



# DISEÑO Y EVALUACIÓN DE FILTRO CFAR PARAMÉTRICO PARA DETECCIÓN DE CONTACTOS EN IMÁGENES DE RADAR MARINO

Ernesto Paiva-Peredo

Piura, marzo de 2015

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Mecánico-Eléctrica

Paiva, E. (2015). *Diseño y evaluación de filtro CFAR paramétrico para detección de contactos en imágenes de radar marino* (Tesis de pregrado en Ingeniería Mecánico-Eléctrica). Universidad de Piura, Facultad de Ingeniería. Programa Académico de Ingeniería Mecánico-Eléctrica. Piura, Perú.



Esta obra está bajo una <u>licencia</u> <u>Creative Commons Atribución-</u> <u>NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú</u>

<u>Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura</u>

# UNIVERSIDAD DE PIURA

# FACULTAD DE INGENIERÍA



## **"DISEÑO Y EVALUACIÓN DE FILTRO CFAR PARAMÉTRICO PARA DETECCIÓN DE CONTACTOS EN IMÁGENES DE RADAR MARINO"**

Tesis para optar el Título de Ingeniero Mecánico Eléctrico

### ERNESTO ALONSO PAIVA PEREDO

Asesor: PhD Ing. César Chinguel Arrese

Piura, Marzo 2015

"A mi madre, Rosana del Carmen Peredo Vílchez y a mi tío, Eduardo Alonso Vilela Peredo, por sus consejos, valores, motivación, amor y apoyo constante e incondicional".

"A mi familia y amigos por su cariño y preocupación por mi futuro".

## Prólogo

La motivación en la presente tesis, parte del deseo de presentar un requerimiento para la obtención del título de grado y generar un aporte a un equipo de trabajo encabezado por el PhD Ing. César Chinguel Arrese e integrado por alumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Piura.

Este tema de tesis, se genera producto del trabajo conjunto que desarrollan la Marina de Guerra del Perú y la Universidad de Piura, para la modernización de los sistemas de control de las fragatas. Para facilitar el desarrollo de este proyecto, la Universidad de Piura ha firmado un convenio con los Servicios Industriales de la Marina (SIMA), quienes son los encargados de brindar el soporte operativo, facilitando las instalaciones y el personal. Dicho convenio tiene como objetivo impulsar la tecnología peruana, para liberarse de la tecnología extranjera, que en este caso tiene 20 años de antigüedad.

Las señales recibidas por el radar deben ser procesadas para poder extraer la información útil y poder tomar decisiones. Como parte del procesamiento de señales, es necesario determinar la relación señal a ruido, la cual es un parámetro de medición de calidad de la señal receptada y de gran importancia en radares. Este trabajo se basa en el diseño de un filtro CFAR paramétrico, caracterizado por entregar una probabilidad de falsa alamar constante, donde la detección de un contacto está fuertemente relacionada con la relación señal a ruido.

La presente tesis constituye un trabajo arduo de investigación y análisis, que no hubiera sido posible sin la bendición de Dios y el apoyo desinteresado e ideas de las personas que de alguna manera forman parte del equipo de trabajo. Cabe una mención especial el PhD Ing. César Chiguel, por su tiempo, colaboración, conocimientos impartidos sobre el tema y por su preocupación por formar a las persona.

# General

Introduccio	ón	1
Capítulo 1	Aspectos Generales	3
1.1	Introducción a los radares	3
1.2	Elementos de un Radar de Pulsos	4
1.3	Parámetros de las onda transmitidas	6
1.4	La ecuación de alcance del radar	8
1.5	Radar Cross Section	11
Capítulo 2	2 El Ruido	
2.1	Introducción	
2.2	Tipos de Ruido	13
2.3	Ruido Natural	13
2.3.	.1 Ruido de fuentes naturales externas	14
2	2.3.1.1 Ruido magnético en la banda ULF / ELF.	14
2	2.3.1.2 El ruido atmosférico en la banda ELF / VLF	15
2	2.3.1.3 Ruido natural LF/MF/HF	15
2	2.3.1.4 Ruido natural UHF/SHF/EHF	16
2.3.	.2 Ruido de fuentes naturales internas	16
2	2.3.2.1 Ruido Térmico	16
2.4	Ruido artificial	

	2.4	4.1 Banda de ELF			
2.4.2 2.4.3		4.2 Banda de VLF-HF	21		
		4.3 Banda de VHF-UHF	21		
	2.4	4.4 Banda de SHF-EHF			
Cap	vítulo 3	3 Teoría de Detección	23		
	3.1	Introducción			
	3.2	Detección como prueba de la hipótesis			
	3.2	2.1 La regla de detección de Neyman-Pearson			
	3.2	2.2 Prueba de razón de verosimilitud			
	3.3	La integración coherente, no coherente y binaria	32		
	3.4	Contactos no fluctuantes	33		
	3.5	Contactos fluctuantes	36		
Cap	oítulo 4	4 Detector CFAR	39		
	4.1	El efecto de la potencia de interferencia sobre la probabilidad de falsa ala	rma 39		
	4.2	Filtro CFAR paramétrico	41		
	4.2	2.1 CA-CFAR	41		
	4.2	2.2 Ventana CFAR	43		
	4.2	2.3 Umbral CA-CFAR	45		
	4.3	La relación señal a ruido	46		
Cap	oítulo 5	5 Resultados	49		
	5.1	Aplicación del SNR	49		
	5.2	Implementación del algoritmo CFAR	54		
Cor	nclusio	ones	61		
Bib	liograf	fía	63		
Ane	exo A.		65		
Anexo B					
Ane	Anexo C				
Ane	exo D.		/1		
All	$\mathbf{L}$				

## Introducción

En estos tiempos es muy común escuchar que vivimos rodeados de ondas electromagnéticas, están presentes donde hay un celular, una antena, una radio, un televisor, un *"router"* y así sucesivamente. Las ondas electromagnéticas viajan en el aire desde un transmisor o emisor, hacia un receptor llevando consigo toda su información.

La innovación tecnológica se ha convertido en una carrera que los países quieren ganar, generar nuevos productos tecnológicos, agregar valor a sus productos, renovar y modernizar sus procesos. El Perú como parte de la modernización de los sistemas que controlan las fragatas peruanas, busca impulsar la tecnología peruana, para liberarse de la tecnología militar extranjera.

Se dice que los radares en una embarcación, son como sus ojos, que permiten detectar objetos en un radio determinado. Las embarcaciones interactúan con su entorno gracias a los radares, los cuales le brindan la información necesaria antes de tomar alguna decisión y ejecutar una respuesta hacia su entorno.

## Capítulo 1 Aspectos Generales

El término radar fue usado por primera vez en la Segunda Guerra Mundial para nombrar a los diferentes sistemas de detección de objetivos. Los primeros radares trabajaron con frecuencias inferiores a los 60 MHz debido a limitaciones tecnológicas del momento (Bagad, 2008). Hoy en día no sólo se encuentran enfocados a la guerra, pues su uso se ha extendido hacia la navegación en embarcaciones, control de tráfico aéreo y meteorología.

En este primer capítulo se brindarán todos los conocimientos que servirán de base para que todo lector relacionado con la física o ingeniería pueda entender los siguientes capítulos. Primero se aclarará el principio de funcionamiento de los radares, luego se definirá la relación señal a ruido y se justificará su importancia en el procesamiento de señales.

#### 1.1 Introducción a los radares

Radar proviene de la abreviatura en inglés de "*Radio Detection and Ranging*" (Toomay & Hannen, 2004; Richards, 2005). El radar es resultado de la aplicación de la tecnología de las microondas (Bagad, 2008). Su importancia radica en que permite recopilar información de objetos distantes, por medio de la transmisión de señales electromagnéticas hacia los objetos y analizando los ecos receptados.

Una importante propiedad de las señales electromagnéticas es usada para estimar la ubicación de los objetos distantes. Cuando una señal electromagnética transmitida se encuentra con un medio con diferente conductividad, parte de esta energía es absorbida y el resto de la energía es reflejada nuevamente. El fenómeno de la reflexión es el causante de lo que se conoce como eco. En radares, este eco se produce cuando la señal encuentra

un objeto. El eco es receptado por la antena para analizado y ubicar el objeto (Bagad, 2008).

#### 1.2 Elementos de un Radar de Pulsos

Existen dos sistemas básicos en radares, el sistema mono-estático y el sistema bi-estático. Los sistemas de radar mono-estático usan la misma antena para transmitir y receptar. Los sistemas de radar bi-estático usan dos antenas separadas para estas funciones.

El funcionamiento típico de un radar mono-estático de pulsos se puede describir con ayuda del diagrama de bloques mostrado en la Figura 1.



Figura 1 Diagrama de Bloques de un radar mono-estático de pulsos Fuente: Elaboración Propia

Hay dos secciones principales:

#### Transmisión

El generador de formas de onda, genera la señal portadora de alta frecuencia y baja potencia (Sánchez Luna, 2007). El magnetrón ha sido probablemente el más ampliamente utilizado de los distintos generadores de microondas para radares (Bagad, 2008).

El modulador de pulso genera pulsos mediante una función de tiempo limitada de la cual la variación es relativamente baja comparada con la frecuencia de la señal portadora (Sánchez Luna, 2007).

El amplificador de potencia o transmisor, aumenta la ganancia de la señal de radar compuesta por la señal portadora y moduladora, producida a una baja potencia (Sánchez Luna, 2007).

La forma de onda generada por la sección de transmisión viaja por una línea de transmisión hacia la antena a través de un "*duplexer*" o conmutador TR (transmitir/recibir). En los radares mono-estáticos, el receptor debe ser protegido contra el daño causado por la alta potencia del transmisor. El "*duplexer*" permite que una sola antena sea usada de forma compartida para transmisión y recepción. En la recepción, el "*duplexer*" canaliza las señales de eco devuelta al receptor y no por el transmisor (Bagad, 2008).

#### Recepción

La señal es propagada hacia el espacio por medio de la antena y parte de la señal es interceptada por cuerpos, los cuales viajan libres en el espacio. La antena colecta la señal reflejada, la cual es llamada señal recibida. Dicha señal recibida es muy débil y por lo tanto es amplificada y luego detectada. La primera etapa es un amplificador de RF de bajo ruido. La función del amplificador de bajo ruido es amplificar señales extremadamente pequeñas sin agregar ruido; preservando la relación señal a ruido (Sánchez Luna, 2007). Sin embargo, algunos receptores envían la señal de antena directamente al "*mixer*" o etapa de mezclado. Los amplificadores de bajo ruido utilizados en los sistemas modernos suelen ser dispositivos de estado sólido como amplificadores de transistores de microondas.

El mezclador o "*mixer*" es llamado a menudo el primer detector. La función de esta etapa es la de convertir la señal recibida RF (radiofrecuencia), a una frecuencia intermedia (IF) siendo más fácil para amplificar y manipular electrónicamente (Bagad, 2008). El mezclador convierte la energía de RF a energía de IF con un mínimo de pérdidas. El mezclado se lleva a cabo mediante la combinación de cualquier señal RF con otra señal de frecuencia conocida del oscilador local. Su gran desventaja es, que no es capaz de cancelar el ruido del oscilador local. Existirá dificultad en la detección de señales débiles si se permite que el ruido pase a través del mezclador junto con la señal.

El amplificador de IF amplifica la señal IF que sale del mezclador. Se diseña con un filtro acoplado o "*matched filter*", maximizando la detección de señales débiles y atenuando las señales no deseables. En esta etapa es aumentada la relación señal a ruido (Sánchez Luna, 2007).

El segundo detector o demodulador, se encarga de extraer la señal moduladora de la señal portadora. El amplificador de video se encarga de amplificar la señal a un nivel que sea visible correctamente. El segundo detector y el amplificador de video forman en conjunto un detector de envolvente, rechazando la frecuencia de la portadora pero pasando a la envolvente de la modulación. Para extrae la envolvente de modulación, el ancho de banda de video debe ser lo suficientemente amplia como para pasar los componentes de baja frecuencia generados por el segundo detector, pero no tan amplia para no dejar pasar los componentes de alta frecuencia y/o IF.

A la salida del receptor se toma la decisión de si está presente un blanco o no. La decisión está basada en la magnitud de la salida del receptor. Esta etapa es llamada umbral de decisión. Si la salida es lo suficientemente grande como para exceder el umbral predeterminado, la decisión es que hay un objeto presente. Si no excede el umbral, se asume que sólo hay presencia de ruido. La selección del umbral se realiza de tal forma que se garantice una probabilidad de falsa alamar no mayor a lo tolerable.

El propósito del visualizador o "*display*" es presentar visualmente en una forma adecuada las señales de eco, para la interpretación del operador y la toma de decisiones. Cuando el visualizador está conectado directamente a la salida del video del receptor, la información mostrada es llamada video en bruto o "*raw*".

La forma más común de visualizar los datos es el "*plan position indicator*" o PPI (Bagad, 2008). Es una pantalla circular de intensidad modulada en la cual, las señales de eco producidas a partir de objetos son mostradas en un plano en coordenadas polares representadas en rango y acimut. Nuestra posición se representa en el origen de las coordenadas. El PPI utiliza un barrido radial con un pivote en nuestra posición. El barrido gira en la pantalla tan rápido como la antena de radar. La Figura 2 muestra una representación de una PPI.

La presentación "*A-scope*" es a veces usada para propósitos especiales (Bagad, 2008). Este es un visualizador rectangular de amplitud modulada que presenta la amplitud de la salida de la recepción en el eje Y y el rango en el eje X para un acimut como se muestra en la Figura 2.



Figura 2 Representación de una Pantalla PPI y "A-scope" Fuente: Elaboración Propia

En esta tesis, cada vuelta de radar está conformada por 1024 acimuts y el rango se encuentra dividido en 8192 partes, por lo tanto cada vuelta contiene 8318976 celdas o pixeles.

#### 1.3 Parámetros de las onda transmitidas

Los siguientes parámetros de forma de onda son importantes para el diseño de radares y su rendimiento. La forma de onda de un pulso transmitido se muestra en la Figura 3. La longitud de onda de la señal propagada en la transmisión está definida en la Ecuación (1.1) (Toomay & Hannen, 2004).

$$\lambda = \frac{c}{f_c} \tag{1.1}$$

Donde

- $\lambda$  = Longitud de onda
- c =Velocidad de la luz,  $3 * 10^8 m/s$

 $f_c$  = Frecuencia de la señal en Hertz



Figura 3 Forma de onda transmitida Fuente: Elaboración Propia

El tiempo entre pulsos de radar es el tiempo de repetición de pulsos o "*pulse repetition time*" (PRT). El número de pulsos transmitidos por segundo son conocidos como frecuencia de repetición de pulsos o "*pulse repetition frequency*" (PRF). La PRT y PRF son inversamente proporcionales como se muestra en la Ecuación (1.2) (Toomay & Hannen, 2004).

$$PRF = \frac{1}{PFT} \tag{1.2}$$

La relación entre el tiempo de duración del pulso y la PRT es llamada "*duty cycle*", como se muestra en la Ecuación (1.3) (Toomay & Hannen, 2004).

$$d_t = \frac{PW}{PRT} = PW * PRF \tag{1.3}$$

Donde

 $d_t$ = "duty cycle", sin unidades

PW = duración del pulso o ancho de pulso, segundos

La potencia promedio obtenida para un PRT es el producto de la potencia pico y el "*duty cycle*", como se muestra en la Ecuación (1.4) (Toomay & Hannen, 2004).

$$P_{ave} = P * d_t = P * PW * PRF \tag{1.4}$$

Donde

 $P_{ave}$  = potencia promedio transmitida en watts

P= potencia trasmitida pico en watts

La energía transmitida en un pulso resulta del producto de la potencia pico y la duración del pulso, como se muestra en la Ecuación (1.5) (Toomay & Hannen, 2004).

$$E = P * PW \tag{1.5}$$

Donde

E = energía transmitida en un pulso

#### 1.4 La ecuación de alcance del radar.

El rendimiento de un sistema de radar depende de una variedad de factores, incluyendo la curvatura de la superficie de la tierra. Para entender los efectos de dichos factores sobre el rendimiento del sistema de radar, se puede derivar una ecuación de alcance del radar.

La ecuación de alcance del radar o *"the radar range equation"* es un modelo determinístico que relaciona el máximo alcance del radar con características del radar en la transmisión, recepción, antena, objetivo y los efectos ambientales en la onda de propagación.

La ecuación de alcance del radar determina el máximo alcance para el cual cualquier radar puede detectar un objetivo. Esta ecuación es aplicada como una herramienta importante en el diseño de sistemas de radar.

Para obtener la ecuación del radar, se asume que una antena isotrópica transmite una forma de onda de potencia pico P en un medio sin pérdidas. La densidad de potencia a una distancia R desde el radar es igual a la potencia total P dividida por el área de una esfera de radio R.



Figura 4 Geometría esférica de un radar Fuente: Elaboración Propia

Los radares reales emplean antenas directivas para concentrar la potencia transmitida en una dirección particular. La ganancia de una antena G, representa la proporción de la densidad de potencia máxima transmitida por una antena directiva respecto a la densidad de potencia transmitida por una antena isotrópica sin pérdidas con la misma potencia de entrada (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005; Bagad, 2008).

Densidad de potencia transmitida = 
$$\frac{PG}{4\pi R^2} W/m^2$$
 (1.6)

Donde

G = ganancia de la antena transmisora, sin unidades.

R = distancia entre objeto y radar, en metros.

La densidad de potencia al ser interceptada por algún objetivo, produce que parte de la potencia sea reflejada por el objetivo, comportándose como una antena transmisora. La potencia reflejada es proporcional a la superficie efectiva de reflexión del objetivo o "*radar cross section*",  $\sigma$ . La potencia irradiada por el objetivo viene dada por la Ecuación (1.7) (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005; Bagad, 2008).

potencia irradiada por el objetivo = 
$$\frac{PG_T\sigma}{4\pi R^2}$$
 (1.7)

Donde

 $\sigma$  = superficie efectiva de reflexión del objetivo, en metros cuadrados.

La ecuación de la densidad de potencia irradiada por el objetivo se muestra en la Ecuación (1.8) (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005).

densidad de potencia irradiada por el objetivo = 
$$\frac{PG_T\sigma}{(4\pi)^2R^4}$$
 (1.8)

La densidad de potencia irradiada de regreso al radar es interceptada por el área efectiva de la antena receptora. La potencia recibida, definida como la señal recibida S, se define en la Ecuación (1.9) (Toomay & Hannen, 2004).

$$S = \frac{PG\sigma A_e}{(4\pi)^2 R^4} \tag{1.9}$$

Donde

 $A_e$  = área efectiva de la antena receptora, en metros cuadrados.  $A_e = \rho A$ .

 $\rho$  = eficiencia de la antena 0 <  $\rho$  < 1, sin unidades.

A =área física de la antena, en metros cuadrados.



Figura 5 Secuencia de movimiento de ecos Fuente: Elaboración Propia

La ganancia de la antena es directamente proporcional a su área afectiva. En la Ecuación (1.10) se expresa la relación (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005).

$$G = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \tag{1.10}$$

Despejando el valor del área efectiva y reemplazándola en la Ecuación (1.11), se obtiene la potencia de señal recibida (Toomay & Hannen, 2004).

$$S = \frac{PG^2\lambda^2\sigma}{(4\pi)^3R^4} \tag{1.11}$$

El alcance máximo del radar  $R_{max}$ , es la distancia máxima a la cual el objetivo puede ser detectado. Esto ocurre cuando la potencia de la señal en la recepción es igual a la señal mínima detectable  $S_{min}$ . A partir de la Ecuación (1.11) se obtiene (Bagad, 2008):

$$R_{max} = \left[\frac{PG^2\lambda^2\sigma}{(4\pi)^3 S_{min}}\right]^{1/4}$$
(1.12)

La Ecuación (1.12) es llamada ecuación del radar. En la práctica la Ecuación (1.12) no describe adecuadamente su rendimiento en la práctica. Hay muchos factores que afectan el alcance máximo del radar que no son incluidos. En la práctica se observa que el alcance máximo es mucho menor al que se ha predicho por medio de ecuación.

#### 1.5 Radar Cross Section

La ecuación del radar expresa el alcance al cual un contacto puede ser detectado por un sistema de radar. La ecuación (1.12) incluye el "*Radar Cross Section*" (RCS) del contacto. La medida de la potencia incidente interceptada por el blanco e irradiada de vuelta hacia el radar se llama "*Radar Cross Section*" (RCS). El RCS de un contacto tiene unidades de área e indica cuán grande parece ser el contacto para el radar (Kingsley & Quegan, 1993).

Una forma sencilla de entender el RCS, es imaginar que una esfera de metal sustituye un contacto. El RCS sería entonces es el área proyectada de dicha esfera de metal que devolver la misma señal de eco que el contacto sustituido. Matemáticamente se expresa como (Kingsley & Quegan, 1993):

$$RCS = \frac{\text{potencia reflejada hacia el receptor por unidad de Angulo sólido}}{\text{incidencia de flujo de pontencia}} [m^2]$$
(1.13)

El RCS de un contacto depende del ángulo de incidencia al cual este es visto, de la frecuencia del radar, el material del contacto, color del contacto, geometría, orientación, etc. Es importante tener en cuenta que el RCS fluctúa en el tiempo.

En la Figura 6 se muestra una simulación realizada por ECOS donde se puede mostrar el RCS esperado de un barco de 300 toneladas, 39.5 m de largo, 13.7 m de ancho y 39.5 de altura. El RCS va variando de acuerdo al ángulo de incidencia del eco sobre el contacto.



Figura 6 Dependencia geométrica del RCS esperado Fuente: (EMCOS Consulting and Software)

Este es el principal motivo por el cual un mismo contacto no retorna un eco constante. En muchos casos a causa del RCS, en los sistemas de radar se da la apariencia de contactos que aparecen con mayor intensidad y por otros momentos reflejan muy levemente hasta incluso ser confundidos con el ruido.

# Capítulo 2 El Ruido

#### 2.1 Introducción

El ruido puede definirse como cualquier señal no deseable. Sin embargo, con tal definición puede interpretarse como ruido a otro fenómeno como la interferencia. El ruido es un fenómeno natural y generalmente incontrolable. El ruido está presente en cualquier sistema de comunicación deteriorando la señal a la salida del receptor. En los sistemas de radares el ruido constituye un factor limitante en la detección (Pérez Vega, Zamanillo Sáinz De La Maza, & Casanueva López, 2007).

El ruido es una señal indeseable que no aporta información, la cual se integra a la señal de interés que sí aporta información. Para este proyecto la señal de interés son los ecos de los contactos y el ruido está compuesto de ecos de las olas.

#### 2.2 Tipos de Ruido

El entorno terrestre está continuamente expuesto a las radiaciones electromagnéticas que establecen un fondo de ruido electromagnético. Físicamente, el ruido es en esencia aleatorio tanto en amplitud como en fase. Según su origen, el ruido en el entorno terrestre puede clasificarse como natural o artificial.

#### 2.3 Ruido Natural

El ruido natural puede ser sub-clasificado en dos grandes grupos: el ruido natural producido internamente por los componentes electrónicos de un circuito o sistema y el producido por fuentes externas a él.

#### 2.3.1 Ruido de fuentes naturales externas

La radiación de las ondas electromagnéticas abarca desde los mHz hasta los 300 GHz aproximadamente, pasando por 10 órdenes de magnitud (Tabla 1) (Bianchi & Meloni, 2007).

#### 2.3.1.1 Ruido magnético en la banda ULF / ELF.

El campo magnético de la Tierra no sólo es estático, sino que también sufre variaciones muy lentas en el tiempo del tipo: seculares, anuales, mensuales, diurnas y sub-tormentas; todo esto puede ser considerado como una especie de ruido magnético natural. Las amplitudes de las variaciones se pueden cuantificar en: décimas de nano-Teslas (nT) para la variación diurna y cientos o, excepcionalmente, miles de nT en el caso de fuertes tormentas magnéticas.

Tabla 1	Bandas de frecuencia	de radiación ne	o ionizante y	principales fuer	ntes de	ruido de
	natural.					

Denominación	Rango de Frecuencia	Longitud de onda (m)	Principales fuentes de ruido natural	Entorno
ULF (Frecuencia ultra baja)	1-3000 mHz	3x10 <sup>11</sup> -3x10 <sup>8</sup>	Resonancias en la magnetosfera, la interacción con las partículas de origen solar y la presión de radiación con la magnetosfera	Magnetosfera
ELF (Frecuencia Extremadamente Baja)	3-3000 Hz	$10^8 - 10^5$	Resonancias en la ionosfera	Ionosfera
VLF (Frecuencia Muy Baja)	3-30 kHz	10 <sup>5</sup> -10 <sup>4</sup>	Propagación en la ionosfera de la energía de descarga atmosférica.	Ionosfera
LF (Frecuencia Baja)	30-300 kHz	$10^4 - 10^3$	Ruido atmosférico	Ionosfera
MF (Frecuencia Media)	300-3000 kHz	$10^3 - 10^2$	Ruido atmosférico	Ionosfera
HF (Frecuencia Alta)	3-30 MHz	10 <sup>2</sup> -10	Ruido cósmico y atmosférico	Ionósfera
VHF (Frecuencia muy alta)	30-300 MHz	10-1	Ruido cósmico y atmosférico	Superficies terrestres
UHF (Frecuencia Ultra Alta)	300-3000 MHz	1-10 <sup>-1</sup>	Ruido cósmico	Superficies terrestres
SHF (Frecuencia Súper Alta)	3-30 GHz	10 <sup>-1</sup> -10 <sup>-2</sup>	Ruido cósmico	Superficies terrestres
EHF (Frecuencia Extremadamente Alta)	30-300 GHz	10 <sup>-2</sup> -10 <sup>-3</sup>	Ruido cósmico	Superficies terrestres

Fuente: Elaboración Propia

A frecuencias más altas en esta banda, hay varios otros fenómenos, por ejemplo las pulsaciones geomagnéticas. Las pulsaciones geomagnéticas, emiten ondas ULF, que cubren aproximadamente el rango de frecuencia de 1 mHz a 1 Hz. La frecuencia de pulsación se considera que es ultra baja cuando es inferior a frecuencias de plasma y la frecuencia de giro de iones.

Otros fenómenos electromagnéticos en la banda ULF / ELF se originan por partículas que inciden en la magnetosfera causando emisiones electromagnéticas que se propagan en el interior de la magnetosfera. Emisiones de Chorus y silbidos aurorales son otros dos fenómenos relevantes.

#### 2.3.1.2 El ruido atmosférico en la banda ELF / VLF

Los relámpagos son la principal fuente de energía para el fondo electromagnético dentro de la ionosfera. A partir de la banda ELF (pocos Hz) hasta varios VHF (cientos MHz) el ruido se origina principalmente de la energía radiada por descargas atmosféricas. Varios millones de descargas atmosféricas se producen todos los días con un estimado de 2.000 tormentas en todo el mundo, y la tierra es golpeada unas 100 veces por segundo por un rayo. La descarga es muy violenta y se puede llegar fácilmente a 10.000 A. La cantidad de energía liberada por cada descarga puede variar desde unidades de décimas de GJ, por lo tanto, para la duración de la descarga promedio (menos de 1 s), el poder involucrados en este fenómeno es del orden de 1-10 GW. La energía total liberada en un año es del orden de 10<sup>19</sup> J. Si sólo el 10% de esta energía se irradia en forma de energía electromagnética (Figura 7) sería comparable a la energía producida en 1970 por las estaciones de energía eléctrica en el mundo.



Figura 7 Espectro electromagnético de los rayos Fuente: (Bianchi & Meloni, 2007)

#### 2.3.1.3 Ruido natural LF/MF/HF

En este rango de frecuencia, el ruido electromagnético natural también tiene su fuente principal en las descargas eléctricas atmosféricas; la amplitud del ruido generalmente disminuye en intensidad con la frecuencia y se ve afectada por las condiciones de la ionosfera. Dado que las frecuencia LF/MF/HF fueron muy pronto utilizadas en las

comunicaciones de radio y la radiodifusión. Las ondas electromagnéticas radiadas por descargas de rayos impulsivos no pueden escapar a la frontera ionosfera. Ondas penetran a través de las capas de la ionosfera más bajas donde son absorbidos diversamente, dependiendo de la frecuencia. Las ondas de radio son reflejadas por las capas superiores de la ionosfera hasta una frecuencia determinada, llamada "frecuencia crítica ', que depende de la condición de la ionosfera local. Además, el ángulo de incidencia entre la onda y las capas de la ionosfera juega un papel importante.

#### 2.3.1.4 Ruido natural UHF/SHF/EHF

En este rango de frecuencia, el ruido natural predominante es el fondo cósmico (o galáctico). En muchos sentidos, el ruido cósmico es similar al ruido natural terrestre, como la caída de rayos lejanos o ruido de radio hecho por el hombre, por eso al principio de las mediciones de radio era difícil identificar las diferentes fuentes. Por otra parte los sistemas galácticos o estelares generan una fuerte y frecuente fuente de ruido: el ruido térmico debido al movimiento aleatorio de las partículas con carga eléctrica en el espacio. El ruido térmico se debe a los electrones y los iones en movimiento en un medio de disipación. Otras fuentes son la radiación Bremsstrahlung principalmente debido a la colisión de protones de electrones.

#### 2.3.2 Ruido de fuentes naturales internas

#### 2.3.2.1 Ruido Térmico

El ruido térmico es la fuente de ruido más importante en los circuitos eléctricos y por lo tanto se encuentra presente en todo sistema de comunicación. En los sistemas de comunicación donde la señal en el receptor es muy pequeña, el ruido térmico puede llegar a compararse con la señal.

El ruido térmico también es llamado ruido blanco, ruido de resistencia o ruido Jhonson (por J. B. Johnson su descubridor). Johnson (1928) publicó "*Thermal agitation of electricity in conductors*" donde describe la existencia de un voltaje no periódico en todos los conductores cuya magnitud está relacionada con la temperatura. En la Figura 8 se muestra una representación en forma de circuito abierto de la tensión de un conductor.



Figura 8 Voltaje RMS de ruido en un circuito abierto Fuente: Elaboración Propia

Nyquist (1928) publicó "*Thermal agitation of electric charge in conductors*" donde describió el ruido matemáticamente, usando razonamiento termodinámico. Nyquist mostró que el voltaje RMS de ruido en un circuito abierto producido por una resistencia está dado por la Ecuación (2.1) (Badillo Malacara, 2004) (Miyara & Lahoz, 2003).

$$V_n = E_n = \sqrt{4kTBR} \quad Volts \tag{2.1}$$

Donde

 $R = Resistencia \quad \Omega$ 

 $E_n = Voltaje \ de \ ruido$   $T = Temperatura \ en \ kelvins$  K  $k = Constante \ de \ Boltzmann = 1.38 * 10^{-23}$   $\frac{watt}{K.Hz}$  $B = ancho \ de \ banda$  Hz

El origen de este ruido es el movimiento aleatorio de los electrones libres en los conductores y semiconductores bajo la influencia de la temperatura. El voltaje se interpreta como causa de que en un instante determinado, el número de electrones moviéndose en una dirección es mayor al número de electrones moviéndose en dirección contraria, sin que en un periodo largo de tiempo predomine el movimiento hacia una de las direcciones, es decir con valor medio igual a cero.

En otras palabras, el voltaje en función del tiempo se puede interpretar como una variable aleatoria con media igual a cero, pero con valores instantáneos diferentes de cero. El flujo aleatorio de electrones en diferentes ambas direcciones produce corriente aleatoria, produciendo en los extremos del conductor un voltaje aleatorio con media igual a cero.

La densidad espectral es uniforme, es decir que sus componentes en frecuencia abarcan desde 0 Hz hasta frecuencias del orden de  $10^{13}$  Hz. La densidad espectral es dependiente de la temperatura del material conductor y está dada por la Ecuación (2.2) (Pérez Vega, Zamanillo Sáinz De La Maza, & Casanueva López, 2007):

$$N_0 = kT \quad watt/Hz \tag{2.2}$$

Si una resistencia de valor R se acopla a la fuente generadora de ruido. La potencia de ruido térmico está dada por la Ecuación (2.3) (Pérez Vega, Zamanillo Sáinz De La Maza, & Casanueva López, 2007):

$$N = N_0 B = kTB \quad watt \tag{2.3}$$



Figura 9 Potencia de ruido térmico en un circuito cerrado Fuente: Elaboración Propia

La potencia del ruido térmico es independiente de la composición de la resistencia, es decir que conductores de diferentes materiales tienen la misma cantidad de ruido térmico. Una resistencia puede tener más ruido que el debido sólo al ruido térmico, pero nunca menos. El ruido adicional es debido a la presencia de otras fuentes de ruido.

Cualquier conductor por encima de cero Kelvin (-273°C) se convierte en una fuente de ruido térmico. Pero no todos los componentes de los circuitos eléctricos pueden producir ruido térmico, pues solamente producen ruido térmico aquellos que pueden disipar energía. Por lo tanto, una capacitancia o inductancia pura no pueden producir ruido térmico.

En esencia todo circuito eléctrico disipa energía en cierta medida. Por lo tanto el ruido térmico estará siempre presente en todos los sistemas de comunicación, lo cual representa un problema pues al amplificar una señal pequeña para poder estudiarla, también es amplificado el ruido térmico producido por el circuito.

El voltaje producido por el ruido térmico se describe como una variable con valor medio igual a cero. Para su estudio, es necesario asumir que el voltaje sigue una distribución conocida. Según se ha observado, el voltaje sigue aproximadamente una distribución de probabilidad gaussiana, con media igual a cero. Así, si se muestrea el ruido en un instante t, la probabilidad de obtener el valor v es (Miyara & Lahoz, 2003):

$$\rho(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}V} e^{-\frac{v^2}{2V^2}}$$
(2.4)

Donde la varianza de la distribución Gaussiana tiene valor V (valor cuadrático medio de la señal de ruido térmico) y valor medio igual a cero. Esta distribución de probabilidades también es llamada distribución Normal.



Figura 10 a) Función de distribución de Gauss b) Ejemplo de ruido térmico Fuente: (Miyara & Lahoz, 2003)

Es importante mencionar que los valores que puede asumir v corresponden a valores cuadráticos medio de la señal de ruido para un tiempo t. El valor de V puede ser encontrado con un instrumento de medición adecuado durante un periodo largo de tiempo.

#### 2.4 Ruido artificial

El ruido artificial debe su nombre a que proviene de la actividad humana. Su influencia sobre otro sistema depende en gran medida de la distancia de las fuentes de ruido (líneas eléctricas, de radio, televisión y otros) que pueden ser muy variables, la frecuencia y la potencia emitida. La potencia y frecuencia en el tiempo y espacio son las cantidades que mejor describen las fuentes de ruido artificial. Otra característica importante son el tipo de onda emitida (continua o impulsiva), su modulación y polarización.

Las fuentes artificiales terrestres se encuentran principalmente en las áreas de negocio, industriales y residenciales. En las zonas rurales y áreas tranquilas las fuentes de ruido se vuelven escasas.

La Figura 11 forma parte de un informe de la "Unión Internacional de Telecomunicaciones" (UIT) donde se presenta un estudio sobre los niveles de ruido radioeléctrico. En la Figura 11 se muestra la comparación de los niveles de ruido en zonas rurales, residenciales y de negocios, realizados en el año 2009.



Figura 11 Factor de Ruido de la Frecuencia Fuente: Unión Internacional de Telecomunicaciones (2009)

Donde

- A: Ruido atmosférico, valor excedido durante el 0.5% del tiempo
- B: Ruido atmosférico, valor excedido durante el 99.5% del tiempo
- C: Ruido artificial, punto de recepción tranquilo
- D: Ruido galáctico
- E: Ruido artificial mediano en una zona urbana

\_: Nivel de Ruido mínimo previsto

El ruido artificial se describirá en las diversas bandas de frecuencia indicando sus principales fuentes.

#### 2.4.1 Banda de ELF

ELF o frecuencia extremadamente baja. En esta banda de frecuencia, la principal fuente de ruido artificial proviene de las líneas de energía eléctrica, que funcionan en una sola frecuencia, generalmente de 50 o 60 Hz. Las líneas de energía están repartidas por el planeta en todos los continentes excepto en la Antártida, donde las ondas ELF naturales cercanas a 50-60 Hz pueden ser grabadas porque hay una menor cantidad de perturbaciones. Además, algunas regiones deshabitadas en otros continentes son relativamente libres de este tipo de perturbación, pero en general, en esta banda, los campos electromagnéticos de 50-60 Hz son la fuente hecha por el hombre más importante de ruido, tanto por la energía emitida como por su extensión.

#### 2.4.2 Banda de VLF-HF

VLF-HF o frecuencias entre muy bajas y altas. Al igual que en muchos de los otros casos, las emisiones de ruido por el hombre son debidos al uso de dispositivos electrónicos en los interiores de aparatos de comunicación industriales y emisiones de AM en radio, ya que todo estos equipos emplean osciladores eléctricos que se convierten en fuentes no deseadas de radio artificial.

Las principales fuentes localizadas son las emisiones de radio y equipo industrial. Entre las fuentes importantes tenemos los calentadores que explotan la inducción magnética y las pérdidas dieléctricas en el material. Otras fuentes más débiles, pero numerosas, son tales como el encendido del automóvil, que en gran medida contribuyen al ruido de fondo. También contamos con fuentes incalculables, como los aparatos electrodomésticos, monitores de PC, televisores, etc. Otros, como dispositivos médicos y científicos son irrelevantes.

### 2.4.3 Banda de VHF-UHF

VHF-UHF o frecuencias entre muy altas y ultra altas. Las Radiaciones electromagnéticas en estas bandas se deben a emisiones de FM en radio, televisión y las estaciones de servicio de telefonía móvil y el encendido del automóvil. Aparatos de radar y de satélite no hacen una contribución muy importante al nivel de ruido de fondo. Otras fuentes principales son los teléfonos inalámbricos, microondas, hornos, etc. Aunque estos últimos equipos no tienen un impacto significativo en el exterior.

#### 2.4.4 Banda de SHF-EHF

SHF-EHF o frecuencias entre súper altas frecuencias y extremadamente altas. Debido a la complejidad de los sistemas de comunicaciones de radio y las limitaciones en las aplicaciones industriales que operan a estas frecuencias, en este rango de frecuencias sólo equipos en particular son empleados. En estas bandas se incluyen los sistemas de comunicación por satélite, sistemas de radar, aparatos científicos y médicos. Por esta razón, el ruido artificial es muy bajo en la banda SHF-EHF. Por otra parte, sus procesos de emisión física determinan los modos de propagación de las ondas SHF y EHF, los cuales

son estrictamente direccionales. Otras aplicaciones tecnológicas en este rango tienen que ver con la observación pasiva y las mediciones como en la radioastronomía.

## Capítulo 3 Teoría de Detección

#### 3.1 Introducción

Las funciones principales que se llevarán a cabo por un procesador de señales de radar son la detección, seguimiento y creación de imágenes. En este capítulo, la preocupación es la detección. En radares, esto significa decidir si una medición dada por radar es el resultado de un eco de un contacto, o simplemente representa los efectos de la interferencia. Si se decide que la medición indica la presencia de un contacto, un procesamiento adicional se lleva a cabo por lo general. Este procesamiento adicional podría, por ejemplo, tomar la forma de seguimiento a través de mediciones de distancia, ángulo, o Doppler.

Decisiones de detección se pueden aplicar a las señales en las diversas etapas del procesamiento de señales de radar, desde ecos crudos hasta fuertemente procesados. En el caso más simple, cada celda de rango para cada impulso se puede probar de forma individual para decidir si un objetivo está presente en el intervalo correspondiente a la celda de alcance, y los ángulos espaciales correspondiente a la dirección de puntería de la antena para ese pulso. Dado que el número de celdas de rango puede estar en el orden de cientos o incluso miles, y la frecuencia de repetición del pulso pueden ir desde unos pocos kilohercios a decenas o cientos de kilohercios, el radar puede estar haciendo muchos miles de millones de decisiones de detección por segundo.

Tanto la interferencia y los ecos de objetivos complejos se describen mejor por los modelos estadísticos de señal. En consecuencia, el proceso de decidir si una medida representa o no la influencia de un objetivo o sólo la interferencia es un problema de pruebas de hipótesis estadísticas.

En este capítulo, se muestra cómo esta estrategia de decisión básica conduce al concepto de la prueba de umbral, como la lógica de detección más común en radar. Las curvas de rendimiento se derivan para los modelos más básicos e interferencias.

#### 3.2 Detección como prueba de la hipótesis

En cualquier medición de radar que es evaluada para determinar la presencia de un objetivo, se puede asumir una de las dos hipótesis siguientes:

1. La medición es producida sólo como consecuencia de la interferencia.

2. La medición es producida como consecuencia de la combinación de la interferencia y del eco de un objetivo.

La primera hipótesis se denota como la hipótesis nula  $(H_0)$  y la segunda como hipótesis alternativa  $(H_1)$ . Por tanto, la lógica de detección se basa en examinar cada medición de radar y seleccionar la hipótesis que mejor represente esa medición.

Debido a que las señales se describen estadísticamente, la decisión entre las dos hipótesis es un ejercicio de teoría de decisiones estadística. Un enfoque general a este problema se describe en muchos textos (por ejemplo, Kay, 1998). El análisis comienza con una función estadística de densidad de probabilidad (pdf) que describe la medición a ser probada en cada una de las dos hipótesis. Si la muestra a evaluar se denota como y, se requieren los siguientes dos pdf (Kay, 1998)

 $p_y(y|H_0) = pdf de y en ausencia de contacto$ 

 $p_{y}(y|H_{1}) = pdf de y en presencia de contacto$ 

Por lo tanto, parte del problema de detección es el desarrollo de modelos para estas dos pdf. De hecho, el análisis de rendimiento del radar depende de la estimación de estas pdf. Además, una buena parte del problema del diseño de sistema de radar está dirigido a la manipulación de estas dos pdf con el fin de obtener el rendimiento de detección más favorable.

Suponiendo que las dos pdf son modeladas con éxito, las siguientes probabilidades de interés pueden ser definidas

Más en general, la detección se basa en N muestras del dato  $y_n$  formando un vector columna  $\mathbf{y} = [y_0 \dots y_{N-1}]$ 

El N-dimensional de las funciones estadística de densidad de probabilidad (pdfs)  $p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_0)$ y  $p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_1)$  se pueden utilizar. Suponiendo que las dos pdf se modelan con éxito, las siguientes probabilidades de interés pueden ser definidas:

Probabilidad de detección  $P_D$ , es la probabilidad que un contacto sea declarado cuando un contacto está presente.

Probabilidad de falsa alarma  $P_{fa}$ , es la probabilidad que un contacto sea declarado cuando un contacto no está presente.

Probabilidad de perdida  $P_m$ , es la probabilidad que un contacto no sea declarado cuando un contacto está presente.

Tenga en cuenta que  $P_m = 1 - P_D$ . Por lo tanto,  $P_{fa}$  y  $P_D$  bastan para especificar todas las probabilidades de interés.

#### 3.2.1 La regla de detección de Neyman-Pearson

El siguiente paso en la toma de una decisión es tener cuál será la regla para decidir que constituya una opción óptima entre nuestras dos hipótesis. En radares, es más común el uso de un caso especial del criterio de Bayes llamado el criterio de Neyman-Pearson. Bajo este criterio, el proceso de decisión está diseñado para maximizar la probabilidad de detección  $P_D$  bajo la restricción de que la probabilidad de falsa alarma  $P_{fa}$  no exceda de un valor constante. Las combinaciones alcanzables de  $P_D$  y  $P_{fa}$  se ven afectadas por la calidad del sistema de radar y el diseño de procesador de señal. Sin embargo, se observa que para un diseño de sistema fijo, el aumentando de  $P_D$  implica también aumentar  $P_{fa}$ . El diseñador del sistema de radar generalmente debe decidir qué tasa de falsa alarma se puede tolerar en base a las consecuencias. Recordando que el radar puede hacer decenas o cientos de miles, incluso millones de decisiones de detección por segundo, los valores de  $P_{fa}$  por lo general deben ser bastante bajas. Los valores en el rango de  $10^{-4}$  a  $10^{-8}$  son comunes, y aún así pueden dar lugar a falsas alarmas cada pocos segundos o minutos.

Cada vector de valores de datos medidos y puede ser considerado como un punto en el espacio N-dimensional. Para tener una regla de decisión completa, cada punto en ese espacio (cada combinación de valores de N datos medidos) debe ser asignado a una de las dos decisiones,  $H_0$  ("contacto ausente") o  $H_1$  ("contacto presente"). Entonces, cuando el radar mide un determinado conjunto de valores de datos ("observación") y, el sistema declara bien " ausente" o " presente", basada en la asignación pre-existente de y en  $H_0$  o  $H_1$ . El conjunto de todas las observaciones y para el cual se elegirá  $H_1$  serán llamadas región  $R_1$ . Tenga en cuenta que  $R_1$  no es necesariamente una región conectada. El conjunto de todas las observaciones y para el cual se detección y falsa alarma como las integrales de las pdfs sobre la región  $R_1$  en un espacio N-dimensional. (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005)

$$P_D = \int_{R_1}^{\infty} p_y(y|H_1) \, dy$$
 (3.1)

$$P_{fa} = \int_{R_1}^{\infty} p_y(y|H_0) \, dy \tag{3.2}$$



Fuente: Elaboración propia

En la Figura 12 se muestra que las funciones de densidad de probabilidad son no negativas, en consecuencia se demuestra, que  $P_D$  y  $P_{fa}$  deben aumentar o disminuir juntos. A medida que la región  $R_1$  crece para incluir más de las posibles observaciones de y. Para lograr un buen equilibrio de rendimiento, los puntos que contribuyen más a  $P_D$  que a  $P_{fa}$  se asignan a la región  $R_1$ . Si el sistema puede ser diseñado de manera que  $p_y(y|H_0)$  y  $p_y(y|H_1)$  son tan alejados como sea posible, esta tarea se hace más fácil y más eficaz. Este punto se revisará más adelante.

#### 3.2.2 Prueba de razón de verosimilitud

El criterio de Neyman-Pearson está motivado por el objetivo de obtener el mejor rendimiento de detección posible garantizando que la probabilidad de falsa alarma no supere cierto valor tolerable. Por lo tanto, la regla de decisión de Neyman-Pearson consiste en elegir  $R_1$  tal que  $P_D$  se maximiza, sujeta a  $P_{fa} \leq \alpha$ .

Donde  $\alpha$  es la máxima probabilidad de falsa alarma permisible. Este problema de optimización se resuelve por el método de los multiplicadores de Lagrange. Donde  $P_D$  es la función a maximizar y  $P_{fa} \leq \alpha$  es la restricción. Se construye la función (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$F = P_D + \lambda \left( P_{fa} - \alpha \right) \tag{3.3}$$

Para encontrar la solución óptima, se debe maximizar F y luego seleccionar  $\lambda$  para satisfacer el criterio de restricción  $P_{fa} = \alpha$ . Reemplazando  $P_D$  y  $P_{fa}$ :

$$F = \int_{R_1}^{\infty} p_y(\mathbf{y}|H_1) \, dy + \lambda \left( \int_{R_1}^{\infty} p_y(\mathbf{y}|H_0) \, dy - \alpha \right)$$

$$F = -\lambda \alpha + \int_{R_1}^{\infty} p_y(y|H_1) \, dy + \lambda \int_{R_1}^{\infty} p_y(y|H_0) \, dy$$
(3.4)

Recuerde que la variable de diseño es la elección de la región  $R_1$ . Por lo que F se maximiza mediante:

$$\frac{\partial F}{\partial R_1} = \frac{\partial}{\partial R_1} \left( -\lambda \alpha + \int_{R_1}^{\infty} p_y(\mathbf{y}|H_1) \, dy + \lambda \int_{R_1}^{\infty} p_y(\mathbf{y}|H_0) \, dy \right)$$
$$\frac{\partial F}{\partial R_1} = \frac{\partial}{\partial R_1} \left( \int_{R_1}^{\infty} p_y(\mathbf{y}|H_1) \, dy + \lambda \int_{R_1}^{\infty} p_y(\mathbf{y}|H_0) \, dy \right)$$
$$\frac{\partial F}{\partial R_1} = \frac{\partial}{\partial R_1} \left( \int_{R_1}^{\infty} p_y(\mathbf{y}|H_1) + \lambda p_y(\mathbf{y}|H_0) \, dy \right)$$
(3.5)

El término  $\lambda \alpha$  no depende de  $R_1$ . Dado que  $\lambda$  podría ser negativo, el integrando puede ser positivo o negativo, dependiendo de los valores de  $\lambda$  y los valores relativos de  $p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_0)$  y  $p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_1)$ . Por tanto, la integral se maximiza para todos los puntos de  $R_1$  los cuales  $p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_0) + \lambda p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_1) > 0$ , es decir,  $R_1$  es todos los puntos  $\mathbf{y}$  para los que  $p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_0) >$  $-\lambda p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_1)$ . Esto nos lleva directamente a la regla de decisión (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$\frac{p_{y}(y|H_{1})}{p_{y}(y|H_{0})} \overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}{\overset{H_{1}}}{\overset{H_{1}}}$$

La Ecuación (3.6) se conoce como la prueba de razón de verosimilitud (LRT). La LRT establece que la relación de las dos pdfs, cada una evaluada para los datos observados y, debe ser comparada con un umbral. Si esa "razón de verosimilitud" supera el umbral, se elige la hipótesis  $H_1$ , es decir, se declara que un contacto está presente. Si no se supera el umbral, se elige  $H_0$  y se declara que un contacto no está presente. Bajo el criterio de optimización de Neyman-Pearson, la probabilidad de una falsa alarma, no puede exceder el valor original de diseño. Notar de nuevo que se requieren modelos de  $p_y(\mathbf{y}|H_0)$  y  $p_y(\mathbf{y}|H_1)$  con el fin de llevar a cabo la LRT. Como una abreviatura común, es conveniente expresar la LRT en la siguiente notación:

$$\Delta(y) \underset{\ell_{H_0}}{\overset{>^{H_1}}{\overset{}}} \eta \tag{3.7}$$

Donde  $\Delta(y) = p_{\nu}(\mathbf{y}|H_1)/p_{\nu}(\mathbf{y}|H_0)$  y  $\eta = -\lambda$ .

Una transformación bien elegida a veces puede simplificar en gran medida los cálculos requeridos para llevar a cabo la LRT. Lo más común es tomar el logaritmo natural de ambos lados de la Ecuación (3.7) para obtener la prueba de razón verosimilitud de la siguiente forma:

$$\ln \Delta(y) \underset{\leq_{H_0}}{\overset{>H_1}{\geq}} \ln \eta \tag{3.8}$$

Para realizar estos procedimientos más claros, considere lo que es tal vez el ejemplo más sencillo, la detección de la presencia o ausencia de una constante en ruido Gaussiano de media cero con varianza  $\beta^2$ . Sea w un vector de variables aleatorias gaussianas con media cero independientes idénticamente distribuidas (i.i.d.). Cuando la constante está ausente (hipótesis  $H_0$ ) el vector de datos y = w sigue una distribución normal N-dimensional con una matriz identidad de covarianzas. Cuando la constante está presente (hipótesis  $H_1$ ),  $y = m + w = m * \mathbf{1}_N + w$  y la distribución es simplemente desplazada a una media distinta de cero, positiva. Entonces se define:

w: Vector de variables aleatorias (i.i.d) gaussianas con media cero, dimensión Nx1.

*m*: Vector constante, dimensión *Nx*1.

Por lo tanto se tiene que (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$\begin{array}{l} H_0: y \sim N(0_N, \beta^2 I_N) \\ H_1: y \sim N(m 1_N, \beta^2 I_N) \end{array}$$
(3.9)  
(3.10)

Donde m > 0 y  $0_N$ ,  $1_N$  e  $I_N$ , son matrices de N ceros, N unos y la matriz identidad de orden N respectivamente. Entonces el modelo de las pdfs requeridas para el caso N-dimensional es de la siguiente forma (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$p(y|H_0) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{\beta}\right)^2\right\}$$
(3.11)

$$p(y|H_1) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_n - m}{\beta}\right)^2\right\}$$
(3.12)

La razón de verosimilitud puede ser calculada como:

$$\Delta(y) = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_n - m}{\beta}\right)^2\right\}}{\prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_n}{\beta}\right)^2\right\}} \overset{\geq_{H_1}}{\underset{n=0}{\overset{N-1}{\longrightarrow}}} - \lambda$$
$$\Delta(y) = \prod_{n=0}^{N-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{y_n - m}{\beta}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_n}{\beta}\right)^2\right\}} \overset{\geq_{H_1}}{\underset{H_0}{\overset{N-1}{\longrightarrow}}} - \lambda$$
(3.13)

De esta forma la razón de verosimilitud logarítmica, permite convertir multiplicaciones en sumas y puede ser calculada de la siguiente forma (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$\ln \Delta(y) = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{y_n - m}{\beta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y_n}{\beta} \right)^2 \right\}_{H_1} \ln(-\lambda)$$
$$\ln \Delta(y) = \frac{1}{\beta^2} \sum_{n=0}^{N-1} m y_n - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{n=0}^{N-1} m^2 \sum_{H_0}^{>H_1} \ln(-\lambda)$$
(3.14)

Despejando  $\sum_{n=0}^{N-1} y_n$ :

$$\sum_{n=0}^{N-1} y_n \overset{>^{H_1}}{<_{H_0}} \frac{\beta^2}{m} \ln(-\lambda) + \frac{Nm}{2}$$
(3.15)

Tenga en cuenta que el lado derecho de la Ecuación (3.15) se compone sólo de constantes, aunque no todos se conocen todavía. Se puede conocer el número de datos N, sin embargo aún no se conoce la varianza  $\beta^2$  del ruido gaussiano, la media cuando hay un contacto presente y el valor  $\lambda$ .

Por lo tanto la Ecuación (3.15) especifica que las muestras de datos disponibles  $y_n$  son integradas (sumados) y comparados con un umbral. Esta integración es un claro ejemplo de cómo la LRT especifica el procesamiento de datos que son medidos. Tenga en cuenta también que no se requiere evaluar específicamente las pdfs.

El término  $\sum y_n$  es llamado Estadística Suficiente, y es denotado por  $\gamma(y)$ . Esto implica que si conocemos esta variable, esta será suficiente para poder tener el conocimiento requerido para describir el comportamiento de los datos actuales y. En particular el criterio de decisión puede ser escrito de la siguiente forma (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$\gamma(\mathbf{y})_{<_{H_0}}^{>^{H_1}} T \tag{3.16}$$

En este caso  $T = \frac{\beta^2}{m} \ln(-\lambda) + \frac{Nm}{2}$  y corresponde al valor del umbral de decisión.

El valor específico del umbral que asegurará que  $P_{FA} = \alpha$  aun no ha sido encontrado. La expresión original para  $P_{FA}$  requiere la distribución de probabilidad N-dimensional de y y una definición explícita de la región  $R_1$ , que hasta ahora solo ha sido definida explícitamente como los puntos en el espacio N-dimensional para el cual el LRT excede el aún desconocido umbral. Debido a que  $\Delta$  y  $\gamma$  son funciones de datos aleatorios y,  $\Delta$  y  $\gamma$  también son variables aleatorias y por lo tanto tendrán su propia pdf. Debido a la similitud de la Estadística Suficiente y el log(LRT) en este problema, solo  $\Delta$  y  $\gamma$  necesitan ser consideradas. Una alternativa es expresar  $P_{FA}$  en función de  $\Delta$  y  $\gamma$ , y luego resolver estas expresiones para  $\eta$  o lo que también se puede denominar como umbral *T*. Las expresiones requeridas son (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$\Delta(y)_{\leq_{H_0}}^{>^{H_1}} - \lambda \Leftrightarrow P_{fa} = \int_{\eta=-\lambda}^{+\infty} p_{\Delta}(\Delta|H_0) d\Delta = \alpha$$
(3.17)

$$\gamma(\mathbf{y})_{\leq_{H_0}}^{>H_1} T \Leftrightarrow P_{fa} = \int_{T}^{+\infty} p_{\gamma}(\gamma|H_0) d\gamma = \alpha$$
(3.18)

Como puede esperarse el resultado depende solo de la pdf del LRT o de la Estadística Suficiente cuando un contacto no está presente. Dado un modelo específico de pdf, un valor puede ser calculado para  $\eta$ .

Para ilustrar estos resultados, continuemos con el ejemplo de señal constante en ruido Gaussiano encontrando un umbral y luego evaluando su desempeño trabajando con la Estadística Suficiente. En este caso,  $\gamma(y)$  es la suma de los datos individuales de las muestras  $y_n$ .

Bajo la hipótesis  $H_0$  (sin contacto presente), las muestras son i.i.d., es decir  $y \sim N(0, \beta^2)$ . Por lo tanto la suma de los datos de y tienes una distribución  $\gamma \sim N(0, N\beta^2)$ . Una falsa alarma ocurre siempre que  $\gamma > T$ , entonces (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$\alpha = P_{fa} = \int_{T}^{\infty} p_{\gamma}(\gamma | H_0) d\gamma = \int_{T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N \beta^2}} e^{\frac{-\gamma^2}{2N \beta^2}} d\gamma$$
(3.19)

La Ecuación (3.19) es la integral de una distribución Gaussiana. Por lo tanto la función error aparecerá en la solución. La definición de la función error complementaria es de la siguiente forma:

$$erfc(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - erf(x)$$
(3.20)

Donde *erf* es la función error y *erfc* es la función error complementaria. Con el cambio de variables  $t = \frac{\gamma}{\sqrt{2N\beta^2}}$  la Ecuación (3.20) puede ser rescrita como (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$\alpha = P_{fa} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{T/\sqrt{2N\beta^2}}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{T}{\sqrt{2N\beta^2}}\right) \right]$$
(3.21)

Despejando la variable de interés *T*:

$$T = \sqrt{2N\beta^2} er f^{-1} (1 - 2P_{fa})$$
(3.22)

Las Ecuaciones (3.21) y Ecuaciones (3.22) muestran la forma de poder procesar T dado el valor de  $P_{fa}$  y viceversa. De esta forma tenemos toda la información para poder realizar el LRT en su forma de Estadística Suficiente. Teniendo que  $\gamma(\mathbf{y})$  es la suma de los datos de las muestras, mientras que el umbral puede ser calculado del número de N muestras, la
varianza  $\beta^2$  del ruido es asumida como conocida y la probabilidad de falsa alarma deseada  $P_{fa}$  es seleccionada por el diseñador.

Existen 4 variables interrelacionadas de interés, la probabilidad de detección  $P_D$ , la probabilidad de falsa alarma  $P_{fa}$ , la potencia del ruido  $\beta^2$ , y la constante *m* cuya presencia va a ser detectada. Las dos últimas son características de las señales, mientras que  $P_{FA}$  es generalmente fijada como parte de las especificaciones del sistema a un nivel que sea tolerable dependiendo del tipo de aplicación. Por lo tanto es necesario solamente determinar  $P_D$ . El enfoque es el mismo usado para determinar  $P_{fa}$ : determinar la función de densidad de probabilidad de la Estadística Suficiente  $\gamma$  bajo la hipótesis  $H_1$  e integrar el área desde el umbral hasta  $+\infty$ .

Debemos notar que la única diferencia bajo la hipótesis  $H_1$  es que las muestras individuales  $y_n$  ahora tienen una media m por lo tanto la variable  $\gamma$  ahora tiene una media Nm. Por lo tanto  $\gamma(\mathbf{y}) \sim N(Nm, N\beta^2)$ . Entonces de forma análoga ha como se calculó  $P_{fa}$ :

$$P_D = \int_T^\infty p_\gamma(\gamma | H_1) d\gamma = \int_T^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi N \beta^2}} e^{\frac{-(\gamma - Nm)^2}{2N \beta^2}} d\gamma$$
(3.23)

Con el cambio de variables  $t = \frac{\gamma - Nm}{\sqrt{2N\beta^2}}$  la Ecuación (3.23) puede ser rescrita como (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$\frac{\partial t}{\partial \gamma} = \frac{1}{\sqrt{2N\beta^2}}$$

$$P_D = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\beta^2}} * \sqrt{2N\beta^2} \int_{\frac{T-Nm}{\sqrt{2N\beta^2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} * \frac{2}{\pi} \int_{\frac{T-Nm}{\sqrt{2N\beta^2}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$P_D = \frac{1}{2} erfc \left(\frac{T-Nm}{\sqrt{2N\beta^2}}\right)$$
(3.24)

Utilizando las ecuaciones anteriores se puede obtener la siguiente forma (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$P_D = \frac{1}{2} erfc \left\{ erfc^{-1}(2P_{FA}) - \frac{\sqrt{N}m}{\sqrt{2\beta^2}} \right\}$$
(3.25)

Se considera que Nm es la componente de interés de la señal (ya que el objetivo es detectar su presencia) en la Estadística Suficiente  $\gamma(\mathbf{y})$  (la suma de las muestras de datos individuales  $y_n$ ). Si Nm se trata como una tensión, la energía correspondiente es  $(Nm)^2$ . La potencia de la componente de ruido es  $N\beta^2$ . Así, el término  $m\sqrt{N}/\beta^2$  es la raíz cuadrada de la relación señal a ruido (*SNR*) de este problema, ver Ecuación (3.26), y por tanto la Ecuación (3.25) puede reescribirse como se muestra en el Ecuación (3.27).

$$SNR = \frac{Nm^2}{\beta^2}$$
(3.26)

$$P_D = \frac{1}{2} erfc \{ erfc^{-1}(2P_{FA}) - \sqrt{SNR/2} \}$$
(3.27)

Dadas las ecuaciones que gobiernan el sistema de radar, se pueden mejorar las prestaciones alejando las pdfs de  $p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_0)$  y  $p_y(\mathbf{y}|\mathbf{H}_1)$ . Además se puede mejorar aumentando el *SNR* en función que se aumente el número de datos *m* de  $y_n$ . Una segunda opción para mejorar el *SNR* es reduciendo la potencia del ruido  $\beta^2$ .

#### 3.3 La integración coherente, no coherente y binaria

La capacidad para detectar contactos se inhibe por la presencia de ruido y la interferencia. Ambos son modelados como procesos aleatorios; el ruido es no correlacionado de muestra a muestra, la interferencia es correlacionada parcialmente (incluso posiblemente no correlacionado) de una muestra a otra. El contacto se puede modelar como no fluctuante (es decir, una constante) o como un proceso aleatorio que puede ser correlacionado completamente, parcialmente correlacionado, o no correlacionado de muestra a muestra (los modelos Swerling). La relación señal a interferencia (desde ahora interpretado dentro del *SNR*) y por lo tanto el rendimiento de detección son a menudo mejorados mediante la integración (añadiendo) de múltiples muestras del contacto y la interferencia, motivado por la idea de que la interferencia puede ser promediada mediante la adición de múltiples muestras. Así, en general, la detección se basará en N muestras del contacto más interferencia. Tenga en cuenta que se debe tener cuidado para integrar que las muestras representan la misma celda.

La integración puede ser aplicada a los datos en tres etapas diferentes en la cadena de procesamiento (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

1. Después de la demodulación coherente, a la banda base de valores complejos (I y Q, o la magnitud y fase) de datos. La combinación de muestras de datos complejos se conoce como integración coherente.

2. Después de la detección de envolvente, a la magnitud (también cuadrado o logaritmo de la magnitud) de los datos. La información de fase se descarta y se conoce como integración no coherente. Este es el caso del presente trabajo.

3. Después de la detección de umbral. Esta técnica se denomina integración binaria.

Un sistema podría elegir usar ninguno, uno, o cualquier combinación de estas técnicas. Muchos sistemas utilizan al menos una técnica de integración, y una combinación de coherente o no coherente con integración binaria es también común. El mayor costo de la integración es el tiempo y la energía necesaria para obtener múltiples muestras del mismo rango y ángulo (o múltiples decisiones de detección de umbral para la misma celda). En este momento no se puede realizar búsqueda de objetivos en otros lugares, o de seguimiento de objetivos ya conocidos, u obtener imágenes de otras regiones de interés. La integración también aumenta la carga computacional del procesamiento de señales.

En la integración coherente (tomando varios datos de la magnitud y fase de la misma celda), las muestras de datos  $y_n$  se combinan para formar una nueva variable compleja y

$$y = \sum_{n=0}^{N-1} y_n$$
(3.28)

Si el *SNR* de una sola muestra  $y_n$  es  $\chi_i$ , la integración de muestras de datos  $y_n$  tiene un SNR que es *N* veces la muestra sola  $y_n$ , es decir:

$$\chi_N = N * \chi_i \tag{3.39}$$

En la integración no coherente, la información de fase se descarta. En su lugar, la magnitud o la magnitud al cuadrado de las muestras de datos se integra. A veces se utiliza otra función de la magnitud, tales como el logaritmo de la magnitud.

La mayoría de los resultados de detección se han desarrollado para el detector de ley cuadrática, que se basa en la detección de la cantidad:

$$z = \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2 \tag{3.40}$$

La situación de la integración no coherente es más complicada, y será necesario determinar la función real de densidad de probabilidad de la variable aleatoria z integrado para calcular resultados de detección; esto se hace en la siguiente subsección.

La integración binaria tiene lugar después que una decisión inicial de detección ha tenido lugar. Esa decisión inicial puede basarse en una sola muestra, o en los datos que ya han sido integrados de manera no coherente y/o coherentemente.

#### 3.4 Contactos no fluctuantes

Ahora se considera la detección basada en integración no coherente de N muestras de contactos no fluctuantes (casos Swerling 0 o Swerling 5) en ruido blanco Gaussiano. Las componentes de amplitud y la fase del contacto son desconocidas. Así, una muestra de dato  $y_n$  es la suma de una constante compleja  $me^{(j\theta)}$  (con amplitud  $\tilde{m}$  y fase  $\theta$ ) y un ruido blanco Gaussiano  $\omega_n$  de potencia  $\beta^2/2$  en casa uno de los canales I y Q (potencia total del ruido es  $\beta^2$ ).

$$y_n = m + \omega_n \tag{3.41}$$

Bajo a hipótesis  $H_0$ , el contacto está ausente, por lo tanto  $y_n = \omega_n$ . La pdf de la variable  $z_n = |y_n|$  es Rayleigh (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$p_{z_n}(z_n|H_0) = \begin{cases} \frac{2z_n}{\beta^2} e^{-z_n^2/\beta^2} & z_n \ge 0\\ 0 & z_n < 0 \end{cases}$$
(3.42)

De igual manera, bajo a hipótesis  $H_1$ , el contacto está presente, por lo tanto  $y_n = m + \omega_n$ . La pdf de la variable  $z_n = |y_n|$  sigue una distribución de Rician (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$p_{z_n}(z_n|H_1) = \begin{cases} \frac{2z_n}{\beta^2} e^{-(z_n^2 + m^2)/\beta^2} I_0\left(\frac{2mz_n}{\beta^2}\right) & z_n \ge 0\\ 0 & z_n < 0 \end{cases}$$
(3.43)

Donde  $I_0$  es la función de Bessel modificada de primera especie y orden cero.

Entonces para un vector z de N muestras (no confundir con la suma escalar de muestras o variable z de la sección 3.3) su pdf es descrita para  $z_n \ge 0$  (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|H_0) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{2z_n}{\beta^2} e^{-z_n^2/\beta^2}$$
(3.44)

$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|H_1) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{2z_n}{\beta^2} e^{-(z_n^2 + m^2)/\beta^2} I_0\left(\frac{2mz_n}{\beta^2}\right)$$
(3.45)

La LRT y log-LRT entonces ya pueden ser definidas. El autor Richards, Mark A. en su libro "*Fundamentals of Radar Signal Processing*" explica detalladamente el procedimiento para poder determinar la  $P_D$  y  $P_{fa}$  el cual se basa en calcular la log(*LRT*) y realizar algunos cambios de variables y aproximaciones.

La probabilidad de falsa alarma resulta:

$$P_{fa} = 1 - I\left(\frac{T}{\sqrt{N}}, N - 1\right) \tag{3.46}$$

Donde I(u, M) es la función gamma incompleta de Pearson:

$$I(u, M) = \int_{0}^{u\sqrt{M+1}} \frac{e^{-\tau}\tau^{M}}{M!} d\tau$$
(3.47)

Para el caso especial de una muestra (N = 1), la Ecuación (3.46) se simplifica:

$$P_{fa} = e^{-T} \tag{3.48}$$

O despejando la incógnita de interés:

$$T = -\ln(P_{fa}) \tag{3.49}$$

La probabilidad de detección resulta:

=

$$P_{D} = \int_{T}^{\infty} \left(\frac{z'}{N\chi}\right)^{\frac{N-1}{2}} e^{-z-N\chi} I_{N-1} \left(2\sqrt{N\chi z'}\right) dz'$$

$$Q_{M} \left(\sqrt{2N\chi}, \sqrt{2T}\right) + e^{-(T+N\chi)} \sum_{r=2}^{N} \left(\frac{T}{N\chi}\right)^{(r-1)/2} I_{r-1} \left(2\sqrt{N\chi T}\right)$$
(3.50)

Tener en cuenta que la variable z' la cual resulta de algunos cambios de variable muy importantes. En resumen se debe considerar:

$$z = \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2 \tag{3.51}$$

Motivo por el cual, cuando se disponga de la variable z el procesamiento es llamado "Ley cuadrática de Detección". La estandarización de z respecto a  $\beta$  es llamado detector lineal normalizado. En función de las muestras  $y_n$ :

$$z' = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2}{\beta^2}$$
(3.52)

Además tener en cuenta que  $\chi$  es la relación señal a ruido promedio y  $I_{N-1}(\chi)$  es la función de Bessel modificada de primera especie y orden N - 1.

La Figura 13 muestra que la integración no coherente reduce el requerido SNR de una sola muestra para conseguir una  $P_D$ . Por ejemplo, considere el SNR requerido de una sola muestra para lograr una  $P_D = 0.9$ . Para N = 1, se requiere un *SNR* de 14.2 dB; para N = 10, se requiere un *SNR* de 6.1 dB. Lo que significa una reducción de 8.1 dB.



Figura 13 Efecto de la integración no coherente en la  $P_D$  de un objetivo no fluctuante en ruido gaussiano. Fuente: Fundamental of Radar Signal Processing (Richards, 2005)

## 3.5 Contactos fluctuantes

El análisis realizado en el apartado anterior sólo considera objetivos no fluctuantes, a menudo llamado caso Swerling 0 o Swerling 5. Un modelo más realista permite fluctuaciones de contacto, en la que el "*Radar Cross Section*" (RCS) del contacto se encuentra sobre la función densidad de probabilidad exponencial o Chi-cuadrado, y el RCS de un grupo de N muestras sigue bien un modelo correlacionado "*pulse to pulse*" o "*scan to scan*".

Tenga en cuenta que representar el contacto por los modelos Swerling 1 a 4 no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de falsa alarma, ya que se determinó sólo por la pdf cuando el contacto no está presente. Por lo tanto la Ecuación (3.46) sigue siendo válida. La estrategia para determinar la probabilidad de detección depende del modelo Swerling utilizado. Sin embargo, el *SNR* es ahora una variable aleatoria porque el RCS del contacto se modela como una variable aleatoria.

Las expresiones resultantes de  $P_D$  se pueden encontrar en los libros de (Meyer & Mayer, 1973), (Di Franco & Rubin, 1980), y muchos otros textos de detección de radar (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005). En la Tabla 2 se resumen las expresiones resultantes para la probabilidad de detección considerando contactos fluctuantes utilizando modelos Swerling 1, 2, 3 y 4.

Caso	$P_D$	Comentarios
1	$(1)^{N-1}$	Aproximación para
	$\left(1+\frac{1}{N\nu}\right) = e^{-1/(1+N\chi)}$	$P_{fa} \ll 1 \text{ y } N\chi > 1$ ; exacto
		para $N = 1$
2		
	$1 - I\left[\frac{1}{(1+\chi)\sqrt{N}}, N-1\right]$	
3	$(2) N^{-2} \begin{bmatrix} T & 2(N-2) \end{bmatrix}$	Aproximación para
	$\left(1+\frac{2}{N}\right)$ $\left 1+\frac{1}{N}-\frac{2(N-2)}{N}\right e^{-T/(1+\frac{N}{2})}$	$P_{fa} \ll 1$ y $N\chi/2 > 1;$
	$\begin{pmatrix} N\chi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{N\chi}{2} & N\chi \end{bmatrix}$	exacto para $N = 1 o 2$
4	$\sum_{n=1}^{N} N! (1-c)^{N-k} (\sum_{n=1}^{2N-1-k} e^{-cT} (cT)^{l})$	1
	$c^N \sum \frac{1}{ u } \left(\frac{1-c}{c}\right) $ } $\sum \frac{c-(cT)}{ u } T > N(2-c)$	$c = \frac{1}{1 + (\chi/2)}$
	$\sum_{k=0}^{2} \frac{k!}{k!} (N-k)! (C) \left(\sum_{l=0}^{2} l!\right)$	
	$\sum_{n=1}^{N} N! \qquad (1-c)^{N-k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-cT} (cT)^{l}\right)$	
	$\left  1 - c^N \right\rangle \left  \frac{1}{k! (N-k)!} \left( \frac{1}{c} \right) \right\rangle \left  \frac{1}{c} \right\rangle \left  \frac{1}{k! (N-k)!} \left( \frac{1}{c} \right) \right\rangle \right  \frac{1}{k! (N-k)!} \left  \frac{1}{c} \right  \frac{1}{k!} \left  \frac{1}{c} \right  \frac{1}{k! (N-k)!} \left  \frac{1}{c} \right  \frac{1}{k!} \left  \frac{1}{k! (N-k)!} \left  \frac{1}{c} \right  \frac{1}{k!} \left  \frac{1}$	
	$\sum_{k=0}^{k} k : (N - K) : (L - 2N - k)$	
	$P = 1  I\left(\frac{T}{2} N = 1\right)$	Válida para todos los
	$r_{fa} = 1 - I \left( \frac{1}{\sqrt{N}}, N = 1 \right)$	casos
	,	1

Tabla 2 Probabilidad de detección usando modelos Swerling para contactos fluctuantes con una ley cuadrática de detección.

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 14 se compara la  $P_D$  de los cuatro modelos Swerling para contactos fluctuaciones y el modelo para contactos no fluctuantes con N = 10 muestras en función del *SNR* para una  $P_{fa} = 10^{-8}$ . Suponiendo que el interés principal está en valores relativamente altos de  $P_D$  (> 0.5). En este caso, los contactos no fluctuantes tienen rendimientos más favorables, en el sentido de que se consigue una determinada probabilidad de detección con un *SNR* más bajo. El peor de los casos (*SNR* requerido más

alto para una determinada  $P_D$ ) es el caso Swerling 1, que corresponde a una correlación "scan to scan" y una pdf exponencial del RCS del contacto.



Figura 14 Comparación de  $P_D$  para contactos fluctuantes (Swerling) y no fluctuantes utilizando la integración no coherente de pulsos 10 (N = 10) y una  $P_{fa} = 10^{-8}$  con un detector de ley cuadrática.

Fuente: Fundamental of Radar Signal Processing (Richards, 2005)

# Capítulo 4 Detector CFAR

Como se discutió en el capítulo anterior, los sistemas de detección en radares basados en umbral, asumen que el nivel de interferencia es conocido y constante. Esto a su vez, permite un ajuste preciso de un umbral que asegura una probabilidad de falsa alarma específica. En la detección de contactos, el *"clutter"* o ecos provenientes de las olas del mar, junto con el ruido, es la llamada interferencia. En la práctica, el nivel de interferencia es a veces variable. La detección basada en tasa de falsa alarma constante también llamado frecuentemente como detección con umbral adaptativo o detección automática. Es una técnica para proveer un umbral predecible y una probabilidad de falsa alarma adecuada en escenarios de con interferencia real.

### 4.1 El efecto de la potencia de interferencia sobre la probabilidad de falsa alarma

En el capítulo anterior, se mostró el rendimiento de detección y falsa alarma de un detector de ley cuadrática considerando un contacto bajo ruido blanco Gaussiano como interferencia. Se utilizaron modelos Swerling para los contactos e integración no coherente de un número de pulsos. Para caso particular donde sólo se dispone de una muestra, la probabilidad de falsa alarma es:

$$P_{fa} = e^{-T} \tag{4.1}$$

Donde *T* es el umbral de detección requerido para obtener una probabilidad de falsa alarma específica. Este análisis fue realizado en términos de salida de un detector de ley cuadrática normalizado  $z' = z/\beta$ , donde  $\beta^2$  es la potencia total del ruido de interferencia. En términos del detector de ley cuadrática no normalizado el umbral es (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$T = -\beta^2 \ln(P_{fa}) \tag{4.2}$$

Tenga en cuenta que el umbral T es proporcional a la potencia de la interferencia, entonces se puede modelar de la forma  $T = \alpha \beta^2$ , y el factor multiplicador  $\alpha$  es una función de la probabilidad de falsa alarma deseada.

Para sintonizar el detector de ley cuadrática de un sistema de radar, se debe elegir un valor aceptable de  $P_{fa}$  el umbral es luego calculado de acuerdo a la Ecuación (4.2). La probabilidad de detección es determinada por la relación señal a ruido del contacto.

Dado un umbral de decisión T, la  $P_{fa}$  observada variará con respecto al valor previsto. Para ver cuán significativa puede ser esta variación, considere que sea la probabilidad de falsa alarma es  $P_{fa0}$  cuando el valor estimado de la potencia de interferencia es  $\beta_0^2$ ; por lo tanto  $T = -\beta_0^2 In(P_{fa0})$ . Ahora supongamos que la potencia de interferencia real es  $\beta^2$ . Siendo la  $P_{fa}$  real, el umbral diseñado suponiendo una potencia de interferencia  $\beta^2$  es  $T = -\beta^2 In(P_{fa})$ . Igualando las expresiones de los umbrales:

$$-\beta^2 In(P_{fa}) = -\beta_0^2 In(P_{fa0}) \tag{4.3}$$

Despejando la probabilidad de falsa alarma real  $P_{fa}$ :

$$P_{fa} = P_{fa0}^{(\beta_0^2/\beta^2)}$$
(4.4)

(4.5)

El factor de incremento de probabilidad de falsa alarma es:



Figura 15 Aumento de  $P_{fa}$  para un umbral fijado debido al aumento en la potencia del ruido. El código se detalla en el Anexo A. Fuente: Elaboración Propia

En la Figura 15 tres valores diferentes de diseño de probabilidad de falsa alarma. Esta figura muestra que un pequeño incremento de 2 dB puede causar un incremento en la  $P_{fa}$  de 1.5 a 3 veces la probabilidad de diseño esperada en escala logarítmica. Además los cambios son más drásticos cuando la  $P_{fa0}$  es más pequeña. Se observa claramente una alta sensibilidad frente a pequeños cambios en la potencia de la interferencia o lo que es equivalente, frente a cambios en el ajuste del umbral de detección.

La principal razón del incremento de  $P_{fa}$  observada en la Figura 15 es que el umbral *T* es diseñado en base a un valor de potencia de ruido  $\beta^2$  incorrecto. Por lo tanto, como la potencia de la interferencia en la recepción varía, el valor de la  $P_{fa}$  se verá afectada. Desde el punto de vista del sistema del radar, esta es una condición bastante indeseable. En caso que valor de la potencia del ruido disminuya, la  $P_{fa}$  también se reducirá pues el umbral *T* más grande de lo necesario, viéndose afectada la probabilidad de detección  $P_D$ .

### 4.2 Filtro CFAR paramétrico

A fin de obtener unos rendimientos predecibles y consistentes, el diseño del sistema de radar parte con la consigna de una probabilidad de falsa alarma constante. Para conseguir esto, la potencia de la interferencia actual debe ser estimada de los datos en tiempo real, lo que significa que el umbral T debe ajustarse manteniendo la  $P_{fa}$  de diseño. Al proceso de detección que puede mantener una  $P_{fa}$  constante, es llamado "constant false alarm rate".

El filtro CFAR o "*Constant False Alarm Rate*" paramétrico se basa en modelar los ecos producidos por las olas del mar o interferencia y declarar la presencia de contactos manteniendo una probabilidad de falsa alarma constante utilizando un umbral adaptativo de detección.

### 4.2.1 CA-CFAR

Considere un sistema de radar que realiza el proceso de detección en una imagen de radar, de manera que las celdas individuales son píxeles de una imagen bidimensional como se muestra en la Figura 16. El detector poner a prueba cada celda para determinar la presencia o ausencia de un contacto. La celda bajo prueba es comparada con el umbral de detección. Si el valor del dato de la celda bajo prueba excede el umbral, el procesador declara un contacto presente en el correspondiente rango y "*azimuth*". Luego la siguiente celda es puesta a prueba, así sucesivamente hasta poner a prueba todas las celdas de interés.

Para establecer el umbral de la celda bajo prueba  $x_i$ , la potencia de la interferencia en esta celda debe ser conocida. Puesto que  $\beta^2$  puede ser variable, esta debe ser estimada de los datos.

El método utilizado en el procesamiento CFAR está basado en dos hipótesis principales (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

- 1- Las celdas vecinas contienen interferencia con la misma estadística que la celda bajo prueba, por lo tanto se considera que la interferencia es homogénea.
- 2- Las celdas vecinas no contienen ningún contacto. Sólo contienen interferencia.

Bajo estas condiciones, las estadísticas de la interferencia en las celdas bajo prueba se pueden estimar a partir de las muestras medidas en las celdas adyacentes.



Figura 16 Generalización de una imagen de Radar

Para una interferencia Gaussiana y una ley cuadrática de detección, la pdf a la salida del detector tendrá una distribución Exponencial. En este caso, para determinar la pdf de la interferencia sólo se necesita estimar un parámetro, la media.

Asumiendo que la interferencia es independiente e idénticamente distribuida (i.i.d) con una potencia total  $\beta^2$ , la pdf de la celda  $X_i$ , se expresa como (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$p_{X_i}(X_i) = \frac{1}{\beta^2} e^{-X_i/\beta^2}$$
(4.6)

Asumiendo que *N* celdas vecinas (no confundir con la definición del capítulo anterior) de la celda bajo prueba son usadas para estimar  $\beta^2$  y que la interferencia en cada una de éstas es i.i.d. La pdf de un vector *X* compuesto por las *N* muestras de celdas vecinas (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{\beta^{2N}} \prod_{i=1}^{N} e^{-X_i/\beta^2} = \frac{1}{\beta^{2N}} e^{-\sum_{i=1}^{N} X_i/\beta^2}$$
(4.7)

La Ecuación (4.7) es la función de verosimilitud  $\Lambda$  para obtener el vector de datos X. La estimación por máxima verosimilitud de  $\beta^2$  es obtenido al maximizar la Ecuación (4.7). Es más conveniente trabajar con su expresión logarítmica:

$$ln\Lambda = -Nln(\beta^2) - \frac{1}{\beta^2} \left( \sum_{i=1}^N X_i \right)$$
(4.8)

Maximizando por medio de la primera derivada respecto a  $\beta^2$ :

$$\frac{\partial(\ln\Lambda)}{\partial(\beta^2)} = 0 = -N\left(\frac{1}{\beta^2}\right) - \left(-\frac{1}{(\beta^2)^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)$$
(4.9)

Despejando la variable de interés  $\beta^2$ , se obtiene su estimador (Kay, 1998):

$$\widehat{\beta^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{4.10}$$

El umbral requerido es estimado como un múltiplo de la potencia del ruido mediante la Ecuación (4.11) (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005).

$$\hat{T} = \alpha \widehat{\beta^2} \tag{4.11}$$

Debido a que la potencia de la interferencia y por lo tanto el umbral son estimados de una promedio de la potencia de las celdas adjuntas a la celda bajo prueba. Este método CFAR es llamado "*cell averaging CFAR*" (CA-CFAR).

Debido a que la potencia de la interferencia es estimada en lugar de conocerla con exactitud; el factor escalar  $\alpha$  no debe tener la misma expresión que en la Ecuación (4.2).

#### 4.2.2 Ventana CFAR

La Ecuación (4.10) muestra que el parámetro de la pdf exponencial descrita por los datos de un detector de ley cuadrática es estimado del promedio de las N muestras adyacentes. Un diagrama típico de un detector CFAR se muestra en la Figura 17. (Magaz, Belouchrani, & Hamadouche, 2011)

En la Figura 17 se muestra un vector de datos unidimensional de celdas de rango con la celda bajo prueba  $X_0$  en la parte central. Las celdas negras representan los datos del rango que son promediados para estimar el parámetro del ruido. Estas celdas son llamadas celdas de referencia. Las celdas blancas inmediatamente adyacentes a la celda bajo prueba son llamadas celdas bajo prueba y son excluidos del promedio. La razón es que un contacto, si está presente, podría saltear las celdas donde se encuentra el contacto. En este caso, la energía en las celdas adyacentes a  $X_0$  contendría interferencia y energía del contacto. Por lo tanto no sería representada de sólo interferencia. La combinación de las celdas de referencia, las celdas de guarda y la celda bajo prueba es llamada ventana CFAR.



Figura 17 Diagrama típico de un detector CFAR Fuente: Elaboración Propia

## 4.2.3 Umbral CA-CFAR

El detector se considerará CFAR si el valor esperado de  $P_{fa}$  no depende del valor de  $\beta^2$ . Combinando las Ecuaciones (4.10) y (4.11) da una expresión del umbral estimado:

$$\hat{T} = \frac{\alpha}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{4.12}$$

Se define  $z_i = (\alpha/N)X_i$  (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005), así se obtiene:

$$\widehat{T} = \sum_{i=1}^{N} z_i \tag{4.13}$$

Siendo  $X_i$  una pdf exponencial, la pdf de  $z_i$  es dada como:

$$p_{z_i}(z_i) = \frac{N}{\alpha\beta^2} e^{-Nz_i/\alpha\beta^2}$$
(4.14)

A su vez, la pdf de  $\hat{T}$  sigue una distribución de Erlang (un caso especial de la distribución Gamma) (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$p_{\hat{T}}(\hat{T}) = \left(\frac{N}{\alpha\beta^2}\right)^N \frac{\hat{T}^{N-1}}{(N-1)!} e^{-N\hat{T}/\alpha\beta^2}$$
(4.15)

La  $P_{fa}$  observada con el umbral estimado será  $e^{(-\hat{T}/\beta^2)}$ . Esta es ahora una variable aleatoria (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$P_{fa} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\hat{T}/\beta^2\right)} p_{\hat{T}}(\hat{T}) d\hat{T}$$
(4.16)

Desarrollando dicha integral y realizando algunas manipulaciones algebraicas (Richards, Fundamentals of Radar Signal Processing, 2005):

$$P_{fa} = \left(1 + \frac{\alpha}{N}\right)^{-N} \tag{4.17}$$

Donde el coeficiente multiplicativo  $\alpha$  es una función dependiente de la  $P_{fa}$  de diseño del CFAR:

$$\alpha = N\left(P_{fa}^{-1/N} - 1\right) \tag{4.18}$$

Observe que la  $P_{fa}$  no depende del valor estimado de la potencia de la interferencia  $\beta^2$ . En cambio depende del número de celdas vecinas promediadas *N*. El algoritmo programado se encuentra en el Anexo B.

Considerando un modelo de contacto Swerling 1, la  $P_D$  se expresa como:

$$P_D = \left(1 + \frac{\alpha}{N(1+\chi)}\right)^{-N} \tag{4.19}$$

Donde se recuerda que  $\chi$  es la relación señal a ruido promedio de un contacto.

#### 4.3 La relación señal a ruido

La relación señal a ruido es un parámetro muy importante para el procesamiento de señales. La relación señal a ruido o el acrónimo SNR proveniente de "*Signal to Noise Ratio*", define una medida de la calidad de una señal en un sistema.

Físicamente se define como la relación entre la potencia de la señal entre la potencia de ruido en un punto dado de un sistema. Matemáticamente se expresa:

$$SNR = \frac{Potencia \ de \ la \ señal}{Potencia \ de \ ruido}$$
(4.20)

O expresada en dB:

$$SNR_{dB} = 10 * \log\left(\frac{Potencia \ de \ la \ señal}{Potencia \ de \ ruido}\right)$$
(4.21)

Cada pixel de la imagen de radar es evaluado. La potencia de la señal es el cuadrado de la medición obtenida en cada pixel. La potencia de la señal de ruido se aproxima observando la dinámica de la señal en las zonas contiguas al pixel que es evaluado.

Para establecer el *SNR* de la celda  $X_0$ , la potencia de la interferencia debe ser estimada de los datos. Dicha potencia es variable en el tiempo y en el espacio. El método utilizado en el procesamiento CFAR considera que *N* celdas vecinas de la celda bajo prueba son usadas para estimar  $\beta^2$ . En este punto del análisis se debe tener en cuenta que en este trabajo la variable estimada  $\beta^2$  representa ruido e interferencia. Mediante estimación por máxima verosimilitud se obtuvo el estimado de  $\beta^2$  (Kay, 1998).

$$\widehat{\beta^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{4.22}$$

Finalmente la expresión del SNR queda:

$$SNR = \frac{X_0}{\widehat{\beta^2}} = \frac{Y_0^2}{\widehat{\beta^2}}$$
(4.23)

En la Figura 18 se muestra el esquema del algoritmo de cálculo del SNR. Las N celdas de referencia se encuentran distribuidas a ambos lados de la celda bajo prueba. Cada grupo de celdas de referencia se encuentran ubicadas G/2 celdas alejadas de la celda bajo prueba, donde G es el número de celdas de guarda. Esta configuración permite evitar considerar como referencia a un contacto contenido dentro de más de una celda.



Figura 18 Esquema del cálculo del SNR Fuente: Elaboración Propia

El algoritmo de cálculo del SNR es implementado en la plataforma de Matlab en el archivo snr.m. El código se presenta el en Anexo C de este trabajo.

# Capítulo 5 Resultados

## 5.1 Aplicación del SNR

Los datos de una imagen de radar son recibidos en forma de matriz de 1024 filas y 8192 columnas, correspondientes a la resolución del ángulo de una vuelta y a la distancia observada por el radar. Por lo tanto por cada imagen de radar (vuelta completa) se tiene más de 8 millones de datos.

La digitalización se realiza transformando los ecos de retorno hacia el radar en una señal de voltaje. Un conversor analógico digital con un cierto rango de digitalización (voltaje mínimo y máximo dentro del cual se digitaliza la señal) transforma el voltaje dentro de rango en valores que pueden variar desde 0 a 255.

En la Figura 19 se muestra una imagen de radar donde se observan los datos *Y* (previos al detector lineal). Los datos experimentales corresponden a mediciones obtenidas con un radar marino Sperry Marine bajo condiciones de mar tipo 1 o 2 en la escala Beaufort. Para este proyecto, no es posible realizar integración de datos debido a que sólo se dispone de un valor por celda. Por lo tanto para este caso es válida la teoría del detector CA-CFAR.



Figura 19 Imagen de una vuelta completa de radar Fuente: Elaboración Propia

A continuación se realiza el análisis de una señal en un "azimuth" seleccionado aleatoriamente. La señal seleccionada se muestra en la Figura 20. A) Se observa que la medición del radar más común es cero (moda igual cero). Dicha condición produce indeterminaciones al calcular el SNR. Como en el capítulo 4, la potencia del ruido es estimada a partir de la media de la potencia de las celdas de referencia. Si el pixel a ser evaluado se encuentra rodeado de señal con medición igual a cero, el valor estimado de la potencia del ruido a partir de las N celdas de referencia es nulo o cero ( $\beta^2 = 0$ ). Este es un caso bastante improbable debido a que el valor de intensidad marcado por el radar se obtiene a partir de ecos provenientes de contactos u olas y además producto del ruido térmico.

En la sección 4.4 se determinó que la ecuación para el cálculo del SNR es:

$$SNR = \frac{X_i}{\widehat{\beta^2}} = \frac{Y_i^2}{\widehat{\beta^2}}$$

Siendo  $\beta^2 = 0$  e incluso dándose casos donde a su vez  $Y_i = 0$  los valores de *SNR* en muchas celdas se consideran infinitos o indeterminados.

En la Figura 20. B) se muestra gráficamente el cálculo del SNR de la señal anterior utilizando el algoritmo de la Figura 18 el cual ha sido implementado en Matlab y anexado en este trabajo. Las secciones discontinuas corresponden a valores indeterminados o infinitos. Para estos pixeles resulta imposible tener información sobre el comportamiento del ruido y por lo tanto imposible el cálculo del umbral de detección. En la sección 4.2.1 se determinó que el umbral de detección es proporcional a la potencia del ruido:

$$\widehat{T} = \alpha \widehat{\beta^2}$$

Si en muchos casos,  $\hat{\beta}^2$  es cero, el umbral producto del detector CA-CFAR es cero. Un claro ejemplo de la necesidad de ampliar el rango de digitalización se muestra al analizar los pixeles 259 y 5762. Se observa que el pixel 259 posee una medición bastante alta el cual puede corresponder a un posible objetivo. En cambio el pixel 5762 posee una medición muy menor respecto al anterior mencionado. Al observar sus correspondientes valores de SNR se encuentra que para el pixel 259 se tiene un SNR de 50 dB y el pixel 5762 tiene un SNR de infinito.



Figura 20. A) Medición obtenida en un Azimut. B) Cálculo del SNR con N=80 y G=40 Fuente: Elaboración Propia

Por lo expresado en los párrafos anteriores, se demuestra la necesita de obtener mayor información sobre el ruido para poder diferenciar entre una medición producto de la señal o una medición producto exclusivamente de la interferencia. El ampliar el rango de digitalización permite muestrear interferencias, las cuales se han demostrado que se deben tener en cuenta y son fundamentales para muestro propósito.

Finalmente se considera conveniente ampliar el rango de digitalización para poder obtener información completa de la dinámica de la señal. Esto permitirá mejorar la toma de decisiones respecto a la presencia o no de un objetivo.

Después de ampliar el umbral de digitalización, se tomaron nuevos datos. En la Figura 21 se muestran los datos obtenidos de un "*azimuth*" aleatorio. Se debe tener en cuenta que las celdas más cercanas al radar sufren una distorsión en su medición, esta zona es llamada zona ciega y los resultados en esta zona deben ser tomados con precaución.

Dado que el umbral se ha ampliado teniendo sólo como consiga no tener valores en cero, en la Figura 21 se observa que la moda ha dejado de ser cero. Se debe tener en cuenta que toda la teoría explicada en este trabajo es aplicable para casos donde la interferencia o *"clutter"* es modelada como una distribución Gaussiana de media cero. Para obtener dicha distribución, a cada dato de la imagen se le ha restado la moda estadística.



Figura 21 Nueva medición obtenida de un "azimuth" Fuente: Elaboración Propia

Habiendo restado la moda estadística en la respectiva imagen, a continuación se realiza el análisis de una señal en un "*azimuth*" seleccionado aleatoriamente. La señal seleccionada se muestra en la Figura 22. A). Se observa que la medición del radar más común es cero. Pero dicha condición no produce indeterminaciones al calcular el SNR, pues la potencia del ruido es estimado a partir de las celdas de referencia con N = 80.



Figura 22. Medición obtenida en un Azimut. B) Cálculo del SNR con N=80 y G=40 Fuente: Elaboración Propia

En la Figura 22. B) se muestra gráficamente el cálculo del SNR de la señal anterior. No se observan secciones discontinuas corresponden a valores indeterminados. Por lo tanto se da conformidad al procedimiento.

Dado el algoritmo de cálculo del SNR se propone realizar futuros estudios para determinar  $\chi$  (SNR promedio) de los contactos. El procedimiento consistiría en realizar varias observaciones del contacto bajo las mismas condiciones (posición del contacto, dirección, velocidad del viento, tipo de mar, entre otros factores) y calcular la media aritmética del SNR. Finalmente se podría tener una aproximación de la probabilidad de detección.

## 5.2 Implementación del algoritmo CFAR

En esta sección se mostrará la prueba realizada con el algoritmo CA-CFAR con datos reales y se analizarán los resultados. Se ha utilizado como plataforma de cálculo el programa Matlab. Este programa permite procesar gran cantidad de datos y visualizar los resultados.

Los datos mostrados en la Figura 23 corresponden a la imagen cruda (antes de ingresar al detector cuadrático) donde se observa una vuelta de radar compuesta por 1024 "*azimuth*". Se debe tener en cuenta que aproximadamente las primeras 1000 celdas en el rango se encuentran en la llamada zona ciega.



Figura 23 Imagen Cruda Fuente: Elaboración Propia

Para poder tener una mejor idea sobre la ubicación geográfica que se muestra en la Figura 23 se ha adaptado y modificado la publicación (Leadbetter, 2010). Este nuevo programa se encuentra en el Anexo D. En la Figura 24 se muestra una comparación de la pantalla PPI correspondiente a la Figura 23 y una imagen extraída de "*Google Earth*" de la misma zona.



Figura 24 Comparación entre imagen satelital y pantalla PPI Fuente: Elaboración Propia

En la Figura 25 se muestra un ejemplo de señal de radar correspondiente al "*azimuth*" 750. Se presenta la señal con intensidad Y (antes del detector de ley cuadrática) y la intensidad X (a la salida del detector de ley cuadrática) expresada en dB. Se comprueban los altos valores en la zona ciega. Los datos de la zona ciega no siguen una distribución Gaussiana

de media cero y por lo tanto se espera que el filtro CA-CFAR no presente buen rendimiento.



Figura 25 Señal de Radar del "*azimuth*" 750 Fuente: Elaboración Propia

En la Figura 25, los rangos mayores al 6000 corresponden a "*clutter*" terrestre. Las muestras tomadas en esta zona no siguen una distribución Gaussiana de media cero. Por lo tanto al igual que la zona ciega, no se debe tomar en cuenta los resultados en estas zonas para evaluar el buen comportamiento del filtro CA-CFAR.

Para la configuración del número de N celdas vecinas de referencia y el número de G celdas de guarda se debe tener en cuenta algunas consideraciones. Para las celdas de guarda G se debe tener en cuenta el tamaño máximo del contacto que se desea detectar. En este caso se consideran contactos de un máximo de 150 metros equivalente a 20 celdas, por lo tanto G/2 = 20. Para las celdas de referencia, idealmente debe ser lo más grande posible, pero es restringida por la posibilidad de presencia de otro contacto o tierra cercana. Además se debe tener en cuenta que en la práctica la interferencia cambia en el espacio. En este caso se utiliza N = 80.

El parámetro más influyente es la  $P_{fa}$ . Este parámetro se debe diseñar en función de la cantidad de errores que se esperan tolerar en una imagen de radar. En este trabajo una imagen de radar contiene  $2^{23}$  celdas (1024 "*azimuth*" por 8192 en rango). Si se espera que menos de una celda declare la presencia de un contacto cuando en realidad sólo existe interferencia. Entonces una  $P_{fa}$  de  $10^{-7}$  puede ser admisible. Bajo estas condiciones se espera 0.8389 falsas alarmas por imagen de radar.

En la Figura 26 se muestran los resultados obtenidos al procesar la imagen de la Figura 24 con el algoritmo CFAR implementado y esquematizado en la Figura 17. El algoritmo es desarrollado en Matlab y se presenta en el Anexo E. El programa implementado muestra

con círculos negro los centros de gravedad de los contactos encontrados. Se ha preferido presentar como pantalla PPI para mantener la idea de la imagen geográfica de la zona.

En el centro de la Figura 26 se encuentra la zona ciega. Como se mostró en la Figura 25, la zona ciega presenta intensidades que no siguen una distribución Gaussiana de media cero y además aparecen picos de intensidad. En la Figura 26 se comprueba que el filtro CA-CFAR declara una excesiva cantidad de contactos.

En la Figura 26 se ha declarado la presencia de contactos en la zona costera y en la isla. Dichos contactos falsamente declarados no deben ser considerados como una evaluación negativa del algoritmo CA-CFAR pues sólo ha sido diseñado para zonas de mar.



Figura 26 Resultado detector CFAR con N = 80, G = 40 y  $P_{fa} = 10^{-7}$ Fuente: Elaboración Propia

En la Figura 27 se muestra la comparación de la señal de radar del "*azimuth*" 750 y el umbral de detección. Entre los "*rangos*" 1000 al 6000 el umbral es mayor a la interferencia. En el rango 3000 existe un contacto el cual es detectado satisfactoriamente. Para valores de rango mayores al 6000 se declara la presencia de 3 contactos.

- Umbral sqrt(T) -- Pasan Intensidad > Intensidad Y - Umbral T - Pasan Rango **Rango** 000 ₿ ß Ŗ G  $\odot$ Y bebiznetni

Demostrándose que el filtro CA-CFAR diseñado para interferencia modelada como una distribución Gaussiana de media cero no presenta buenas prestaciones.

Figura 27 Comparación de la señal de radar y el umbral diseñado para G = 40 y N = 80Fuente: Elaboración Propia

Dado que G = 40 y N = 80, las primeras 60 celdas y las últimas 60 celdas no poseen un umbral de comparación. Considerando la zona ciega se han declarado una totalidad de 977 contactos y fuera de esta zona se han declarado 581 contactos.

Hasta el momento se tiene sólo dos variables de diseño no definidas estrictamente. El número de celdas de referencia N y la probabilidad de falsa alarma tolerable. Considerando que la interferencia sigue con gran similitud una distribución Gaussiana de media cero, y que para nuestro sistema de radar es tolerable una falsa alarma por imagen de radar. Entonces se puede suponer que el detector CA-CFAR tiene sólo como variable el número de celdas de referencia N.

Se debe observar el comportamiento del sistema radar al variar N. En la Figura 28 se presentan los resultados considerando N = 160. El comportamiento al parecer es muy similar al caso de la Figura 26 en la zona de mar. Aparentemente el sistema ha respondido mejor en la zona ciega, pues la cantidad de contactos declarados en esta zona ha disminuido. Se han declarado 549 contactos fuera de la zona ciega.



Fuente: Elaboración Propia



Figura 29 Resultado detector CFAR con N = 40, G = 40 y  $P_{fa} = 10^{-7}$ Fuente: Elaboración Propia

# Conclusiones

Se ha comprobado la necesita de obtener mayor información sobre el ruido para poder diferenciar entre una medición producto de la señal o una medición producto exclusivamente de la interferencia.

La ampliación del rango de digitalización permite muestrear interferencias, las cuales se han demostrado que se deben tener en cuenta y son fundamentales para muestro propósito. Esto permitirá mejorar la toma de decisiones respecto a la presencia o no de un objetivo.

Se ha comprobado el correcto funcionamiento del algoritmo en la detección de los contactos. Por lo tanto se ha comprobado que bajo condiciones de mar calmado tipo 1 o 2 en la escala de Beaufort, un modelo de distribución Gaussiana para la interferencia es bastante aceptable.

Se ha comprobado la fuerte dependencia en la selección de las celdas de guarda y las celdas de referencia. Variando la cantidad de celdas el algoritmo se ve afecto en la detección de contactos muy cercanos.

La hipótesis antes enunciada "Las celdas vecinas no contienen ningún contacto" puede ser afectada drásticamente al configurar el orden de las celdas de guarda y celdas de referencia. Para el diseño de las celdas de guarda se debe tener un ancho de ventana de por lo menos dos veces el tamaño del contacto que se desea detectar. Teóricamente, para el diseño de las celdas de ser infinito o la mayor cantidad de celdas posibles.

En el diseño de las celdas de referencia se debe tener en cuenta que al aumentar la cantidad de celdas, también aumenta la probabilidad de ubicar dentro de estas un contacto, una isla o costa. Esto produciría cálculos erróneos en la estimación de la potencia del ruido.

En lugares fuera de la zona ciega y de "clutter" terrestre se ha comprobado que la interferencia modelada como interferencia Gaussiana de media cero ha logrado buenos resultados en la implementación del filtro CA-CFAR.

Se debe modificar el "hardware" del sistema de radar para reducir la zona ciega. El tener una zona ciega extensa imposibilita la detección de contactos.

Las próximas líneas de investigación se deben centrar en diseñar filtros CA-CFAR bajo condiciones de mar tipo III en adelante. Implementado modelos de interferencia con distribuciones no Gaussianas como distribuciones de Weibull y K.

Otras próximas líneas de investigación se pueden centrar en detectar las zonas de "clutter" terrestre. La detección de estas zonas permitiría evitar considerar falsos contactos sobre dichas áreas.

## **Bibliografía**

- 1. Badillo Malacara, L. (Noviembre de 2004). *http://itzamna.bnct.ipn.mx/*. Obtenido de http://itzamna.bnct.ipn.mx/dspace/bitstream/123456789/1647/1/BADILLO.pdf
- 2. Bagad, V. S. (2008). Radar System. Pune: Technical Publications Pune.
- 3. Bianchi, C., & Meloni, A. (2007). Natural and man-made terrestrial electromagnetic noise: an outlook. *ANNALS OF GEOPHYSICS*, 435-445.
- 4. Di Franco, J. V., & Rubin, W. L. (1980). Radar Detection. Dedham: Artech House.
- 5. EMCOS Consulting and Software. (s.f.). *EMCOS*. Obtenido de http://www.emcos.com/docs/Application\_Note\_RCS\_Calculation\_for\_Ship.pdf
- 6. Kay, S. M. (1998). Fundamentals of Statistical Sginal Processing. Detection Theory (Vol. II). New Jersey: Prentice Hall PTR.
- 7. Kingsley, S., & Quegan, S. (1993). Understanding Radar Systems. Singapore: McGraw-Hill.
- 8. Leadbetter, A. (21 de Septiembre de 2010). *MathWorks*. Obtenido de http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/downloads/10226
- Magaz, B., Belouchrani, A., & Hamadouche, M. (2011). Automatic Threshold Selection in OS-CFAR Radar Detection Using Information Theoretic Criteria. *Progress In Electromagnetics Research B, Vol. 30*, 157–175.

- 10. Meyer, D. P., & Mayer, H. A. (1973). *Radar Target Detection*. New York: Academic Press.
- 11. Miyara, F., & Lahoz, L. A. (2003). *Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura*. Obtenido de http://www.fceia.unr.edu.ar/
- Pérez Vega, C., Zamanillo Sáinz De La Maza, J. M., & Casanueva López, A. (2007). Sistemas de Telecomunicación. Cantabria: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cantabria.
- 13. Richards, M. A. (2005). *Fundamentals of Radar Signal Processing*. New York: McGraw-Hill.
- 14. Sánchez Luna, R. (2007). *Técnicas algorítmicas para cancelación de ruido en imágenes de radar*. México D.F.: Instituto Politécnico Nacional.
- 15. Toomay, J. C., & Hannen, P. J. (2004). *Radar Priciples for the Non-specialist*. New York: Scitech Publishing Inc.
- 16. Unión Internacional de Telecomunicaciones. (Octubre de 2009). Unión Internacional de Telecomunicaciones. Obtenido de http://www.itu.int/dms\_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.372-10-200910-S!!PDF-S.pdf
- 17. ZAPATA, L., & LA TORRE, G. (11 de Abril de 2011). La UDEP y la Marina planean modernizar fragatas peruanas. Recuperado el 25 de Septiembre de 2013, de Reporteros.info: http://www.reporteros.info/2011/04/tecnologia-trabajo-conjunto.html

Anexo A

```
clc
clear all
close all
increase=0:0.1:20;
Pfa0=1/10^8;
Pfa=Pfa0.^((10.^(-increase./10))-1);
plot(increase, log10(Pfa), 'LineWidth', 2)
hold on
Pfa0=1/10^6;
Pfa=Pfa0.^((10.^(-increase./10))-1);
plot(increase, log10(Pfa), 'r', 'LineWidth', 2)
hold on
Pfa0=1/10^4;
Pfa=Pfa0.^((10.^(-increase./10))-1);
plot(increase, log10(Pfa), 'g', 'LineWidth', 2)
xlabel('Incremento de la potencia del ruido en dB', 'FontSize', 12.5)
ylabel('Log(Pfa/Pfao)', 'FontSize', 12.5);
grid
legend('Pfao=1/10^8', 'Pfao=1/10^6', 'Pfao=1/10^4')
```

## Anexo B

function [Pasan,stat,T]=CA CFAR(RawImage,Pfa,N,g)

%Pfa=1/10^6;% Probabilidad de falsa alarma deseada Pfa: %N=80;% Número total de datos para estimar el Ν: ruido (Numero de celdas de referencia) %q=40;% g: Número total de celdas de guarda  $alpha=N*((Pfa)^{(-1/N)-1});$ % alpha: Coeficiente proporcional para encontrar el umbral de detección [p q]=size(RawImage);% q: Número total de columnas de la imagen n=N/2+g/2+1;% n: Primera columna a calcular snr m=q-N/2-g/2;% m: Última columna a calcular snr amplitud=RawImage; Pasan=zeros(p,q); beta2=zeros(p,q); for j=1:p for i=n:m beta2(j,i) = (sum(amplitud(j,i-N/2-g/2:i-1g/2).^2)+sum(amplitud(j,i+1+g/2:i+N/2+g/2).^2))/N; end end T=alpha\*beta2; Pasan=amplitud>sqrt(T); Pasan(:,1:N+g)=0; Pasan(:,q-N-g:q)=0;stat = regionprops(Pasan, 'centroid'); image(amplitud,'CDataMapping','scaled'); colorbar; hold on; for x = 1: numel(stat) plot(stat(x).Centroid(1),stat(x).Centroid(2),'ko','LineWidth',2,'MarkerSi ze',5); end
## Anexo C

function [snr]=snr(RawImage)

amplitud=RawImage-mode(mode(RawImage(:,950:end)));

N=80;%	N <b>:</b>	Número total de datos para estimar el ruido (Numero de celdas de referencia)
g=40;%	g:	Número total de celdas de guarda
q=length(RawImage);%	d:	número total de columnas de la imagen
n=N/2+g/2+1;%	n:	primera columna a calcular snr
m=q-N/2-g/2;%	m :	última columna a calcular snr
<pre>[x y]=size(RawImage); snr=zeros([x y]); beta2=zeros([x y]); for i=1:x for j=n:m beta2(i,j)=(sum</pre>	(amplitud(	i,j-N/2-g/2:j-1-
g/2).^2)+sum(amplitud(i	,j+1+g/2:j	+N/2+g/2).^2))/N;
end		
end		
<pre>snr=10*log10(amplitud.^</pre>	2./beta2);	
figure; image(snr, 'CData	Mapping','	<pre>scaled');</pre>

## Anexo D

```
function PPI(Datos, Orientation, Rmax)
n=1;
[m p]=size(Datos);
for i=1:2:m
    for j=1:4:p
            distancia(n)=j*60000/p;
            angulo(n)=(i)*360/m+135;
            magnitud(n)=Datos(i,j);
            n=n+1;
    end
end
radarplot(distancia, angulo, magnitud, Rmax);
function radarplot(varargin)
  speed = varargin{1};
  direction = varargin{2};
 magnitud = varargin{3};
   rMax = varargin{4};
      style = 'k';
  cosMask = unique([find(direction <= 90), find(direction >= 270)]);
  sinMask = find(direction < 270 & direction > 90);
  ul(cosMask) = speed(cosMask) .* cosd(direction(cosMask));
 vl(cosMask) = speed(cosMask) .*
wl(cosMask) = magnitud(cosMask);
                                  •*
                                      sind(direction(cosMask));
  ul(sinMask) = speed(sinMask) .* cosd(direction(sinMask));
  v1(sinMask) = speed(sinMask) .*
                                      sind(direction(sinMask));
  w1(sinMask) = magnitud(sinMask);
  for i=1:length(w1)
    if sqrt(u1(i)^2+v1(i)^2) <= rMax
      u(i)=u1(i);
```

```
v(i)=v1(i);
     w(i)=w1(i);
   end
 end
 circle([0,0],rMax,360,style);
 hold on;
 scatter(u,v,5*5,w,'fill','d');
 circle([0,0],rMax * (1/2),360,style);
 radialaxis(0,rMax,style);
 radialaxis(90,rMax,style);
 radialaxis(180,rMax,style);
 radialaxis(270,rMax,style);
 hold off;
 function H=circle(center, radius, NOP, style)
   THETA=linspace(0,2*pi,NOP);
   RHO=ones(1,NOP) * radius;
   [X,Y] = pol2cart(THETA,RHO);
   X=X+center(1);
   Y=Y+center(2);
   H=plot(X,Y);
   set(H, 'Color', style);
   axis square;
%
___
function H = radialaxis(angle,maxx,plotColour)
   x(1) = 0;
   y(1) = 0;
   if(angle >= 270 && angle <= 90)
     x(2) = maxx * cosd(angle);
y(2) = maxx * sind(angle);
   else
     y(2) = maxx * cosd(angle);
x(2) = maxx * sind(angle);
   end
   H = plot(x, y);
   set(H, 'Color', plotColour);
```

## Anexo E

function PPI CA CFAR clc clear all close all load('D0 20140717-145400.mat'); %PÁMETROS DE DISEÑO Pfa=1/10^7; N=80; g=40; RawImage=RawImage-mode(mode(RawImage)); %Normalización Gaussiana [Pasan,stat,T]=CA CFAR(RawImage,Pfa,N,g); %Filtro CA-CFAR xlabel('Rango', 'FontSize', 12.5); ylabel('Azimuth', 'FontSize', 12.5); figure; PPI (RawImage, Orientation, 60000) %Pantalla PPI colorbar; hold on for x = 1: numel(stat) Center(round(stat(x).Centroid(2)),round(stat(x).Centroid(1)))=1; end PPI o(Center,Orientation(1),60000); %Gráfica centros de gravedad hold off; function [Pasan,stat,T]=CA CFAR(RawImage,Pfa,N,g) %Pfa=1/10^6;% Pfa: Probabilidad de falsa alarma deseada %N=80;% N: Número total de datos para estimar el ruido (Numero de celdas de referencia) Número total de celdas de guarda %g=40;% g: alpha=N\*((Pfa)^(-1/N)-1);% alpha: Coeficiente proporcional para encontrar el umbral de detección [p q]=size(RawImage);% Número total de columnas de la imagen q:

```
74
n=N/2+g/2+1;%
```

```
m=q-N/2-g/2;%
                                    Última columna a calcular snr
                            m:
amplitud=RawImage;
Pasan=zeros(p,q);
beta2=zeros(p,q);
for j=1:p
    for i=n:m
       beta2(j,i) = (sum(amplitud(j,i-N/2-g/2:i-1-
g/2).^2)+sum(amplitud(j,i+1+g/2:i+N/2+g/2).^2))/N;
    end
end
T=alpha*beta2;
Pasan=amplitud>sqrt(T);
Pasan(:,1:N+g)=0;
Pasan(:,q-N-g:q)=0;
stat = regionprops(Pasan, 'centroid');
image(amplitud,'CDataMapping','scaled'); colorbar; hold on;
for x = 1: numel(stat)
plot(stat(x).Centroid(1),stat(x).Centroid(2),'ko','LineWidth',2,'MarkerSi
ze',5);
end
function PPI(Datos, Orientation, Rmax)
n=1:
[m p]=size(Datos);
for i=1:2:m
    for j=1:4:p
            distancia(n)=j*60000/p;
            angulo(n) = (i) *360/m+135;
            magnitud(n)=Datos(i,j);
            n=n+1;
    end
end
radarplot(distancia, angulo, magnitud, Rmax);
function radarplot(varargin)
  speed = varargin{1};
  direction = varargin{2};
  magnitud = varargin{3};
    rMax = varargin{4};
      style = 'k';
  cosMask = unique([find(direction <= 90), find(direction >= 270)]);
  sinMask = find(direction < 270 & direction > 90);
  ul(cosMask) = speed(cosMask) .*
                                     cosd(direction(cosMask));
  v1(cosMask) = speed(cosMask) .*
                                      sind(direction(cosMask));
  w1(cosMask) = magnitud(cosMask);
  ul(sinMask) = speed(sinMask) .* cosd(direction(sinMask));
  v1(sinMask) = speed(sinMask)
                                 •*
                                      sind(direction(sinMask));
  w1(sinMask) = magnitud(sinMask);
  for i=1:length(w1)
    if sqrt(u1(i)^2+v1(i)^2) <= rMax
      u(i)=u1(i);
```

n:

Primera columna a calcular snr

```
v(i)=v1(i);
     w(i)=w1(i);
    end
  end
  circle([0,0],rMax,360,style);
  hold on;
  scatter(u,v,5*5,w,'fill','d');
  circle([0,0],rMax * (1/2),360,style);
  radialaxis(0,rMax,style);
 radialaxis(90,rMax,style);
  radialaxis(180, rMax, style);
  radialaxis(270,rMax,style);
 hold off;
function PPI o(Datos, Orientation, Rmax)
n=1;
[m p]=size(Datos);
for i=1:m
   for j=1:p
        if Datos(i,j)>0
            distancia(n)=j*60000/8192;
            angulo(n) = (i) * 360/1024 + 135;
            magnitud(n)=Datos(i,j);
            n=n+1;
        end
    end
end
radarplot o(distancia, angulo, magnitud, Rmax);
function radarplot_o(varargin)
  speed = varargin{1};
  direction = varargin{2};
 magnitud = varargin{3};
   rMax = varargin{4};
   style = 'k';
  cosMask = unique([find(direction <= 90), find(direction >= 270)]);
  sinMask = find(direction < 270 & direction > 90);
  ul(cosMask) = speed(cosMask) .* cosd(direction(cosMask));
                                 •*
  v1(cosMask) = speed(cosMask)
                                      sind(direction(cosMask));
  w1(cosMask) = magnitud(cosMask);
  u1(sinMask) = speed(sinMask) .*
                                     cosd(direction(sinMask));
  v1(sinMask) = speed(sinMask) .*
                                      sind(direction(sinMask));
  w1(sinMask) = magnitud(sinMask);
  for i=1:length(w1)
    if sqrt(u1(i)^2+v1(i)^2) <= rMax
     u(i)=u1(i);
      v(i)=v1(i);
     w(i)=w1(i);
    end
  end
```

```
circle([0,0],rMax,360,style);
 hold on;
 scatter(u,v,20,w,'ko','LineWidth',1);
 circle([0,0],rMax * (1/2),360,style);
 radialaxis(0,rMax,style);
 radialaxis(90, rMax, style);
 radialaxis(180,rMax,style);
 radialaxis(270,rMax,style);
 hold off;
 function H=circle(center,radius,NOP,style)
   THETA=linspace(0,2*pi,NOP);
   RHO=ones(1,NOP)*radius;
   [X,Y] = pol2cart(THETA,RHO);
   X=X+center(1);
   Y=Y+center(2);
   H=plot(X,Y);
   set(H, 'Color', style);
   axis square;
8-----
___
function H = radialaxis(angle,maxx,plotColour)
   x(1) = 0;
   y(1) = 0;
   if(angle >= 270 && angle <= 90)
     x(2) = maxx * cosd(angle);
     y(2) = maxx * sind(angle);
   else
     y(2) = maxx * cosd(angle);
x(2) = maxx * sind(angle);
   end
   H = plot(x, y);
   set(H, 'Color', plotColour);
```