UNIVERSIDAD DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Análisis de las concepciones sobre el infinito matemático en futuros profesores y profesores de matemáticas de secundaria

Tesis para optar el Título de
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física

Gustavo Cristhian Rebolledo Benites

Asesor(es):
Dra. Emma Lizelly Carreño Peña

Piura, julio de 2023

UNIVERSIDAD DE PIURA

Declaración Jurada de Originalidad del Trabajo Final

Yo, Gustavo Cristhian Rebolledo Benites., egresado del Programa Académico Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, identificado(a) con DNI 40796639,

Declaro bajo juramento que:

1. Soy autor del trabajo final titulado:
   "Análisis de las concepciones sobre el infinito matemático en futuros profesores y profesores de matemáticas de secundaria"
   El mismo que presento bajo la modalidad de **Tesis**.[1] para optar el (Título profesional/Grado Académico[2]) de Título Profesional.

2. La asesoría del trabajo estuvo a cargo de:

   - Dra. Emma Lizelly Carreño Peña , identificado con DNI N° 41607683

3. El texto de mi trabajo final respeta y no vulnera los derechos de terceros o de ser el caso derechos de los coautores, incluidos los derechos de propiedad intelectual, datos personales, entre otros. En tal sentido, el texto de mi trabajo final no ha sido plagiado total ni parcialmente, para la cual he respetado las normas internacionales de citas y referencias de las fuentes consultadas.

4. El texto del trabajo final que presento no ha sido publicado ni presentado antes en cualquier medio electrónico o físico.

5. La investigación, los resultados, datos, conclusiones y demás información presentada que atribuyo a mi autoría son veraces.

6. Declaro que mi trabajo final cumple con todas las normas de la Universidad de Piura.

El incumplimiento de lo declarado da lugar a responsabilidad del declarante, en consecuencia; a través del presente documento asumo frente a terceros, la Universidad de Piura y/o la Administración Pública toda responsabilidad que pueda derivarse por el trabajo final presentado. Lo señalado incluye responsabilidad pecuniaria incluido el pago de multas u otros por los daños y perjuicios que se ocasionen.

Fecha: 26/06/2023

Firma del autor optante[3]

[1] Indicar si es tesis, trabajo de investigación, trabajo académico o trabajo de suficiencia profesional.
[2] Grado de Bachiller, Título de profesional, Grado de Maestro o Grado de Doctor
[3] Idéntica a DNI, no se admite digital salvo certificado.

Dedicatoria

Esta tesis es dedicada primero a mi amada esposa Alma, por acompañarme y darme motivación para terminar esta investigación. Segundo, a mi madre Corita quien también estaba atenta en este arduo trabajo y, por último, a mi abuela Dora, quien ya no está conmigo, pero sé que desde arriba lo estará apreciando.

Agradecimientos

A Dios, por darme voluntad y fuerza para seguir adelante en la investigación, a pesar de los obstáculos y desafíos, sin Él no podría haber terminado este trabajo.

A mi amada familia, quienes me apoyaron y me alentaron, en especial a mi adorada esposa Alma, fue mi principal motivación e inspiración.

A los docentes que no solo me enseñaron a ver los números desde otra perspectiva, sino también por enseñarme a tener una vida llena de principios y valores, en especial a la Dra. Emma Carreño, por enseñarme a luchar con honor y que esta investigación se pueda culminar.

Resumen

En esta investigación se analizan las concepciones del infinito matemático que tienen los profesores y futuros profesores de matemática de secundaria. Estas se describen a partir de seis modelos intuitivos: indefinición, infinito-infinito, divergencia, punto-marca, acotado finito y no acotado infinito, y de inclusión. El diseño de la investigación es mixto y por ello, se elaboró un cuestionario de 20 preguntas, las cuales fueron tomadas o adaptadas de otros estudios, de acuerdo con el contexto de los informantes. Este instrumento fue completado por 3 profesores en ejercicio y 3 futuros profesores de matemática de secundaria, durante el periodo de pandemia (2021). Las respuestas dadas fueron clasificadas según los seis modelos antes mencionados, con sus respectivos indicadores, donde los modelos más sobresalientes son el de divergencia e infinito=infinito.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

El estudio del infinito matemático, aunque no está de manera explícita en el currículo de la educación básica peruana, aparece vinculado a conceptos como: sucesiones, sumatorias, límites, derivada o integral, en los textos escolares y/o de nivel universitarios. La noción del infinito nace intuitivamente en la persona, como la idea del conjunto de estrellas, los granitos de la arena del mar, hasta la misma cantidad de sistemas que hay en el universo. Estas ideas de la noción del infinito se llevan a la escuela y se consolidan. Incluso cuando se llega a los estudios del nivel superior, estas permanecen en nuestra mente y, difícilmente, se adaptan a nuevos saberes o conocimientos formales, es decir, al lenguaje propiamente de la matemática. Por esta razón, se realiza esta investigación para analizar qué concepciones tienen los profesores y los futuros profesores en el nivel de secundaria en la especialidad de matemática y clasificarlas según los modelos intuitivos propuestos por autores referentes.

Esta investigación está dividida en cuatro capítulos:

En el primer capítulo, *Planteamiento de la investigación,* se describe y justifica el problema de estudio, se formula la pregunta investigable, se define el objetivo general y los objetivos específicos y se reseña los antecedentes de la investigación.

En el segundo capítulo, *Marco teórico de la investigación*, se indica la historia y la conceptualización del infinito matemático, la enseñanza del infinito en las escuelas y los modelos intuitivos del infinito

En el tercer capítulo, *Marco metodológico,* se señala el tipo de investigación de este estudio, se presentan los informantes, se describen las técnicas e instrumentos utilizados para el recojo de la información y se explica la codificación de los datos y el análisis realizado.

En el cuarto capítulo, *Análisis y resultados*, se presenta las concepciones del infinito matemático que tienen los informantes, clasificados de acuerdo con los modelos intuitivos e interpretados según la tipología establecida a partir de los trabajos tomados como referentes.

Finalmente, se propone las conclusiones y recomendaciones del desarrollo de la investigación.

Capítulo 1. Planteamiento de la investigación

1.1 Caracterización de la problemática y justificación de la investigación

El infinito matemático es un concepto complejo y difícil de comprender por los estudiantes debido a su carácter abstracto. Dado que no es sencillo encontrar una representación concreta para este concepto, muchos estudiantes encuentran obstáculos para construir sus propias ideas y posteriormente, para comprender la noción de infinito (Mena et al., 2015). Al respecto, los autores citados, consideran que hay concepciones sobre el infinito matemático que constituyen un obstáculo epistemológico (Brousseau, 2007). Así, aunque en un pasado dichas concepciones lograron tener éxito, al presentarse conocimientos nuevos estas ya no se ajustan. Por ejemplo, en un momento de la educación escolar se enseña que la recta numérica está conformada solo por los números enteros, posteriormente, se descubren los números reales y el concepto de densidad. Según lo anterior, que el infinito sea un obstáculo epistemológico puede deberse a dos razones: primero, porque a través del tiempo se ha ido desarrollando este concepto de manera muy mecánica o puramente algorítmica, en consecuencia, se construyen conceptos inadecuados o estáticos (Neira Sanabria, 2012). Segundo, porque resolver un mismo problema en diferentes lenguajes matemáticos genera controversia en la mente humana (Garbin y Azcárate, 2002).

La noción de infinito, desde un contexto socio-epistemológico, nace de manera intuitiva cuando empezamos a estar en contacto con la naturaleza. Así, se va construyendo las primeras ideas y preguntas tales como: "el amor es infinito", "el cielo es infinito", "las estrellas son infinitas", "al infinito y más allá", "te quiero hasta el infinito", ¿cuántas estrellas tendrá el universo?, ¿Cuántos granos de arena tendrá la playa?, ¿Cuál será el último número? etc. (Lestón y Castañeda, 2008). Incluso está asociado a paradojas como: La rueda de Aristóteles, Aquiles y la tortuga, la de Galileo, el hotel de infinitas habitaciones, la paradoja de Russell, etc. (Belmonte y Sierra, 2011). Posteriormente, en la educación secundaria, la idea de infinito deja de ser un conocimiento intuitivo, porque se vincula con otros temas como: sucesiones, sumatorias, funciones, números reales, números primos, límite, entre otros. Así pues, el infinito que se aprende de manera intuitiva deja de ser coherente con el nuevo infinito matemático. La dificultad de su comprensión se hace más evidente cuando se enfrenta al cálculo infinitesimal en los estudios superiores. En esta etapa parece que las ideas y conceptos adquiridos en el colegio y en las academias preuniversitarias no son suficientes.

Desde un contexto matemático, el infinito se estudió por siglos desde una perspectiva geométrica. Para Aristóteles, la idea del infinito estaba ligada a la existencia de magnitudes que se pueden dividir o aumentar tanto como uno desee, es decir de manera indefinida (infinito potencial). Sin embargo, no aceptaba la concepción de la recta como el conjunto de infinitos puntos, es decir como un todo (infinito actual). La concepción del infinito de Aristóteles guarda cierta relación con el axioma euclidiano: "El todo es mayor que las partes", lo cual parece tener lógica. No obstante, en el campo del infinito, tanto el todo como sus partes tienen la misma cardinalidad. Por ejemplo, si hacemos una comparación entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares, aparentemente, el mayor sería el de los números naturales, pero si hacemos una relación de correspondencia de uno a uno, se comprobará que la cardinalidad de ambos es la misma.

La idea de comparar la cardinalidad de diferentes conjuntos fue propuesta por Georg Cantor en 1874, en un artículo titulado: *Sobre una propiedad característica de la totalidad de los números reales algebraicos*. Sus ideas en aquella época no eran muy creíbles, pero las pudo demostrar. Él dedujo que tanto el subconjunto de un conjunto (de infinitos elementos) y este mismo (el conjunto de referencia) tienen la misma cardinalidad. Este conocimiento origina interrogantes como ¿existirá en algún momento, en el campo del infinito, conjuntos mayores que otros? (Buitrago et al., 2014) que hacen emerger una motivación personal para investigar sobre el infinito matemático y las concepciones que se generan en torno a este concepto.

El conjunto de los números reales fue un motivo para estudiar el concepto del infinito desde otras perspectivas. Así, en el siglo XIX su estudio empezó a alejarse cada vez más del análisis geométrico, hasta descartarse por completo. Pese a que esto no fue una tarea fácil, porque dicho análisis fue una base fundamental para las matemáticas, el estudio del infinito pasó a un análisis puramente numérico y de fórmulas, más riguroso y tomando como referencia al número real (Piñeiro, 2013).

Después de este breve análisis sobre el infinito matemático, queda en evidencia su relevancia como concepto matemático fundamental que está vinculado con otros conceptos que se estudian en la Educación Básica (p. ej. sucesiones, fracciones periódicas, sumatorias). Dado que los aprendizajes de dichos conceptos posibilitan y potencian el desarrollo del pensamiento matemático, queda claro que el desarrollo intuitivo del concepto de infinito va originando ideas personales en torno a este, que luego deberán transitar a un tratamiento formal de tal concepto. Así pues, ya que en este proceso de transición pueden emerger obstáculos epistemológicos, se ve necesario identificar las concepciones que se le atribuyen al infinito matemático y las posibles consecuencias de estas en un proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, interesa conocer *¿Qué concepciones sobre el infinito matemático manifiestan los futuros profesores y profesores de matemática de secundaria?*

1.2 Objetivos

La presente investigación se enfoca en:

Describir las concepciones del infinito matemático que manifiestan los futuros profesores y profesores de matemáticas de secundaria.

A partir del objetivo general anterior, se propone los siguientes objetivos específicos:

- Analizar cuestionarios de trabajos referentes que indagan sobre las concepciones del infinito matemático para elaborar un instrumento de recogida de datos.

- Identificar las concepciones sobre el infinito matemático que tienen los informantes para describirlas.

1.3 Antecedentes del estudio

En esta investigación no hay antecedentes locales y nacionales, puesto que en el Registro Nacional de Trabajos de Investigación (RENATI) no hemos encontrado ninguna tesis que tenga alguna relación con el propósito de nuestro estudio. Los resultados hallados estaban referidos al infinito matemático desligado del marco pedagógico. Por lo tanto, los trabajos que reseñamos a continuación son antecedentes de carácter internacional, que incluyen países de América y Europa.

- Belmonte (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito***.**

En esta tesis doctoral se reporta un estudio transversal del concepto del infinito, realizado a 43 profesores de matemática y 1792 alumnos de los niveles de primaria (solo sexto grado), secundaria y universitario. El propósito fue hallar patrones de evolución (creciente, decreciente, invariante e irregular) referente a las respuestas sobre la concepción del infinito y analizar la estabilidad de dichos patrones (alto, medio, bajo y nulo). Se analizó los modelos intuitivos[1] evidenciados en las respuestas, así como el lenguaje referido al infinito: metáforas, función gramatical del término "infinito" en cada contexto, etc. La investigación se realiza en el marco de paradigma interpretativo, es de tipo mixta puesto que en la descripción de los resultados emplea herramientas y datos cuantitativos (tablas de frecuencias y porcentajes traducidos en histogramas). Se elaboraron dos tipos de cuestionarios de respuesta abierta, distintos a cada grupo de informantes, uno previo y otro definitivo. Con ellos se evaluó la cardinalidad y equipolencia del infinito actual, divisibilidad infinita y continuidad del infinito potencial, sumas infinitas, operatividad e infinito, lenguaje e infinito, inducción e infinito en contextos numérico, geométrico y algebraico, de diferentes niveles y tipos de preguntas. También se realizaron 34 entrevistas a 68 alumnos de Educación Secundaria y Bachillerato. El aporte de esta tesis reside en el marco teórico, porque contribuye en el estudio del conocimiento intuitivo que muestran los participantes con respecto al infinito y la resistencia que ponen para aprehender un conocimiento nuevo. También tomamos algunas preguntas de su cuestionario para la elaboración de nuestro instrumento.

- Llopis (2014). *Concepciones del infinito en estudiantes de 1º de bachillerato de CCSSHH en el contexto de aprendizaje de límites*.

Esta tesis de maestría tuvo como objetivo evaluar cuál es la concepción del infinito que tienen los estudiantes de 1° de bachillerato de Ciencias Sociales de un instituto de Valencia (España), antes y después de estudiar la unidad didáctica del tema de Límites. Se aplicó un cuestionario previo a 43

[1] Modelo de inclusión, modelo infinito=infinito o de aplastamiento, modelo punto-marca, modelo de indefinición (primario y secundario), modelo de divergencia y modelo acotado-finito/no acotado-infinito.

informantes y el cuestionario final a 46. En ellos se proponen entre 10 a 15 preguntas abiertas que abordan el concepto de límites en cuatro sistemas de representación (Numérico, geométrico, gráfico y verbal) y en cinco tópicos (Conjuntos, divisibilidad, convergencia, operatividad y lenguaje) Esto permitió identificar qué modelos intuitivos, de los trabajados por Belmonte (2009), evidencian los estudiantes sobre la noción del infinito. El aporte de esta tesis es darnos un panorama de cómo los alumnos de bachillerato expresan sus ideas sobre la concepción del infinito que es parte del objetivo de este estudio.

- Gonzáles, Morales y Sigarreta (2013). *Concepciones sobre el infinito: Un estudio a nivel universitario.*

Este trabajo, publicado en la revista digital Matemática, Educación e Internet, tiene como objetivo, determinar cuáles son las definiciones que poseen 16 alumnos que cursaban el segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (México), referente al término infinito. La investigación es de tipo descriptiva y hace uso de la guía de entrevista, como instrumento de recolección de información. Como resultados se señala que en los entrevistados se encuentra fijo el concepto de infinito potencial, más no del infinito actual, es decir que, el infinito potencial es el más utilizado en las escuelas, pero no es mencionado de forma explícita por los docentes y tampoco aparece en los libros de manera clara. Aun así, los alumnos saben utilizarlo de manera adecuada en la resolución de problemas matemáticos. Después de analizar todas las situaciones, el autor concluye que los estudiantes no conocen adecuadamente el significado del término infinito actual, pero sí realizan las actividades guiadas por el concepto del infinito potencial, obtenido en clase de manera implícita, a pesar de no tenerlo muy claro. El aporte de esta investigación está ligado a los objetivos de este estudio porque da referencia sobre las concepciones del infinito matemático.

- Garbin y Azcárate (2002). *Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años*.

Este trabajo, publicado en la revista Enseñanza de las Ciencias, se centra en el estudio del infinito actual, que es el conjunto de elementos acabados o terminados como un todo, un conjunto que ya no tiene un proceso. El objetivo del estudio es crear un conflicto cognitivo mediante una encuesta con preguntas abiertas, de diferentes lenguajes matemáticos: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y analítico con la intención de identificar las inconsistencias que se muestran en las respuestas de los alumnos en representar, categorizar y analizar las situaciones con relación al concepto del infinito actual. Dicha encuesta se aplicó a 80 alumnos y una entrevista semiestructurada, con preguntas específicas sobre la noción del infinito actual. La investigación es de tipo exploratoria-descriptiva, con metodología cualitativa, en la que se desarrolla un proceso de análisis inductivo. Las inconsistencias que mostraron los alumnos sobre el infinito actual se relacionaban más con el infinito potencial, es decir un conjunto cuyos elementos nunca acaban. Estos resultados sobre la inestabilidad respecto de la noción de infinito matemático sirven de referente para la descripción de nuestros resultados.

- Vega (2014). *Concepciones en torno al infinito actual*.

Esta tesis de maestría de la Universidad Militar Nueva Granada (Colombia) detalla las concepciones que tienen algunos docentes sobre el infinito actual, considerando que dicha concepción conlleva a contradicciones entre lo formal y lo intuitivo en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en la resolución de problemas relacionados, puesto que estos suelen estar desconectados de la realidad. La metodología de la investigación empírico – analítico, con un enfoque mixto (cuantitativo y cualitativo). Se tomó como informantes a 18 docentes de matemática, algunos de ellos con estudios de posgrado. La investigación se hizo en tres etapas: La primera fue una revisión documental, la segunda se hicieron los diseños y la aplicación de una Prueba Diagnóstica y una de Salida y en la tercera etapa se hizo el análisis e interpretación. Las pruebas contenían preguntas abiertas e involucraban representaciones geométricas y verbales, geométricas y numéricas y geométricas. En el análisis se diferenció las categorías: Intuición sobre el infinito actual y potencial. El aporte de esta tesis está centrado en las concepciones que tienen los futuros docentes y docentes en torno al infinito, las cuales son tomadas en cuenta en el marco teórico.

- Lestón y Crespo (2009). *El infinito escolar.*

Es un reporte de investigación presentado en la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, que aborda la construcción social y escolar del conocimiento del infinito y las dificultades que emergen en los estudiantes, pues por su naturaleza sociocultural y también matemática, aparecen conflictos entre las concepciones intuitivas y las formales (que se logra en la escuela). La metodología de la investigación es cualitativa, de enfoque descriptivo. Indaga la naturaleza del infinito escolar a través de actividades centradas en el estudio de funciones y el cálculo de asíntotas por medio de una encuesta de 30 preguntas abiertas, dirigida a los alumnos del último año de bachillerato (17 años), no específica cuántos fueron los encuestados. El resultado es que aun los alumnos mantienen firme la concepción del infinito construido fuera de la escuela y que la concepción formal de este, que se aprende en los colegios, les causa conflictos y dudas. El aporte de este estudio es rescatar las concepciones que construyen los alumnos en la escuela, pero usando las ideas construidas fuera de ella, lo cual está ligado con los obstáculos epistemológicos.

- Lestón y Castañeda (2008). *Construcción del infinito en escenarios no escolares.*

Esta investigación se reporta en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Dicho estudio presenta dos actividades: la primera son cuatro preguntas sobre el infinito intuitivo y la segunda son preguntas sobre El infinito en la Literatura. Ambos grupos de preguntas son de carácter abierto, propuestas a los alumnos de una escuela media (no especifica cuántos), donde se intenta describir cómo las ideas del infinito que tienen los estudiantes, fuera de la escuela, interfieren en la construcción del infinito matemático. La investigación busca integrar los componentes cognitivos, epistemológicos, sociales y didácticos con respecto a la noción del infinito que tienen los alumnos lo que le da una aproximación socioepistemológica al estudio. El objetivo es relacionar las ideas intuitivas del infinito con las ideas formales que sobre él se aprenden en la escuela. La investigación descrita aporta al marco teórico pues desarrollan las concepciones intuitivas, que se convierten luego en un obstáculo, y proponen que este sea un recurso para la construcción de los conocimientos formales del infinito.

Capítulo 2. Marco teórico

2.1 El infinito matemático: conceptualización histórica

El infinito matemático es un concepto que está ligado con la estructura y naturaleza de la Matemática. De hecho, D'Amore declaró que "la enseñanza de la matemática debe dirigirse hacia dos objetivos que le son propios: el sentido del rigor lógico y la noción de *infinito"* (Garbin y Azcárate, 2002, p. 87). Otros autores manifiestan que "el infinito es esencial para comprender nociones matemáticas como límite, continuidad, derivada, integral, sucesiones y series, entre otras" (Belmonte y Sierra, 2011, p. 139). Lo curioso de este concepto es que no se encuentra dentro del currículo educativo (Ministerio de Educación, 2016), es decir que, "no es fácil hallar referencias explícitas sobre su significado en un contexto educativo" (Belmonte y Sierra, 2011, p. 141)**.** Sin embargo, se observa que en los colegios se aborda mucho este concepto sin darnos cuenta de ello, por ejemplo, al estudiar los decimales periódicos, las operaciones con los números reales, el uso de la recta numérica para ubicar los números, etc. Así pues, es casi inevitable que dicha concepción aparezca, generalmente de manera intuitiva, en toda una vida escolar, desde la primaria hasta terminar la secundaria. Hay que enfatizar que la intuición en las matemáticas es el camino para el desarrollo de la concepción del infinito ya que el ser humano construye sus ideas en base a las experiencias que tiene con la misma naturaleza.

La idea del infinito se presenta en diferentes situaciones, en la vida cotidiana, en las culturas, ciencias, en la religión y especialmente en la matemática. La búsqueda del concepto del infinito ha tenido muchas dificultades. Generalmente el infinito es usado para designar y comparar cantidades muy grandes o cantidades muy pequeñas, también para cantidades que no tienen fin o nunca terminan, sin embargo, hay algo allí que escapa de nuestra mente natural, es decir, que "va más allá de lo que nuestra imaginación nos puede llegar a brindar" (López, 2014, p. 277).

El infinito matemático estuvo, en sus comienzos, vinculado con conceptos filosóficos y religiosos. "En el siglo IV a.C., algunos atomistas, como Leucipo y Demócrito consideraban que la materia estaba compuesta de un número infinito de indivisibles" (Mena et al., 2015, p. 334). Parménides tenía la concepción del infinito en el ser y no ser. El infinito aparece en la civilización griega con Anaximandro (s VI a.C.), quien lo relacionaba con el *ápeiron*, es decir, con algo ilimitado e indefinido que no tiene un sentido temporal. En resumen, para Anaximandro el infinito lo era todo y no había nada fuera de él. Por su parte, los pitagóricos pensaban que los números naturales eran la esencia de todas las cosas, pero a medida que el pensamiento se iba desarrollando se encontraron con los números irracionales, quienes causaron un gran problema para la civilización griega, pues contradecían que toda magnitud podía ser medible sólo por los números naturales. Al presentarse este problema, los estudios del infinito relacionados con la aritmética y al álgebra se abandonaron, dando comienzo del campo geométrico, pero lo curioso es que trataron de evitar toparse con lo inconmensurable, ya que en esa época aún no era un tema fácil de comprender y aceptar.

Esta idea del infinito fue criticada por Aristóteles, quien le dio otra visión al infinito. Él propuso entender el infinito de dos maneras: como un proceso que nunca termina, (infinito potencial) y como un todo completo (infinito actual). Para Aristóteles el infinito actual en sí mismo no existía y no era necesario que los matemáticos lo estudien o lo analicen. En la época medieval el infinito actual solo era reservado para Dios. Tomás de Aquino escribió: "…Por tanto, no es posible que pueda existir una multiplicidad infinita actual" (Mena et al., 2015, p. 334). Además, en 1831 Gauss no aceptaba la idea del infinito: "Protesto en contra del uso de la magnitud infinita como algo completo, lo cual en matemáticas nunca es permisible. Infinito es meramente una manera de hablar" (Mena et al., 2015, p. 335).

Aristóteles reforzó la idea del *ser* propuesta por Parménides, es decir, que hace una distinción entre el ser en potencia y el ser en acto. Para entender esta idea del ser de Aristóteles, por ejemplo, el diamante sería en sí el ser en acto, pero el proceso que tuvo antes sería el ser en potencia. Por su parte, Galileo considera al "infinito actual como algo terminado" (López, 2014, p.285).

Otras ideas relacionadas al infinito del método de los indivisibles de Cavalieri, para calcular el área de una figura plana. Este método consiste en rellenar el área de la figura plana en rectángulos infinitamente delgados, como segmentos paralelos equidistantes, dicho de otro modo, consiste en la suma de infinitos segmentos rectos y "un volumen se le considera compuesto por un número infinito de áreas de figuras planas paralelas" (López, 2014, p. 285). Prácticamente, fue un método indirecto, que no fue aceptada, pues no guardaba relación con los principios de la geometría de Euclides, los cuáles al igual que las ideas de Aristóteles, en esa época no podrían ser refutadas (López, 2014).

Con el paso del tiempo, el método de los indivisibles fue rechazado por el Colegio Romano en 1649 pero, esta situación "no pudo detener el progreso del cálculo infinitesimal. Esto solamente provocó un mayor esfuerzo por parte de los matemáticos para obtener una mayor rigurosidad y así enfrentar las críticas de la época" (López, 2014, p. 286).

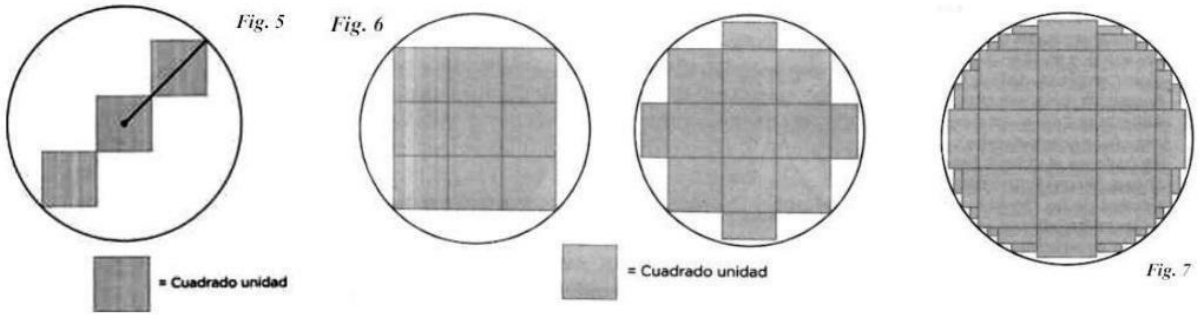
Mientras los esfuerzos de los matemáticos iban creciendo, durante el siglo XVII, el desarrollo del cálculo infinitesimal fue un aporte muy importante para el infinito, pues los desarrolladores entendieron que dicho cálculo debería llamarse cálculo de infinitos porque, justamente, el cálculo es una manera de manipular el infinito como uno desee, pero había grandes obstáculos para poder demostrar su fundamentación. Por ejemplo, Isaac Newton y Leibniz manipulaban el infinito con cantidades infinitamente pequeñas y trataban de relacionarlas con el infinito actual, es decir, buscaban que el infinito potencial tuviera cierta relación con el infinito actual. Sin embargo, este tipo de procedimiento iba en contra del pensamiento aristotélico, es decir que "se pretendía encontrar un testimonio concreto que mostrara la vinculación entre lo infinitamente pequeño y Dios" (López, 2014, p. 289). Para Leibniz, el concepto del infinito es absurdo porque no tenía relación con las leyes de la lógica. Por ejemplo, comparado con los números cuando se aplican en los conceptos de cantidad, magnitud o medición guarda cierto sentido, pero comparar estos conceptos con el infinito no guarda relación. Al respecto el problema, tanto para Leibniz como para Newton, era no encontrar fundamentos lógicos. De hecho, en estas épocas los matemáticos realizaban un trabajo muy riguroso para encontrar sentido al infinito pese a que, cada vez que encontraban una idea, esta era rechazada entre críticas y burlas. Por su parte, Cauchy y Weierstrass reconsideraron analizar nuevamente la concepción del infinito y empezaron a darle más cimientos a la matemática.

El estudio del infinito, con el paso del tiempo, se vinculó al concepto de límite y se buscó que las ideas propuestas tuvieran fundamento aritmético. Así pues, el límite pasó a ser un método para poder analizar el comportamiento de los infinitesimales, que lo empezaron Newton y Leibniz, y fue un paso más para cambiar la manera de analizar la concepción del infinito, así llegaron a la integral. Esta nueva manera de ver al infinito representó gran paso para que los matemáticos posteriores dejaran de lado el análisis aritmético.

La creación del concepto de infinito se le atribuye a Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. Él determinó una correspondencia biunívoca con el cuadrado y uno de sus lados, desarrolló el concepto de potencia de un conjunto y afirmó que en el mundo del infinito el todo es igual a la suma de las partes, es decir, que el conjunto de los números naturales es numerable con el conjunto de los números pares, igual con los números fraccionarios. El interés del Cantor por el infinito puede comprenderse a partir de cómo hallar el área de un círculo, pero sin utilizar las fórmulas básicas de la geometría, sino tratando de llenar el espacio del círculo con cuadrados (Figura 1).

Figura 1

Cubrimiento del área del círculo con infinitos rectángulos



Nota. Figuras extraídas de Piñeiro (2013, pp. 94, 96 y 97, respectivamente)

En la **Figura *1*** se observa cómo se llena la superficie de un círculo con cuadrados e incluso rectángulos más pequeños, pero aun así quedan espacios por cubrir. Con el tiempo el matemático griego Eudoxo de Cnído ayudó a completar la idea llenando el área del círculo utilizando los lados de los polígonos, es decir que a medida que se aumenta los lados de un polígono inscrito en la circunferencia, este puede alcanzar en algún momento el área del círculo (Figura 2).

Figura 2

Cubrimiento del área del círculo con los lados del polígono

FIG. 8

Nota. Figura extraída de Piñeiro (2013, p. 80)

En la **Figura 2** se ve que Eudoxo se basó en las propiedades de los polígonos que ya eran conocidas en ese tiempo, con esta noción: "Eudoxo pudo demostrar que el área de un círculo cualquiera es proporcional al área del cuadrado construido sobre su radio" (Piñeiro. 2013, p. 80). Es decir que, si el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia es igual al radio del círculo, entonces el área del cuadrado es igual a r^2, pero como hoy ya se sabe cómo calcular el área del círculo, se puede afirmar que, aún le falta algo a lo que elaboró Eudoxo: el número π. Eudoxo tenía la idea que debería ir allí un número fijo que se multiplique por r^2, pero ya es sabido en la historia que Euler lo reemplazó con el número π. Muchos métodos desarrollados por los grandes griegos fueron muy importantes, pero, solo servían para ciertos casos particulares. Según Piñeiro (2013) el razonamiento de los griegos solo aplicaba para ciertas figuras, por ejemplo, el área del círculo no concuerda con el área de la elipse, incluso las fórmulas de las áreas geométricas de un cuadrado o trapecio no son de gran ayuda para calcular otras áreas más complejas, entonces ante este problema los matemáticos del siglo XVI empezaron a desarrollar una formula general, una que sirva para calcular cualquier área y ahora la llamamos *integral*.

La integral ayudó a comprender el cálculo de área de cualquier figura geométrica. Para llenar los espacios que aún faltaban (Figura 1) se introdujo la idea de infinitésimo. Un infinitésimo, tomado del aspecto geométrico (en esa época las ideas matemáticas eran en base a la geometría), es el área de un rectángulo que a medida que se ajusta sus dimensiones a longitudes infinitamente pequeñas se parecerá a un segmento, es decir que un segmento es un rectángulo cuyas dimensiones se van aproximando a un punto de la recta numérica, en este caso sería la base del rectángulo. Esa medida sería la base infinitesimal, que Leibniz la reemplazó con un símbolo que hasta la fecha se usa en el estudio del cálculo: *dx*. Con esta idea de la base infinitesimal del rectángulo se llena todos los espacios del cuadrado o de cualquier figura geométrica sin dejar ningún lugar vacío.

> La base de cada rectángulo es entonces ***dx*** y su altura es *y.* Por lo tanto, el área de cada de cada rectángulo de base infinitesimal es $y.dx$. Para calcular el área de la figura, en teoría, se tiene que sumar todos los $y.dx$ para *x* entre a y b; Leibniz escribía esta idea de la siguiente forma: $\int_a^b ydx$. (Piñeiro, 2013, p. 84)

Al relacionar el concepto del infinitésimo con la noción del infinito se puede deducir lo siguiente, si en el mundo del infinito, tomamos dos segmentos de una recta, uno grande y otro pequeño y los comparamos, ambas de manera biunívoca tendrán la misma cantidad de puntos, es decir que ninguno de los dos segmentos será más grande que otro. Así pues, la noción del infinito se hacía cada vez más densa para los matemáticos de aquellas épocas.

Weierstrass introdujo la idea del límite dentro del cálculo infinitesimal, es decir que la noción del límite reemplazó a la idea de los infinitésimos. La idea del límite lleva a pensar que un segmento pequeño o grande se puede extender o estrechar como uno desee. En el cálculo se trata de segmentos infinitamente pequeños, mientras que en el límite se trata de “segmentos que son solo en potencia infinitamente pequeños” (Piñeiro 2013, p.86), es decir que para Weierstrass un segmento de recta es un conjunto de número reales. La idea de comparar un segmento de recta con el área de un rectángulo con base infinitesimal fue poco a poco descartada por este matemático, para transitar a expresar sus ideas en términos numéricos.

> En la historia de las matemáticas, este proceso se conoce como la “aritmetización del cálculo” y consiste, entonces, en el reemplazo de los razonamientos de tipo geométrico (que tratan con objetos esencialmente estáticos) por razonamientos basados exclusivamente en fórmulas y números, particularmente en los números reales. (Piñeiro, 2013, p. 87)

La concepción del número real tenía un rol importante en el infinito matemático y es la base para cualquier noción o idea matemáticas y esto no era ajeno para Cantor, él empezó haciendo comparaciones con los números naturales y con los números pares, impares, racionales y enteros, en el campo del infinito, todos tenían la misma cantidad de elementos o cardinalidad al realizar la correspondencia biunívoca, pero había un conjunto de números que no guardaban esa relación, esos eran los números reales, estos números fueron de gran admiración para Cantor, pues debería haber una razón de porqué estos números no tenían la misma correspondencia con los números naturales, para Cantor los números reales se desarrollaban a medida que comparaba con los otros grupos numéricos por lo que estos formaban una sucesión fundamental, una sucesión fundamental, según Cantor, es una sucesión formada por los números racionales en la cual, a medida que se avanza por ella, la diferencia entre dos términos cualesquiera, sean o no consecutivos, se hace tan pequeña como se desee” (Piñeiro, 2013, p.88).

A finales del siglo XIX la teoría de conjuntos ya formaba parte en las matemáticas, ahora los números tenían como base al conjunto de los números reales. Esta idea nueva tomó mucha fuerza en un nuevo desarrollo de las matemáticas.

Gracias a los aportes de Cantor, en la actualidad la idea del infinito actual y potencial son objeto de estudio en las matemáticas. El infinito actual según De Lorenzo (2001, citado por Vega, 2014) es desarrollado bajo un *contexto geométrico*, porque involucran conceptos de punto geométrico, construcciones y series infinitas en las figuras y cuerpos geométricos, también “cuando se puede establecer una función biyectiva entre el conjunto y una parte propia de este” (Vega, 2014, p. 23), es decir que se basa en la cardinalidad de dos o más conjuntos numéricos. Por su parte, “El infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada” (Marín Gaviria, 2014, p.125) de una sucesión o expresión matemática. Es decir que, si queremos encontrar el número más grande que podamos siempre habrá un número mayor que este y la operación seguirá así de manera sucesiva. Todo proceso que se realice con el infinito potencial tiene como única característica: nunca terminan. Este tipo de infinito es fundamental para la comprensión del estudio del cálculo y está relacionado con la noción de límite, por ejemplo: la recta contiene infinitos puntos, la posibilidad de ampliar o minimizar, tanto como queramos, la medida de una magnitud.

2.2 La enseñanza del infinito matemático

El infinito matemático en las escuelas es una noción muy compleja, porque generalmente su naturaleza es abstracta, no es fácil enseñarlo o explicarlo con material concreto, pero se enseña de manera indirecta en temas indispensables en las escuelas, tales como: sucesiones infinitas, series, conjuntos infinitos, en las funciones sin acotar y más en el estudio de los números reales (recta numérica, decimales periódicos puros, etc. Si bien su estudio en la Educación Básica es implícito, el infinito se entiende como sinónimo de algo muy grande o muy pequeño. Este significado puede, en ocasiones, originar una ruptura entre las intuiciones y las concepciones formales que trascienden la etapa escolar.

A continuación, mostramos algunos ejemplos del tratamiento de la noción del infinito matemático en materiales desarrollados por el Ministerio de Educación.

Figura 3

El infinito presente en el rango de una función cuadrática

2. Dada la función $g(x) = x^2 - 8x + 18$, ¿cuál de las siguientes alternativas representa el rango de dicha función en el conjunto de los números reales?

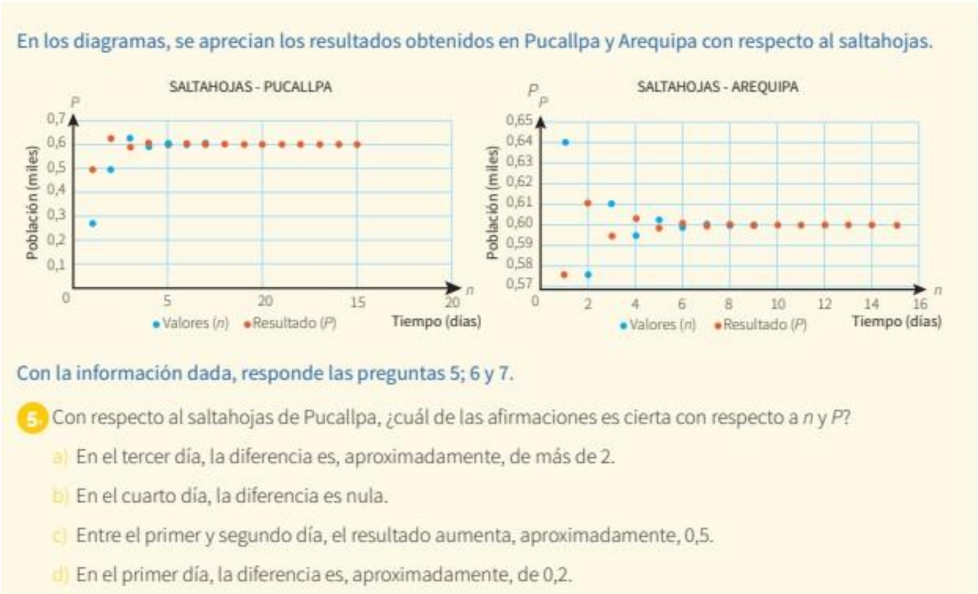
a) $[2 ; +\infty[$ b) $[4 ; +\infty[$ c) $[2 ; 4 [$ d) $[0 ; +\infty[$

Nota. Figura extraída de Cuaderno de trabajo de Matemática -Resolvamos problemas 4 (Ministerio de Educación, 2021, p.88).

En la **Figura *3*** se puede observar que el concepto de infinito se trabaja ligado al rango de una función cuadrática y, en consecuencia, al concepto de intervalo.

Figura 4

El infinito presente en el estudio del saltahojas, una plaga que daña la vegetación de Pucallpa y Arequipa.

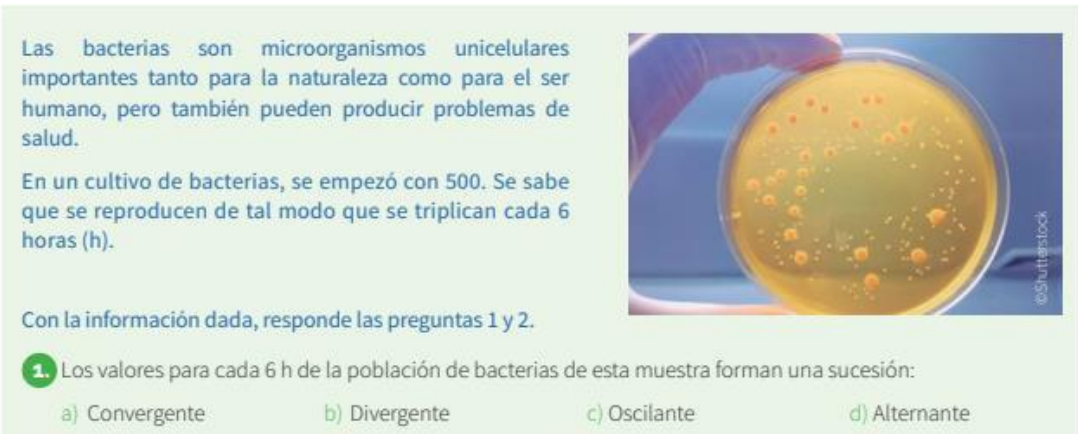


Nota: Figura extraída de Cuaderno de trabajo de Matemática – Resolvamos problemas 5 (Ministerio de Educación, 2020, p. 139)

En la **Figura 4** se muestra la aplicación del infinito en un contexto real de como una plaga de saltahojas afecta en la vegetación de las ciudades de Pucallpa y Arequipa, para este caso, los datos obtenidos se registraron en un sistema de medidas de coordenadas. El término “aproximadamente” utilizado en la opción a de la pregunta 5 está relacionado con la noción del campo de los números reales y que este es importante para entender el infinito en matemáticas.

Figura 5

El infinito presente en el estudio de las bacterias de su importancia y consecuencias en la salud.



Nota. Figura extraída de Cuaderno de trabajo de Matemática – Resolvamos problemas 5 (2020, p. 137)

En la **Figura *5*** se observa la importancia del estudio del infinito en distintitas funciones y cómo se aplican en el campo de la medicina y ciencias.

Como puede verse de las figuras anteriores, el infinito matemático es un concepto presente en la Educación Matemática escolar por ello es necesario conocer las ideas que se forman en torno a dicho concepto. Además, dado que la ruptura entre las ideas intuitivas y las ideas formales puede generar el establecimiento de obstáculos, hacemos una breve reseña sobre este concepto, pese a que no es un objeto de estudio en esta investigación.

Según Brousseau (2007, p.45) "Un obstáculo es un conocimiento en el sentido que le hemos dado de manera regular de tratar un conjunto de situaciones", es decir que los obstáculos nacen cuando se interactúa las ideas en uno o varios contextos y en algunos de ellos pueden dar buenos resultados. También manifiesta resistencia al cambio debido a que no encuentra una adaptación a lo nuevo y, por consecuencia, genera un conflicto en el pensamiento y en el aprendizaje.

Hay tres tipos de obstáculos: *Ontogenéticos,* que se presentan en pleno desarrollo del aprendizaje, esto es visto en los primeros años de la vida, los *didácticos* que se presentan en la misma enseñanza que se otorgan en las escuelas y los *epistemológicos* que se relacionan con los conceptos e ideas relacionados con la matemática y tienen relación con esta investigación (Mena et al. 2015).

Los obstáculos epistemológicos pese a que "son conocimientos aparentes que impiden tener acceso a nuevos conocimientos y que, ocasionalmente, al ser movilizados, se desvelan precisamente como impedimentos" Mena et al. (2015, p. 336), pueden ser de gran ayuda para el aprendizaje, por ejemplo, en la escuela se acostumbra a estudiar los conjuntos finitos e infinitos, allí el alumno puede comparar ambos conjuntos y por sentido común llega a la conclusión que uno es más grande o más pequeño que otro, entonces desde allí ya ha desarrollado cierta noción como un punto de partida, pero en estas situaciones se requiere que "el aprendiz enfrente las limitaciones de la noción que va construyendo" (Mena et al. 2015, p. 331) estas limitaciones se pueden presentar cuando la idea del infinito se hace más compleja a medida que va adquiriendo más contenidos, por ejemplo:

> Observemos que la notación 0,999… sugiere un infinito potencial, y que la cuestión de si acaso 0,999… =1 se refiere al infinito actual, pues pregunta acerca del resultado cuando se haya desplegado toda la expansión decimal de 0,999… Es la confrontación de ambos tipos de infinito, en este caso uno que se va progresivamente construyendo y otro que es el resultado final de esa construcción, lo que provoca el obstáculo (de origen) epistemológico" (Mena et al. 2015, p. 331).

Patricia Salinas (1985, citada por Sacristán, 1991) hizo una investigación sobre las ideas que tienen los alumnos sobre la noción del infinito en relación a la concepción del límite (**Figura 4 y Figura 5**) y cómo estas pueden ser también obstáculos en el aprendizaje y Sacristán (1991) aplicó cuestionarios con el mismo objetivo y obtuvieron los siguientes resultados:

- El límite se presenta como un concepto más del uso cotidiano que un concepto matemático, por consecuencia no pueden lograr obtener una idea definida de lo qué es el límite. Las ideas de uso cotidiano generalmente pueden causar obstáculos en la comprensión de nociones matemáticas.
- En la pregunta planteada de una sucesión infinita 1.9, 1.99, 1.999, 1. 9999999…, como el progreso de la altura de un árbol con respecto al tiempo, se preguntó si el árbol en algún momento llegaría a 2 metros de altura. La respuesta fue que nunca llegaría a 2, que sería un proceso que nunca terminaría, aceptaron que la operación es convergente y que es infinito, pero otros alumnos respondieron que el proceso si tiene final, es decir que 1, 9999… = 2 (infinito actual), pero el conflicto es cómo demostrar en la recta numérica que 1, 9999… es exactamente igual a 2 ya que puede existir entre ambos números otro número real, eso causó un conflicto en los alumnos en relacionar las ideas del infinito potencial y del actual.
- El obstáculo común que presentan los estudiantes es ubicar un número con cifras infinitas en la recta numérica, por ejemplo 0.333… algunos consideran que es imposible ubicarlo, otros lo consideran como una fracción 3/9 y lo ubican en la recta.
- El nivel de conocimiento del número real en la recta numérica es muy pobre debido a los resultados anteriores expuestos, eso causa en un futuro obstáculos para comprender el cálculo infinitesimal.
- Se comparó la cantidad de elementos utilizando la correspondencia biunívoca, que tienen entre el conjunto Z y N, algunos respondieron que faltarían números N para poder contar todos los números Z, pues el conjunto de los N es menor y no alcanzaría a emparejar todos los números Z, esto puede causar conflictos por la falta de percepción de la noción del infinito.

Waldeeg (1996) también en su investigación presenta los siguientes obstáculos:

– El infinito potencial puede ser un obstáculo para comparar conjuntos infinitos, pues se hace muy evidente en los resultados de las encuestas, ya que las concepciones de este tipo de infinito son generalmente: infinito, nunca termina, nunca acaba, es indeterminado, etc., estas ideas, en cierto grado, no ayuda a percibir la idea del infinito en matemáticas.
– A pesar de que se instruye al estudiante que use la correspondencia biunívoca en dos conjuntos infinitos existe un gran rechazo en aplicarla en el subconjunto propio de un conjunto.
– Las ideas de los estudiantes del infinito fuera del aula pueden funcionar en casos muy particulares, pero globalmente se contradicen.

Al respecto, interesa hacer un estudio sobre qué concepciones tienen los docentes sobre este tema y enfatizar cuál de ellas es la más predominante pues es necesario diferenciar dos tipos de intuiciones: “las intuiciones primarias, que se desarrollan sobre la base de la experiencia cotidiana, antes e independientemente de la instrucción académica, de las intuiciones secundarias, adquiridas mediante la intervención educativa" (Fischbein, 1987 citado por Belmonte y Sierra, 2011, p. 142). Para desarrollar con más detalle estas perspectivas, tomamos como referencia los modelos intuitivos investigados por Belmonte (2009), Belmonte y Sierra (2011), Llopis (2014) y Montes (2015).

2.3 Concepciones sobre el infinito matemático

La concepción se empieza con la observación, pues nos ayuda a construir, desde un principio, lo que es la idea, por lo tanto: las concepciones "son constructos cognitivos que pueden verse como el marco subyacente que organiza los conceptos" (Mora y Barrantes, 2008, p. 73). En otras palabras, el ser humano adquiere un concepto, noción o idea de algo o de alguien a través de un círculo social, creencia o costumbres, hasta que los va organizando cuando ya comprende o entiende lo obtenido. Estas ideas son de suma importancia para el docente, pues las toma como "creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes, concernientes a la disciplina matemática" (Thompson, 1992, p. 132, citado por Montes 2015, p. 30).

La concepción del infinito matemático parte también de un entorno social del individuo. En este nacen concepciones intuitivas ligadas a procesos que nunca terminan y que no siempre son compatible con las concepciones matemáticas. Así pues:

> La distancia entre la concepción intuitiva y la concepción matemática o, lo que es lo mismo, entre el infinito potencial y el actual no se suele contemplar en los institutos, sino que, con frecuencia, se da por conocido el concepto con toda la problemática que ello conlleva, pues la concepción intuitiva no es suficiente ni funcional para el estudio de la matemática. (Llopis 2014, p. 1)

El proceso del pensamiento intuitivo al matemático no es tan fácil, dado que el primero se basa en una transición empírica, mientras que el segundo utiliza la lógica e ideas formales. Sin embargo, "las investigaciones empíricas han mostrado que esto da lugar a una amplísima variedad de conflictos cognitivos que puede actuar como un obstáculo para el aprendizaje" (Belmonte, 2009, p. 41). Estos obstáculos al presentarse por el camino del desarrollo del pensamiento formal son naturales en la enseñanza y aprendizaje, para eso hay que utilizar ciertos recursos que nos ayuden a categorizar las concepciones de los alumnos para luego introducir las nociones matemáticas del infinito, ese recurso se llama *modelos intuitivos*. Los modelos intuitivos son "modelos mentales que responden completamente a estímulos intuitivos y son aceptados inmediata y sólidamente. Esto quiere decir que hay una correspondencia directa entre la situación sugerida y el concepto matemático utilizado" (Belmonte, 2009, p. 69). En un estudio posterior, Belmonte y Sierra (2011), apoyados en las investigaciones de Fischbein (1987, 1989, 2001), resumen tres modelos: Indefinición, divergencia y acotado-finito/no acotado-infinito. Los trabajos mencionados, también han sido tomados por otros autores como Llopis (2014) quien resume seis modelos, que tomamos de referencia en la investigación que presentamos. Por su parte, Montes (2015) establece los modelos inclusión e infinito=infinito o de aplanamiento, además de los ya mencionados.

2.4. Modelos intuitivos

2.4.1 Modelo de indefinición

En este modelo el participante calcula u opera con cantidades infinitas sin saber demostrar su procedimiento o su respuesta. (**Figura *6***)

Figura 6

Ejemplo del modelo de indefinición

> *Situación 4*
>
> Un profesor propone el siguiente ejercicio en clase:
>
> *Ordenad por tamaño los siguientes conjuntos:*
>
> *a) Número de estrellas*
>
> *b) Número de granos de arena en la Tierra*
>
> *c) Números naturales {1, 2, 3, 4, 5…}*
>
> *d) Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm de lado*
>
> *e) Número de células que forman el cuerpo humano*
>
> *Belmonte, Sierra (2011)*
>
> Uno de los alumnos responde: Este ejercicio es imposible, en ningún caso soy capaz de contar cuantos hay, así que todos son infinitos, y no puedo compararlos.

Nota. Extraído de Montes (2015, p. 108)

En referencia a la **Figura *6***, Montes (2015) señala: “Este modelo se asocia a la incapacidad de abordar la situación, ya sea de conteo o comparación de conjuntos, con argumentos del tipo ‘no se pueden contar porque son infinitos’, y en casos muy extremos, al hecho de hacer consideraciones de tipo apeironiano sobre el infinito” (p. 108).

Este tipo de modelo manifiesta la “incapacidad de conocer o calcular” (Belmonte y Sierra, 2011, p. 151) y por consecuencia no se llega a una respuesta correcta. Algunos argumentos que aparecen son:

> No se pueden contar porque son infinitos; no se puede calcular porque no sabemos dónde acabar; el segmento se puede dividir en muchas mitades de forma que no existe un número concreto; el resultado no se puede calcular porque las fracciones que se suman no llegarían a terminar; no se puede calcular porque jamás podríamos contar todos los diámetros. (Belmonte y Sierra, 2011, p. 151)

Los argumentos son debidos a que, no es tan fácil concebir en un todo el comportamiento de los conjuntos infinitos, pues generalmente tratamos de relacionarlos con las propiedades de los conjuntos finitos y al enfrentarnos con los infinitos se presenta un problema o conflicto cognitivo que no se logra, a primera vista, comprender.

2.4.2 Modelo de divergencia

En este modelo los participantes observan diferentes figuras y sumas infinitas y afirman que el resultado no tiene fin, que se acerca indefinidamente a un número o que el proceso tiene un final (**Figura *7***).

Figura 7

Ejemplo de modelo de divergencia

Situación 6

Un profesor, en la clase de introducción a las series, plantea la siguiente cuestión: Si estoy en un punto, imaginaos que el origen, y doy un paso de medio metro, luego uno de un cuarto de metro, otro de un octavo, y así sucesivamente. ¿Dónde acabaré?
Un alumno responde: Pues a ver, profesor, si vas dando muchos pasos, muchos pasos, por muy pequeños que sean, te pasarás del 1 metro, te pasarás de los 2 metros, y así con cualquier medida, así que te irás al infinito.

Nota. Extraído de Montes (2015, p. 108)

En referencia a la **Figura *7***, Montes (2015) señala:

> Esta situación responde a un tópico sobre el que hemos encontrado poca literatura de investigación en materia didáctica, como es la suma de series. Este modelo, detectado por Belmonte (2009), y sobre el que se profundizó en Belmonte y Sierra (2011), está ligado a la sistemática designación de 'infinito' como el resultado de la suma de cualquier cantidad infinita de objetos matemáticos. Este patrón de pensamiento está ligado a la propiedad arquimediana que afirma que la suma de infinitas cantidades finitas da un resultado infinito, y que requiere la consideración de elementos 'no arquimedianos' para su contraejemplificación, que estarán fuera del contexto de los números enteros, de cuyas propiedades se extiende esta falsa generalización. (p. 109)

Este modelo también está relacionado con la "divisibilidad indefinida" (Belmonte y Sierra, 2011, p. 160), generalmente se usan en los temas de límites y que es una manifestación del infinito potencial, es decir que a medida que uno va desarrollando el problema los argumentos están más direccionados al infinito potencial, donde aparecen términos como el resultado es demasiado grande o demasiado pequeño. Aquí se presenta el resultado de una suma infinita de dos o varios conjuntos u operaciones "sin considerar en absoluto su eventual convergencia" (Belmonte y Sierra, 2011, p. 160), este modelo responde a “la propiedad arquimedeana la suma de infinitas cantidades finitas da un resultado infinito” (Belmonte y Sierra, 2011, p. 160).

En este modelo también aparecen ideas o argumentos como “cada vez crecerá menos o bien que cada vez crecerá más despacio; pero siempre crecerá; si pones todas las cantidades de estos segmentos dentro de un segmento de un metro acabas por pasarte del extremo” (Belmonte y Sierra, 2011, p. 162*),* “crece indefinidamente, siempre que esté sumando, la suma crece sin parar” (Llopis, 2014, p. 29).

2.4.3 Modelo acotado-finito/no acotado-infinito

En este modelo los participantes establecen una relación entre un conjunto acotado o no acotado con el cardinal de sus elementos.

Figura 8

Ejemplo de modelo acotado-finito/no acotado-infinito

Situación 7

Un alumno, después de una clase sobre teoría de conjuntos, pregunta:

Profesor, yo tengo una duda, a ver, como [0,1) está acotado y [0,∞) no lo está, ¿entonces en el segundo conjunto hay más elementos que en el primero, no?

Nota. Extraída de Montes (2015, p. 109)

En referencia de la **Figura *8***, Montes (2015) señala:

> Este ejemplo se generó como un posible ejemplo del modelo derivado de asociar acotado a finito y no acotado a infinito (Belmonte y Sierra, 2011). Así, la comparación entre el intervalo unitario y el de los números positivos, podría generar también la posibilidad de explorar las representaciones de la demostración de la igualdad de elementos. Igualmente, existía la posibilidad de centrar la discusión en qué hacer si se pretende comparar el intervalo [0,1] con los reales positivos, en pos de explorar si el profesor considera el infinito como un elemento sujeto a corporeización. (p. 109)

Este modelo también se relaciona con la noción de cota de un conjunto de elementos, también hay argumentos relacionados con dicho modelo como “llega un momento en que ya no caben más círculos en el triángulo porque llegamos al vértice (…), la suma de todos los diámetros será como mucho la altura del triángulo*”* (Belmonte y Sierra, 2011, p. 164), “porque no están acotados” (Llopis, 2014, p. 29).

2.4.4 Modelo punto – marca

Este modelo “consiste en atribuir dimensiones o una naturaleza material a un punto geométrico para comparar conjuntos geométricos” (Llopis, 2014, p. 20).

Figura 9

Ejemplo del modelo punto- marca

Situación 3

Profesor: Tres líneas rectas no siempre se cortan en un mismo punto, ¿verdad?

Alumno: Depende del tamaño del punto, ¿no?

Nota. Extraído de Montes (2015, p. 107)

En referencia a la **Figura *9***, Montes (2015) señala:

> Este extracto refleja el resultado coloquialmente conocido en círculos matemáticos como ‘El teorema del punto gordo’, que no es sino la atribución de dimensiones o una naturaleza material a un punto geométrico (Belmonte y Sierra, 2011), contemplado por Fischbein (1987) o D’Amore et al. (2006), denominándolo modelo de collar de puntos. Este tipo de razonamiento genera problemas, dado que conceptualiza el punto como un círculo, lo que lleva a problemas de comparación entre elementos geométricos. (p. 107)

En este caso sucede que el concepto del punto geométrico lo asemejan al concepto del círculo geométrico, así vemos argumentos como: Depende del grosor de la punta del lápiz.

2.4.5 Modelo infinito = infinito

En este modelo se comparan dos o más conjuntos infinitos llegando a la conclusión de que tienen la misma cardinalidad de elementos.

Figura 10

Ejemplo del modelo infinito=infinito

Situación 2

Más tarde, en la misma clase, el profesor demuestra que R no es numerable, a lo que un alumno pregunta:

Maestro, aunque no sea numerable, ¿N y R siguen teniendo el mismo número de elementos, no?

Profesor: ¿Por qué lo preguntas?

Alumno: Como ambos tienen infinitos elementos….

Nota. Extraída de Montes (2015, p. 107).

En referencia a la **Figura *10***, Montes (2015) señala:

> En esta situación se desarrolló atendiendo al modelo infinito=infinito (Fischbein, 1987; Fischbein et al. 1979) o de aplanamiento (Falk, 1994; D'Amore y Arrigo 2006), en el que el sujeto obvia las características cardinales de los conjuntos, y concibe todos los entes infinitos como iguales, atribuyéndoles el carácter indefinido que genera la equivalencia entre todos ellos. Así, este ejemplo muestra a un alumno obviando la no numerabilidad de los números reales, afirmando que como ambos son conjuntos infinitos, han de tener el mismo número de elementos. (p. 107)

A partir de los autores que revisa Belmonte y Sierra (2011), a este modelo lo denominan *modelo de aplanamiento*, en el que las cantidades infinitas tienen la misma equivalencia. De esta manera, se le asigna el mismo cardinal a los conjuntos infinitos. Aquí se pueden encontrar respuestas similares a: "ambos conjuntos son infinitos" (Llopis, 2014, p. 29).

2.4.6 Modelo de inclusión

En este modelo se determina qué concepciones del infinito matemático son relacionadas con las ideas de la finitud, así pues, los participantes tratan de encontrar alguna relación entre lo infinito y lo finito (**Figura *11***).

Figura 11

Ejemplo del modelo de inclusión

Situación 1

Un profesor está explicando en una clase elementos relacionados con los números, y establece la correspondencia biunívoca entre los naturales y los pares.

Un alumno dice: ¿Cómo va a haber los mismos números pares que los naturales? ¡Pero si los pares están dentro de los naturales!

Nota. Extraída de Montes (2015, p. 106)

En referencia a la **Figura *11***, Montes (2015) señala:

> Esta situación está basada en el modelo intuitivo de inclusión (Fischbein, et al., 1979; Fischbein 1987; Tirosh Fischbein y Dor, 1985; Falk 1994), ligado al principio holístico 'el total es mayor que sus partes'. En la propia situación se indica que el profesor ha mostrado la igualdad cardinal entre ambos conjuntos, lo que causa una contradicción para el alumno, debido a la lógica conjuntista que subyace al razonamiento, válida en conjuntos finitos. (p. 106)

Es decir que, en situaciones donde los alumnos buscan el cardinal de dos o más conjuntos infinitos, operando con las propiedades de los conjuntos finitos y al realizar esto aparecen los conflictos sin llegar a una conclusión o argumento.

Según los estudios de Belmonte y Sierra (2011), este modelo tiene relación con el axioma de Euclides: *el todo es mayor que las partes*. Por ejemplo, en la expresión "el cuadrado tiene más puntos que el segmento" (Llopis, 2014, p. 32), se verifica que el segmento es una parte del todo que sería el cuadrado.

Capítulo 3. Marco metodológico

3.1 Tipo de investigación

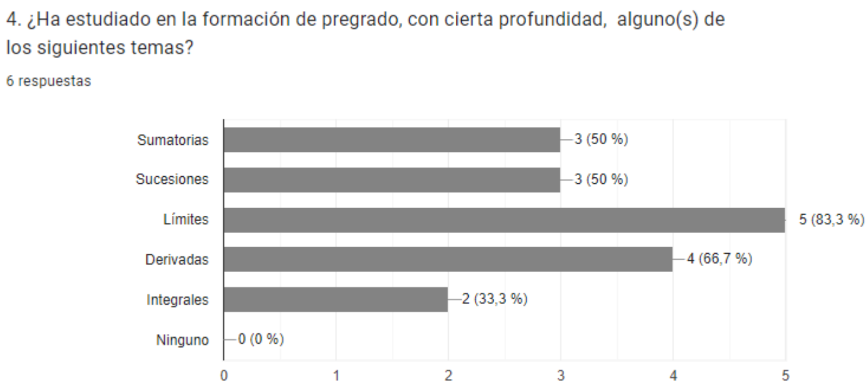
La investigación se encuentra dentro del paradigma interpretativo o cualitativo (Pérez Serrano, 1994), porque pretendemos escribir las concepciones que tienen futuros profesores y profesores en ejercicio de matemática de secundaria sobre el infinito matemático. Se trata de un estudio básico de nivel descriptivo (McMillan y Schumacher, 2005), pues se busca ampliar el conocimiento en torno a las concepciones sobre el infinito matemático. Como ya se dijo en el apartado de antecedentes, no se han encontrado estudios locales ni nacionales, pese a ser un concepto que se aborda en la matemática escolar, aunque de modo implícito. La metodología empleada es mixta porque si bien se busca visualizar aspectos cualitativos de los datos recogidos mediante un cuestionario de respuesta abierta, también pretendemos hacer un recuento de cuáles son las concepciones del infinito matemático que se manifiestan y en cuántos informantes se evidencia cada una de dichas concepciones.

3.2 Contexto de los informantes

En esta investigación participaron 6 informantes: tres profesores en ejercicios, de los cuales dos egresaron el 2009 y uno el 2013, y tres estudiantes para profesor de matemática de secundaria que, al momento de completar el cuestionario, cursaban el VIII ciclo de la carrera y egresaron el 2022. Hay que recalcar que los egresados se formaron bajo un plan de estudios predominantemente, disciplinar y cursaron cinco asignaturas de cálculo[2], mientras que los futuros profesores se formaron con un plan de estudios con mayor énfasis didáctico que el primero[3]. De hecho, de los 6 participantes el 83,3% estudiaron con cierta profundidad el tema de integrales, el 66,7% derivadas, el 50% sumatorias y sucesiones y el 33,3% integrales (**Figura *12***).

Figura 12

Temas relacionados con el infinito que han estudiado los informantes



[2] El plan de estudios anterior al 2015 considera las asignaturas: Introducción al cálculo, Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III y Análisis matemático.

[3] Los futuros profesores de matemática de secundaria se formaron en el plan de estudios 2015 que contine dos asignaturas de cálculo: Cálculo I (VII ciclo) y Cálculo II (IX ciclo).

También es importante enfatizar que el 16,7% ha enseñado en el tema de integrales, el 33,3% los temas de sumatorias y límites, el 50% el tema de sucesiones y el 33, 3% no ha enseñado ninguno de ellos. Además, solo el 66,7% ha ejercido la docencia en el área de matemática.

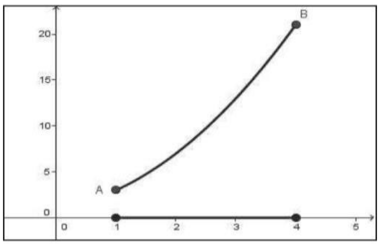
Los informantes desarrollaron el cuestionario de manera virtual debido a la pandemia del Covid 19.

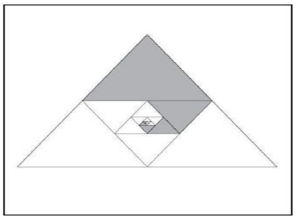
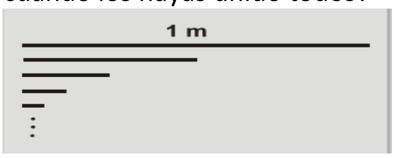
3.3 Recogida de datos: el cuestionario

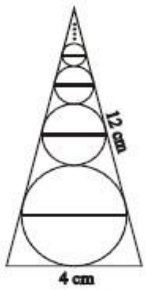
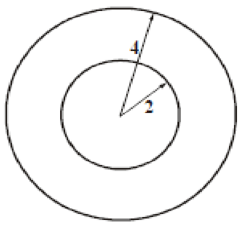
Para conocer las diferentes concepciones sobre el infinito que tienen los informantes se aplica un cuestionario de respuesta abierta. Este consta de 20 preguntas que han sido tomadas, y en algunos casos adaptadas, de las investigaciones de Belmonte (2009) y Llopis (2014). Las preguntas abordan cinco tópicos (conjuntos, divisibilidad, convergencia, operatividad y lenguaje) y usan cuatro sistemas de representación (numérico, geométrico, gráfico y verbal (**Tabla *1***).

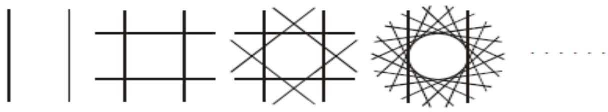
Tabla 1

Preguntas del cuestionario, tópicos y sistemas de representación abordados

PREGUNTA	REFERENCIA
P1. ¿Qué conjunto tiene más números?	Llopis (2014, p. 28)
N= {1, 2, 3, 4…}; M= {2, 4, 6, 8, 10, ...} **Explica tu respuesta.**	Tópico: Conjuntos
	S.R.: Numérico
P2. ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos?	Llopis (2014, p. 31)
A B	Tópico: Conjuntos
C D Explica tu respuesta.	S.R.: Geométrico
P3. Observa la siguiente función cuadrática $y = x^2 + x + 1$. Si tomamos el tramo de curva entre A y B, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [1, 4] de la variable x o en el tramo de curva AB? Explica tu respuesta.	Llopis (2014, p. 35)
	Tópico: Conjuntos
	S.R.: Gráfico
P4. ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)? ¿Por qué?	Belmonte (2009, p.240)
	Tópico: Conjuntos
	S.R.: Verbal

PREGUNTA	REFERENCIA
P5. Considera un número positivo cualquiera. A continuación, lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final? ¿Por qué?	Belmonte (2009, p.254) Tópico: Divisibilidad S.R.: Numérico
P6. Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar, se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realizamos la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente. A) ¿Tiene fin este proceso? Explica tu respuesta B) ¿Cómo será el área resultante? a. Una cantidad finita b. Una cantidad infinita c. No se puede calcular 	Llopis (2014, p.33) Tópico: Divisibilidad S.R.: Geométrico
P7. A continuación un grupo de segmentos de cantidad infinita, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, ¿obtendrás un segmento más largo que el de 1m? ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos? 	Belmonte (2009, p.269) Tópico: Divisibilidad S.R.: Gráfico
P8. Imagínate que tienes una hoja de papel. La divides en dos trozos iguales y te quedas con uno de ellos. La parte con la que te has quedado la vuelves a dividir en dos partes iguales y te quedas con una de ellas. Y así sucesivamente. ¿Se podrá repetir el proceso tantas veces como quiera? Justifica tu respuesta.	Llopis (2014, p.35) Tópico: Divisibilidad y Convergencia S.R.: Verbal
P9. De la siguiente suma $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ su resultado: a. Crece indefinidamente b. Decrece indefinidamente c. Se acerca indefinidamente a un número d. Otra respuesta … Justifique su respuesta.	Llopis (2014, p.29) Tópico: Divisibilidad y Convergencia S.R.: Numérico

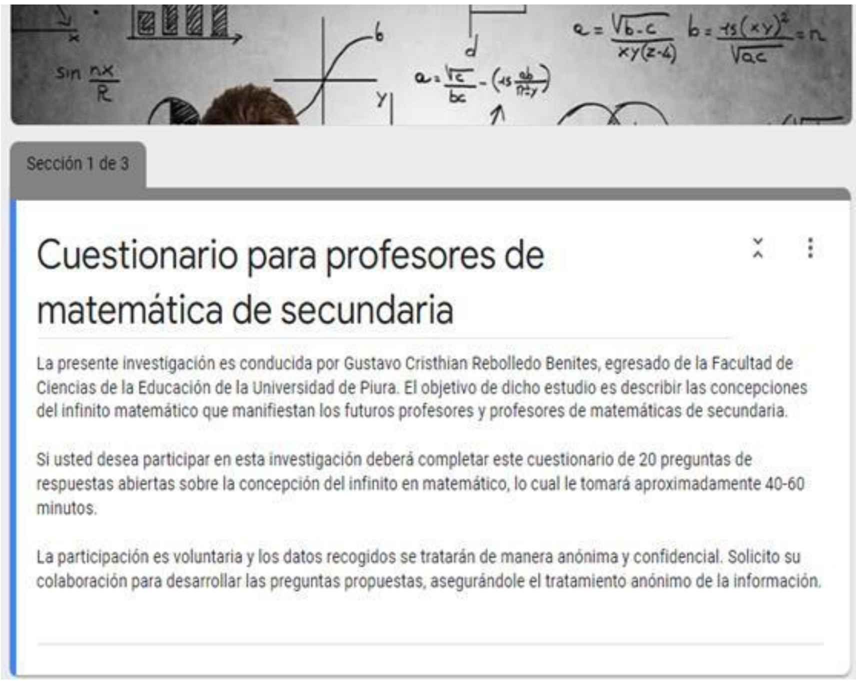
PREGUNTA	REFERENCIA
P10. Observa la siguiente figura. En ella se muestra el proceso de dividir un segmento en dos partes iguales, tomar una de esas mitades y volverla a dividir y así sucesivamente. Así, los puntos M, N, O y P son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.  Si se sigue haciendo este proceso, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B? **Justifica tu respuesta**.	Llopis (2014, p.40) Tópico: Convergencia S.R.: Geométrico
P11. ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?  a) Una cantidad finita, ¿cuál? b) Una cantidad infinita, ¿por qué? c) No se puede saber, ¿por qué?	Belmonte (2009, p.272) Tópico: Convergencia S.R.: Gráfico
P12. Considera la siguiente sucesión de números: 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001 · · · Si continuamos escribiendo números, ¿crees que se llega a algún valor? ¿cuál? Explica tu respuesta.	Belmonte (2009, p.257) Tópico: Convergencia S.R.: Verbal
P13. ¿Existe algún número entre $1,\hat{9}$ y 2?, Justifique su respuesta.	Belmonte (2009, p.263) Tópico: Operacional S.R.: Numérico
P14. En la figura se muestra dos circunferencias de radios 2 y 4, respectivamente. ¿Tienen estas la misma cantidad de puntos? 	Belmonte (2009, p.238) Tópico: Operacional S.R.: Geométrico
P15. ¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos; trata de graficar tu respuesta, en caso contrario, justifica tu respuesta.	Belmonte (2009, p.246) Tópico: Operacional S.R.: Gráfico

PREGUNTA	REFERENCIA
P16. Indica cuál(es) de las expresiones es la correcta. **Justifica tu respuesta**: *a)* $0,\underline{9} < 1$ *b)* $0,\underline{9} = 1$ c) $0,\underline{9} > 1$	Llopis (2014, p.30) Tópico: Operacional S.R.: Verbal
P17 ¿Puedes realizar la siguiente resta: 7,424242... - 3,151515...? Si es posible escribe el resultado. De lo contrario explica por qué**.**	Belmonte (2009, p.282) Tópico: Lenguaje S.R.: Numérico
P18. Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían? ¿Y en uno de 30 cm de lado? Explica tus respuestas	Belmonte (2009, p.230) Tópico: Lenguaje S.R.: Geométrico
P19. Si observas el proceso siguiente, parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo ¿Se puede determinar el número total de rectas para obtener el círculo? **Justifica tu respuesta**. 	Belmonte (2009, p.302) Tópico: Lenguaje S.R. Gráfico
P20. Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito.	Belmonte (2009, p.292) Tópico: Lenguaje S.R.: Verbal

Una vez estructurado el cuestionario se hizo la validación por juicio de expertos (Anexo 1) y luego de ello, se difundió a los informantes (egresados y estudiantes en el 2021), vía correo o mensaje personal de teléfono, el enlace del cuestionario (https://docs.google.com/forms/d/1FqxL9CvLJQgV7hCK0fk73D26idym1LXZ09NcLZ69KEE/edit), realizado con la aplicación Forms de Google (**Figura *13***)

Figura 13

Presentación del cuestionario al informante



3.4 Análisis del cuestionario

El estudio de las respuestas se realiza mediante el análisis de contenido (Pérez Serrano, 1994), tomando como referencia los Modelos Intuitivos estudiados por Belmonte (2009), Belmonte y Sierra (2011), Llopis (2014) y Montes (2015). Si bien ese desarrollo teórico (apartado 2.4) es la referencia para analizar cada respuesta (**Tabla *2***), no se elaboró un listado de indicadores a priori. Estos emergieron durante el proceso de análisis y se presentan en el siguiente capítulo.

Tabla 2

Indicadores de análisis de cada modelo intuitivo sobre el infinito matemático

Categorías	Descripción de la categoría
Modelo de Inclusión	La concepción del participante está relacionada con la teoría euclidiana: "El todo es mayor que sus partes", por lo tanto, llega a la conclusión que hay diferentes tamaños de infinitos.
Modelo Infinito=infinito	La concepción del participante le lleva a concluir que las diferentes clases de infinitos son equivalentes.
Modelo Punto-marca	La concepción del participante sobre la cantidad de puntos dependerá del tamaño o grosor del punto.
Modelo de Indefinición	La concepción del participante se manifiesta en no tener la capacidad de argumentar, calcular u operar con cantidades infinitas, por lo tanto, no logra obtener una respuesta apropiada.

Categorías	Descripción de la categoría
Modelo de divergencia	La concepción del participante empieza al observar sumas o figuras infinitas atribuye que el resultado es infinito, que nunca acabará (Infinito Potencial) o puede atribuir la operación como un todo o como un solo conjunto (Infinito Actual).
Modelo acotado-finito/no acotado-infinito	La concepción del participante no logra establecer la relación de cardinalidad entre dos intervalos acotados o no acotados.

Las descripciones anteriores constituyen la parte cualitativa de la investigación que se integra con el recuento de las concepciones manifestadas por los informantes, lo cual permite verificar cuál de dichos modelos es el que más predomina, lo cual representa la parte cuantitativa del estudio. La utilización de ambos enfoques, cualitativo y cuantitativo, resulta coherente con el método mixto que ya se ha indicado al inicio del capítulo.

Capítulo 4. Análisis y resultados

4.1 Codificación y elementos del análisis

Para el análisis de las respuestas se asignó a todos los informantes una codificación en la que se incluye un número de participante, la característica de ser docente (D) o futuro docente (F) y el año de egreso. Por ejemplo, si el código es 1D2013 se hace referencia a las concepciones del docente 1 que egresó el 2013.

Las respuestas dadas por los informantes se clasificaron según los 6 modelos intuitivos de concepciones sobre el infinito, tomados de Belmonte (2009), Belmonte y Sierra (2011), Llopis (2014) y Montes (2015), a los que denominamos categorías (**Tabla *2***). Tal como se describió en el capítulo anterior, durante el proceso de análisis emergieron indicadores (**Tabla *3***) que permiten estructurar la comunicación de resultados que presentamos.

Tabla 3

Indicadores emergidos del análisis

Categorías	Indicador emergido	N° pregunta en la que se evidenció
Modelo de Inclusión	Compara conjuntos infinitos concluyendo que existen diferentes tamaños de infinitos.	1,2,3,4,14
Modelo Infinito=infinito	Compara conjuntos infinitos concluyendo que son equivalentes.	1,2,3,4,14,16
Modelo Punto-marca	Atribuye dimensiones o medidas a puntos geométricos para comparar conjuntos infinitos.	6,8
Modelo de Indefinición	Calcula u opera con cantidades infinitas sin conocer su procedimiento o su respuesta.	1,6,7,10,11,15,17,19, 20
Modelo de divergencia	Calcula diferentes figuras y sumas infinitas afirmando que el resultado no tiene fin o que se acerca indefinidamente a un número.	1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11,12,13,14, 16, 17, 18, 19, 20
Modelo acotado-finito/no acotado-infinito	Establece una relación entre un conjunto acotado o no acotado con el cardinal de sus elementos	17

Los indicadores emergieron al analizar y clasificar las respuestas de los participantes según los modelos intuitivos descritos en el marco teórico. En este proceso se evidenció que, según las respuestas dadas por los informantes, algunas preguntas guardaban relación con más de un modelo (**Tabla *3***). Por ejemplo, el ítem 1 se asocia con los modelos de inclusión, infinito=infinito, de indefinición y de divergencia.

También, en esta tabla, verificamos que de las 20 preguntas el 85% (17 preguntas) se asocian con el modelo de divergencia y el 45% (9 preguntas) con el modelo de indefinición. Esto nos da a entender que hay aun dificultades para comprender la concepción del infinito matemático, pues se esperaba que las concepciones apunten al modelo infinito=infinito, porque es el que tiene relación con el infinito actual. Sin embargo, solo 6 preguntas (30%) de las 20, se relacionan a este modelo, lo que nos hace pensar que hay dificultad para concebir el infinito matemático de manera abstracta.

4.2 Concepciones relacionadas con los modelos de intuición

4.2.1 Modelo de inclusión

En este modelo los participantes comparan conjuntos infinitos concluyendo que existen diferentes tamaños de infinitos.

P1. ¿Qué conjunto tiene más números?

N= {1, 2, 3, 4…}; M= {2, 4, 6, 8, 10, ...} Explica tu respuesta.

Esta pregunta es de sistema de representación numérica. Solo un informante (16,7%) proporciona una respuesta que tienen relación con esta concepción:

> *El primer conjunto, porque la razón es 1 en cambio en el segundo la razón es de dos (números pares), además inicia desde el 2 hasta el infinito y el primer conjunto inicia desde 1 hasta el infinito* (6F2022).

P2 ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos?

A · ———————————— B

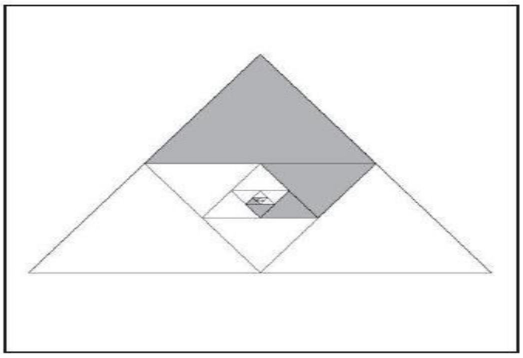
C · —————————————————— D

Explica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación geométrico. Solo un informante (16,7%) se limita a observar la gráfica y concluye que uno de los conjuntos tiene más puntos que el otro:

> *Si solo nos ceñimos al gráfico de la figura la respuesta sería que el segmento CD posee más puntos* (2D2013).

P3. Observa la siguiente función cuadrática $y = x^2 + x + 1$. Si tomamos el tramo de curva entre A y B, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [1, 4] de la variable x o en el tramo de curva AB? Explica tu respuesta.



Esta pregunta es de sistema de representación gráfica. Solo un participante (16,7%) responde a esta pregunta en relación con este modelo:

Bueno definitivamente creo que en el tramo de la curva AB hay más puntos (2D2013).

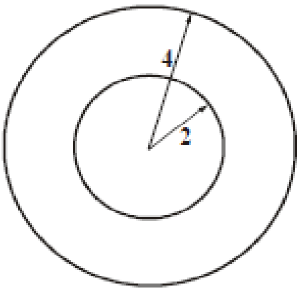
P4 ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)? ¿Por qué?

Pregunta de sistema de representación verbal. Solo dos participantes (33,3%) afirman que en uno de los intervalos hay uno o más números reales:

En el intervalo, hay un número real más (1D2009).

En la semirrecta, porque va hacia el infinito. En el primer caso se sabe que entre un número y otro hay infinitos números, pero en el segundo caso a pesar de ser una semi recta hay más números reales (6F2022).

P14 En la figura se muestra dos circunferencias de radios 2 y 4, respectivamente. ¿Tienen estas la misma cantidad de puntos?



Pregunta de sistema de representación geométrico. Solo un participante (16,7%) afirma que: *si tenemos dos segmentos de diferente distancia podemos afirmar que, aunque sus medidas son* *diferentes y concretas, sus puntos son infinitos lo cual no nos permite afirmar si una tiene más puntos que la otra* (2D2013).

4.2.2 Modelo infinito=infinito

En este modelo los participantes comparan conjuntos infinitos concluyendo que son equivalentes.

P1 ¿Qué conjunto tiene más números?

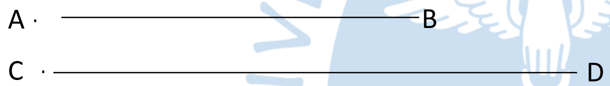
N= {1, 2, 3, 4…}; M= {2, 4, 6, 8, 10, ...} Explica tu respuesta.

Pregunta de sistema de referencia numérica. Dos participantes (33,3%) responden dentro de este modelo, al afirmar lo siguiente:

Tienen igual cantidad (1D2009).

Al tratarse números naturales infinitos, estos no tienen un límite y ambos conjuntos tienen la misma característica (5F2022).

P2 ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos?



Explica tu respuesta.

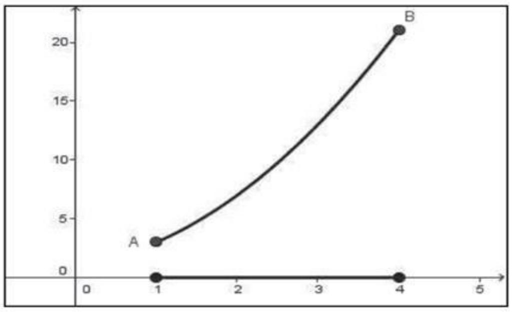
Pregunta de sistema de representación geométrica. Tres participantes (50%) responden según este modelo:

Tienen igual cantidad. Porque si se traza una recta secante que corte al segmento AB también lo hará con el segmento CD (1D2009).

Desde esa perspectiva ambos segmentos poseen los mismos puntos (3D2009).

Ambos tienen igual, ya que una recta cualquiera que sea siempre posee infinitos puntos (6F2022).

P3 Observa la siguiente función cuadrática $y = x^2 + x + 1$. Si tomamos el tramo de curva entre A y B, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [1, 4] de la variable x o en el tramo de curva AB? Explica tu respuesta.



Pregunta de representación gráfica. Tres participantes (50%) afirman que ambos conjuntos tienen igual cantidad de puntos.

Ambos conjuntos tienen igual cantidad de puntos (1D2009).

Ambas tienen la misma cantidad de puntos (6F2022).

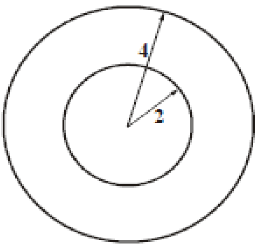
Creo que tendrían los mismos puntos, ya que si consideramos a la recta como una función constante con dominio [1, 4] y a la vez tenemos el mismo dominio para la función cuadrática, tendríamos como resultado que para el mismo valor de x (el mismo punto) tendríamos un rango asignado según el tipo de función que observamos (3D2009).

P4 ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)? ¿Por qué?

Pregunta de sistema de referencia verbal. Un participante (16,7%) está de acuerdo con que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos:

Ambos hay la misma cantidad (2D2013).

P14 En la figura se muestra dos circunferencias de radios 2 y 4, respectivamente. ¿Tienen estas la misma cantidad de puntos?



Pregunta de sistema de representación geométrica. Dos participantes (33,3%) proporcionan respuestas que están dentro de este modelo.

Si. Ya que cada radio de 4 que se pueda trazar en la circunferencia grande contiene a un radio de 2u (1D2009).

Sí, ya que como son circunferencias concéntricas se puede trazar el punto inicial de la más pequeña con el punto inicial de la más grande y así mismo cuando concluiría con la circunferencia pequeña también terminaría con la circunferencia grande (3D2009).

P16 Indica cuál(es) de las expresiones es la correcta. Justifica tu respuesta:

a) $0,\underline{9} < 1$

b) $0,\underline{9} = 1$

c) $0,\underline{9} > 1$

Pregunta de sistema de referencia verbal. Solo un participante (16,7%) manifiesta la concepción del infinito actual, dando por terminada la operación.

Es la b, ya que, si utilizamos el concepto de fracción generatriz, nos daríamos cuenta de que al transformarla en una fracción nos daría como resultado 9/9 y esto equivaldría a 1 (3D2009).

4.2.3 Modelo punto-marca

En este modelo los participantes atribuyen dimensiones o medidas a puntos geométricos para comparar conjuntos infinitos.

P6 Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar, se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realizamos la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente.

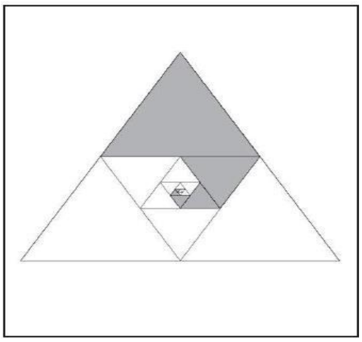
A) ¿Tiene fin este proceso? Explica tu respuesta

B) ¿Cómo será el área resultante?

a. Una cantidad finita

b. Una cantidad infinita

c. No se puede calcular



Pregunta de sistema de representación geométrico. Un participante (16,7%) enuncia una respuesta que está dentro de este modelo:

> *Este proceso no tiene fin, se puede hacer de manera infinita. Sin embargo, es necesario aclarar que este proceso no se puede hacer en la realidad, ya que, al tomar una hoja de papel y un lápiz, va a depender mucho del grosor de la punta del lápiz hasta donde se pueda llegar. Pero geométricamente hablando, este proceso en el plano puede darse de manera infinita. No se puede calcular* (5F2022).

Aunque esta última respuesta tienen alguna relación con el modelo de divergencia: *este proceso no tiene fin, se puede hacer de manera infinita,* y también del modelo de indefinición: *no se puede calcular,* pero el origen de estas parte de este argumento: *Sin embargo, es necesario aclarar que este proceso no se puede hacer en la realidad, ya que, al tomar una hoja de papel y un lápiz, va a depender mucho del grosor de la punta del lápiz hasta donde se pueda llegar,* por lo tanto esta respuesta se relaciona con el modelo punto – marca.

P8 Imagínate que tienes una hoja de papel. La divides en dos trozos iguales y te quedas con uno de ellos. La parte con la que te has quedado la vuelves a dividir en dos partes iguales y te quedas con una de ellas. Y así sucesivamente. ¿Se podrá repetir el proceso tantas veces como quiera? Justifica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación verbal. Tres participantes (50%) responden que

> *Teóricamente sí, pero prácticamente no* (1D2009).
>
> *Sí se podrá repetir el proceso cuántas veces uno quiera, pero realizado con material concreto la herramienta (el papel) sería el limitante* (2D2013).
>
> *Debería ponerse, pero como el papel se va a terminar ya que no tenemos una máquina que lo haga tan diminuto, por lo que opino que no se podría ya que existe un límite en dicho proceso* (6X2022).

4.2.4 Modelo de indefinición

En este modelo los participantes calculan u operan con cantidades infinitas sin conocer su procedimiento o su respuesta.

P1 ¿Qué conjunto tiene más números? N= {1, 2, 3, 4…}; M= {2, 4, 6, 8, 10, ...} Explica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación numérica. Dos participantes (33.3%) argumentan lo siguiente:

Lo cual me hace dudar mi respuesta de que el conjunto N tiene más números (2D2013).

No se puede precisar la cantidad exacta de número (3D2009).

P6 Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar, se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realizamos la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente.

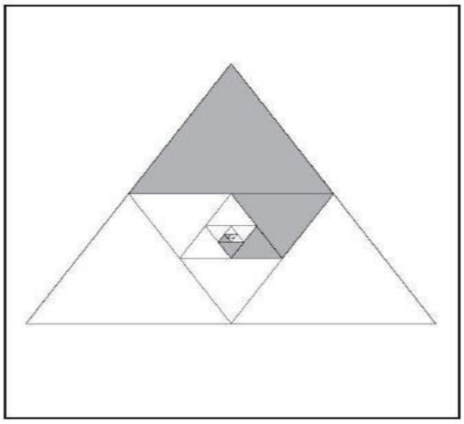
A) ¿Tiene fin este proceso? Explica tu respuesta

B) ¿Cómo será el área resultante?

a. Una cantidad finita

b. Una cantidad infinita

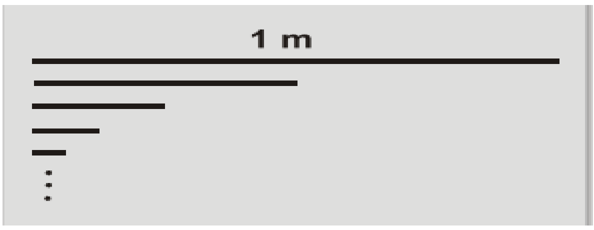
c. No se puede calcular



Pregunta de sistema de representación geométrico. Un participante (16,7%) emite una respuesta que está dentro de este modelo.

No. No se puede calcular (4F2022).

P7 A continuación un grupo de segmentos de cantidad infinita, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, ¿obtendrás un segmento más largo que el de 1m? ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos?



Pregunta de sistema de representación gráfico. Dos participantes (33,3%) proporcionan respuestas que están dentro de este modelo.

Más pequeños eran inciertos que representar (2D2013).

Eso es imposible de determinar con toda con precisión y a la vez que *es imposible saber la medida al unirlos a todos* (5F2022).

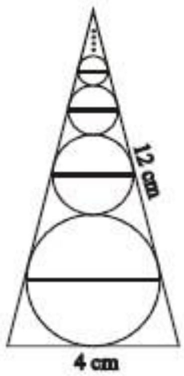
P10 Observa la siguiente figura. En ella se muestra el proceso de dividir un segmento en dos partes iguales, tomar una de esas mitades y volverla a dividir y así sucesivamente. Así, los puntos M, N, O y P son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.

Si se sigue haciendo este proceso, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B? Justifica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación geométrico. Un participante (16,7%) responde lo siguiente:

Es imposible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B, pero aun así si hablamos pensando matemáticamente, esto es imposible que se llegue a dar (5F2022).

P11 ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?



a) Una cantidad finita, ¿cuál?

b) Una cantidad infinita, ¿por qué?

c) No se puede saber, ¿por qué?

Pregunta de sistema de representación gráfico. Dos participantes (33,3%) responden de acuerdo a este modelo.

Es finita porque cada diámetro nuevo es una fracción, pero no sé cuál (1D2009).

No se puede saber (4F2022).

P15 ¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos; trata de graficar tu respuesta, en caso contrario, justifica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación gráfica. Un participante (16,7%) manifiesta lo siguiente:

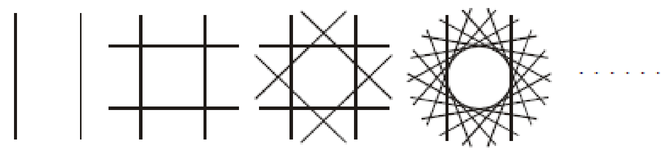
No existen distintos tamaños de infinito, el infinito es una palabra que es sinónimo de ilimitado por lo que, el tamaño, sino que este no tiene fin (5F2022).

P17 ¿Puedes realizar la siguiente resta: 7,424242... - 3,151515...? Si es posible escribe el resultado. De lo contrario explica por qué.

Pregunta de sistema de representación numérico. Un participante (16,7%) proporciona su respuesta para este modelo.

No sé puede, porque en ambos hay números infinitos (6F2022).

P19 Si observas el proceso siguiente, parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo ¿Se puede determinar el número total de rectas para obtener el círculo? Justifica tu respuesta.



Pregunta de sistema de representación gráfico. Tres participantes (50%) emiten respuestas están dentro de este modelo.

No, el círculo está conformado por una sucesión infinita de puntos (6F2022).

No se obtendrá un número total de rectas para construir un círculo, otra debemos separar el concepto de la figura con su representación concreta (2D2013).

No es posible definir el número de rectas (1D2009).

P20 Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito.

Pregunta de sistema de referencia verbal. Un profesor (16,7%) emite una respuesta que está dentro de este modelo.

No encuentro otra. En algunos casos podría ser equivalente (1D2009).

4.2.5 Modelo de divergencia

En este modelo los participantes calculan diferentes figuras y sumas infinitas afirmando que el resultado no tiene fin o que se acerca indefinidamente a un número

P1 ¿Qué conjunto tiene más números? N= {1, 2, 3, 4…}; M= {2, 4, 6, 8, 10, ...} Explica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación numérica. Tres participantes 2 (50%), responden que:

Se obtiene un número real cada vez más pequeño (6F2022).

Ambos son infinitos (2D2013).

Ambos tienen infinitos números (4F2022).

P2 ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos? A · ———————— B C · —————————— D Explica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación geométrico. Dos participantes (33,3%), proporcionan respuestas que están relacionadas a este modelo.

Ninguno. Ambos tienen infinitos puntos (4F2022).

Ambos tienen infinitos puntos, por lo tanto, ninguno de los dos segmentos tiene más puntos que el otro (5F2022).

P4 ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)? ¿Por qué?

Pregunta de sistema de referencia verbal. Dos participantes (33,3%) están de acuerdo con que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos:

En ambos casos hay infinitos números reales (3D2009).

Ambos tienen números infinitos (5F2022).

P5 Considera un número positivo cualquiera. A continuación, lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final? ¿Por qué?

Pregunta de sistema de representación numérica. Los seis participantes (100%) proporcionan respuestas de este modelo:

El resultado tiende a cero (1D2009).

Resulta una ley de formación, progresión geométrica de números con una razón igual a ½ (2D2013).

Creo que no habría final, sino una tendencia hacia el cero, ya que por más que sigamos dividiendo, nos acercaríamos al cero, pero nunca llegaríamos a él (3D2009).

Cero (4F2022).

No habrá un resultado final, ya que esta operación (dividir entre dos) nos llevará a un número que puede ser operado de la misma forma que el anterior, y esto ocurrirá de manera infinita si se quiere (5F2022).

Se obtiene un número Real cada vez más pequeño (6F2022).

P6 Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar, se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realizamos la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente.

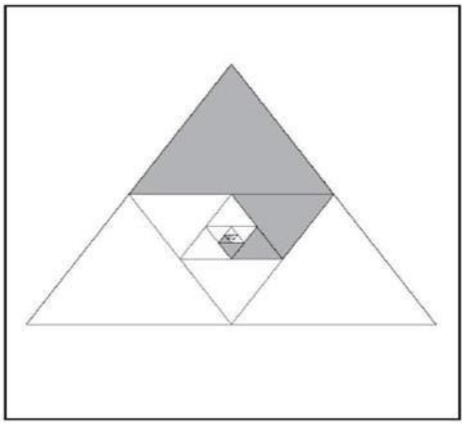
A) ¿Tiene fin este proceso? Explica tu respuesta

B) ¿Cómo será el área resultante?

a. Una cantidad finita

b. Una cantidad infinita

c. No se puede calcular



Pregunta de sistema de representación geométrica. Cuatro participantes (66,7%) según sus afirmaciones están dentro de este modelo.

Siempre obtendremos un nuevo triángulo equilátero, el cual inicia el ciclo nuevamente. El área es una cantidad infinita (3D2009).

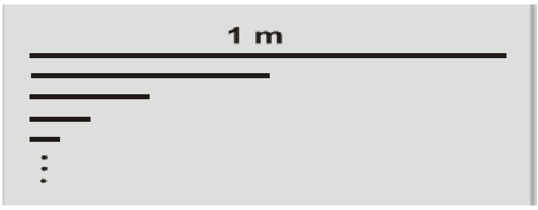
No tiene fin porque siempre se va a poder hacer la misma operación a pesar de lo diminuto que quede la figura geométrica. Una cantidad infinita (6F2022).

No tiene fin este proceso, pero a nivel abstracto o con una herramienta adecuada se podrá percibir el infinito del proceso. El área resultante es una cantidad infinita (2D2013).

Siempre será posible formar un nuevo triángulo (1D2009).

Las ideas tienen mucho en común, pero aún con la idea del infinito potencial, es decir, que las operaciones que se realicen, en este problema, nunca tendrán fin, es un proceso que nunca terminará.

P7 A continuación un grupo de segmentos de cantidad infinita, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, ¿obtendrás un segmento más largo que el de 1m? ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos?



Pregunta de sistema de representación gráfico. Los argumentos de seis participantes (100%), están dentro de este modelo.

Sí. La suma es 1/ (1-1/2) =2 (1D2009).

Creo que tenderá a la unidad, pero no llegará a alcanzarla (2D2013).

No se puede obtener un segmento más largo que el de 1m. La medida de la unión de todos será de 2 metros (3D2009).

Infinito (4F2022).

Sí se obtendrá un segmento más largo que el de 1 metro (5F2022).

De las 5 rectas sale 0.9375. Pero se ve que las rectas siguen por lo tanto debería ser una recta infinita (6F2022).

P9 De la siguiente suma $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ su resultado:

a. Crece indefinidamente

b. Decrece indefinidamente

c. Se acerca indefinidamente a un número

d. Otra respuesta …

Justifique su respuesta.

Pregunta de sistema de representación numérico. Los seis participantes (100%) están a favor de que el resultado se acerca indefinidamente a un número.

La suma tiene como tope o como límite a 4 (1D2009).

la suma se acerca a 3 (2D2013).

Se acerca indefinidamente al número 4, ya que al sumar las fracciones que obtenemos, éstas nos llevan a acercarnos al número 1, más el uno y el dos, por eso creo que se acerca indefinidamente al número 4 (3D2009).

Se acerca a 3 (4F2022).

El resultado seguirá aumentando a medida que se sume la mitad del número anterior, por lo que el resultado de la suma crecerá indefinidamente (5F2022).

Crece, ya que por más pequeña que vaya siendo el resultado de la división siempre va ir en aumento (6F2022).

P10 Observa la siguiente figura. En ella se muestra el proceso de dividir un segmento en dos partes iguales, tomar una de esas mitades y volverla a dividir y así sucesivamente. Así, los puntos M, N, O y P son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.

Si se sigue haciendo este proceso, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B? Justifica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación geométrico. Cinco de los participantes (66,7%) afirman que este proceso no se puede dar debido a que por más que se intente operar esto nunca terminaría por que es infinito o que tiende o se acerca, pero nunca llegará o coincidirá con el punto B.

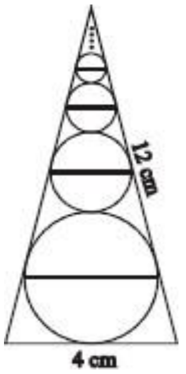
No, tiende a B, pero no llegará a B (2D2013).

Un punto que coincida con B sería imposible, que se acerque indefinidamente a B sí, ya que al igual que la pregunta anterior se dividirá indefinidamente pero nunca llegará a tocar a B (3D2009).

No, porque siempre entre dos puntos es posible ubicar uno central que resulta ser diferente a los extremos (1D2009).

Se tendría que hacer el mismo proceso infinitamente, llegaría si solo se tomarían números naturales o enteros, pero si se toma todos los reales no (6F2022).

P11 ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?



a) Una cantidad finita, ¿cuál?

b) Una cantidad infinita, ¿por qué?

c) No se puede saber, ¿por qué?

Pregunta de sistema de representación gráfico. Cinco participantes (83,3%) respondieron que la cantidad es infinita.

La suma tiende a 12 pero no llegará a ser 12 (2D2013).

Si ubicamos los diámetros de forma vertical, nos daremos cuenta que todos ellos forman la altura del triángulo y cómo sabemos el área del triángulo es (base x altura) /2, trazando la altura obtendremos dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa y un cateto vale 12 y 2cm respectivamente. Aplicamos teorema de Pitágoras y obtenemos una altura de 2 raíz de 37 (3D2009).

Infinito (4F2022).

Porque siempre habrá espacio para un nuevo circulo, donde se pueda añadir una nueva cantidad de diámetro a la suma total (5F2022).

Una cantidad infinita, ya que por más pequeños que sean siempre ascenderán (6F2022).

P12 Considera la siguiente sucesión de números: 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001 · · ·

Si continuamos escribiendo números, ¿crees que se llega a algún valor? ¿cuál? Explica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación verbal. Dos participantes (33,3%) proporcionan respuestas situadas en este modelo.

El resultado es 1/9. Porque cumple las condiciones de suma infinita $\frac{0.1}{1-0.1}=\frac{1}{9}$ (1D2009) dando por terminado el proceso, idea relacionada al infinito actual.

Se tiende al número cero en este caso ya que el denominador crece, mientras que el numerador es el mismo (3D2009) idea relacionada al infinito potencial.

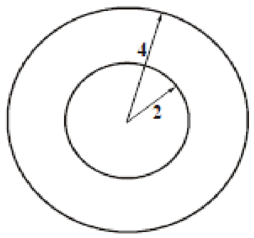
P13 ¿Existe algún número entre $1,\hat{9}$ y 2?, Justifique su respuesta.

Pregunta de sistema de referencia numérica. Dos participantes (33,3%) enuncian argumentos que están dentro de este modelo.

Existen infinitos números reales entre dos números (2D2013).

Sí, por ejemplo, el 1, 99 ó 1,9999999... infinitas veces (6F2022).

P14 En la figura se muestra dos circunferencias de radios 2 y 4, respectivamente. ¿Tienen estas la misma cantidad de puntos?



Pregunta de sistema de representación geométrico. Dos participantes (33,3%) proporcionan argumentos que están dentro de este modelo.

Si se habla de la cantidad de puntos que hay en una recta, entonces ambos tienen infinitos puntos (5F2022).

Sí, porque ambas tienen infinitos puntos (6F2022).

P16 Indica cuál(es) de las expresiones es la correcta. Justifica tu respuesta:

a) $0,\underline{9}<1$

b) $0,\underline{9}=1$

c) $0,\underline{9}>1$

Pregunta de sistema de representación verbal. Seis participantes (100%) están dentro de este modelo.

Marcó la opción *a* sin justificar su respuesta (2D2013).

Marcó la opción *a* sin justificar su respuesta (4F2022).

La expresión correcta es la "a", porque el 0,9 con sombrerito podrá acercarse mucho al valor 1, pero jamás lo alcanzará, siempre será menor que 1 (5F2022).

Marcó la opción *b* sin justificar su respuesta (1D2009).

Es la b, ya que, si utilizamos el concepto de fracción generatriz, nos daríamos cuenta que al transformarla en una fracción nos daría como resultado 9/9 y esto equivaldría a 1 (3D2009).

La "a" porque la unidad es mayor a un número decimal (6F2022).

Ideas relacionadas con el infinito potencial.

P17 ¿Puedes realizar la siguiente resta: 7,424242... - 3,151515...? Si es posible escribe el resultado. De lo contrario explica por qué.

Pregunta de sistema de representación numérico. Dos participantes (33,3%) afirman que, sí es posible, con sus respectivas justificaciones.

Es posible a través de la transformación a fracciones generatrices, ya que ambos son decimales periódicos puros y por ello se pueden convertir en fracciones (3D2009).

Sí. 4,2727... (1D2009).

P18 Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían? ¿Y en uno de 30 cm de lado? Explica tus respuestas

Pregunta de sistema de representación geométrico. Cuatro participantes (66,7%) admiten que la cantidad de puntos que cabrían en los lados de un cuadrado de diferentes medidas es infinita, entre las respuestas están:

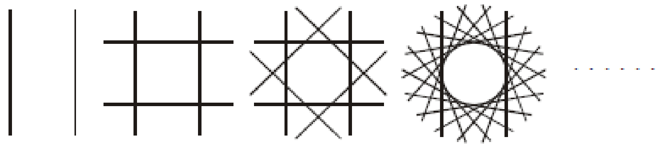
En ambas cabe infinitos puntos (1D2009).

La cantidad de puntos que cabrían son infinitos, aunque el cuadrado mida 10 o 30 cm de lado. Siempre en ese espacio habrá una cantidad infinita de puntos (5F2022).

En ambos caben infinitos puntos (6F2022).

Los puntos dentro de un polígono simulan a un plano y sabemos que en un plano la cantidad de puntos son infinitos (3D2009).

P19 Si observas el proceso siguiente, parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo ¿Se puede determinar el número total de rectas para obtener el círculo? Justifica tu respuesta.



Pregunta de sistema de representación gráfico. Dos participantes (33,3%) proponen argumentos que están dentro de este modelo:

Creo que mientras más rectas paralelas se coloquen será más notoria la circunferencia que se logra (3D2009).

El número de rectas que se necesita para obtener la circunferencia es infinito (5F2022).

P20 Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito.

Pregunta de sistema de referencia verbal. Los 5 docentes (83.3%) relacionan el concepto del infinito con palabras

Recta, plano, el número de la belleza (número áureo) (2D2013).

Indeterminado, indefinido y tiende al infinito (3D2009).

Sin límite, sin fin, indefinido (4F2022).

Ilimitado, no hay un final, no hay un último elemento (5F2022).

Ilimitado, innumerable, incalculable (6F2022).

4.2.6 Modelo acotado-infinito/no acotado-infinito.

En este modelo el participante establece una relación entre un conjunto acotado o no acotado con el cardinal de sus elementos

P17 ¿Puedes realizar la siguiente resta: 7,424242... - 3,151515...? Si es posible escribe el resultado. De lo contrario explica por qué.

Pregunta de sistema de representación numérico. Un participante (16,7%) responde:

Si es posible, podemos cortar los decimales o redondearlos y obtener el resultado, en mí caso he cortado los decimales (2D2013).

4.3 Discusión de resultados

Los resultados de esta investigación permiten describir las concepciones del infinito matemático y cómo estas influyen en la resolución de tareas. Se esperaba tener mayor cantidad de participantes, para lograr profundizar más en el estudio de los modelos intuitivos. Sin embargo, debido a las condiciones sanitarias del 2020, el cuestionario no pudo desarrollarse de manera presencial, sino virtual.

4.3.1 Comparación de los datos recogidos con los obtenidos en los trabajos de referencia

En este apartado se presenta una comparación descrita, brevemente, entre las respuestas identificadas en este estudio y las respuestas de los participantes en las investigaciones de Belmonte (2009) y Llopis (2014). Para este fin, no se toma en cuenta el código de los informantes, sino solo las características de la respuesta. Luego, esta comparación se sistematiza en la **Tabla *4***.

4.3.1.1 Modelo de inclusión.

P1. ¿Qué conjunto tiene más números?

N= {1, 2, 3, 4…}; M= {2, 4, 6, 8, 10, ...} Explica tu respuesta.

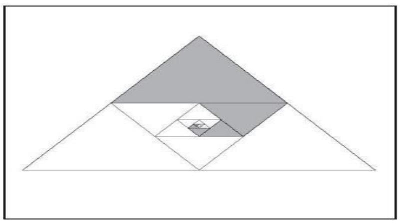
Solo el 16,7% (1 un informante) proporciona respuesta que tienen relación con esta concepción, mientras que el 21% (9 informantes) del estudio de Llopis (2014) responden que uno de los conjuntos tiene más elementos que el otro.

P2 ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos?

Explica tu respuesta.

Solo el 16,7% (1 informante) emite una respuesta relacionada con esta concepción. En el caso de los participantes de Llopis (2014), el 21% (9 informantes) responde que el segmento CD tiene más puntos.

P3. Observa la siguiente función cuadrática $y = x^2 + x + 1$. Si tomamos el tramo de curva entre A y B, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [1, 4] de la variable x o en el tramo de curva AB? Explica tu respuesta.

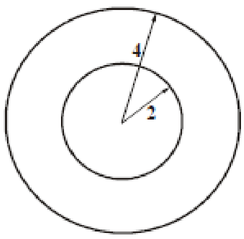


Solo el 16,7% (1 informante) proporciona una respuesta relacionada con este modelo. En el caso de los participantes de Llopis (2014), la respuesta a esta pregunta no aparece asociada al modelo de inclusión sino al modelo infinito=infinito. En consecuencia, el 79% (34 participantes) justifica que en ambos hay el mismo número de puntos.

P4 ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)? ¿Por qué?

Solo dos participantes (33,3%) proporcionan respuestas relacionadas con este modelo. En el trabajo de Belmonte (2009), de 89 alumnos universitarios, el 6,7% responden que hay más en la semirrecta, idea relacionada con la del participante 6F2022.

P14 En la figura se muestra dos circunferencias de radios 2 y 4, respectivamente. ¿Tienen estas la misma cantidad de puntos?



Solo un participante (16,7%) proporciona una respuesta situada en este modelo.

De los encuestados de Belmonte (2009), de 91 estudiantes universitarios el 3,9% responde "porque la mayor tiene más puntos" (p. 238).

4.3.1.2 Modelo Infinito=Infinito

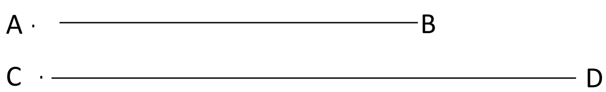
P1 ¿Qué conjunto tiene más números?

N= {1, 2, 3, 4…}; M= {2, 4, 6, 8, 10, ...} Explica tu respuesta.

Dos participantes (33,3%) están dentro de este modelo.

Esta pregunta propuesta por Llopis (2014), el conjunto M se cambió al conjunto de los números pares, por cuestiones didácticas, de 43 encuestados, el 67% piensa que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos.

P2 ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos?

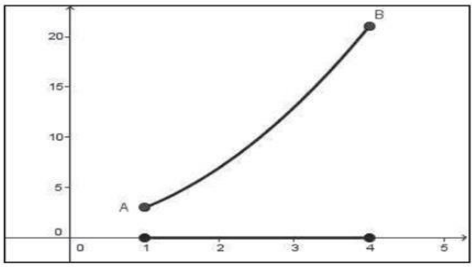


Explica tu respuesta.

Tres participantes (50%), proporcionan respuestas dentro de este modelo.

Pregunta propuesta por Llopis (2014), de 43 encuestados, el 51% manifiesta la misma respuesta: ambos tienen “la misma cantidad de elementos” (p.31).

P3 Observa la siguiente función cuadrática $y = x^2 + x + 1$. Si tomamos el tramo de curva entre A y B, ¿dónde hay más puntos, en el intervalo [1, 4] de la variable x o en el tramo de curva AB? Explica tu respuesta.



Tres participantes (50%) afirman que ambos conjuntos tienen igual cantidad de puntos.

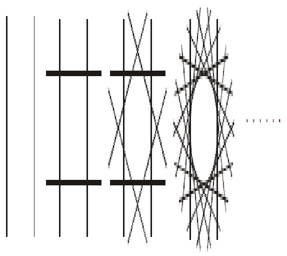
Pregunta propuesta por Llopis (2014), de 43 encuestados, el 79% afirma que ambas líneas tienen la misma cantidad de puntos.

P4 ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)? ¿Por qué?

Un participante (16,7%) está de acuerdo con que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos:

Esta pregunta fue propuesta por Belmonte (2009) y de 89 universitarios el 23,6% afirma que “hay los mismos en ambos” (p. 478).

P14 En la figura se muestra dos circunferencias de radios 2 y 4, respectivamente. ¿Tienen estas la misma cantidad de puntos?



Dos participantes (33,3%) proporcionan respuestas dentro de este modelo.

Pregunta propuesta por Belmonte (2009), de 91 universitarios el 10,4% afirman que “se puede establecer una correspondencia” (p. 477).

P16 Indica cuál(es) de las expresiones es la correcta. Justifica tu respuesta:
$a)\ 0,\underline{9} < 1$
$b)\ 0,\underline{9} = 1$
$c)\ 0,\underline{9} > 1$

Solo un participante (16,7%) manifiesta la concepción del infinito actual, dando por terminado la operación,

Pregunta propuesta por Llopis (2014), de 43 encuestados, el 60% afirma que el resultado es 1, “mostrando una concepción actual del infinito” (p. 30).

4.3.1.3 Modelo punto-marca

P6 Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar, se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realizamos la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente.

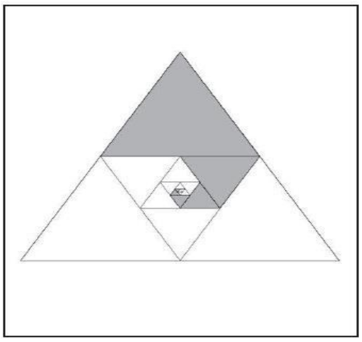
A) ¿Tiene fin este proceso? Explica tu respuesta

B) ¿Cómo será el área resultante?

a. Una cantidad finita

b. Una cantidad infinita

c. No se puede calcular



Un participante (16,7%) proporciona una respuesta dentro de este modelo.

Esta pregunta fue propuesta por Llopis (2014), de 43 encuestados, no hay respuestas relacionadas a este modelo.

P8 Imagínate que tienes una hoja de papel. La divides en dos trozos iguales y te quedas con uno de ellos. La parte con la que te has quedado la vuelves a dividir en dos partes iguales y te quedas con una de ellas. Y así sucesivamente. ¿Se podrá repetir el proceso tantas veces como quiera?
Justifica tu respuesta.

Pregunta de sistema de representación verbal. Tres participantes (50%) mostraron concepciones relacionadas con este modelo.

Pregunta propuesta por Llopis (2014) a 43 encuestados. Las respuestas son similares: "No, porque llegará un momento que el papel será muy pequeño y no se pueda dividir" y "Si matemáticamente, pero no físicamente" (p. 35) que representa un 65%.

4.3.1.4 Modelo de indefinición

P1 ¿Qué conjunto tiene más números?
N= {1, 2, 3, 4…}; M= {2, 4, 6, 8, 10, ...} Explica tu respuesta.

Dos participantes (33,3%) proporcionan respuestas relacionadas con este modelo:

Pregunta propuesta por Llopis (2014), de 43 encuestados, el 7 % afirman que "no se puede determinar" (p. 28).

P6 Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar, se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realizamos la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente.

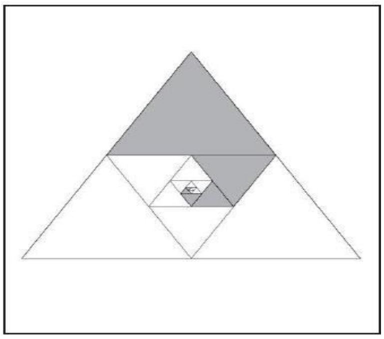
A) ¿Tiene fin este proceso? Explica tu respuesta

B) ¿Cómo será el área resultante?

a. Una cantidad finita

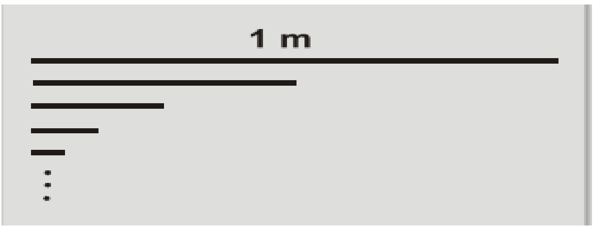
b. Una cantidad infinita

c. No se puede calcular



Un participante (16,7%) proporciona una respuesta dentro de este modelo.

Esta pregunta fue propuesta por Llopis (2014), de 43 encuestados, el 20% afirma que “no se puede calcular” (p. 34).

P7 A continuación un grupo de segmentos de cantidad infinita, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, ¿obtendrás un segmento más largo que el de 1m? ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos? 

Dos participantes (33,3%) proporcionan respuestas dentro de este modelo.

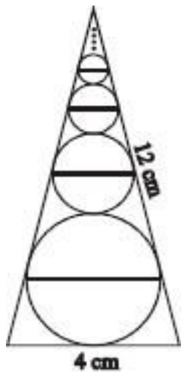
Pregunta propuesta por Belmonte (2009), de 77 alumnos universitarios el 1,3% manifiesta que “no se puede saber, no se puede hacer” (p. 482).

P10 Observa la siguiente figura. En ella se muestra el proceso de dividir un segmento en dos partes iguales, tomar una de esas mitades y volverla a dividir y así sucesivamente. Así, los puntos M, N, O y P son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.  Si se sigue haciendo este proceso, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B? Justifica tu respuesta.

Un participante (16,7%) proporciona se respuesta dentro de este modelo.

Esta pregunta fue propuesta por Llopis (2014), de 43 encuestados, el 59% responde que “no es posible llegar a B” (p. 40).

P11 ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?



a) Una cantidad finita, ¿cuál?

b) Una cantidad infinita, ¿por qué?

c) No se puede saber, ¿por qué?

Dos participantes (33,3%) responde de acuerdo con este modelo.

Pregunta propuesta por Belmonte (2009), de 89 universitarios el 44,9% manifiestan que “no se puede saber”.

P15 ¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos; trata de graficar tu respuesta, en caso contrario, justifica tu respuesta.

Un participante (16.7%) presenta sus concepciones dentro de este modelo.

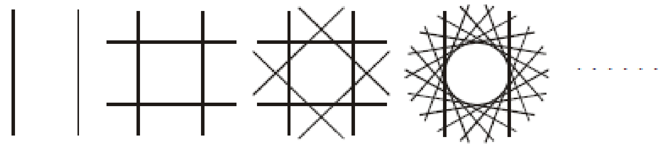
Pregunta propuesta por Belmonte (2009), de 178 universitarios, el 59% afirman que “no”, “porque es algo incalculable”, “no puede medirse”

P17 ¿Puedes realizar la siguiente resta: 7,424242... - 3,151515...? Si es posible escribe el resultado. De lo contrario explica por qué.

El participante (16,7%) proporciona una respuesta ubicada en este modelo.

Pregunta propuesta por Belmonte (2009) de 114 del bachillerato, el 36,8% afirma que no se puede “porque no se acaban los números”, “porque los números son infinitos”, “porque no sabemos cuántos números hay o faltan números”.

P19 Si observas el proceso siguiente, parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo ¿Se puede determinar el número total de rectas para obtener el círculo? Justifica tu respuesta.



Tres participantes (50%) proporcionan sus respuestas dentro de este modelo.

Esta pregunta fue propuesta por Belmonte (2009) de 73 universitarios el 13,7% que afirman que “no está de acuerdo, no se puede” (p. 490).

P20 Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito.

Un docente (16,7%) proporciona su respuesta dentro de este modelo.

Pregunta propuesta por Belmonte (2009). No existe una respuesta común para esta pregunta, pero de 91 universitarios hay un 14,3% que no responde a esta pregunta.

Se esperaba que las respuestas de este ítem de todos los participantes de este estudio estén a favor de este modelo.

4.3.1.5 Modelo de divergencia

P1 ¿Qué conjunto tiene más números?

N= {1, 2, 3, 4…}; M= {2, 4, 6, 8, 10, ...} Explica tu respuesta.

Tres participantes (50%), cuyos argumentos están dentro de este modelo.

Pregunta propuesta por Llopis (2014), de 43 respuestas, no hay ninguna relacionada con este modelo.

P2 ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos?

A · ———————————— B

C · ———————————————— D

Explica tu respuesta.

Dos participantes (33,3%), proporcionan respuestas relacionadas con este modelo.

Pregunta propuesta por Llopis (2014), de 43 encuestados, el 51% está relacionado a este modelo.

P4 ¿Dónde crees que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)? ¿Por qué?

Dos participantes (33,3%) relacionan sus ideas con este modelo.

Esta pregunta fue propuesta por Belmonte (2009, pp.240,478) a 89 universitarios. De estos el 65,2% afirman que “hay infinitos en ambos” y el 4,5% responden “porque va hasta el infinito, “porque no tiene fin. Es decir, que el 69,7% están en común con este modelo.

P5 Considera un número positivo cualquiera. A continuación, lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final? ¿Por qué?

Los seis participantes (100%) responden dentro de este modelo.

Pregunta propuesta por Belmonte (2009), de 113 del bachillerato el 43,4% afirma que “el proceso no acaba”, el 13,3% responde que “se hace muy pequeño”, “se acerca a cero” que sumado es 56,7% (pp. 254, 479).

P6 Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar, se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realizamos la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente.

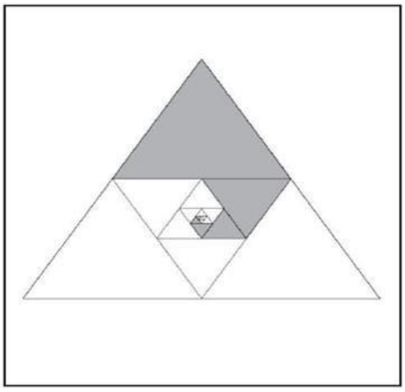
A) ¿Tiene fin este proceso? Explica tu respuesta

B) ¿Cómo será el área resultante?

a. Una cantidad finita

b. Una cantidad infinita

c. No se puede calcular

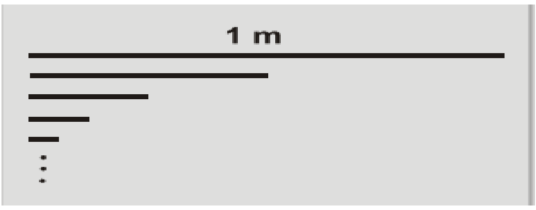


Cuatro participantes (66,7%), según sus afirmaciones, están dentro de este modelo.

Las ideas tienen mucho en común, pero aún con la idea del infinito potencial, es decir, que las operaciones que se realicen nunca tendrán fin o que es un proceso que nunca terminará.

Esta pregunta fue propuesta por Llopis (2014), de 43 estudiantes el 91% respondió “una cantidad finita”, “no tienen fin” (p.33).

P7 A continuación un grupo de segmentos de cantidad infinita, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, ¿obtendrás un segmento más largo que el de 1m? ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos?



Los seis participantes (100%) proporcionan argumentos dentro de este modelo.

Pregunta propuesta por Belmonte (2009, pp.269,482), de 77 alumnos universitarios el 6,5% afirma que son “2 metros”, idea relacionada con el infinito actual, pues da por terminada la operación. El 62,3% responde que “se acercará a 2m, pero nunca llegará, ambas ideas están dentro de este modelo, y en su conjunto sumarían el 67,8%.

P9 De la siguiente suma $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ su resultado:

a. Crece indefinidamente

b. Decrece indefinidamente

c. Se acerca indefinidamente a un número

d. Otra respuesta …

Justifique su respuesta.

Los seis participantes (100%) están a favor de que el resultado se acerca indefinidamente a un número.

Pregunta propuesta por Llopis (2014, p.29), se modificó la parte fraccionaria por cuestiones didácticas. De 43 encuestados, el 44% respondió que “crece indefinidamente”, incluyendo la respuesta como “siempre que esté sumando, la suma crece sin parar”, estas respuestas están relacionadas al modelo de divergencia. Los que respondieron “se acerca indefinidamente a un número” representa el 23%, idea relacionada al infinito potencial y un 19% representa a la respuesta “decrece indefinidamente”, esto es debido a que consideraron a la suma total de la operación.

P10 Observa la siguiente figura. En ella se muestra el proceso de dividir un segmento en dos partes iguales, tomar una de esas mitades y volverla a dividir y así sucesivamente. Así, los puntos M, N, O y P son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente.

Si se sigue haciendo este proceso, ¿crees que es posible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B? Justifica tu respuesta.

Cinco de los participantes (66,7%) argumentan sus ideas dentro de este modelo.

Esta pregunta fue propuesta por Llopis (2014, p.40), de 43 encuestados, el 59% responde que "no es posible llegar a B" o "que nunca llegará B" ya que es un proceso infinito, pero con tendencia al infinito potencial, mientras que el 20% confirman que "si", pero bajo la modalidad de un proceso terminado y "límites alcanzados" idea relacionada con el infinito actual.

P11 ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?

a) Una cantidad finita, ¿cuál?

b) Una cantidad infinita, ¿por qué?

c) No se puede saber, ¿por qué?

Cinco participantes (83,3%) proporciona respuestas dentro de este modelo.

Esta pregunta fue propuesta por Belmonte (2009, pp.272,482), de 89 universitarios el 44,9% responde que el "resultado es finito" justificando sus respuestas como: "porque el triángulo tiene fin o está limitado", "se acaban los círculos".

P12 Considera la siguiente sucesión de números: 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001 · · · Si continuamos escribiendo números, ¿crees que se llega a algún valor? ¿cuál? Explica tu respuesta.

Dos participantes (33,3%) responden acorde a este modelo.

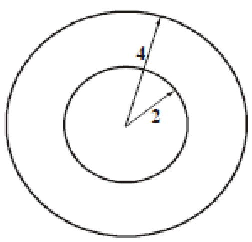
Pregunta propuesta por Belmonte (2009, pp.257,481), pero se modificó la pregunta original: "¿crees que se llegará a alcanzar el 0?" se cambió a la pregunta: ¿crees que se llega a algún valor? Se hizo este cambio con la intención de hacer reflexionar de manera general la pregunta. El 2,4% responde que llega a un valor (llega a 0), idea al infinito actual, pero el 94,1% afirma que no llegará a ningún valor(cero), idea de infinito potencial.

P13 ¿Existe algún número entre $1,\hat{9}$ y 2?, Justifique su respuesta.

Dos participantes (33,3%) proporcionan argumentos dentro de este modelo.

En este caso, los resultados de Belmonte (2009, p.263) son todo lo contrario, es decir que más del 85% afirman que "entre ambos números no puede haber otro"(idea del infinito actual) ya que el número periódico $1,\hat{9}$ por más que se le agreguen tantos nueves se acercaría más a 2, para eso justifican sus respuestas como "porque 2 es el siguiente" "Porque hay infinitos nueves" o "es periódico" "Porque son el mismo número" "Porque al sumarle algo llega a 2 o se pasa" "Porque 2 es una aproximación o redondeo".

P14 En la figura se muestra dos circunferencias de radios 2 y 4, respectivamente. ¿Tienen estas la misma cantidad de puntos?



Dos participantes (33,3%) proporciona argumentos que están dentro de este modelo.

Esta pregunta fue propuesta por Belmonte (2009, pp. 238,477), de 91 alumnos universitarios el 28,6% afirman que "ambos tienen infinitos puntos"

P16 Indica cuál(es) de las expresiones es la correcta. Justifica tu respuesta:

$$a)\ 0,\underline{9} < 1$$

$$b)\ 0,\underline{9} = 1$$

$$c)\ 0,\underline{9} > 1$$

Seis participantes (100%) responden dentro de este modelo.

Pregunta propuesta por Llopis (2014, p.30), de 43 encuestados, la más resaltante es la opción "b" que representa el 60%, dado como idea una concepción del infinito actual.

P17 ¿Puedes realizar la siguiente resta: 7,424242... - 3,151515...? Si es posible escribe el resultado. De lo contrario explica por qué.

Dos participantes (33,3%) responden bajo este modelo.

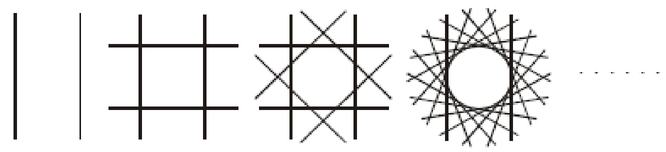
Pregunta propuesta por Belmonte (2009, pp.282, 484), de 114 del bachillerato, el 36,8% afirma que no se puede "porque no se acaban los números", "porque los números son infinitos", "porque no sabemos cuántos números hay o faltan números" y el 54,4% responden que si se puede.

P18 Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían? ¿Y en uno de 30 cm de lado? Explica tus respuestas

Cuatro participantes (66,7%) responden según este modelo.

De los 166 alumnos universitarios encuestados de Belmonte (2009, pp.230,476), el 69,9% confirman que en ambos hay "infinitos" y el 8,4% afirman "porque son infinitos".

P19 Si observas el proceso siguiente, parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo ¿Se puede determinar el número total de rectas para obtener el círculo? Justifica tu respuesta.



Dos participantes (33,3%) proporcionan argumentos dentro de este modelo.

Esta pregunta fue propuesta por Belmonte (2009, pp.302,489), así de 73 universitarios el 83,6% está de acuerdo que se puede obtener un círculo, los que respondieron que es “un proceso inacabado” (27,4%) y “en el infinito”, “con infinitas rectas” (31,5%), respuestas relacionadas a este modelo.

P20 Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito.

Los 5 docentes (83,3%) relacionan el concepto del infinito con palabras.

Pregunta propuesta por Belmonte (2009, pp.292,487), de 91 universitarios las respuestas más predominantes: “Sin fin, sin final” (19,8%), “Interminable o/e inacabable” (18,7%), “inmenso, millones, enorme, extenso, mucho, …” (17,6%), “eterno, perpetuo, duradero, inmortal” (18,7%), “inalcanzable, lejos, largo, universo, inmedible, ilimitado, …” (19,8%).

4.3.1.6 Modelo acotado-infinito/no acotado-infinito.

P17 ¿Puedes realizar la siguiente resta: 7,424242... - 3,151515...? Si es posible escribe el resultado. De lo contrario explica por qué.

Un participante (16,7%) proporciona respuestas relacionadas con este modelo.

Pregunta propuesta por Belmonte (2009, pp.282, 484) de 114 del bachillerato, el 54,4% responden que sí se puede.

A modo de síntesis, la **Tabla *4*** muestra el resumen del contraste de las concepciones de esta investigación con las repuestas de Belmonte (2009) y Llopis (2014). En este cuadro solo se enfatiza en el porcentaje que está a favor a un determinado modelo, en coherencia con el objetivo de esta investigación.

.

Tabla 4

Comparación de los modelos intuitivos de acuerdo con los resultados del análisis de las respuestas de los participantes

		PREGUNTAS																			
Aspecto		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**P11**	**P12**	**P13**	**P14**	**P15**	**P16**	**P17**	**P18**	**P19**	**P20**
Tópico		1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
S.R.		A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
Modelos	M1	16,7%	16,7%	16,7%	33.3%										16,7%						
		21%	21%	21%	6,7%										3,9%						
	M2	33,3%	50%	50%	16,7%										33,3%		16,7%				
		63%	51%	79%	23,6%									10,4%		60%					
	M3						16,7%		50%												
							0%		65%												
	M4	33.3%					16,7%	33,3%			16,7%	33,3%				16,7%		16,7%		50%	16,7%
		7%					20%	1,3%			59%	44,4%				54%		36,8%		13,7%	14,3%
	M5	50%	33%		33,3%	100%	66,7%	100%		100%	66,7%	83.3%	33,3%	33,3%	33,3%		100%	33,3%	66,7	33,3%	83,3%
		0%	51%		69,7%	56,7%	91%	67,8%		86%	59%	44,9%	96,5%	85%	28,6%		60%	54,4%	73,3%	83,6%	19,8%
	M6																	16,7%			
																		54,4%			

(azul)	Modelo intuitivo en las preguntas propuestas por Llopis
(amarillo)	Modelo intuitivo en las preguntas propuestas por Belmonte
	Modelo intuitivo en las preguntas de esta investigación

Leyenda

Modelos (M)
M1: Modelo de Inclusión
M2: Modelo Infinito=infinito
M3: Modelo Punto-marca
M4: Modelo de Indefinición
M5: Modelo de divergencia
M6: Modelo acotado-finito/no acotado-infinito

Tópico (T)
1: Conjuntos
2: Divisibilidad
3: Convergencia
4: Operatividad
5: Lenguaje

Sistemas de representación (S.R.)
A: Numérico
B: Geométrico
C. Gráfico
D: Verbal

4.3.2 Modelos intuitivos predominantes en los informantes

Según la **Tabla *5*** el modelo de divergencia es el más que predomina en los seis participantes. Expresiones como “se acerca a “, “tiende, pero no alcanzará”, “tiende a un número real más pequeño”, “crece indefinidamente” pone en evidencia dicho predominio. También se logra observar que las concepciones están más ligadas al infinito potencial, lo cual se relaciona con expresiones tales como: “Sí se podrá repetir el proceso cuántas veces uno quiera”, “Se obtiene un número real cada vez más pequeño”, “esto ocurrirá de manera infinita si se quiere”.

La clasificación de respuestas por modelo (Apéndice A) y su recuento por informante (**Tabla *5***), permite notar que el modelo predominante es el de divergencia. De hecho, de las 20 preguntas propuestas, el participante 1D2009 responde nueve (45%) vinculadas con este modelo, en 2D2013 se identifican diez respuestas (50%), 3D2009 proporciona once respuestas (55%) relacionadas con ese modelo, 4F2022 ocho respuestas (40%), 5F2022 proporciona once preguntas (55%) y, por último, el participante 6F2022, emite doce respuestas (60%) vinculadas con el modelo de divergencia.

Otro aspecto identificado es que las concepciones de los docentes (1D2009, 2D2013, 3D2009), además de estar más familiarizadas con el modelo de divergencia, también tienen alguna relación con las concepciones que caracterizan a otros modelos. En cambio, las concepciones de los futuros docentes solo se acercan más al modelo de divergencia y seguidamente el modelo de indefinición, aquí aparecen ideas como: “No se puede precisar”, “No se puede calcular”, “imposible de determinar”, “no se puede saber”, “no puede medirse”.

De los futuros docentes, las concepciones del participante 6F2022 tienen relación con cinco modelos intuitivos. El modelo que no aparece en este caso es de acotado-finito/no acotado-infinito. En el grupo de los docentes, también pasa lo mismo con el participante 1D2009. En este caso las preguntas 3 y 4 (P3 y P4), que se esperaba que las concepciones tengan relación con el modelo acotado-finito/no acotado-infinito, sus respuestas están ligadas al modelo de inclusión. Este guarda relación con expresiones: “Hay un número real más”, “en uno hay más números reales”, propias del infinito potencial: Otro modelo del que se tiene evidencia es el modelo infinito=infinito, vinculado con la expresión “Ambos tienen igual cantidad de puntos”. Finalmente, se ha de señalar que la idea del infinito matemático en el modelo acotado-finito/no acotado-infinito no está presente en la mayoría de las concepciones de los participantes, tal como se verifica en la ***Tabla 5.***

Tabla 5

Modelos que priman en cada informante, según sea docente o futuro docente

Informante	Modelo	Ítem
1D2009	Inclusión	P4
	Infinito=Infinito	P1, P2, P3, P14
	Punto-Marca	P8
	Indefinición	P11, P19, P20

Informante	Modelo	Ítem
	Divergencia	P5, P6, P7, P9, P10, P12, P16, P17, P18
	Acotado-finito/no acotado-infinito	0
2D2013	Inclusión	P2, P3, P14
	Infinito=Infinito	P4
	Punto-Marca	P8
	Indefinición	P1, P7, P19
	Divergencia	P1, P5, P6, P7, P9, P10, P11, P13, P16, P20
	Acotado-finito/no acotado-infinito	P17
3D2009	Inclusión	0
	Infinito=Infinito	P2, P3, P14, P16
	Punto-Marca	0
	Indefinición	P1
	Divergencia	P4, P6, P7, P9, P10, P11, P12, P17, P18, P19, P20
	Acotado-finito/no acotado-infinito	0
4F2022	Inclusión	0
	Infinito=Infinito	0
	Punto-Marca	0
	Indefinición	P6, P11
	Divergencia	P1, P2, P5, P7, P9, P11, P16, P20
	Acotado-finito/no acotado-infinito	0
5F2022	Inclusión	0
	Infinito=Infinito	P1,
	Punto-Marca	P6
	Indefinición	P7, P10, P15
	Divergencia	P2, P4, P5, P7, P9, P11, P14, P16, P18, P19, P20
	Acotado-finito/no acotado-infinito	0
6F2022	Inclusión	P1, P4
	Infinito=Infinito	P2, P3
	Punto-Marca	P8
	Indefinición	P17, P19
	Divergenci;	P1, P5, P6, P7, P9, P10, P11, P13, P14, P16, P18, P20
	Acotado-finito/no acotado-infinito	0

Conclusiones

Tomando los objetivos específicos como organizador de este apartado, se concluye lo siguiente:

Objetivo específico 1. *Analizar cuestionarios de trabajos referentes que indagan sobre las concepciones del infinito matemático para elaborar un instrumento de recogida de datos.*

- La revisión de los instrumentos empleados por Belmonte (2009), Llopis (2014) y Montes (2015) para recoger datos, permitió extraer ítems para construir un cuestionario ajustado a los conceptos que se desarrollan en el currículo peruano. Este instrumento fue validado mediante juicio de expertos. En el anexo 1 se muestra las fichas de validación de los dos expertos que respondieron oportunamente. Uno de ellos, es un autor referente en los trabajos sobre el infinito matemático (Montes, 2015) y, de hecho, una vez levantadas las observaciones que hizo en la primera versión del cuestionario, volvió a revisar dicho instrumento.

Objetivo específico 2. *Identificar las concepciones sobre el infinito matemático que tienen los informantes para describirlas.*

- El conocimiento sobre el infinito matemático, evidenciado por los informantes, ha mostrado que: 1) hay ideas del campo de la finitud que aún están enraizadas y que cuesta relacionarlas con el campo del infinito, 2) algunos informantes emplean objetos concretos para comprender el mundo del infinito en matemáticas y, como consecuencia, se generan confusiones y dudas; 3) las concepciones previas sobre el infinito, aprendidas en las escuelas, aún están presentes y eso puede ser un gran obstáculo para la comprensión del cálculo en los estudios universitarios, y 4) hay algunos participantes que sí manifiestan la comprensión previa del infinito actual.
- El cuestionario es útil para observar las concepciones de los participantes sobre el infinito matemático. Al comparar los resultados de esta investigación como las de Belmonte (2009) y Llopis (2014), se ve el predominio de dos modelos intuitivos: divergencia e Infinito=infinito. De hecho, se han identificado respuestas comunes de los informantes, lo cual les da solvencia a los resultados de la investigación presentada.
- La clasificación de las concepciones en modelos intuitivos ayudó a tener un panorama de cómo conciben los participantes la idea del infinito. Al respecto, se concluye que: el modelo intuitivo con menos participación es el de *acotado-finito/acotado-infinito*, eso quiere decir que los participantes aún les cuesta relacionar la noción del infinito dentro de intervalos acotados. En el caso del modelo *punto-marca* existen concepciones del infinito basadas en materiales concretos, eso demuestra que aun cuesta dejar las ideas de la finitud para analizar conceptos relacionados al infinito. El modelo de *indefinición* es el segundo modelo más predominante, lo

que significa que hay cierta dificultad en la comprensión de la concepción del infinito matemático.

Referencias

Belmonte, J. L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad* [Tesis doctoral, Universidad de Salamanca]. http://hdl.handle.net/10366/76247

Belmonte, J., y Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 139-171. https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v14n2/v14n2a2.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Trad. D. Fregono). Libros del Zorzal. http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F204043%2Fmod_resource%2Fcontent%2F2%2F287885313-Guy-Brousseau-Iniciacion-al-estudio-de-la-teoria-de-las-situaciones-didacticas-pdf.pdf

Buitrago, I., Gaviria, C., y Márquez, C. (2014). Algunos conceptos matemáticos asociados al infinito. Ingenierías USBMed, 5(2), 96–99. https://doi.org/10.21500/20275846.315

Garbin, S., y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Investigación Didáctica*, 20(1), 87-113. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21786

Gonzáles, J., Morales, A., y Sigarreta, J. M. (2013). Concepciones sobre el infinito: Un estudio a nivel universitario. *Matemática, Educación e Internet, 13(2),* 1-20. https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1061

Lestón, P., y Castañeda, A. (2008). Construcción del infinito en escenarios no escolares. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21, 836 - 845. https://clame.org.mx/documentos/alme21.pdf

Lestón, P., y Crespo, C. (2009). El infinito escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1117-1126. https://clame.org.mx/documentos/alme22.pdf

Llopis, D. (2014). *Concepciones del infinito en estudiantes de 1º de bachillerato de CCSSHH en el contexto de aprendizaje de límites* [Trabajo fin de máster, Universidad de Valencia]. http://hdl.handle.net/10550/52906

López, C. A. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y Tecnología, 14, 277-298.* https://www.palermo.edu/ingenieria/pdf2014/14/CyT_14_18.pdf

Marín Gaviria, I. (2014). Sobre el infinito y sus dificultades antes de Georg Cantor y sus obras. *Revista Ingienería, matemáticas y ciencias de la información*, 123-132. http://ojs.urepublicana.edu.co/index.php/ingenieria/article/view/232

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa. Una introducción conceptual*. Pearson Addison Wesley.

Mena, L. A., Mena, L. J., Montoya, D. E., Morales, A., y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa. Vol. 18 (3)*, 329-358. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362015000300329

Ministerio de Educación. (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria*.http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/4550

Ministerio de Educación. (2020). *Resolvamos problemas 5, Secundaria: cuaderno de trabajo de Matemática*. http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/MINEDU/6867

Ministerio de Educación. (2021). *Resolvamos problemas 4, Secundaria: cuaderno de trabajo de Matemática*. https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6866

Mora, F., y Barrantes, H. (2008). ¿Qué es la matemática? Creencia y concepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 4, 71-81. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6901/6587

Montes Navarro, M. Á. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito: un estudio de caso [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/10944

Neira Sanabria, G.I. (2012). Del álgebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En O.L. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (Énfasis, Vol. 2, pp. 13-42). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/pensamiento_epistemologia_y_lenguaje_matematico.pdf

Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación Cualitativa. Retos e Interrogantes* (Vol. I Métodos). La Muralla. S.A.

Piñeiro, G. E. (2013). *Cantor. El infinito en matemáticas.* RBA Coleccionables, S.A.

Sacristán, A. I. (1991). Los obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos. *Educación Matemática 3*(1), *5-18.* https://doi.org/10.24844/EM0301.01

Vega, J. C. (2014). *Concepciones en torno al infinito actual: Análisis mediado por el software Cabri Geometre* [Trabajo de maestría, Universidad Militar Nueva Granada]. http://hdl.handle.net/10654/11536

Apéndices

Apéndice A. Síntesis de las concepciones sobre el infinito evidenciadas los informantes

Tabla A 1

Síntesis de las concepciones de los informantes por modelo intuitivo

MODELO	PREGUNTAS	PARTICIPANTE	CONCEPCIÓN DEL INFINITO EJEMPLIFICA CON RESPUESTAS DE LOS INFORMANTES
Inclusión	P1	6F2022	El primer conjunto, porque la razón es 1 en cambio en el segundo la razón es de dos (números pares), además inicia desde el 2 hasta el infinito y el primer conjunto inicia desde 1 hasta el infinito
	P2	2D2013	Si solo nos ceñimos al gráfico de la figura la respuesta sería que el segmento CD posee más puntos.
	P3	2D2013	Bueno definitivamente creo que en el tramo de la curva AB hay más puntos.
	P4	1D2009	Hay un número real más.
		6F2022	En la semirrecta, porque va hacia el infinito. En el primer caso se sabe que entre un número y otro hay infinitos números, pero en el segundo caso a pesar de ser una semi recta hay más números reales.
	P14	2D2013	Si tenemos dos segmentos de diferentes y concretas, sus puntos son infinitos lo cual permite afirmar si una tiene más puntos que la otra.
Infinito=Infinito	P1	1D2009	Tienen igual cantidad.
		5F2022	Al tratarse números naturales infinitos, estos no tienen un límite y ambos conjuntos tienen la misma característica.
	P2	1D2009	Tienen igual cantidad. Porque si se traza una recta secante que corte al segmento AB también lo hará con el segmento CD.
		3D2009	Desde esa perspectiva ambos segmentos poseen los mismos puntos.
		6F2022	Ambos tienen igual, ya que una recta cualquiera que sea siempre posee infinitos puntos
	P3	1D2009	Ambos conjuntos tienen igual cantidad de puntos.
		6F2022	Ambas tienen la misma cantidad de puntos (6X2022).
		3D2009	Creo que tendrían los mismos puntos, ya que si consideramos a la recta como una función constante con dominio [1, 4] y a la vez tenemos el mismo dominio para la función cuadrática, tendríamos como resultado que para el mismo valor de x (el mismo punto) tendríamos un rango asignado según el tipo de función que observamos.
	P4	2D2013	Ambos hay la misma cantidad.
	P14	1D2009	Si. Ya que cada radio de 4 que se pueda trazar en la circunferencia grande contiene a un radio de 2u.
		3D2009	Sí, ya que como son circunferencias concéntricas se puede trazar el punto inicial de la más pequeña con el punto inicial de la más grande y así mismo cuando

MODELO	PREGUNTAS	PARTICIPANTE	CONCEPCIÓN DEL INFINITO EJEMPLIFICA CON RESPUESTAS DE LOS INFORMANTES
			concluiría con la circunferencia pequeña también terminaría con la circunferencia grande.
	P16	3D2009	Es la b, ya que, si utilizamos el concepto de fracción generatriz, nos daríamos cuenta que al transformarla en una fracción nos daría como resultado 9/9 y esto equivaldría a 1 (3X2009).
Punto-Marca	P6	5F2022	Al tomar una hoja de papel y un lápiz, va a depender mucho del grosor de la punta del lápiz hasta donde se pueda llegar.
	P8	1D2009	Teóricamente sí, pero prácticamente no.
		2D2013	Sí se podrá repetir el proceso cuántas veces uno quiera, pero realizado con material concreto la herramienta (el papel) sería el limitante.
		6F2022	Debería ponerse, pero como el papel se va a terminar ya que no tenemos una máquina que lo haga tan diminuto, por lo que opino que no se podría ya que existe un límite en dicho proceso.
Indefinición	P1	2D2013	Lo cual me hace dudar mi respuesta de que el conjunto N tiene más números.
		3D2009	No se puede precisar la cantidad exacta de número.
	P6	4F2022	No. No se puede calcular.
	P7	2D2013	Más pequeños eran inciertos que representa.
		5F2022	Eso es imposible de determinar con toda con precisión y a la vez que es imposible saber la medida al unirlos a todos.
	P10	5F2022	Es imposible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B, pero aun así si hablamos pensando matemáticamente, esto es imposible que se llegue a dar.
	P11	1D2009	Es finita porque cada diámetro nuevo es una fracción, pero no sé cuál.
		4F2022	No se puede saber.
	P15	5F2022	No existen distintos tamaños de infinito, el infinito es una palabra que es sinónimo de ilimitado por lo que, el tamaño, sino que este no tiene fin.
	P17	6F2022	No sé puede, porque en ambos hay números infinitos.
	P19	6F2022	No, el círculo está conformado por una sucesión infinita de puntos.
		2D2013	No se obtendrá un número total de rectas para construir un círculo, otra debemos separar el concepto de la figura con su representación concreta.
		1D2009	No es posible definir el número de rectas.
	P20	1D2009	No encuentro otra. En algunos casos podría ser equivalente.

MODELO	PREGUNTAS	PARTICIPANTE	CONCEPCIÓN DEL INFINITO EJEMPLIFICA CON RESPUESTAS DE LOS INFORMANTES
Divergencia	P1	6F2022	Se obtiene un número real cada vez más pequeño.
		2D2013	Ambos son infinitos.
		4F2022	Ambos tienen infinitos números.
	P2	4F2022	Ninguno. Ambos tienen infinitos puntos.
		5F2022	Ambos tienen infinitos puntos, por lo tanto, ninguno de los dos segmentos tiene más puntos que el otro.
	P4	3D2009	En ambos casos hay infinitos números reales.
		5F2022	Ambos tienen números infinitos.
	P5	1D2009	El resultado tiende a cero.
		2D2013	Resulta una ley de formación, progresión geométrica de números con una razón igual a ½.
		3D2009	Creo que no habría final, sino una tendencia hacia el cero, ya que por más que sigamos dividiendo, nos acercaríamos al cero, pero nunca llegaríamos a él.
		5F2022	No habrá un resultado final, ya que esta operación (dividir entre dos) nos llevará a un número que puede ser operado de la misma forma que el anterior, y esto ocurrirá de manera infinita si se quiere.
		4F2022	Cero.
		6F2022	Se obtiene un número Real cada vez más pequeño.
	P6	3D2009	Siempre obtendremos un nuevo triángulo equilátero, el cual inicia el ciclo nuevamente. El área es una cantidad infinita.
		6F2022	No tiene fin porque siempre se va a poder hacer la misma operación a pesar de lo diminuto que quede la figura geométrica. Una cantidad infinita.
		2D2013	No tiene fin este proceso, pero a nivel abstracto o con una herramienta adecuada se podrá percibir El infinito del proceso. El área resultante es una cantidad infinita.
		1D2009	Siempre será posible formar un nuevo triángulo (1X2009).
	P7	1D2009	Sí. La suma es 1/ (1-1/2) =2.
		2D2013	Creo que tenderá a la unidad, pero no llegará a alcanzarla.
		3D2009	2 metros.
		4F2022	No se puede obtener un segmento más largo que el de 1m. La medida de la unión de todos será de Infinito.
		5F2022	Sí se obtendrá un segmento más largo que el de 1 metro (5X2022).
		6F2022	De las 5 rectas sale 0.9375. Pero se ve que las rectas siguen por lo tanto debería ser una recta infinita.
	P9	1D2009	La suma tiene como tope o como límite a 4.
		2D2013	La suma se acerca a 3.

MODELO	PREGUNTAS	PARTICIPANTE	CONCEPCIÓN DEL INFINITO EJEMPLIFICA CON RESPUESTAS DE LOS INFORMANTES
		3D2009	Se acerca indefinidamente al número 4, ya que al sumar las fracciones que obtenemos, éstas nos llevan a acercarnos al número 1, más el uno y el dos, por eso creo que se acerca indefinidamente al número 4.
		4F2022	Se acerca a 3.
		5F2022	El resultado seguirá aumentando a medida que se sume la mitad del número anterior, por lo que el resultado de la suma crecerá indefinidamente.
		6F2022	Crece, ya que por más pequeña que vaya siendo el resultado de la división siempre va ir en aumento.
	P10	2D2013	No, tiende a B, pero no llegará a B
		3D2009	Un punto que coincida con B sería imposible, que se acerque indefinidamente a B sí, ya que al igual que la pregunta anterior se dividirá indefinidamente pero nunca llegará a tocar a B.
		1D2009	No, porque siempre entre dos puntos es posible ubicar uno central que resulta ser diferente a los extremos.
		6F2022	Se tendría que hacer el mismo proceso infinitamente, llegaría si solo se tomarían números naturales o enteros, pero si se toma todos los reales no.
	P11	2D2013	La suma tiende a 12 pero no llegará a ser 12
		3D2009	Si ubicamos los diámetros de forma vertical, nos daremos cuenta que todos ellos forman la altura del triángulo y cómo sabemos el área del triángulo es (base x altura) /2, trazando la altura obtendremos dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa y un cateto vale 12 y 2cm respectivamente. Aplicamos teorema de Pitágoras y obtenemos una altura de 2 raíz de 37.
		4F2022	Infinito.
		5F2022	Porque siempre habrá espacio para un nuevo circulo, donde se pueda añadir una nueva cantidad de diámetro a la suma total.
		6F2022	Una cantidad infinita, ya que por más pequeños que sean siempre ascenderán.
	P12	1D2009	El resultado es 1/9. Porque cumple las condiciones de suma infinita $\frac{0.1}{1-0.1}=\frac{1}{9}$
		3D2009	Se tiende al número cero en este caso ya que el denominador crece, mientras que el numerador es el mismo.
	P13	2D2013	Existen infinitos números reales entre dos números.
		6F2022	Sí, por ejemplo, el 1, 99 ó 1,9999999... infinitas veces.
	P14	5F2022	Si se habla de la cantidad de puntos que hay en una recta, entonces ambos tienen infinitos puntos.
		6F2022	Sí, porque ambas tienen infinitos puntos
	P16	2D2013	Marco la opción a sin justificar su respuesta.
		4F2022	Marco la opción a sin justificar su respuesta.

MODELO	PREGUNTAS	PARTICIPANTE	CONCEPCIÓN DEL INFINITO EJEMPLIFICA CON RESPUESTAS DE LOS INFORMANTES
		5F2022	La expresión correcta es la "a", porque el 0,9 con sombrerito podrá acercarse mucho al valor 1, pero jamás lo alcanzará, siempre será menor que 1.
		3D2009	Es la b, ya que, si utilizamos el concepto de fracción generatriz, nos daríamos cuenta que al transformarla en una fracción nos daría como resultado 9/9 y esto equivaldría a 1.
		1D2009	Marcó la opción b sin justificar su respuesta.
		6F2022	La "a" porque la unidad es mayor a un número decimal.
	P17	3D2009	Es posible a través de la transformación a fracciones generatrices, ya que ambos son decimales periódicos puros y por ello se pueden convertir en fracciones.
		1D2009	Sí. 4,2727…
	P18	1D2009	En ambas cabe infinitos puntos.
		5F2022	La cantidad de puntos que cabrían son infinitos, aunque el cuadrado mida 10 o 30 cm de lado. Siempre en ese espacio habrá una cantidad infinita de puntos.
		6F2022	En ambos caben infinitos puntos.
		3D2009	Los puntos dentro de un polígono simulan a un plano y sabemos que en un plano la cantidad de puntos son infinitos.
	P19	3D2009	Creo que mientras más rectas paralelas se coloquen será más notoria la circunferencia que se logra.
		5F2022	El número de rectas que se necesita para obtener la circunferencia es infinito (5X2022).
	P20	2D2013	Recta, plano, el número de la belleza (número áureo)
		3D2009	Indeterminado, indefinido y tiende al infinito.
		4F2022	Sin límite, sin fin, indefinido.
		5F2022	Ilimitado, no hay un final, no hay un último elemento.
		6F2022	Ilimitado, innumerable, incalculable.
Acotado-finito/no acotado-infinito	P17	2D2013	Podemos cortar los decimales o redondearlos y obtener el resultado, en mí caso he cortado los decimales.

Anexos

Anexo1. Fichas de validación de los expertos

UNIVERSIDAD DE PIURA
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador : **Moisés Pariahuache Ahumada**

1.2 Cargo e institución donde labora : **Docente – Universidad de Piura**

1.3 Nombre del instrumento evaluado : **Cuestionario de Concepciones sobre el infinito matemático**

1.4 Autor del instrumento : **Cristhian Rebolledo Benites**

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
• PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	☐	☐	x	
• COHERENCIA	Los ítems responden a lo que se debe medir en la variable y sus dimensiones.	☐	☐	x	
• CONGRUENCIA	Los ítems son congruentes entre sí y con el concepto que mide.	☐	☐	x	
• SUFICIENCIA	Los ítems son suficientes en cantidad para medir la variable.	☐	☐	x	Los ítems garantizan equilibrio, pero P9 difiere en la forma (Opción múltiple)
• OBJETIVIDAD	Los ítems se expresan en comportamientos y acciones observables.	☐	☐	x	
• CONSISTENCIA	Los ítems se han formulado en concordancia a los fundamentos teóricos de la variable.	☐	☐	x	
• ORGANIZACIÓN	Los ítems están secuenciados y distribuidos de acuerdo a dimensiones e indicadores.	☐	☐	x	
• CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	☐	☐	x	La representación en P2 y P7 puede mejorarse.
• FORMATO	Los ítems están escritos respetando aspectos técnicos (tamaño de letra, espaciado, interlineado, nitidez).	☐	☐	x	
• ESTRUCTURA	El instrumento cuenta con instrucciones, consignas, opciones de respuesta bien definidas.	☐	x	☐	Sugerencia: considerando P7, P11 y P19, comunicar en las instrucciones que se espera respuestas basadas en la matemática más que en la posibilidad fáctica.
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)					
		C	B	A	Total

Elaboración: Juan Carlos Zapata Ancajima

Coeficiente de validez : $\frac{A + B + C}{30}$ = **0.96**

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Muy Buena

Piura, 28 de mayo de 2021.

Moisés P

Firma del validador

UNIVERSIDAD DE PIURA
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

I. Información General

1.1 Nombres y apellidos del validador : **Montes Navarro, Miguel Á.**

1.2 Cargo e institución donde labora : **Profesor Ayudante Doctor, Universidad de**

1.3 Nombre del instrumento evaluado : **Cuestionario de Concepciones sobre el infinito matemático**

1.4 Autor del instrumento : **Cristhian Rebolledo Benites**

II. Aspectos de validación

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	**Indicadores**	**D**	**R**	**B**	
• Pertinencia	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.			x	
• Coherencia	Los ítems responden a lo que se debe medir en la variable y sus dimensiones.			x	
• Congruencia	Los ítems son congruentes entre sí y con el concepto que mide.		x		
• Suficiencia	Los ítems son suficientes en cantidad para medir la variable.			x	
• Objetividad	Los ítems se expresan en comportamientos y acciones observables.			x	
• Consistencia	Los ítems se han formulado en concordancia a los fundamentos teóricos de la variable.			x	
• Organización	Los ítems están secuenciados y distribuidos de acuerdo a dimensiones e indicadores.			x	
• Claridad	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.			x	
• Formato	Los ítems están escritos respetando aspectos técnicos (tamaño de letra, espaciado, interlineado, nitidez).			x	
• Estructura	El instrumento cuenta con instrucciones, consignas, opciones de respuesta bien definidas.			x	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)			1	9	29
		C	B	A	Total

Elaboración: Juan Carlos Zapata Ancaiima

Coeficiente de validez : $\frac{A + B + C}{30}$ = **0.97**

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	• Validez nula
0,50 – 0,59	• Validez muy baja
0,60 – 0,69	• Validez baja
0,70 – 0,79	• Validez aceptable
0,80 – 0,89	• Validez buena
0,90 – 1,00	• Validez muy buena

III. Calificación global

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez Muy buena

Ciudad, XX de mayo de 2021.

MONTES NAVARRO MIGUEL ANGEL - 48963956S

Firmado digitalmente por MONTES NAVARRO MIGUEL ANGEL - 48963956S
Fecha: 2021.05.25 20:22:33 +02'00'

Firma del validador

Anexo 2. Respuestas de los informantes a las preguntas del cuestionario

P1. ¿Qué conjunto tiene más números? N= {1; 2; 3; 4;...}; M= {2; 4; 6; 8; 10;...}. Explique su respuesta.

6 respuestas

Tienen igual cantidad.

A primera vista el conjunto N tiene más números porque implica todos los naturales, mientras el M solo números pares, pero por otro lado ambos tienden al infinito, lo cual me hace dudar mi respuesta de que el conjunto N tiene más números.

Ninguno, ya que ambos son infinitos, es decir, que no se puede precisar la cantidad exacta de número que existen en cada conjunto para poder responder la pregunta.

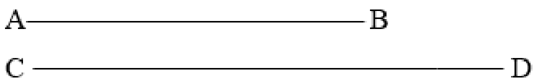
Ninguno. Ambos tienen infinitos números.

A simple vista algunos pueden pensar que el conjunto N tiene más elementos que el conjunto M, sin embargo al tratarse números naturales infinitos, estos no tienen un limite y ambos conjuntos tienen la misma característica. Entonces ninguno de los dos tiene más elementos que el otro, esta pregunta tendría una respuesta clara solo si se llegara a delimitar los conjuntos, pero en este caso al ser infinitos no hay un conjunto con más elementos.

El primer conjunto, porque la razón es 1 en cambio en el segundo la razón es de dos (números pares), además inicia desde el 2 hasta el infinito y el primer conjunto inicia desde 1 hasta el infinito

P2. ¿Cuál de los siguientes segmentos posee más puntos? Explique su respuesta.

6 respuestas



Tienen igual cantidad. Por cada recta secante que corte AB lo hará a CD.

Si solo nos ceñimos al gráfico de la figura la respuesta sería que el segmento CD posee más puntos, pero teóricamente hablando una recta es un conjunto infinito de puntos, por lo que el segmento, que es un trozo de la recta es también un conjunto infinito de punto limitado por dos extremos, lo cual las haría equivalentes, lo cual se enfatiza en el hecho que no se dan las medidas de ningún segmento.

Según la definición de segmento, es una porción de recta delimitada por dos puntos. Desde esa perspectiva ambos segmentos poseen los mismos puntos.

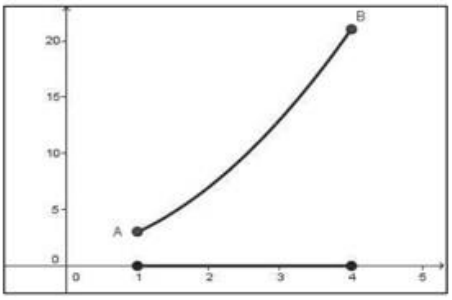
Ninguno. Ambos tienen infinitos puntos.

Ambos tienen infinitos puntos, por lo tanto ninguno de los dos segmentos tiene más puntos que el otro.

Ambos tienen igual, ya que una recta cualquiera que sea siempre posee infinitos puntos.

P3. Observe la siguiente función cuadrática. Si tomamos el tramo de curva entre A y B, ¿Dónde hay más puntos, en el intervalo [1, 4] de la variable x o en el tramo de curva AB? Explique su respuesta.

6 respuestas



Igual cantidad.

Bueno, definitivamente creo que en el tramo de la curva AB hay más puntos porque lo relaciono más con la distancia recorrida al observar que en este caso nos dan los valores numéricos.

Creo que tendrían los mismo puntos, ya que si consideramos la a la recta como una función constante con dominio [1; 4] y a la vez tenemos el mismo dominio para la función cuadrática, tendríamos como resultado que para el mismo valor de x (mismo punto) tendríamos un rango asignado según el tipo de función que observamos.

Ninguno.

En este caso, al tratarse de un plano cartesiano, se podría decir que depende de las separaciones numéricas que hayan hecho en los ejes. Sin embargo, esto no ocurre, y nuevamente se puede afirmar que hay infinitos puntos en amabas líneas, tanto en la curva como en la línea recta.

Ambas tienen la misma cantidad de puntos.

P4. ¿Dónde cree que hay más números reales, en el intervalo [0, 1] o en la semirrecta [0, ∞)? Explique su respuesta.

6 respuestas

En el intervalo hay un número real más.

Siempre he creído que tanto en un intervalo como en la semirrecta existen infinitos números reales por lo tanto creo que en ambos hay la misma cantidad.

Según la propiedad de densidad de los número reales, siempre entre dos número reales, existe otro número real en medio de ellos, así que en ambos casos hay infinitos números reales en ambos casos.

Ninguno.

Al tratarse de números reales, con la característica de la densidad, entonces ambos tienen números infinitos.

En la semirecta, porque va hacia el infinito. En el primer caso se sabe que entre un número y otro hay infinitos números, pero en el segundo caso a pesar de ser una semi recta hay más números reales.

P5. Considere un número positivo cualquiera. A continuación, lo divide entre dos; el resultado lo vuelve a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final? ¿Por qué?

6 respuestas

El resultado tiende a cero.

Resulta una ley de formación, progresión geométrica de números con una razón igual a 1/2.

Creo que no habría final, sino una tendencia hacia el cero, ya que por más que sigamos dividiendo, nos acercaríamos al cero, pero nunca llegaríamos a él.

0

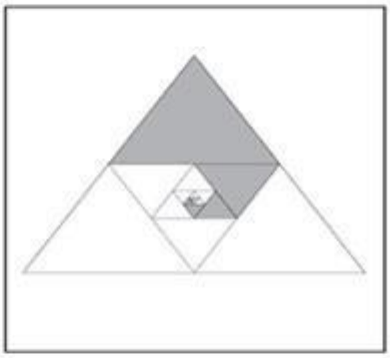
No habrá un resultado final, ya que esta operación (dividir entre dos) nos llevara a un número que puede ser operado de la misma forma que el anterior, y esto ocurrirá de manera infinita si se quiere.

Se obtiene un número Real cada ves más pequeño.

P6. Se tiene un triángulo equilátero. En primer lugar, se unen los puntos medios de los lados de este triángulo formando un nuevo triángulo equilátero y se colorea uno de los triángulos resultantes. Luego, realice la misma tarea con el triángulo central. Y así sucesivamente.

A) ¿Tiene fin este proceso? Explique su respuesta

6 respuestas



No tiene fin, dado que cada segmento q conforma el lado de un triángulo siempre tendrá un punto medio, entonces siempre será posible formar un nuevo triángulo.

No tiene fin este proceso, tal vez gráficamente en un papel tenga fin pero es por la herramienta que se usa para proyectarla, la imagen en el papel es solo una representación del concepto. Pero a nivel abstracto o con una herramienta adecuada se podrá percibir el infinito del proceso.

No creo que tenga fin, ya que como resultado siempre obtendremos un nuevo triángulo equilátero, el cual inicia el ciclo nuevamente.

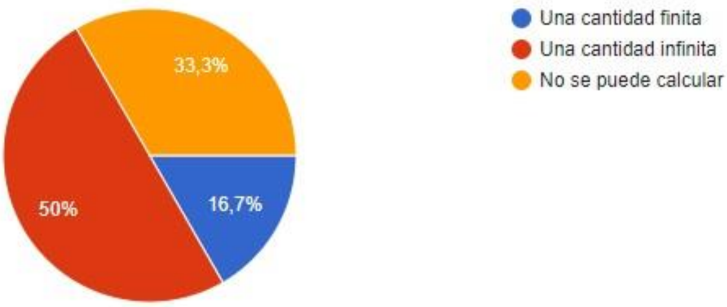
No

Este proceso no tiene fin, se puede hacer de manera infinita. Sin embargo, es necesario aclarar que este proceso no se puede hacer en la realidad, ya que al tomar un hoja de papel y un lápiz, va a depender mucho del grosor de la punta del lápiz hasta donde se pueda llegar. Pero geométricamente hablando, este proceso en el plano puede darse de manera infinita.

No tiene fin porque siempre se va ha poder hacer la misma operación a pesar de lo diminuto que quede la figura geométrica.

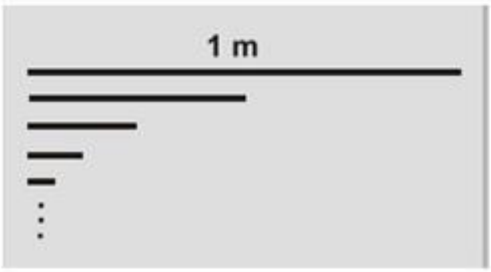
B. Del ítem anterior ¿Cómo será el área resultante?

6 respuestas



P7. A continuación un grupo de segmentos de cantidad infinita, donde la longitud de cada trozo es la mitad del anterior, y los va uniendo uno junto a otro, ¿obtendrá un segmento más largo que el de 1m? ¿Cuánto medirá cuando los hayas unido todos?

6 respuestas



Sí. La suma es 1/(1-1/2)=2.

Tengo un poco de duda en mi respuesta, pero me aferro a la siguiente respuesta, creo que tenderá a la unidad, pero no llegará a alcanzarla. lo hice de forma gráfica en mi cuaderno porque tenía dudas, y claro al principio al unir los segmentos se completaban fácilmente pero los más pequeños eran inciertos de representar, por ello mi respuesta.

No se puede obtener un segmento más largo que el de 1m. La medida de la unión de todos será de 2 metros.

Infinito

Si unimos los trozos que se encuentran debajo del segmento que mide 1 metro junto al segmento de 1 metro, pues sí se obtendrá un segmento más largo que el de 1 metro. Pero si la pregunta fuera: ¿Obtendrá un segmento más largo que el de 1m, sin contar el de 1m? En ese caso, se pude afirmar con toda certeza de que los segmentos unidos que están debajo del que mide 1m, jamás llegarán a medir un metro. Acerca de la medida cuando los haya unido todos, eso es imposible de determinar con toda con precisión, ya que si hablamos de unión de segmentos que son la mitad de del anterior, entonces nunca se llegará a tener la lista completa de segmentos y la longitud de cada uno, por lo que es imposible saber la medida al unirlos a todos.

De las 5 rectas sale 0.9375. Pero se ve que las rectas siguen por lo tanto debería ser una recta infinita.

P8. Imagínese que tiene una hoja de papel. La divide en dos trozos iguales y se queda con uno de ellos. La parte con la que se ha quedado la vuelve a dividir en dos partes iguales y se queda con una de ellas. Y así sucesivamente. ¿Se podrá repetir el proceso tantas veces como quiera? Justifique su respuesta.

6 respuestas

Teóricamente sí, prácticamente no.

Sí se podrá repetir el proceso cuántas veces uno quiera, pero realizado con material concreto la herramienta (el papel) sería el limitante.

No. Debido a que el material que estamos usando(hoja de papel) no permitiría realizar el proceso las veces que quisiera. (El proceso se podría dar infinitas veces)

Sí

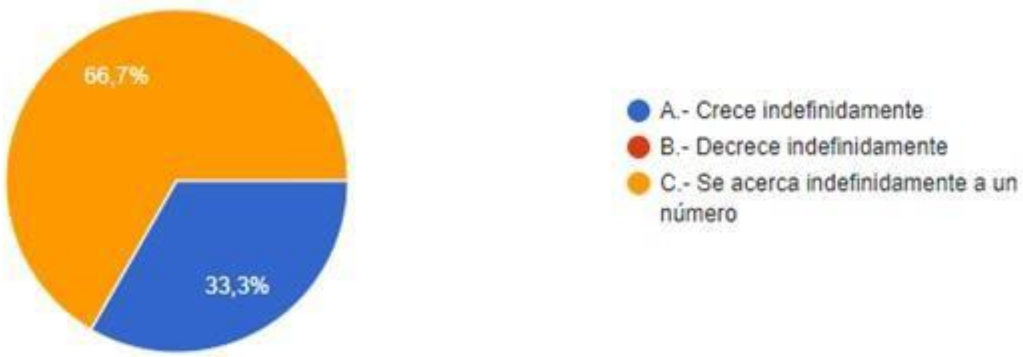
No, en nuestra realidad lo que ocurrirá es que el papel se vuelva muy pequeñito y las tijeras muy grandes para poder cortar aquel trozo de papel en dos, por lo que este proceso no se podría repetir tantas veces como quisiéramos. Sin embargo, matemáticamente hablando este proceso sería infinito, y siempre se podrá obtener un nuevo trozo de papel que pueda ser cortado en dos.

Debería ponerse, pero como el papel se va a terminar ya que no tenemos una máquina que lo haga tan diminuto, por lo que opino que no se podría ya que existe un límite en dicho proceso.

P9. De la siguiente suma. Su resultado:

6 respuestas

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ?$$



Justifique la respuesta que haya marcado en la P9.

6 respuestas

La suma tiene como tope o como límite a 4.

la suma se acerca a 3 paso lo mismo que P6 y P7.

Se acerca indefinidamente al número 4, ya que al sumar las fracciones que obtenemos, éstas nos llevan a acercarnos al número 1, más el uno y el dos, por eso creo que se acerca indefinidamente al número 4.

Se acerca a 3

El resultado seguirá aumentando a medida que se sume la mitad del numero anterior, por lo que el resultado de la suma crecerá indefinidamente.

Crece, ya que por más pequeña que vaya siendo el resultado de la división siempre va ir en aumento.

P10. Observe la siguiente figura. En ella se muestra el proceso de dividir un segmento en dos partes iguales, tomar una de esas mitades y volverla a dividir y así sucesivamente. Así, los puntos M, N, O y P son los puntos medios de los segmentos AB, MB, NB y OB respectivamente. Si se sigue haciendo este proceso, ¿cree que es posible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B? Justifique su respuesta.

6 respuestas

No, porque siempre entre dos puntos es posible ubicar uno central que resulta ser diferente a los extremos.

no, tiende a B pero no llegará a B.

Un punto que coincida con B sería imposible, que se acerque indefinidamente a B sí, ya que al igual que la pregunta anterior se dividirá indefinidamente pero nunca llegará a tocar a B.

No

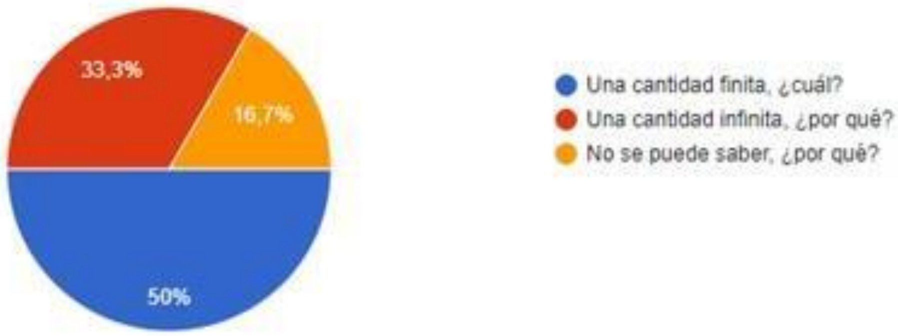
Es imposible llegar a una situación en la que el punto medio coincida con el punto B, esto quizás se pueda llegar a dar si lo hacemos con materiales concretos en nuestra realidad, pero aun así si hablamos pensando matemáticamente, esto es imposible que se llegue a dar.

Se tendría que hacer el mismo proceso infinitamente, llegaría si solo se tomarían números naturales o enteros, pero si se toma todos los reales no.

P11. ¿Cuánto suman los diámetros de todos los círculos de la siguiente figura si continúan haciéndose cada vez más pequeños?

6 respuestas

- Una cantidad finita, ¿cuál?
- Una cantidad infinita, ¿por qué?
- No se puede saber, ¿por qué?



Justifique la respuesta que haya marcado en la P11.

6 respuestas

Es finita porque cada diámetro nuevo es una fracción del anterior, pero no sé cuál.

la suma tiende a 12 pero no llegará a ser 12

Si ubicamos los diámetros de forma vertical, nos daremos cuenta que todos ellos forman la altura del triángulo y cómo sabemos el área del triángulo es (base x altura)/2, trazando la altura obtendremos dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa y un cateto vale 12 y 2cm respectivamente. Aplicamos teorema de Pitágoras y obtenemos una altura de 2 raíz de 37.

Infinito

Porque siempre habrá espacio para un nuevo circulo, donde se pueda añadir una nueva cantidad de diámetro a la suma total.

Una cantidad infinita, ya que por más pequeños que sean siempre ascenderán

P12. Considere la siguiente sucesión de números: 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001 · · ·Si continuamos escribiendo números, ¿cree que se llega a algún valor? ¿cuál? Explique su respuesta

6 respuestas

Sí: 1/9. Porque cumple las condiciones de suma infinita: 0.1/(1-0.1)=1/9.

es decir que en algún momento lleguemos a un valor definitivo, entonces la respuesta es no, porque los números ya sean naturales, racionales, irracionales o reales son infinitos.

Se tiende al número cero en este caso ya que el denominador crece, mientras que el numerador es el mismo.

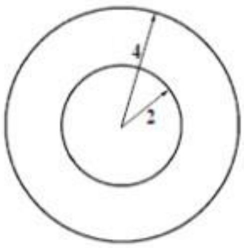
No

No se llega a ningún valor, se seguirá continuando esta sucesión numérica de manera infinita.

Al infinito, porque siempre van ha existir los ceros a la izquierda y estos puedes ser infinitos.

P14. En la figura se muestra dos circunferencias de radios 2 y 4, respectivamente. ¿Tienen estas la misma cantidad de puntos? Explique su respuesta

6 respuestas



Sí. Ya que cada radio de 4 que se pueda trazar en la circunferencia grande, contiene a un radio de 2 u.

Entiendo que los radios son segmentos de recta, en donde las distancias pueden ser iguales o una mayor que la otra, pero si hablamos de los puntos estos son infinitos, su mismo concepto no tiene una definición ni tampoco nos referimos a ella en base a unas dimensiones, entonces si tenemos dos segmentos de diferente distancia podemos afirmar que aunque sus medidas son diferentes y concretas, sus puntos son infinitos lo cual no nos permite afirmar si una tiene más puntos que la otra.

Sí, ya que como son circunferencias concéntricas se puede trazar el punto inicial de la más pequeña con el punto inicial de la más grande y así mismo cuando concluiría con la circunferencia pequeña también terminaría con la circunferencia grande.

No

Si se habla de la cantidad de puntos que hay en una recta, entonces ambos tienen infinitos puntos, por lo que no hay una cantidad precisa.

Sí, porque ambas tienen infinitos puntos

P15. ¿Cree que existen diferentes tamaños de infinito? Si es así, indique un ejemplo de cada uno de ellos, dibuje y justifique su respuesta.

1 respuesta

No existen distintos tamaños de infinito, el infino es una palabra que es sinónimo de ilimitado por lo que, el tamaño no importa sino que este no tiene un fin o limites.

P16. Indique cuál(es) de las expresiones es la correcta. Justifique su respuesta:

6 respuestas

$$a)\ 0,\overline{9} < 1$$
$$b)\ 0,\overline{9} = 1$$
$$c)\ 0,\overline{9} > 1$$

b

a

Es la b, ya que si utilizamos el concepto de fracción generatriz, nos daríamos cuenta que al transformarla en una fracción nos daría como resultado 9/9 y esto equivaldría a 1.

A

La expresión correcta es la "a", porque el 0,9 con sobrerito podrá acercarse mucho al valor 1, pero jamás lo alcanzará, siempre será menor que 1.

La correcta es la "a" porque la unidad es mayor a un numeros decimal

P17. ¿Puede realizar la siguiente resta: 7,424242... - 3,151515...? Si es posible escriba el resultado. De lo contrario explique por qué no es posible.

6 respuestas

Sí. 4.272727....

4,27272727... Sí es posible, podemos cortar los decimales o redondearlos y obtener el resultado, en mi caso he cortado los decimales.

Sí es posible a través de la transformaciones a fracciones generatrices, ya que ambos son decimales periódicos puros y por ello se pueden convertir en fracciones.

No

4,272727...

No sé puede, porque en ambos hay números infinitos.

P18. Suponga que tiene que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puede indicar qué cantidad de puntos cabrían? ¿Y en uno de 30 cm de lado? Explique sus respuestas

6 respuestas

En ambas cabe infinitos puntos.

puede que en ambos el número de puntos sea el mismo, depende de si use un lapicero o un plumón cuya punta en muy gruesa, pero si uso, claro el mismo bolígrafo el cuadrado de 10 cm tendría una menor cantidad de puntos.

No. ya que los puntos dentro de un polígono simulan a un plano y sabemos que en un plano la cantidad de puntos son infinitos.

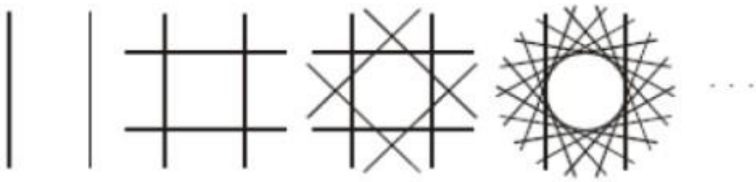
No

La cantidad de puntos que cabrían son infinitos, aunque el cuadrado mida 10 o 30 cm de lado. Siempre en ese espacio habrá una cantidad infinita de puntos.

En ambos caben infinitos puntos.

P19. Si observa el proceso siguiente, parece que rotando sucesivamente un par de rectas paralelas se puede obtener un círculo ¿Se obtendrá un número total de rectas para obtener el círculo? ¿Está de acuerdo? Justifique su respuesta.

6 respuestas



No es posible definir el nro de rectas.

no se obtendrá un número total de rectas para construir un círculo, otra debemos separar el concepto de la figura con su representación concreta, por ejemplo en esa circunferencia se observa claramente un circulo, pero si lo representamos en un papelote con esa misma cantidad de rectas, estoy segura que observaríamos un polígono de un número determinado de lados.

Creo que mientras más rectas paralelas se coloquen será más notoria la circunferencia que se logra.

No

Para obtener ese circulo hay que formar la circunferencia del mismo, por lo que el número de rectas para obtener aquella circunferencia depende del número de puntos que se necesiten para formar la circunferencia. Entonces para obtener una circunferencia perfecta, es decir que no este conformada por lados muy pequeños, sino que sean puntos que forman una línea curva (circunferencia)es necesario que cada recta pase por un punto de la circunferencia. Si esto es así se puede afirmar qué el número de rectas que se necesita para obtener la circunferencia es infinito.

No, el circulo está conformado por una una susecion infinita de puntos

P20. Escriba al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puede realizar un dibujo.

6 respuestas

No encuentro otra. En algunos casos podría ser equivalente a ilimitado.

Recta, plano, el número de la belleza (número áureo).

indeterminado, indefinido y "tiende al infinito"

Sin límite, sin fin, indefinido.

ilimitado, no hay un final, no hay un ultimo elemento.

Ilimitado, innumerable, incalculable