UNIVERSIDAD DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL PIRHUA

CAPÍTULO 24: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS (I)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Repositorio Institucional PIRHUA

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú

Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 24: Resolución de Triángulos Esféricos (I)

A. Teoremas fundamentales de los triángulos convexos

1. Teorema de los senos
2. Teorema de los cosenos de los lados
3. Teorema de los cosenos de los ángulos
4. Formulas auxiliares

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

16 diapositivas

CAPÍTULO XXIV:RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

A. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LOS TRIÁNGULOS CONVEXOS

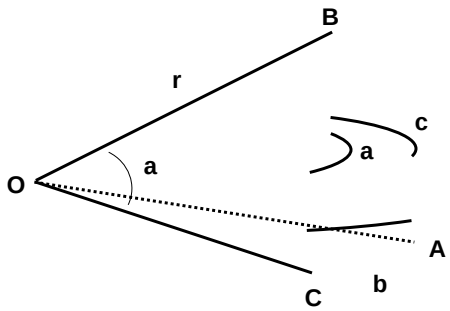
1. Teorema de los senos
2. Teorema de los cosenos de los lados
3. Teorema de los cosenos de los ángulos
4. Formulas auxiliares

1. TEOREMA DE LOS SENOS

TEOREMA XXIV-1

Los senos de los ángulos son proporcionales a los senos de los lados opuestos:

$$\frac{senA}{sena} = \frac{senB}{senb} = \frac{senC}{senc}$$



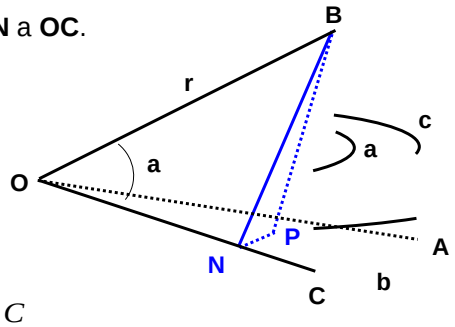
1. TEOREMA DE LOS SENOS

TEOREMA XXIV-1

Desde **B** trazamos la perpendicular **BP** al plano **OAC**.

Desde **B** trazamos la perpendicular **BN** a **OC**.

La recta **PN** es perpendicular a **OC** en virtud del teorema de las 3 perpendiculares.



$$BN = r\,sen a$$

$$BP = BN\,sen C = r\,sen a\,.sen C$$

Si repitiéramos el razonamiento anterior usando la cara **OBA** (en vez de la **OCB** que hemos usado), el papel de C pasaría a A, y el de a a c:

$$BP = r\,sen c\,.sen A$$

1. TEOREMA DE LOS SENOS

TEOREMA XXIV-1

Igualando las dos expresiones de **BP**; y dividiendo por **r**:

$$sen a.sen C = sen c\,.sen A$$

$$\frac{sen A}{sen a} = \frac{sen C}{sen c}$$

y dado que **C** y **B** juegan papeles intercambiables, también:

$$\frac{sen A}{sen a} = \frac{sen B}{sen b}$$

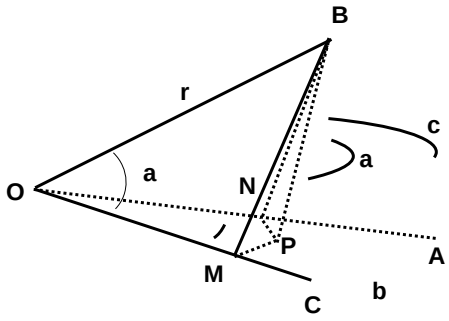
Es decir:

$$\frac{sen A}{sen a} = \frac{sen B}{sen b} = \frac{sen C}{sen c}$$

2. TEOREMA de los COSENOS de los LADOS

TEOREMA XXIV-2

$$\cos a = \cos b.\cos c + senb.senc.\cos A$$
$$\cos b = \cos a.\cos c + sena.senc.\cos B$$
$$\cos c = \cos a.\cos b + sena.senb.\cos C$$



2. TEOREMA de los COSENOS de los LADOS

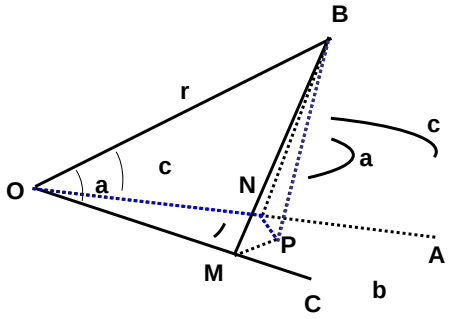
TEOREMA XXIV-2

Demostración : Sea un triángulo convexo y su triedro asociado:

$$ON = r.\cos c$$
$$NP = r\,sen\,c.\cos A$$

$$\overline{OB} = \overline{ON} + \overline{NP} + \overline{PB} \quad (Suma \quad vectorial)$$

La proyección de esta suma será la suma de proyecciones de los sumandos.



2. TEOREMA de los COSENOS de los LADOS

TEOREMA XXIV-2

Proyectamos **OB** sobre **OC**: $\overline{OB} = \overline{ON} + \overline{NP} + \overline{PB}$

$$\overline{OM} = \mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{OB} = \mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{ON} + \mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{NP} + \mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{PB}$$

$$\mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{OB} = \overline{OM} = \overline{OB}.\cos a = r\cos a$$

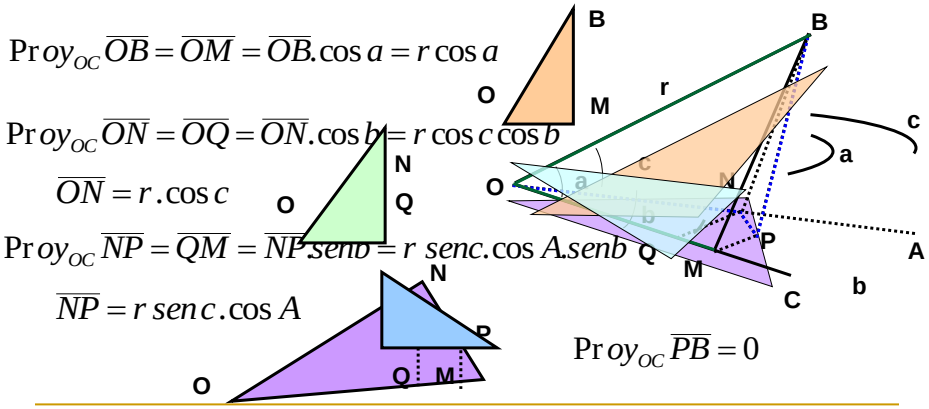
$$\mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{ON} = \overline{OQ} = \overline{ON}.\cos b = r\cos c\cos b$$

$$\overline{ON} = r.\cos c$$

$$\mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{NP} = \overline{QM} = \overline{NP}.senb = r\ senc.\cos A.senb$$

$$\overline{NP} = r\,sen c.\cos A$$

$$\mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{PB} = 0$$



2. TEOREMA de los COSENOS de los LADOS

TEOREMA XXIV-2

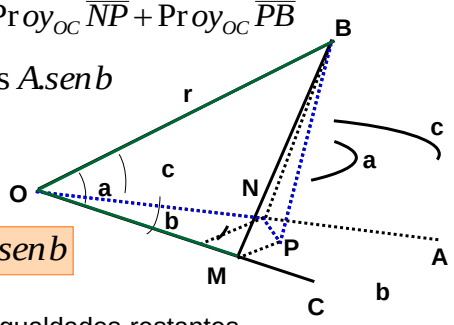
$$\overline{OM} = \mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{OB} = \mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{ON} + \mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{NP} + \mathrm{Pr}oy_{OC}\overline{PB}$$

$$r\cos a = r\cos c.\cos b + r\,senc.\cos A.senb$$

dividiendo entre r obtenemos

lo que queríamos demostrar.

$$\cos a = \cos c.\cos b + senc.\cos A.senb$$



Por rotación de letras obtenemos las igualdades restantes.

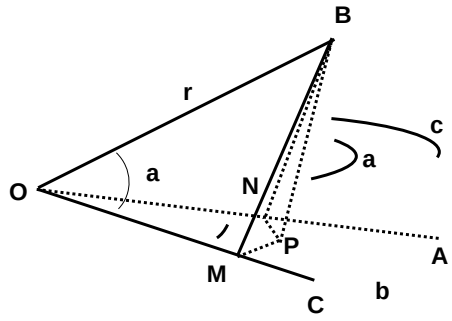
$$\cos b = \cos a.\cos c + sena.senc.\cos B$$

$$\cos c = \cos a.\cos b + sena.senb.\cos C$$

3. TEOREMA de los COSENOS de los ÁNGULOS

TEOREMA XXIV-3

$$\cos A = -\cos B.\cos C + senB.senC.\cos a$$
$$\cos B = -\cos A.\cos C + senA.senC.\cos b$$
$$\cos C = -\cos A.\cos B + sen\,A.senB.\cos c$$



3. TEOREMA de los COSENOS de los ÁNGULOS

TEOREMA XXIV-3

Demostración : Aplicando el Teorema XXIV-2 al triángulo polar

$$\cos a_p = \cos b_p.\cos c_p + senb_p.senc_p.\cos A_p$$

$A_p = 180° - a$ $\quad$ $a_p = 180° - A$

$B_b = 180° - b$ $\quad$ $b_b = 180° - B$

$C_p = 180° - c$ $\quad$ $c_p = 180° - C$

$$\cos(180 - A) = \cos(180 - B)\cos(180 - C) + sen(180 - B)sen(180 - C)\cos(180 - a)$$
$$-\cos A = \cos B.\cos C - sen\,B.sen\,C.\cos a$$

que, cambiando el signo, se convierte en la primera igualdad a demostrar

$$\cos A = -\cos B.\cos C + sen\,B.sen\,C.\cos a$$

3. TEOREMA de los COSENOS de los ÁNGULOS

TEOREMA XXIV-3

$$\cos A = -\cos B.\cos C + sen\,B.sen\,C.\cos a$$

Realizando las otras sustituciones obtenemos:

$$\cos B = -\cos A.\cos C + sen A.sen C.\cos b$$
$$\cos C = -\cos A.\cos B + sen\,A.sen B.\cos c$$

4. FORMULAS AUXILIARES

Los tres teoremas anteriores:

- Teorema de los senos
- Teorema de los cosenos de los lados, y
- Teorema de los cosenos de los ángulos,

son las únicas fórmulas independientes en triángulos esféricos, y por consiguiente, bastan para resolver todos los problemas solubles.

Para comodidad de operación, se han derivado de ellos muchas fórmulas, que llamaremos auxiliares. Sin pretender agotar el tema, exponemos algunas, dividiéndolas en grupos.

4. FORMULAS AUXILIARES – **GRUPO A**

Usando los teoremas de los **cosenos de los lados y de los ángulos**:

$$\cos A = -\cos B.\cos C + senB.senC.(\cos b.\cos c + sen\,b.sen\,c.\cos A)$$

$$\cos A(1 - senB.senC.sen\,b.sen\,c.\cos A) = -\cos B.\cos C + senB.senC\cos b.\cos c$$

y despejando $\cos A$ tenemos:

$$\cos A = \frac{-\cos B.\cos C + sen\,B.senC.\cos b.\cos c}{1 - sen\,B.sen\,C.sen\,b.sen\,c}$$

$$\cos B = \frac{-\cos A.\cos C + sen\,A.senC.\cos a.\cos c}{1 - sen\,A.sen\,C.sen\,a.sen\,c}$$

$$\cos C = \frac{-\cos A.\cos B + sen\,A.senB.\cos a.\cos b}{1 - sen\,A.sen\,B.sen\,a.sen\,b}$$

4. FORMULAS AUXILIARES – **GRUPO B**

$$\cot a.sen\,b = \cos b.\cos C + sen\,C.\cot A$$

$$\cot a.sen\,c = \cos c.\cos B + senB.\cot A$$

$$\cot b.sen\,a = \cos a.\cos C + sen\,C.\cot B$$

$$\cot b.sen\,c = \cos c.\cos A + senA.\cot B$$

$$\cot c.sen\,a = \cos a.\cos B + senB.\cot C$$

$$\cot c.sen\,b = \cos b.\cos A + senA.\cot C$$

4. FORMULAS AUXILIARES – **GRUPO B**

$$\cot a.sen\,b = \cos b.\cos C + sen\,C.\cot A$$

Demostración: Usando el teorema de los senos y cosenos de los lados:

$$\cos a = \cos c.\cos b + senc.senb.\cos A$$
$$\cos b = \cos a.\cos c + sena.senc.\cos B$$
$$\cos c = \cos a.\cos b + sena.senb.\cos C$$

$$\frac{senA}{sen\,a} = \frac{sen\,B}{sen\,b} = \frac{senC}{senc}$$

$$\cos a = \mathbf{cosc}.\cos b + \mathbf{senc}\,senb.\cos A$$

$$\cos a = \cos b(\cos a.\cos b + sena.sen\,b.\cos C) + senb\left(\frac{senC}{senA}sena\right)\cos A$$

$$\cos a = \cos a.\cos^2 b + sena.senb.\cos b.\cos C + sen\,a.sen\,b\,sen\,C\cot A$$

$$\cos a\left(1-\cos^2 b\right) = sen\,a.senb(\cos b.\cos C + senC.\cot A)$$

4. FORMULAS AUXILIARES – **GRUPO B**

$$\cos a\left(1-\cos^2 b\right) = sen\,a.senb(\cos b.\cos C + senC.\cot A)$$

dividimos ambos miembros entre $sena.senb$

$$\frac{\cos a}{sena}\frac{\left(1-\cos^2 b\right)}{senb} = \frac{sen\,a.senb(\cos b.\cos C + senC.\cot A)}{sena.senb}$$

$$\cot a.senb = \cos b.\cos C + senC.\cot A$$

$$\cot a.sen\,b = \cos b.\cos C + sen\,C.\cot A$$

Las demás fórmulas pueden deducirse de ésta por rotación de letras.