CAPÍTULO 20: NÚMEROS COMPLEJOS (II)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 20: Números Complejos (II)

2. Propiedades de las operaciones con complejos

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

16 diapositivas

CAPÍTULO XX

NUMEROS COMPLEJOS

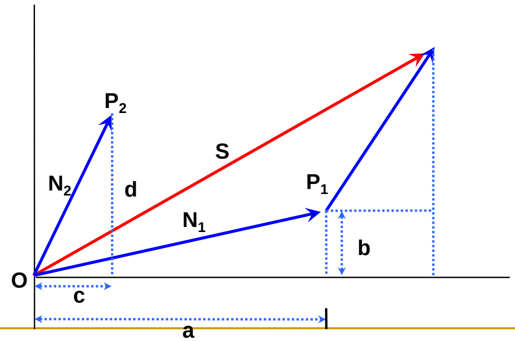
2. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON COMPLEJOS

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-1

La suma de dos o más complejos tiene un vector que es la suma vectorial de los vectores de los sumandos.

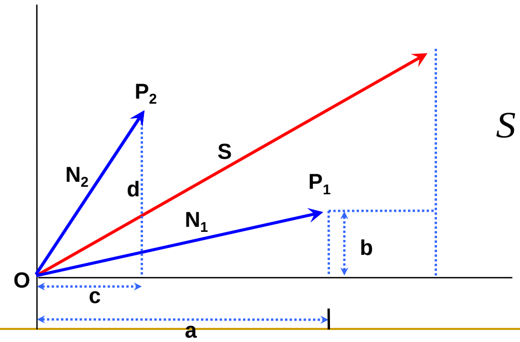
Demostración: Sean dos complejos $N_1 = a + b\,i; \quad N_2 = c + d\,i$



2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-1

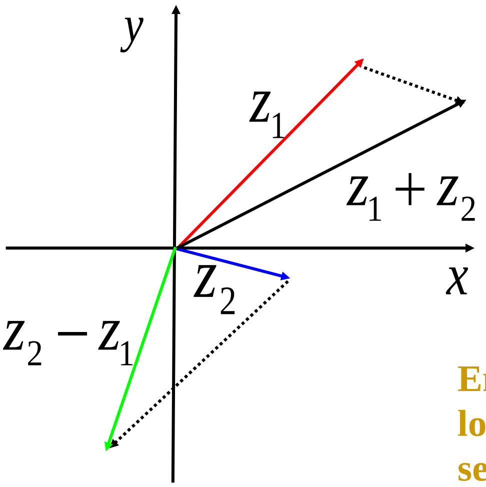
La suma vectorial, trasladando paralelamente el vector de N_2 de forma que su origen coincida con el extremo de N_1, nos da el vector S cuyo complejo es , o sea la suma de los complejos.



$$S = (a+c) + (b+d)i$$

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-1



Corolario:

La diferencia de complejos tiene un vector que es la diferencia vectorial de los vectores minuendo y substraendo, o bien la suma vectorial del vector del minuendo con el opuesto del vector del substraendo.

En la suma (y la resta) los números complejos se comportan como vectores

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-2

El producto de dos o más complejos tiene como módulo el producto de los módulos de los factores; y como argumento, la suma de argumentos de los factores (o un valor equivalente).

Demostración: Supongamos 2 factores:

$$N_1 = a + bi = r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$$
$$N_2 = c + di = r_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$$

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-2

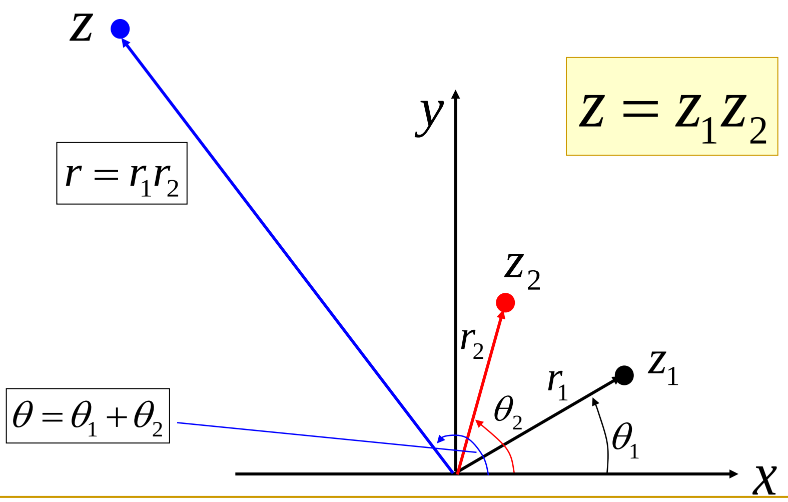
$$N_1 = a + bi = r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$$
$$N_2 = c + di = r_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$$
$$N_1\, x\, N_2 = r_1\, x\, r_2[(\cos\theta_1\, x\cos\theta_2 - sen\theta_1\, x\, sen\theta_2) + i(sen\theta_1\, x\cos\theta_2 + \cos\theta_1\, x\, sen\theta_2)]$$
$$N_1 x N_2 = r_1\, x\, r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)\right] = (r_1 x\, r_2)\angle(\theta_1 + \theta_2)$$
$$\boxed{N_1 x N_2 = (r_1 x\, r_2)\angle(\theta_1 + \theta_2)}$$

Corolario:

El cociente de dos complejos tiene como módulo el cociente de los módulos y como Argumento la diferencia de argumentos de dividendo y divisor.

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-2



2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-3

La potencia *n-ésima* de un complejo (*n* real) es otro complejo, cuyo módulo es la potencia enésima del módulo de la base, cuyo argumento es n veces el argumento de la base (u otro equivalente).

Demostración: Si n ε R, en virtud del teorema anterior:

$$\boxed{(a+bi)^n = (a+bi)(a+bi)\ldots(a+bi) = r^n \angle n\theta}$$

Corolario: $$\boxed{\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\,\angle(\theta/n)}$$

porque $\sqrt[n]{a+bi} = (a+bi)^{1/n}$

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-4

Si **n** es un complejo natural, hay raíces enésimas diferentes de un número complejo.

Demostración: $a + bi = r\angle\theta$

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\angle(\theta / n)$$

Pero en lugar de θ puede haber cualquier valor equivalente $\theta + 2k\pi$ siendo K entero. El argumento de la raíz es:

$$\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi\frac{k}{n}$$ (en radianes; en grados: $\frac{\theta}{n} + 360^\circ\frac{k}{n}$)

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-4

$$\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi\frac{k}{n}$$

El segundo sumando puede tomar los valores diferentes no equivalentes, para cada valor de k, pe. k = 0,1,2,3,…n-1:

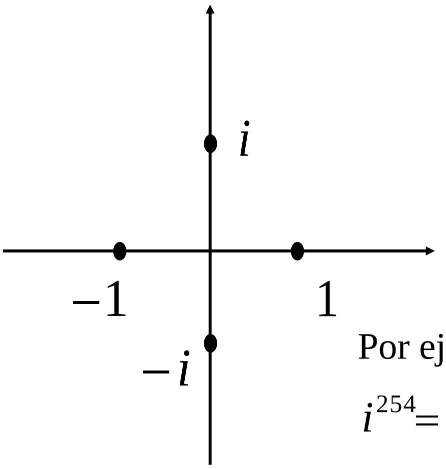
$$0,\ 2\pi\frac{1}{n},\ 2\pi\frac{2}{n},\ldots,2\pi\frac{n-1}{n}$$

o sea n valores. El valor siguiente $2\pi\frac{n}{n}$ ya es equivalente a 0. Todos los demás valores posibles son equivalentes a alguno de los expuestos.

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-4

Potencias de *i*



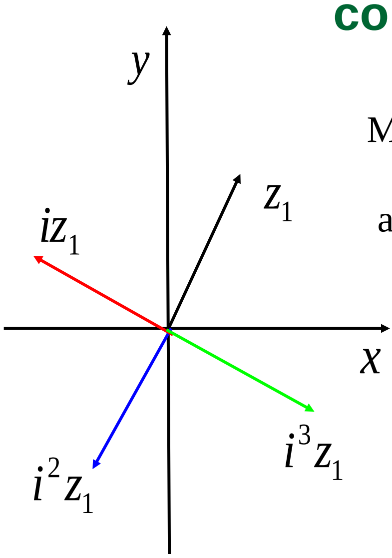
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$
$$i^5 = i$$
$$i^6 = -1$$
$$\vdots$$

Por ejemplo:

$$i^{254} = (i^4)^{63} \cdot i^2 = 1(-1) = -1$$

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-4



Multiplicar por *i* es equivalente a girar 90 grados en sentido antihorario (operador rotación).

$$z = r(\cos\theta + i sen\theta)$$
$$iz = ir(\cos\theta + i sen\theta)$$
$$iz = r(-sen\theta + i\cos\theta)$$
$$iz = r[\cos(\theta+\pi/2) + i sen(\theta+\pi/2)]$$

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-4

Ejemplos : Raíces cuartas de –1

$$-1=-1+0i=1\angle 180^{o}$$

módulo de la raíz $\sqrt[4]{1}=1$

Argumentos de la raíz:

$$\frac{\theta}{n}+360^{o}\frac{k}{n}$$

$$\begin{cases} 1^{o})\ \dfrac{180^{o}}{4}=45^{o} \\ 2^{o})\ \dfrac{180^{o}+360^{o}}{4}=45^{o}+90^{o}=135^{o} \\ 3^{o})\ \dfrac{180^{o}+2\times 360^{o}}{4}=45^{o}+2\times 90^{o}=225^{o} \\ 4^{o})\ \dfrac{180+3\times 360}{4}=45^{o}+3\times 90^{o}=315^{o} \end{cases}$$

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-4

$$RAIZ\ 1^{a}.........1\angle 45^{o}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$RAIZ\ 2^{a}........1\angle 135^{o}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$RAIZ\ 3^{a}........1\angle 225^{o}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$RAIZ\ 4^{a}.........1\angle 315^{o}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-5

Las **n** raíces enésimas del número real **a** (considerado como complejo a+oi), se pueden obtener multiplicando la raíz enésima real del valor absoluto de a , por cada una de las raíces enésimas de +/-1 (mas ó menos según el signo de a).

Demostración:

Sea **a** positivo; $r = \sqrt[n]{a}$ en el campo real $\boxed{\sqrt[n]{a} = r\sqrt[n]{1}}$, lo que dará n raíces enésimas diferentes.

Si **a** es negativo, la demostración es análoga.

2. Propiedades de las Operaciones con Complejos

TEOREMA XX-6

Fórmula de Moivre $\boxed{(\cos x + i\, senx)^m = \cos mx + i\, sen\, mx}$

Demostración:

El argumento de la base es x, el módulo es 1.

$$\text{módulo} \quad : r = 1 = \sqrt{\cos^2 x + sen^2 x}$$

$$\text{argumento} : x$$

La potencia *n-ésima,* según el Teorema XX-3, es:

$$(a+bi)^n = (a+bi)(a+bi)\ldots(a+bi) = r^n \angle n\theta$$

módulo $1^m=1$ y argumento *mx*, por lo tanto en forma binomial es el 2º miembro de la igualdad.