada la solución puesto que se tienen que dar a conocer los resultados.
78. La representación consiste en plasmar una situación, en interactuar con el problema o en reformularlo.
79. La representación se logra incluyendo gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas, materiales, entre otros.
80. Hay muchas formas de representación, y estas se organizan en cinco grupos: Representación pictórica, representación gráfica, representación simbólica, representación vivencial, y representación con material concreto.
81. Los estudiantes capaces de representar situaciones matemáticas logran esas cinco formas de representación y son capaces de pasar de una forma a otra.
82. Un problema lo pueden representar inicialmente con una determinada forma de representación, y a partir de esa forma de representación pueden transitar a otra nueva; y así sucesivamente.
83. Ciertos modos de representación son más complejos que otros, dependiendo del grado de abstracción.
84. La comprensión contribuye a construir la representación mental inicial, identificar los elementos de dicha representación, y a establecer relaciones entre ellos.
85. Comprender una situación problemática consiste en relacionar los contenidos de representación de un concepto matemático, mas no implica pasar inmediatamente de una representación a dicho concepto.
86. La comprensión es consecuencia de la habilidad del sujeto para trasladarse de una representación a otra y de relacionarlas entre ellas.
87. Si hay mejores y diversas formas de representación de una misma situación, consecuentemente, el grado de comprensión de esta será mayor.

88. Para poder expresarse con mayores niveles de precisión teórica y técnica es necesario poseer una variedad de registros lingüísticos referentes al contenido matemático.
89. Al comprender una situación matemática se pueden elegir y utilizar diferentes tipos de representaciones, y moverse de una a otra representación; pero sin dejar de serle fiel al contenido original.
90. Las ideas matemáticas adquieren significado cuando se usan diferentes representaciones y se es capaz de transitar de una representación a otra.
91. La comunicación y representación permiten comprender la idea matemática y la función que cumple en diferentes situaciones.
92. La comprensión de la matemática facilita las distintas formas de representación y del mismo modo, a medida que se logran distintos modos de representación la comprensión del contenido temático se enriquece.
93. A medida que se construyen los conocimientos se va constituyendo también lo que es el lenguaje matemático.
94. El lenguaje matemático es fruto del manejo y uso de expresiones y símbolos matemáticos.
95. Esta capacidad de va adquiriendo de forma gradual conforme el estudiante vaya explorando las nociones y relaciones para expresarlas inicialmente de modo coloquial.
96. A medida que el estudiante se va introduciendo e involucrando más en la situación, también va adquiriendo un mejor lenguaje matemático.
97. El grado de formalidad que se adquiere debe permitir expresar con precisión las ideas matemáticas convencionales.

Elabora y usa estrategias.

98. Es la capacidad de planificar, ejecutar y valorar una secuencia organizada de estrategias y diversos recursos.
99. Esta capacidad contribuye a la formulación y resolución de problemas matemáticos ya que permite elaborar un plan de solución, monitorear los procesos y estrategias, y reformular el plan elegido para llegar a la solución.
100. En esta capacidad el estudiante selecciona, adapta, combina y crea estrategias, procedimientos y recursos.
101. Los procedimientos y estrategias utilizados constituyen el conocimiento heurístico del estudiante.
102. El conocimiento heurístico es muy importante pues se usa para enfrentar distintas situaciones de tal modo que se encuentre el camino más fácil para solucionarlas, a través de procesos mentales.

103. Esta capacidad facilita las vías que tiene que recorrer el estudiante para llegar a la solución del problema, e incluso le puede mostrar cual de todos es el camino más adecuado.
104. El diseño de estrategias es una destreza que involucra una serie de procesos que guían al individuo a reconocer, formular y resolver eficazmente un problema.
105. Esta capacidad supone la selección de un plan en el que se utilicen las matemáticas para resolver una situación problemática derivada de un contexto real.
106. El plan tendrá éxito o será más eficaz en cuanto el estudiante tenga mejor dominio de los conocimientos matemáticos.
107. El estudiante debe ahorrar esfuerzos y/o tiempo en la búsqueda de una solución.
108. Las estrategias diseñadas se optimizan con la incorporación de herramientas matemáticas.
109. Las herramientas matemáticas pueden ser físicas como instrumentos de medición y calculadoras; o pueden ser informáticas como los softwares.
110. Hay que saber qué herramientas incorporar y cómo hacerlo, para ello, se debe conocer su funcionalidad y saber utilizarlas para que sea una verdadera ayuda en la resolución del problema.
111. Si la herramienta no es adecuada y/o no se sabe utilizar, entonces esta podría incluso representar un obstáculo para el estudiante.
112. El hecho de incorporar herramientas o recursos en el plan diseñado supone conocer las ventajas y limitaciones para el éxito de la tarea.
113. No se debe forzar el uso de herramientas dentro de un plan que no le compete.
114. Si tanto la estrategia como la herramienta se complementan de manera idónea, se potenciará el logro de los aprendizajes.
115. Las estrategias junto con sus herramientas incorporadas son acciones conscientes e intencionales que guían la resolución de un problema matemático.
116. Esta capacidad implica: Diseñar un plan de solución; seleccionar y aplicar procedimientos de diverso tipo; y valorar los procedimientos y recursos empleados.
117. Esta capacidad implica: Proponer un plan de acción; seleccionar procedimientos y estrategias de diverso tipo; aplicar la estrategia o procedimiento seleccionado; y valorar la estrategia y procedimiento utilizado.
118. Todo lo que se emplee para llevar a cabo satisfactoriamente esta capacidad debe de hacerse de manera flexible sin perder su eficacia.
119. Se requiere un constante monitoreo de todo lo ejecutado en la resolución del problema.
120. La facilidad con la que desarrolle esta capacidad dependerá del arsenal de conocimientos que posea el estudiante, y se potenciará con los recursos externos que disponga.

Razona y argumenta generando ideas matemáticas.

121. El estudiante a partir de los conocimientos presentes en el problema y por medio de un esfuerzo mental puede generar nuevos conocimientos o ampliar los ya existentes.
122. Es la capacidad de plantear supuestos, conjeturas e hipótesis de implicancia matemática mediante diversas formas de razonamiento (deductivo, inductivo y abductivo).
123. Las ideas planteadas se verifican y validan usando argumentos.
124. Esta capacidad implica partir de la exploración de situaciones vinculadas a la matemática para establecer relaciones entre ideas.
125. Esta capacidad permite establecer conclusiones a partir de inferencias y deducciones que permitan generar nuevas conexiones e ideas matemáticas.
126. En esta capacidad se ponen en juego las habilidades mentales del estudiante teniendo como punto de partida la exploración de la situación matemática.
127. En esta capacidad se conocen todos los datos planteados, se relacionan y se obtienen nuevos conocimientos.
128. El estudiante debe ser capaz de darle sustento a las relaciones o esquemas encontrados.
129. Las ideas matemáticas generadas son conclusiones del conjunto de datos identificados y de las relaciones establecidas entre estos.
130. Si el proceso de generación de ideas se hace adecuadamente entonces no habrá inconveniente en la validación de dicha idea.
131. Las conclusiones que se obtienen al solucionar un problema llevan al estudiante a seguir razonando y a evaluar los resultados mediante argumentos sólidos.
132. El razonar matemáticamente supone evaluar una serie de argumentos de otros sujetos para descubrir ideas básicas dentro de estos.
133. El estudiante debe ser capaz de elaborar sus propios argumentos matemáticos formales e informales siempre y cuando estos no contradigan las condiciones del problema.
134. Los recursos internos con los que cuente el estudiante son muy importantes (en especial las diferentes formas de razonamiento), ya que argumentar y analizar argumentos requiere procesos mentales complejos.
135. Poco se necesitan los recursos externos.
136. En esta capacidad son necesarios procesos de pensamiento conectados de manera lógica con elementos del problema para lograr una relación entre ellos.
137. En esta capacidad se pueden inferir nuevos datos, proporcionar una justificación a un enunciado, comprobar una justificación dada, refutar un argumento matemático, brindar contraejemplos, plantear conjeturas, plantear hipótesis, entre otros.

138. El estudiante debe ser capaz de explicar argumentos al plantear supuestos, conjeturas e hipótesis.
139. El estudiante debe ser capaz de observar los fenómenos y establecer diferentes relaciones matemáticas.
140. El estudiante podrá elaborar conclusiones a partir de sus experiencias.
141. El estudiante podrá defender sus argumentos y refutar otros en base a sus conclusiones.
142. Razonar y argumentar matemáticamente demanda una gran actividad mental, destrezas, actitudes y muchos procesos del pensamiento relacionados de manera lógica.
143. Para elaborar argumentos sólidos es necesario un gran esfuerzo mental empezando desde lo menos complejo.
144. Los supuestos o hipótesis se van enriqueciendo a medida que se resuelve el problema, para crear conclusiones que avalarán los argumentos.



Apéndice E. Unidades de análisis de la “Actividades de enseñanza-aprendizaje”

Unidades de análisis de las actividades de enseñanza-aprendizaje.

Clasificación de las actividades de enseñanza aprendizaje.

145. A esta categoría pertenecen las actividades que estimulan principalmente el pensamiento y que contribuyen al análisis de información.
146. Sin embargo, estas dependerán del nivel de aprendizaje que se quiera alcanzar para poder involucrar a los estudiantes.
147. Algunas actividades de enseñanza-aprendizaje que pertenecen a esta categoría son: la lluvia de ideas, comentarios grupales, estudio de casos, debates, foros, entrevistas, paneles de discusión, preguntas provocativas, historias inconclusas, escenificaciones, dramas, conferencias, etc.
148. Es importante, aunque no necesario, que los estudiantes se involucren y participen de manera activa, ya que así generalmente se alcanza un nivel más rico de aprendizaje.
149. Las diferentes actividades pertenecientes a esta esfera no estimulan el aprendizaje del mismo modo, pues depende de que las características de la actividad se acoplen a las del estudiante, y viceversa.
150. Este conjunto de actividades de enseñanza-aprendizaje favorecerían mucho cuando una sesión de clase se pretenda dar bajo el enfoque de búsqueda de la excelencia y enfatizando en el aprendizaje de los conocimientos correspondientes al campo temático a desarrollar.
151. El aprendizaje no se limita solamente a la adquisición de conocimientos académicos que permitan aprobar un examen de determinada asignatura; se aprende para la vida, para desenvolverse en la sociedad y ahí no basta lo académico.
152. Se trata de educar la inteligencia emocional, los sentimientos, valores, entre otros; y todos estos aprendizajes pertenecen a la esfera afectiva.
153. El campo afectivo trata con las emociones, valores, actitudes, convicciones y motivaciones humanas.
154. Las actividades que ayudan a un docente a entrar en estas áreas del aprendizaje del estudiante, por lo general, requieren el uso de la historia.
155. El propósito en este caso no es adquirir información sobre las emociones, sentimientos o actitudes; sino que se da énfasis a la demostración del concepto llevado a la realidad.
156. Se aprende más del ejemplo que de lo que se enseña.
157. Entre las actividades de enseñanza-aprendizaje que pueden ser incluidas a esta esfera se tienen las siguientes: los estudios de casos, historias, dramas, escenificaciones cortas, escritura creativa, debates y discusiones.

158. De manera general pertenece a esta esfera cualquier actividad que no solo desarrolle el conocimiento académico, sino que también influya en el corazón del aprendiz.
159. Estas actividades ayudan al estudiante a cambiar su conducta, desarrollar una nueva conducta deseable, aprender una habilidad o aumentar una habilidad que ya existe.
160. Para adquirir una nueva conducta o eliminar una conducta mala son necesarios los hábitos, los cuales se consiguen mediante la repetición de acciones y un esfuerzo de parte de la persona.
161. Una vez conseguida la conducta deseada sin esfuerzo del aprendiz, entonces el refuerzo ya no será necesario, puesto que ya se ha adquirido un hábito.
162. Los aprendizajes que son estimulados por estas actividades se dan de manera lenta y gradual en el tiempo, ya que estos en su mayoría no cambian al instante y demandan de mucha práctica.
163. Es importante motivar o reforzar las conductas que se desean adquirir para que el educando pueda encontrar una medida de satisfacción personal, así pues, no basta decirle al estudiante que se comporte de cierto modo, porque difícilmente una conducta cambiará radicalmente de un momento a otro.
164. Lo que debe hacer el docente es brindar apoyo o reforzar ciertas acciones; así pues, se mencionarán algunas actividades que se incluyen en esta categoría: talleres, experimentos, premios, representar el papel de alguien, reconocimiento público, grupos de apoyo, sesiones prácticas, entre otras.
165. La parte de la motivación es importante para captar el interés del estudiante hacia el tema que aprenderá, por lo que esta se debe lograr lo antes posible.
166. Un buen modo de motivar a los estudiantes es mostrarles la utilidad que pueden tener los campos temáticos en situaciones cotidianas, es decir, mostrarles la relación existente entre lo que han de aprender y la realidad.
167. El tema de estudio debe estar vinculado con el entorno social, cultural, económico y físico en el que se desarrolla la vida del estudiante o más general, la vida escolar.
168. Algunas actividades de enseñanza-aprendizaje que podrían ser de utilidad para desarrollar la motivación son: análisis de videos, artículos de periódico o casos, experimentos en el laboratorio y juegos.
169. La recolección de los saberes previos también forma parte de la etapa inicial en una sesión de aprendizaje y es de suma importancia.
170. Sería inútil tratar de enseñarle al estudiante un determinado campo temático si no está en condiciones de aprenderlo ya sea por su edad mental, edad cronológica o porque simplemente no logró aprender alguno de los temas que le anteceden al tema a aprender.

171. Saber si el estudiante está en condiciones de iniciar el proceso de aprendizaje de un respectivo campo temático, o recordarle algunos conocimientos ya aprendidos a tener en cuenta para el desarrollo de la sesión, es esencial.
172. El docente debe manejar estrategias que le permitan recolectar información acerca de los saberes previos de cada estudiante.
173. Las actividades de enseñanza-aprendizaje que pertenecen a este grupo son las que se realizan con el fin de conocer las ideas, opiniones, aciertos o errores conceptuales de los estudiantes sobre el contenido temático a desarrollar.
174. Algunas estrategias o actividades que se pueden usar para la detección de ideas previas son: los test, pruebas previas o de entrada, representaciones gráficas o plásticas, entrevistas, Phillips 66, brainstorming, debates, role-playing, foro, dramatizaciones, etc.
175. El desarrollo de la sesión de aprendizaje es el momento en el que se muestra y explica al estudiante el nuevo conocimiento que aprenderá y este realizará los esfuerzos necesarios para lograr dicho aprendizaje.
176. En esta parte de la sesión no deben faltar las actividades de enseñanza-aprendizaje que faciliten el proceso de adquisición de los nuevos conocimientos y el arsenal de actividades que posea el docente tiene que ser muy variado.
177. Las actividades de enseñanza-aprendizaje pertenecientes a este grupo son aquellas que permiten conocer los conceptos, procedimientos, actitudes y comunicar la labor realizada.
178. Estas actividades se incluyen con el fin de desarrollar el análisis cualitativo, la formulación de hipótesis y un diseño experimental.
179. A este grupo pertenecen las actividades de enseñanza-aprendizaje que pueden ser incluidas en el momento de cierre de la sesión de aprendizaje.
180. Este momento es importante ya que se sintetiza el tema aprendido y se verifica que tanto ha logrado aprender el estudiante en la sesión desarrollada.
181. En las actividades de consolidación se contrastan las nuevas ideas con las previas permitiendo al estudiante aplicar lo aprendido.
182. Se apunta a desarrollar la capacidad de síntesis mediante la elaboración de esquemas, conclusiones y modelos de solución a problemas.
183. Se le exige al estudiante una reestructuración de sus esquemas cognitivos.
184. Las necesidades educativas de los estudiantes pueden ser muy variadas aún dentro de la Educación Básica Regular y la casuística respecto a las actividades que se podrían incorporar para atender determinado nivel de aprendizaje en los estudiantes es muy diversa.

185. Aquellas actividades de enseñanza-aprendizaje que son diseñadas para los estudiantes que no han logrado adquirir los conocimientos trabajados, los que poseen altas capacidades, y los que no se incorporaron a tiempo al sistema educativo.
186. No se hace referencia exactamente a los estudiantes con necesidades educativas especiales por discapacidad, ya que estas actividades de aprendizaje requieren de un estudio aparte.

Criterios de selección para las actividades de enseñanza-aprendizaje.

187. El primer criterio que se debe tomar en cuenta para seleccionar actividades de enseñanza-aprendizaje es el nivel de estudio que se encuentran cursando los estudiantes.
188. El fin es que las actividades de enseñanza-aprendizaje se adecuen a la edad cronológica y al desarrollo de las capacidades de los estudiantes.
189. Es tarea del profesor seleccionar solamente las actividades que estén dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante y eliminar aquellas muy difíciles o sencillas para el estudiante.
190. Es importante basarse en la edad y habilidades del grupo de educandos para la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje.
191. Estas actividades deben reflejar el propósito al enseñar la lección, es decir, si el docente quiere desarrollar cierto desempeño en sus estudiantes, entonces debe enfocarse principalmente en lograr dicho desempeño.
192. Este criterio puede no cumplirse cuando al docente le parece muy atractiva dicha actividad, le gusta; pero esta actividad no es la adecuada para alcanzar la meta. Es posible que el estudiante tenga un buen rato en clase, disfrute o se divierta pues pueden ser juegos de gran estímulo, sin embargo, el objetivo de enseñanza-aprendizaje no se cumple; así pues, luego el docente se dará cuenta que dicha actividad ni remotamente se relaciona con la clase o con el desempeño a lograr.
193. Como ejemplos de actividades que no cumplen con este criterio se pueden mencionar las siguientes: ver un video de treinta minutos cuando el desempeño es que el estudiante indague sobre un tema; o utilizar una simple conferencia para intentar motivar a los estudiantes.
194. Ciertas actividades serán mejores para recolectar saberes previos o para motivar, por lo tanto, deberían ir en la parte inicial de la clase.
195. Otras actividades pueden ser de más ayuda para el desarrollo de la sesión ya que, por ejemplo, facilitan la adquisición de los nuevos conocimientos.
196. Del mismo modo se pueden seleccionar actividades para el momento del cierre de la sesión de aprendizaje, aquí se pueden incluir actividades que permitan sintetizar el tema aprendido.
197. Algunas actividades son útiles para ganar la atención de los estudiantes y otras para comunicar mejor la información, ambas actividades se incluirían en momentos distintos de la clase.

198. Las actividades que el profesor decida implementar deben captar la atención del estudiante independientemente del momento en el que se desarrollen.
199. Por ejemplo, contar una breve historia interesante permitirá que el estudiante se abra a la adquisición de conceptos e ideas nuevas.
200. Muchas veces el docente tiene ideas maravillosas para desarrollar su clase; sin embargo, estas requieren ciertos recursos lo cuales pueden representar un obstáculo ya que son difíciles de conseguir o simplemente son muy caros.
201. Por ejemplo, no es posible presentar una grabación que sea de interés para los estudiantes si la máquina de videos, proyector o pantalla están dañados o siendo utilizadas por otros docentes.
202. Es tarea del profesor ingeniárselas para remplazar los recursos que no puede utilizar por otros similares que cumplan la misma función, o en otro caso llegar a implementar otra actividad con distintos recursos pero que tenga el mismo propósito.
203. Dentro de este factor a considerar también se encuentran aspectos como el tamaño del aula, ambiente de la clase, tiempo disponible, equipo de trabajo, facilidades y ambiente de grupo.
204. Es labor del profesor ingeniárselas para que el cambio de recursos no perjudique el aprendizaje de sus estudiantes.
205. Otra posibilidad es que el profesor cuente con todos los recursos necesarios, no obstante, carece de una buena preparación para hacer uso adecuado de estos.
206. Este criterio hace referencia a que entre el conjunto de actividades y los aprendizajes esperados debe existir una relación de congruencia.
207. Se puede determinar si una actividad es coherente si favorece el logro de un aprendizaje significativo que tenga relación con los aprendizajes deseados.
208. La actividad debe permitir lograr los desempeños plasmados por el profesor.
209. Se debe decidir bien en qué momento de la lección se debe implementar (inicio, desarrollo o cierre).
210. Una actividad podría ser incluida en dos momentos distintos de la sesión, sin embargo, solo en uno de estos es donde se logra su mayor eficacia, por lo que es ahí donde se debe implementar la actividad.
211. Es tarea del docente analizar lo que pretende lograr en cada momento de la sesión de manera prudente junto con los beneficios que otorga cada actividad, para elaborar una adecuada secuencia didáctica que facilite el logro de los aprendizajes.
212. Este criterio se refiere a la facilidad que tiene el docente de conseguir los recursos necesarios para el desarrollo de la actividad, ya sea los utilizados por él mismo o por el estudiante.

213. Se deben tomar en consideración también factores externos como el tiempo disponible para la actividad, la cantidad de estudiantes, el clima (en el caso de que la actividad sea al aire libre), entre otros factores que puedan dificultar el desarrollo de la actividad.
214. Este criterio considera si la actividad es adecuada o no a los estudiantes, por lo que se deben tomar en cuenta factores como sus saberes o experiencias previas.
215. Durante la actividad es crucial que el estudiante participe de manera autónoma, lo que no logrará si la actividad no se adecua a su nivel de apropiación.
216. Es importante considerar el nivel de apropiación del docente, es decir, su experiencia que ha tenido con actividades similares a la actividad que va a desarrollar.
217. Toma en cuenta los saberes previos, experiencias previas y capacidades de los estudiantes.
218. Se debe tomar en cuenta el desempeño a desarrollar y encaminar la actividad o conjunto de actividades al logro de este.
219. Se determina en qué momento de la sesión de aprendizaje (inicio, desarrollo y cierre) la actividad tiene mejores beneficios, y es ahí donde debe ser incluida.
220. Se deben utilizar recursos que no representen un obstáculo para la actividad, es decir, que sean fáciles de conseguir. Tomar en consideración también aspectos como el tamaño del aula, ambiente de la clase, tiempo disponible, clima, entre otros que puedan dificultar o facilitar el desarrollo de la actividad.
221. Para la selección de actividades se deben tener en cuenta las demás actividades que se pretenden desarrollar, es decir, una actividad de enseñanza-aprendizaje no tiene sentido por sí sola, sino que adquiere valor como parte integrada de una sesión de aprendizaje.
222. Los agrupamientos de las actividades serán variados y dependiente de los objetivos y del campo temático a desarrollar.
223. Existen muchos modos en los que la selección de actividades de enseñanza-aprendizaje se pueden agrupar, de tal forma que cada situación de aprendizaje presente estrategias propias de parte del profesor y desarrolle habilidades específicas en los estudiantes.
224. Una actividad de enseñanza-aprendizaje ha sido bien seleccionada si enriquece la interacción alumno/alumno y alumno/profesor.

Criterios para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje.

225. Las actividades de aprendizaje deben implicar la posibilidad de disfrutar lo aprendido.
226. La idea es que las actividades no resulten aburridas, tediosas o monótonas para los estudiantes y se adapten a sus intereses.
227. Las actividades deben promover el conocimiento del alumno con el entorno.

228. Las actividades deben permitir que el alumno se familiarice con su entorno, relacione lo que aprende con su vida cotidiana e interprete y comprenda la realidad en la que vive.
229. Las actividades han de permitir que el alumno aprecie su grado inicial de competencia en los contenidos objeto de aprendizaje.
230. Es importante que en el diseño de actividades se tenga en consideración los saberes previos del estudiante, y que este sea consciente de la diferencia entre lo que sabe y lo que va aprendiendo en el proceso.
231. La evaluación inicial y continua permitirán que el profesor adecue su enseñanza a lo que los estudiantes ya saben.
232. Las actividades han de adaptarse al ritmo de realización y aprendizaje propio de cada alumno y alumna.
233. En las actividades deben ser bienvenidas las dudas de los estudiantes y el profesor debe resolverlas de manera profesional.
234. Se debe tomar en cuenta los errores que cometen los estudiantes como una oportunidad de aprender y lograr que ninguno se quede atrás.
235. No se debe continuar exponiendo los conocimientos de los contenidos temáticos si los estudiantes no han logrado comprender nada, por lo que los aprendizajes se deben adecuar al ritmo de cada uno.
236. Las actividades han de permitir un desequilibrio en los conocimientos previos del alumnado.
237. El estudiante debe lograr un saber objetivo de la realidad, lo cual muchas veces se aleja de lo adquirido mediante experiencias cotidianas; por lo tanto, es importante que el estudiante se cuestione sus ideas previas ya sea corrigiéndolas o comprobándolas.
238. El alumno debe cuestionar la realidad, o lo que sabe acerca de esta, a partir de percepciones, sensaciones o experimentos.
239. Las actividades que se proponen deben presentar una coherencia interna capaz de ser apreciada por el alumno.
240. El estudiante debe comprender lo que el profesor pretende lograr con la actividad planteada; para esto es necesario que esta tenga coherencia y orden.
241. Las actividades han de permitir el desarrollo de los distintos tipos de contenidos del área de una manera interrelacionada.
242. El profesor tiene que desarrollar todos los contenidos del área (conceptos, procedimientos y actitudes), aunque no necesariamente en la misma proporción.
243. Se debe definir el objetivo de aprendizaje.

244. Se debe precisar el desempeño a desarrollar, siendo tarea del profesor identificar aspectos que quiere mejorar en los estudiantes.
245. También se deben identificar las competencias y capacidades que se potenciarán en los estudiantes.
246. Se debe identificar el público al que va dirigido la actividad.
247. Se debe colocar el grado de estudios de los estudiantes, además el profesor deberá tener en cuenta los saberes previos y deficiencias del grupo.
248. Se debe elegir la actividad de aprendizaje.
249. La actividad se puede seleccionar de la documentación ya revisada por el docente e incluso utilizar referencias que ha ganado fruto de su experiencia.
250. Se debe preparar una ficha o fichas de la actividad.
251. Se proponen el uso de fichas como medios para plasmar la información que se obtiene al diseñar.
252. En la primera ficha se plasma información general sobre la actividad a desarrollar (nombre de la actividad, objetivos de la actividad, quien realiza la actividad, tiempo de preparación, materiales, duración, dificultades previstas).
253. En la segunda se incluyen detalles sobre la actividad (nombre de la actividad, carácter de la actividad, objetivos de aprendizaje, competencia, prerrequisitos y bibliografía, tiempo de inicio de la actividad, duración, organización, espacio utilizado, descripción, recursos para el aprendizaje, entregas, feedback, evaluación, y resultados).
254. Elaborar la guía que describe la labor docente y la de los estudiantes. Estas son necesarias cuando las fichas no son suficientes para detallar el desarrollo de la actividad.
255. Diseñar plantillas para monitorizar las diferentes etapas del trabajo de la actividad de cada estudiante.
256. Estas plantillas sirven para controlar las entregas previas a la entrega final, en el caso de que la actividad así lo requiera.
257. Estas plantillas servirán para medir el desarrollo de la actividad en cuestiones de tiempo y para brindar un feedback a los estudiantes.
258. Diseñar las rúbricas para evaluar la actividad.
259. Es importante que el estudiante sea informado de los aspectos que el profesor evaluará en la actividad y el porcentaje correspondiente a cada uno.
260. La evaluación deberá ser lo más objetiva posible.
261. Los objetivos de la actividad deben tener claridad, estar orientada al logro de los aprendizajes esperados y tener relación con al menos un criterio de evaluación.
262. La actividad debe ser explicada a los estudiantes de manera detallada y clara.

263. Se debe motivar a los alumnos a realizar un profundo análisis de la información brindada mediante actividades que sean de su interés.
264. Se debe preparar bien los materiales o recursos a utilizar y adecuar bien el tiempo disponible para el desarrollo de la actividad.
265. Hay que tener en cuenta el espacio del aula y el ambiente del colegio.
266. Se debe delimitar claramente la temática o campo temático que se abordará en la actividad.
267. Todas las acciones de la actividad deben estar orientadas al aprendizaje del campo temático.
268. Decidir la cantidad de estudiantes que realizarán la misma actividad, además se debe tener en cuenta los saberes previos de estos para determinar la complejidad de la tarea.
269. Especificar la competencia o capacidades que desarrollarán los estudiantes durante la actividad.
270. Identificar los posibles errores o dificultades que los estudiantes podrían presentar en el transcurso de la actividad y buscar alternativas de solución.
271. Los estudiantes deben entregar un producto al final de cada actividad, esto les permitirá plasmar sus aprendizajes y por ende ser evaluados.
272. Se sugiere que una ficha de descripción de la actividad contenga las siguientes interrogantes: ¿qué es?, ¿qué características tiene?, ¿cuándo es recomendable usar esta actividad?, ¿cómo diseña el docente la actividad?, ¿cómo se implementa?, ¿cuáles son los roles del docente y de los estudiantes?, y, de ser necesario, ¿cuáles son los aprendizajes esperados, tareas a realizar, materiales y el producto que se pretende obtener?
273. El conjunto de actividades debe tener relación entre sí y apuntar todas a un mismo propósito común.
274. No puede existir una actividad desvinculada de las demás. Su unidad dependerá del logro de los objetivos.
275. No debe quedar nada libre, las actividades deberán estar integradas gradualmente y de manera ininterrumpida, desde la primera hasta la última.
276. Existe el principio de flexibilidad en las actividades o el conjunto de estas, de tal modo que se puedan introducir temas o subtemas ocasionales durante la marcha de las actividades, con el fin de enriquecer los contenidos a aprender.
277. Este principio se refiere a tener siempre presente las condiciones reales del lugar, el tiempo y el espacio; pero también tener en cuenta la disponibilidad de los recursos didácticos a utilizar.
278. Lo diseñado debe tener una concepción realista del proceso de enseñanza-aprendizaje y de sus posibilidades.
279. Este principio hace referencia a la claridad que debe existir en los enunciados, los cuales deben ser objetivos y con buena sintáctica para evitar confusiones.

280. Se deben evitar las ambigüedades y las dobles interpretaciones para no provocar confusión en los estudiantes.
281. Una ficha de diseño de una actividad de enseñanza-aprendizaje debe especificar los procedimientos, métodos y técnicas de enseñanza; los recursos y materiales; los procesos mentales; y las técnicas e instrumentos de evaluación que se considerarán para cada momento de la actividad.
282. El esquema de diseño de una actividad de enseñanza-aprendizaje debe sintetizar estrategias y métodos generales, cuyas acciones se secuencien en base a momentos.



Anexos

Anexo A. Ficha de validación de la propuesta pedagógica del experto 1

FICHA DE VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA PEDAGÓGICA

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador : Joaquín Aurelio Vera Viera.

1.2 Cargo e institución donde labora : Docente del área de matemática.

1.3 Nombre de la propuesta pedagógica evaluada : Calculamos las alturas y distancias para adquirir conocimientos sobre razones trigonométricas.

1.4 Autor de la propuesta pedagógica : Jean Pierre Gómez Espinoza.

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

- | | | |
|----|------------|------|
| 1. | Deficiente | (D). |
| 2. | Regular | (R). |
| 3. | Buena | (B). |

III. INSTRUCCIONES:

La evaluación se divide en dos partes, una para validar la propuesta pedagógica de manera general y la otra para validar cada actividad de enseñanza-aprendizaje de manera específica.

En la primera parte se deberá marcar con un aspa el puntaje para cada uno de los indicadores (1, 2 o 3), y hacer los cálculos respectivos para calcular el coeficiente de validez.

En la segunda parte se deberá escribir el puntaje de cada indicador para cada una de las 11 actividades de enseñanza aprendizaje. Luego se deberá sumar el puntaje para cada una de las 11 actividades y dividir este entre 48 (para las actividades 1-3 y 6-11) o entre 33 (para las actividades 4 y 5).

Primera parte:

Evaluación de la propuesta pedagógica en general				
Aspectos de validación de la propuesta pedagógica	1	2	3	Observaciones
Indicadores	D	R	B	Sugerencias
Integra apropiadamente los siguientes aspectos curriculares: competencia, capacidades y desempeños.			X	
La propuesta pedagógica agrupa y ordena sistemáticamente las diferentes actividades de enseñanza-aprendizaje que la componen.			X	
La propuesta pedagógica proporciona una visión clara de cómo se desarrollarán, evaluarán y alcanzarán los propósitos de aprendizaje.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante realizar una matematización a partir de situaciones de contexto real.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante trabaje sobre un modelo matemático para resolverlo y dar solución a problemas matemáticos.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante comunique su comprensión sobre un problema utilizando lenguaje matemático.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante se traslade entre los distintos sistemas de representaciones de un mismo concepto matemático.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que al estudiante planificar todas las estrategias, procedimientos y recursos que utilizará para resolver una situación problemática.		X		
La propuesta pedagógica comprende actividades que pongan a prueba el conocimiento heurístico y permitan potenciar el mismo.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante argumentar ideas sobre la solución de un problema, y favorezcan su saber y hacer matemático.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante establecer relaciones entre distintas ideas matemáticas para plantear conclusiones respecto a una situación problemática.			X	
A lo largo de las actividades de enseñanza-aprendizaje se desarrollan todos los conceptos que abarca el campo temático de razones trigonométricas.		X		
CONTEO TOTAL		4	30	34
(Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)	C	B	A	Total

Coeficiente

de validez

$$\frac{A + B + C}{36}$$

=

0,94

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena

Piura, setiembre de 2021.

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

Firma del validador



Segunda parte:

Evaluación de las actividades de enseñanza-aprendizaje en particular													
Aspectos de validación de las actividades de enseñanza-aprendizaje	Actividad de enseñanza-aprendizaje											Observaciones Sugerencias	
Indicadores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
Las acciones descritas en las actividades de enseñanza-aprendizaje promueven el desarrollo de los desempeños propuestos.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
Las actividades de enseñanza-aprendizaje planteadas en la propuesta pedagógica permiten el desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
Los procedimientos, criterios y estrategias de evaluación tienen congruencia con los desempeños planteados.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
Las actividades de enseñanza-aprendizaje promueven el interés por aprender en los estudiantes, pues integran recursos y materiales didácticos adecuados; además, incluyen situaciones problemáticas de contexto real.	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3	3	En las actividades 4 y 5 hacen falta situaciones de contexto real.	
Estas actividades se conectan unas con las otras de manera sistemática y gradual, pues comparten un mismo propósito general en común. Además, su diseño es flexible ya que están abiertas a la adaptación y al reajuste.	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
La ficha general de la actividad de enseñanza-aprendizaje se presenta de manera clara, coherente, precisa y ordenada.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
El contenido temático de razones trigonométricas guarda relación con los desempeños en todas las actividades de enseñanza-aprendizaje.	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3		
Los conceptos del campo temático de razones trigonométricas son distribuidos adecuadamente en las actividades de enseñanza-aprendizaje.	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3		
En las actividades de enseñanza-aprendizaje se planifican técnicas y estrategias para enseñar de manera didáctica los conceptos del campo temático de razones trigonométricas.	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
Las situaciones problemáticas en las actividades de enseñanza-aprendizaje apuntan al aprendizaje de los conceptos y procedimientos involucrados en el campo temático de razones trigonométricas.	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
Se propone que la evaluación se realice en base a criterios e instrumentos de evaluación pertinentes.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje.	3	3	3			3	3	3	3	3	3		
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.	3	3	3			3	3	3	3	3	3		
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten la enseñanza del campo temático de razones trigonométricas.	3	3	3			2	2	2	2	2	2		

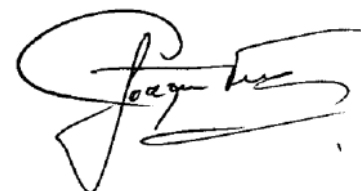
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) son integrados en las actividades de enseñanza-aprendizaje de manera ordenada y organizada.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten captar el interés del estudiante por lo que resultan atractivos y motivadores en el aprendizaje.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)	46	46	46	30	31	46	46	46	46	46	46	Total

Intervalos	Resultado	Para las actividades 1-3 y 6-11				Para las actividades 4 y 5			
0,00 – 0,49	• Validez nula	Coeficiente de validez CALIFICACIÓN GLOBAL Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado. 	<u>Suma total</u> 48 =			Coeficiente de validez CALIFICACIÓN GLOBAL Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado. 	<u>Suma total</u> 33 =		
0,50 – 0,59	• Validez muy baja								
0,60 – 0,69	• Validez baja								
0,70 – 0,79	• Validez aceptable								
0,80 – 0,89	• Validez buena								
0,90 – 1,00	• Validez muy buena								

Resultados de las actividades de enseñanza-aprendizaje										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,96	0,96	0,96	0,91	0,94	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96
Validez muy buena	Validez muy buena	Validez muy buena	Validez muy buena	Validez muy buena	Validez muy buena	Validez muy buena	Validez muy buena	Validez muy buena	Validez muy buena	Validez muy buena

Piura, setiembre de 2021.

Firma del validador



Anexo B. Ficha de validación de la propuesta pedagógica del experto 2

**FICHA DE VALIDACIÓN
DE LA PROPUESTA PEDAGÓGICA**

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador : Blanca Elizabeth Rangel Delgado.

1.2 Cargo e institución donde labora : Docente del área de matemática.

1.3 Nombre de la propuesta pedagógica evaluada : Calculamos las alturas y distancias para adquirir conocimientos sobre razones trigonométricas.

1.4 Autor de la propuesta pedagógica : Jean Pierre Gómez Espinoza.

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

- | | | |
|----|------------|------|
| 1. | Deficiente | (D). |
| 2. | Regular | (R). |
| 3. | Buena | (B). |

III. INSTRUCCIONES:

La evaluación se divide en dos partes, una para validar la propuesta pedagógica de manera general y la otra para validar cada actividad de enseñanza-aprendizaje de manera específica.

En la primera parte se deberá marcar con un aspa el puntaje para cada uno de los indicadores (1, 2 o 3), y hacer los cálculos respectivos para calcular el coeficiente de validez.

En la segunda parte se deberá escribir el puntaje de cada indicador para cada una de las 11 actividades de enseñanza aprendizaje. Luego se deberá sumar el puntaje para cada una de las 11 actividades y dividir este entre 48 (para las actividades 1-3 y 6-11) o entre 33 (para las actividades 4 y 5).

Primera parte:

Evaluación de la propuesta pedagógica en general				
Aspectos de validación de la propuesta pedagógica	1	2	3	Observaciones Sugerencias
Indicadores	D	R	B	
Integra apropiadamente los siguientes aspectos curriculares: competencia, capacidades y desempeños.			X	
La propuesta pedagógica agrupa y ordena sistemáticamente las diferentes actividades de enseñanza-aprendizaje que la componen.			X	
La propuesta pedagógica proporciona una visión clara de cómo se desarrollarán, evaluarán y alcanzarán los propósitos de aprendizaje.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante realizar una matematización a partir de situaciones de contexto real.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante trabaje sobre un modelo matemático para resolverlo y dar solución a problemas matemáticos.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante comunique su comprensión sobre un problema utilizando lenguaje matemático.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante se traslade entre los distintos sistemas de representaciones de un mismo concepto matemático.		X		
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que al estudiante planificar todas las estrategias, procedimientos y recursos que utilizará para resolver una situación problemática.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que pongan a prueba el conocimiento heurístico y permitan potenciar el mismo.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante argumentar ideas sobre la solución de un problema, y favorezcan su saber y hacer matemático.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante establecer relaciones entre distintas ideas matemáticas para plantear conclusiones respecto a una situación problemática.			X	
A lo largo de las actividades de enseñanza-aprendizaje se desarrollan todos los conceptos que abarca el campo temático de razones trigonométricas.		X		
CONTEO TOTAL		4	30	34
(Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)	C	B	A	Total

Coefficiente**de validez**

$$\frac{A + B + C}{36}$$

=

0,94**III. CALIFICACIÓN GLOBAL**

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena

Piura, setiembre de 2021.

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

Firma del validador



Segunda parte:

Evaluación de las actividades de enseñanza-aprendizaje en particular												
Aspectos de validación de las actividades de enseñanza-aprendizaje	Actividad de enseñanza-aprendizaje											Observaciones Sugerencias
Indicadores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Las acciones descritas en las actividades de enseñanza-aprendizaje promueven el desarrollo de los desempeños propuestos.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Las actividades de enseñanza-aprendizaje planteadas en la propuesta pedagógica permiten el desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Los procedimientos, criterios y estrategias de evaluación tienen congruencia con los desempeños planteados.	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	
Las actividades de enseñanza-aprendizaje promueven el interés por aprender en los estudiantes, pues integran recursos y materiales didácticos adecuados; además, incluyen situaciones problemáticas de contexto real.	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	
Estas actividades se conectan unas con las otras de manera sistemática y gradual, pues comparten un mismo propósito general en común. Además, su diseño es flexible ya que están abiertas a la adaptación y al reajuste.	3	3	3	3	2	2	3	3	3	3	3	
La ficha general de la actividad de enseñanza-aprendizaje se presenta de manera clara, coherente, precisa y ordenada.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
El contenido temático de razones trigonométricas guarda relación con los desempeños en todas las actividades de enseñanza-aprendizaje.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Los conceptos del campo temático de razones trigonométricas son distribuidos adecuadamente en las actividades de enseñanza-aprendizaje.	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
En las actividades de enseñanza-aprendizaje se planifican técnicas y estrategias para enseñar de manera didáctica los conceptos del campo temático de razones trigonométricas.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Las situaciones problemáticas en las actividades de enseñanza-aprendizaje apuntan al aprendizaje de los conceptos y procedimientos involucrados en el campo temático de razones trigonométricas.	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	No hay situación problemática
Se propone que la evaluación se realice en base a criterios e instrumentos de evaluación pertinentes.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten la enseñanza del campo temático de razones trigonométricas.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) son integrados en las actividades de enseñanza-aprendizaje de manera ordenada y organizada.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	

Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten captar el interés del estudiante por lo que resultan atractivos y motivadores en el aprendizaje.	3	2	2		3	3	3	3	3	3	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)	47	47	47	32	31	47	48	48	47	47	Total

Intervalos	Resultado	Para las actividades 1-3 y 6-11		Para las actividades 4 y 5	
0,00 – 0,49	• Validez nula	Coeficiente de validez <u>Suma total</u> 48 = CALIFICACIÓN GLOBAL Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado. 	Coeficiente de validez <u>Suma total</u> 33 = CALIFICACIÓN GLOBAL Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado. 		
0,50 – 0,59	• Validez muy baja				
0,60 – 0,69	• Validez baja				
0,70 – 0,79	• Validez aceptable				
0,80 – 0,89	• Validez buena				
0,90 – 1,00	• Validez muy buena				

Resultados de las actividades de enseñanza-aprendizaje										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,98 Validez muy buena	0,98 Validez muy buena	0,98 Validez muy buena	0,97 Validez muy buena	0,94 Validez muy buena	0,98 Validez muy buena	1,00 Validez muy buena	1,00 Validez muy buena	0,98 Validez muy buena	0,98 Validez muy buena	0,98 Validez muy buena

Piura, setiembre de 2021.

Firma del validador



Anexo C. Ficha de validación de la propuesta pedagógica del experto 3

**FICHA DE VALIDACIÓN
DE LA PROPUESTA PEDAGÓGICA**

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador : Ruth Eliana Aguirre Urbina.

1.2 Cargo e institución donde labora : Docente del área de matemática.

1.3 Nombre de la propuesta pedagógica evaluada : Calculamos las alturas y distancias para adquirir conocimientos sobre razones trigonométricas.

1.4 Autor de la propuesta pedagógica : Jean Pierre Gómez Espinoza.

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

- | | | |
|----|------------|------|
| 1. | Deficiente | (D). |
| 2. | Regular | (R). |
| 3. | Buena | (B). |

III. INSTRUCCIONES:

La evaluación se divide en dos partes, una para validar la propuesta pedagógica de manera general y la otra para validar cada actividad de enseñanza-aprendizaje de manera específica.

En la primera parte se deberá marcar con un aspa el puntaje para cada uno de los indicadores (1, 2 o 3), y hacer los cálculos respectivos para calcular el coeficiente de validez.

En la segunda parte se deberá escribir el puntaje de cada indicador para cada una de las 11 actividades de enseñanza aprendizaje. Luego se deberá sumar el puntaje para cada una de las 11 actividades y dividir este entre 48 (para las actividades 1-3 y 6-11) o entre 33 (para las actividades 4 y 5).

Primera parte:

Evaluación de la propuesta pedagógica en general				
Aspectos de validación de la propuesta pedagógica	1	2	3	Observaciones Sugerencias
Indicadores	D	R	B	
Integra apropiadamente los siguientes aspectos curriculares: competencia, capacidades y desempeños.			X	
La propuesta pedagógica agrupa y ordena sistemáticamente las diferentes actividades de enseñanza-aprendizaje que la componen.			X	
La propuesta pedagógica proporciona una visión clara de cómo se desarrollarán, evaluarán y alcanzarán los propósitos de aprendizaje.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante realizar una matematización a partir de situaciones de contexto real.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante trabaje sobre un modelo matemático para resolverlo y dar solución a problemas matemáticos.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante comunique su comprensión sobre un problema utilizando lenguaje matemático.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que el estudiante se traslade entre los distintos sistemas de representaciones de un mismo concepto matemático.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten que al estudiante planificar todas las estrategias, procedimientos y recursos que utilizará para resolver una situación problemática.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que pongan a prueba el conocimiento heurístico y permitan potenciar el mismo.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante argumentar ideas sobre la solución de un problema, y favorezcan su saber y hacer matemático.			X	
La propuesta pedagógica comprende actividades que permiten al estudiante establecer relaciones entre distintas ideas matemáticas para plantear conclusiones respecto a una situación problemática.			X	
A lo largo de las actividades de enseñanza-aprendizaje se desarrollan todos los conceptos que abarca el campo temático de razones trigonométricas.		X		
CONTEO TOTAL		2	33	35
(Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)	C	B	A	Total

Coeficiente

de validez

$$\frac{A + B + C}{36}$$

=

0,97

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

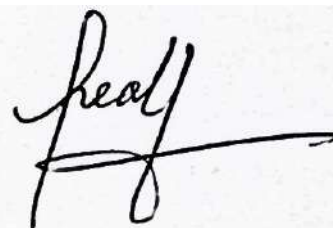
Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez muy buena

Piura, setiembre de 2021.

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

Firma del validador



Segunda parte:

Evaluación de las actividades de enseñanza-aprendizaje en particular												
Aspectos de validación de las actividades de enseñanza-aprendizaje	Actividad de enseñanza-aprendizaje											Observaciones Sugerencias
Indicadores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Las acciones descritas en las actividades de enseñanza-aprendizaje promueven el desarrollo de los desempeños propuestos.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Las actividades de enseñanza-aprendizaje planteadas en la propuesta pedagógica permiten el desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes.	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Los procedimientos, criterios y estrategias de evaluación tienen congruencia con los desempeños planteados.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Las actividades de enseñanza-aprendizaje promueven el interés por aprender en los estudiantes, pues integran recursos y materiales didácticos adecuados; además, incluyen situaciones problemáticas de contexto real.	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	La tercera no incluye un problema de contexto real.
Estas actividades se conectan unas con las otras de manera sistemática y gradual, pues comparten un mismo propósito general en común. Además, su diseño es flexible ya que están abiertas a la adaptación y al reajuste.	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	La quinta no encaja en la secuencia. El teorema de Pitágoras se puede abordar fuera de las razones trigonométricas.
La ficha general de la actividad de enseñanza-aprendizaje se presenta de manera clara, coherente, precisa y ordenada.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
El contenido temático de razones trigonométricas guarda relación con los desempeños en todas las actividades de enseñanza-aprendizaje.	2	2	3	3	2	3	3	3	3	3	3	
Los conceptos del campo temático de razones trigonométricas son distribuidos adecuadamente en las actividades de enseñanza-aprendizaje.	3	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	
En las actividades de enseñanza-aprendizaje se planifican técnicas y estrategias para enseñar de manera didáctica los conceptos del campo temático de razones trigonométricas.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Las situaciones problemáticas en las actividades de enseñanza-aprendizaje apuntan al aprendizaje de los conceptos y procedimientos involucrados en el campo temático de razones trigonométricas.	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	
Se propone que la evaluación se realice en base a criterios e instrumentos de evaluación pertinentes.	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten el desarrollo de la competencia de resolución de problemas.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten la enseñanza del campo temático de razones trigonométricas.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	

Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) son integrados en las actividades de enseñanza-aprendizaje de manera ordenada y organizada.	3	3	3			2	3	3	3	3	3	
Estos recursos didácticos (gnomon, clinómetro y espejos) se incluyen de tal modo que permiten captar el interés del estudiante por lo que resultan atractivos y motivadores en el aprendizaje.	3	3	3			3	3	3	3	3	3	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)	47	46	48	31	29	47	48	48	48	48	48	Total

Intervalos	Resultado	Para las actividades 1-3 y 6-11			Para las actividades 4 y 5		
0,00 – 0,49	• Validez nula	Coeficiente de validez CALIFICACIÓN GLOBAL Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado. 	Suma total 48 =		Coeficiente de validez CALIFICACIÓN GLOBAL Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado. 	Suma total 33 =	
0,50 – 0,59	• Validez muy baja						
0,60 – 0,69	• Validez baja						
0,70 – 0,79	• Validez aceptable						
0,80 – 0,89	• Validez buena						
0,90 – 1,00	• Validez muy buena						

Resultados de las actividades de enseñanza-aprendizaje										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,98 Validez muy buena	0,96 Validez muy buena	1,00 Validez muy buena	0,94 Validez muy buena	0,88 Validez buena	0,98 Validez muy buena	1,00 Validez muy buena	1,00 Validez muy buena	1,00 Validez muy buena	1,00 Validez muy buena	1,00 Validez muy buena

Piura, setiembre de 2021.

Firma del validador

