



UNIVERSIDAD
DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL
PIRHUA

CAPÍTULO 19: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS (I)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas



Esta obra está bajo una [licencia](#)
[Creative Commons Atribución-](#)
[NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú](#)

Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura



UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 19: Resolución de Triángulos Planos (I)

1. Teoremas

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

9 diapositivas



CAPITULO XIX

TRIGONOMETRIA

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

1. TEOREMAS



1. TEOREMAS

TEOREMA XIX-1

Teorema de los Senos : Los senos de los ángulos de un triángulo son proporcionales a los lados opuestos.

Demostración:

$$h_c = b \times \text{sen}A = a \times \text{sen}B$$

$$h_a = b \times \text{sen}C = c \times \text{sen}B$$

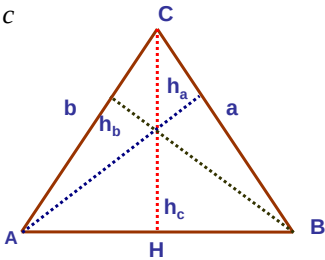
$$h_b = a \times \text{sen}C = c \times \text{sen}A$$

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}$$

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b}$$

$$\frac{\text{sen}C}{c} = \frac{\text{sen}B}{b}$$

$$\frac{\text{sen}C}{c} = \frac{\text{sen}A}{a}$$



$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}$$



1. TEOREMAS

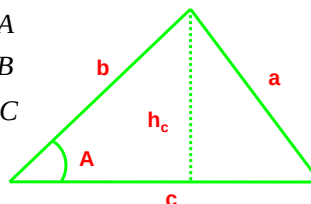
TEOREMA XIX-2

Teorema del coseno :

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Demostración:

a) Suponiendo A agudo,



Sabemos por el Teorema VI-10 : $a^2 = b^2 + c^2 - 2c$ (**Proyección de b sobre c**)

TEOREMA VI-10 GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITAGORAS

El cuadrado del lado opuesto a un ángulo **agudo (obtus)** es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, **menos (más)** el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Proyección de b sobre c: $b_c = b \cdot \cos A$

Sustituyendo este valor : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$



1. TEOREMAS

TEOREMA XIX-2

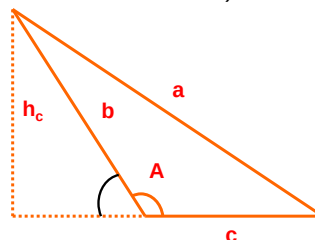
b) Suponiendo A obtuso,

Sabemos por el Teorema VI-10 : $a^2 = b^2 + c^2 + 2c$ (**Proyección de b sobre c**)

Proyección de b sobre c $b_c = b \cdot \cos (180-A) = -b \cdot \cos A$

Sustituyendo este valor : $a^2 = b^2 + c^2 + 2c (-b \cos A)$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$



c) Suponiendo A recto,

Sabemos por el Teorema VI-10 : $a^2 = b^2 + c^2 - 2c$ (**proyección de b sobre c**)

Lo que se cumple porque $\cos A = \cos 90^\circ = 0$

Luego el teorema se cumple en todos los casos posibles.



1. TEOREMAS

TEOREMA XIX-3

Teorema de las Tangentes :

$$tg \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}$$

Demostración:

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}A + \text{sen}B}{a+b} = \frac{\text{sen}A - \text{sen}B}{a-b}$$

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2 \text{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (1)$$

$$\text{sen}A - \text{sen}B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \text{sen} \frac{A-B}{2} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) los en:

$$\frac{\text{sen}A + \text{sen}B}{a+b} = \frac{\text{sen}A - \text{sen}B}{a-b}$$



1. TEOREMAS

TEOREMA XIX-3

$$\frac{2 \text{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{a+b} = \frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \text{sen} \frac{A-B}{2}}{a-b}$$

Simplificando:

$$\frac{\text{sen} \frac{A+B}{2} (a-b)}{\cos \frac{A+B}{2} (a+b)} = \frac{\text{sen} \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}$$

Cambiando de miembro:

$$tg \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} tg \frac{A+B}{2}$$

Y como :

$$\frac{A+B}{2} = 90 - \frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad tg \frac{A+B}{2} = tg \left(90 - \frac{C}{2} \right) = \cot \frac{C}{2}$$

$$tg \frac{A+B}{2} = \cot \frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{tg \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}}$$



1. TEOREMAS

TEOREMA XIX-4

Fórmulas de Briggs:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad p = \text{semiperímetro} = \frac{a+b+c}{2}$$

Demostración:

Sea el $\triangle ABC$ y su circunferencia inscrita de radio r

Los puntos de contacto son **M**, **N** y **P**.

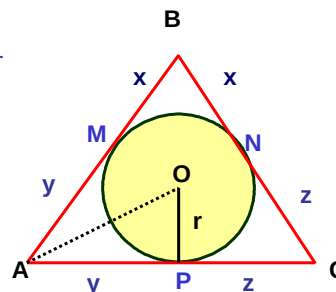
$MB = BN = x$; $NC = CP = z$; $AP = AM = y$

$$2x + 2y + 2z = 2p \quad \rightarrow \quad x + y + z = p$$

$$x + y + z = p \quad \rightarrow \quad y = p - (x+z)$$

pero,

$$x + z = BN + NC = a \quad \rightarrow \quad y = p - a \quad \text{En el } \triangle AOP: \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$$



1. TEOREMAS

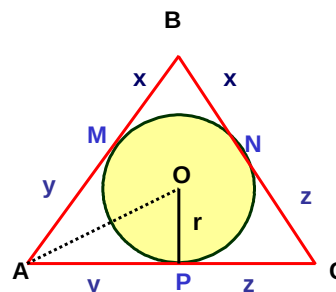
TEOREMA XIX-4

$$\text{En el } \triangle AOP: \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$$

Según los Apuntes de Geometría, teorema VI-16

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}{p-a}$$



$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Lqgd



1. TEOREMAS

TEOREMA XIX-5

Área del Triángulo: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen}C = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen}B = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \text{sen}A$

Demostración:

$S = \frac{1}{2} a h_a$

$\left\{ \begin{array}{l} h_a = c \cdot \text{sen}B \rightarrow S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen}B \quad \checkmark \\ h_a = b \cdot \text{sen}C \rightarrow S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen}C \quad \varphi \end{array} \right.$

$S = \frac{1}{2} b h_b$

$\left\{ \begin{array}{l} h_b = c \cdot \text{sen}A \rightarrow S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \text{sen}A \quad \star \\ h_b = a \cdot \text{sen}C \rightarrow S = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \text{sen}C \quad \varphi \end{array} \right.$

$S = \frac{1}{2} c h_c$

$\left\{ \begin{array}{l} h_c = b \cdot \text{sen}A \rightarrow S = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \text{sen}A \quad \star \\ h_c = a \cdot \text{sen}B \rightarrow S = \frac{1}{2} c \cdot a \cdot \text{sen}B \quad \checkmark \end{array} \right.$

