



UNIVERSIDAD
DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL
PIRHUA

CAPÍTULO 15: TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas



Esta obra está bajo una [licencia](#)
[Creative Commons Atribución-](#)
[NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú](#)

Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura



UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 15: Triángulos Rectángulos

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA CLASES

CAPÍTULO 15

TRIGONOMETRÍA

Triángulos Rectángulos

Triángulos Rectángulos

TEOREMA XV-1

1. Un cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al primero.
2. Un cateto es igual a la hipotenusa por el coseno del ángulo comprendido entre ambos.
3. Un cateto es igual al otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero.
4. Un cateto es igual al otro cateto por la cotangente del ángulo adyacente al primero.

DEMOSTRACIÓN

Colocando el triángulo rectángulo en unos ejes cartesianos, se obtiene:

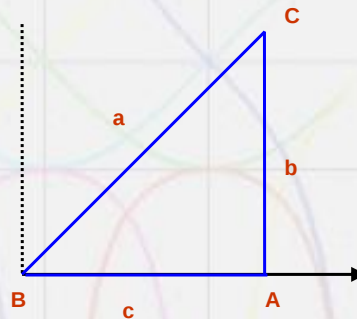
$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$$

$$b = a \operatorname{sen} B$$

$$B = 90^\circ - C$$

$$\operatorname{sen} B = \cos C$$

$$b = a \cos C$$



Triángulos Rectángulos

TEOREMA XV-1

1. Un cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al primero.
2. Un cateto es igual a la hipotenusa por el coseno del ángulo comprendido entre ambos.
3. Un cateto es igual al otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero.
4. Un cateto es igual al otro cateto por la cotangente del ángulo adyacente al primero.

DEMOSTRACIÓN

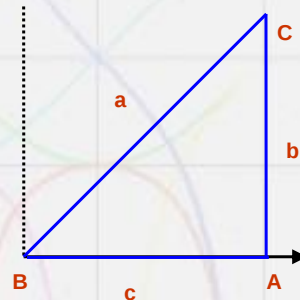
Dado $\text{sen} B = \frac{b}{a}$ y $\cos B = \frac{c}{a}$ entonces

$$\frac{\text{sen} B}{\cos B} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = \text{tg} B$$

$$b = c * (\text{tg} B)$$

reemplazando $\text{tg} B = \cot C$

$$b = c * (\cot C)$$



Triángulos Rectángulos

Proyección de un Segmento

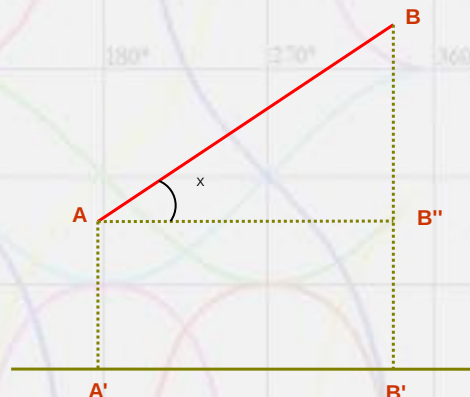
TEOREMA XV-2

La longitud de la proyección de un segmento sobre una recta es igual a la longitud del segmento por el coseno del ángulo menor que forman segmento y recta.

DEMOSTRACIÓN

A'B' = proyección de AB

$$A'B' = AB'' = AB (\cos x)$$



Triángulos Rectángulos

Proyección de un Segmento

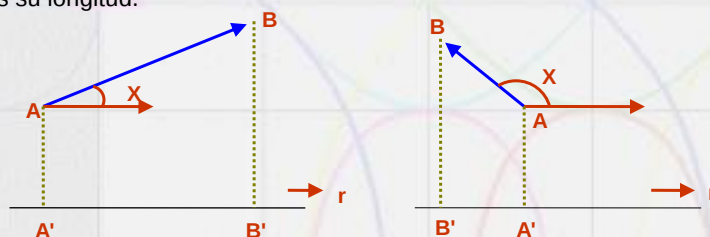
TEOREMA XV-3

La longitud algebraica de la proyección de un vector sobre una recta orientada es igual, en valor y signo, al módulo del vector por el coseno del ángulo que forman la dirección positiva de la recta y la del vector.

DEMOSTRACIÓN

Un vector es un segmento con sentido; de forma que un extremo A precede al otro, B . A se le llama extremo inicial del vector, y a B extremo final del mismo.

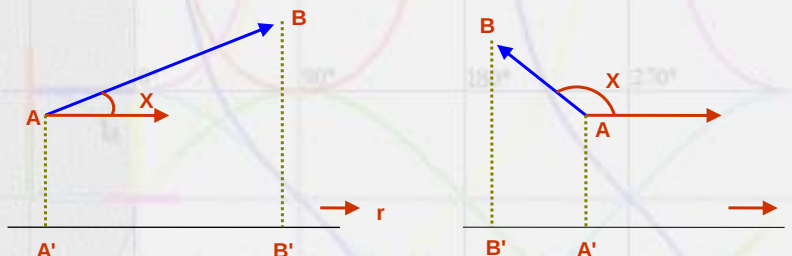
Módulo es su longitud.



Triángulos Rectángulos

Proyección de un Segmento

La proyección de un vector $\overrightarrow{AB}$ es un segmento algebraico $\overline{A'B'}$; de forma que, en la recta orientada, puede suceder que $\overline{A'B'}$ sea positivo o negativo, según A' preceda o siga a B' en la recta.



cuando el vector y la dirección positiva de la recta forman un ángulo x agudo, la proyección resulta positiva y vale $|AB| \cos x$; y cuando x es obtuso, resulta negativa, y vale también $|AB| \cos x$, en cuyo caso $\cos x$ es negativo, introduciendo el signo que necesita.

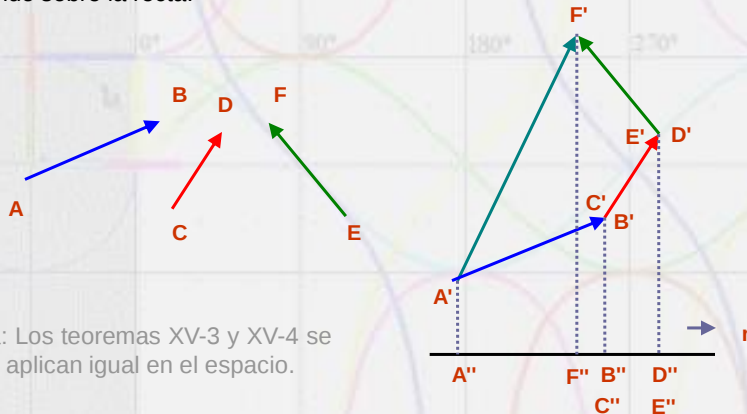
Triángulos Rectángulos

Proyección de un Segmento

TEOREMA XV-4

La longitud algebraica de **la proyección de una suma de varios vectores** sobre una recta orientada, **es igual a la suma de las proyecciones de cada vector** sumando sobre la recta.

Nota: Los teoremas XV-3 y XV-4 se aplican igual en el espacio.



Triángulos Rectángulos

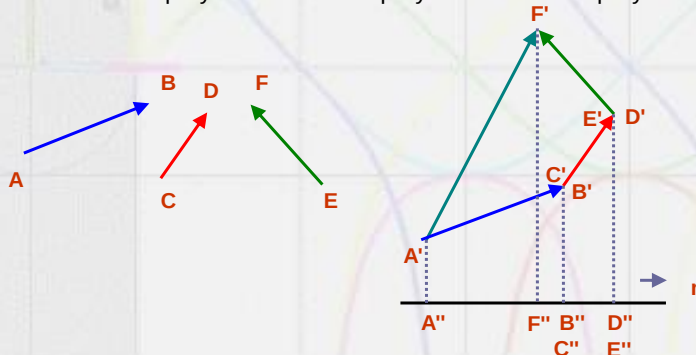
Proyección de un Segmento

DEMOSTRACIÓN

La suma de varios vectores es el vector que se obtiene colocando los sumandos uno a continuación del otro, de forma que el origen de cada uno coincida con el extremo del anterior; y formando un vector cuyo origen sea el origen del primer sumando y cuyo extremo sea el extremo del último:

$$\text{Proyección de } \vec{AF} = \vec{A''F''} = \vec{A''B''} + \vec{C''D''} + \vec{E''F''} =$$

$$\text{Proyección de } \vec{AF} = \text{proyección de } \vec{AB} + \text{proyección de } \vec{EF}$$

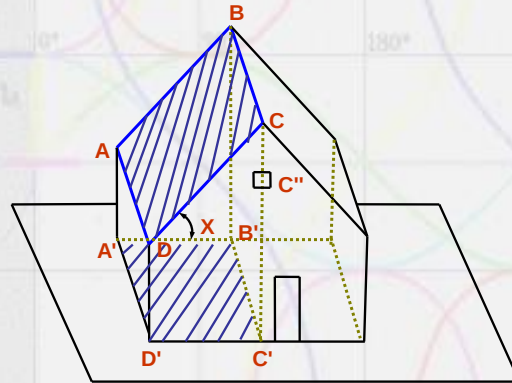


Triángulos Rectángulos

Área de la proyección de una Superficie

TEOREMA XV-5

El área de la proyección de una figura plana sobre un plano, es igual al área de la figura por el coseno del ángulo que forman su plano y el de la proyección.



Triángulos Rectángulos

Área de la proyección de una Superficie

DEMOSTRACIÓN

La proyección de una figura sobre un plano está formada por todos los pies de perpendiculares de los puntos de ella al plano.

La proyección del rectángulo ABCD, de superficie S (que forma parte del tejado de una casa), es el rectángulo A'B'C'D', de superficie S'.

$$S = AD * DC$$

$$S' = A'D' * D'C'$$

Pero

$$A'D' = AD$$

Y

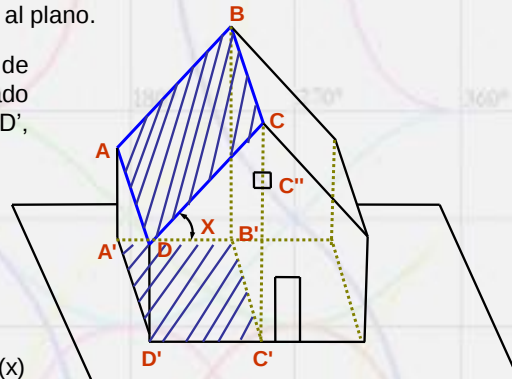
$$D'C' = DC * \cos(x)$$

Luego

$$S' = AD * DC * \cos(x)$$

O también

$$S' = S * \cos(x)$$



Quedando demostrado el teorema cuando la figura plana es un rectángulo con uno de sus lados paralelo al plano de proyección.

Triángulos Rectángulos

Área de la proyección de una Superficie

GENERALIZACIÓN

Para generalizar dicho teorema al caso de una figura plana cualquiera, supondremos cubierta dicha figura por n rectángulos iguales a los del caso anterior, de superficie $S'_1, S'_2, \dots, S'_n$.

Donde

$$S'_1 = S_1 \cos(x)$$

$$S'_2 = S_2 \cos(x)$$

:

$$S'_n = S_n \cos(x)$$

Sumando miembro a miembro y suponiendo que los rectángulos son tan estrechos que llenan la figura y su proyección, tendremos:

$$S'_1 + S'_2 + \dots + S'_n = S_1 \cos(x) + S_2 \cos(x) + \dots + S_n \cos(x)$$

$$S' = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \cos(x)$$

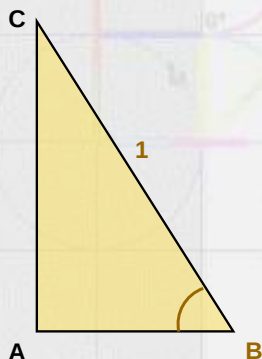
$$S' = S \cos(x)$$

Triángulos Rectángulos

Área de la proyección de una Superficie

EJERCICIOS

1. Un terreno tiene forma de triángulo, con hipotenusa 1 y un ángulo agudo B . Calcular su área. (R: $\frac{1}{2} (1)^2 \text{ Sen } B \text{ Cos } B$)



$$\text{Área} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

$$AB = (1) \cos B$$

$$AC = (1) \text{ Sen } B$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} (1) \cos B (1) \text{ Sen } B$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} (1)^2 \cos B \text{ Sen } B$$

Triángulos Rectángulos

Área de la proyección de una Superficie

EJERCICIOS

2. La planta de una casa de un piso ocupa 150 m². ¿Cuántos metros cuadrados de calamina se necesitará para techarla, si el tejado tiene una inclinación de 30° respecto a la horizontal? (No se tendrán en cuenta ni los aleros ni las superposiciones). (R: 173.2 m²)

 A'B'C'D' → **S'** = 150 m²

 ABCD → **S** = ?

$\angle \alpha = 30^\circ$

$S' = S \cdot \cos(x)$

$150 = S \cdot \cos(30^\circ)$

$S = 150 (2) / (3)^{1/2} = 173.20 \text{ m}^2$

