CAPÍTULO 9: POTENCIA E INVERSIÓN (III)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 9: Potencia e Inversión (III)

C. Inversión en el plano

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

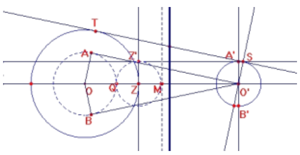
Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

24 diapositivas

Starry Night Over the Rhone
(Vincent Van Gogh)

CAPÍTULO IX: POTENCIA E INVERSIÓN

C. INVERSIÓN EN EL PLANO



C. INVERSIÓN EN EL PLANO

Sea el conjunto S' formado por todos los puntos del plano a excepción del punto O.

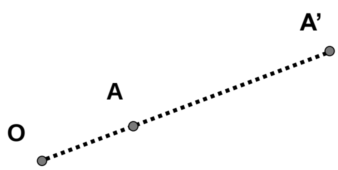
Inversión es una transformación de S' sobre sí mismo de tal forma que:

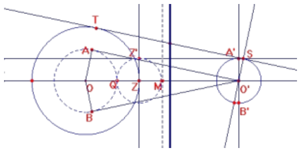
a) 2 puntos homólogos (inversos) A y A' están alineados con O.

b) K = OA x OA'

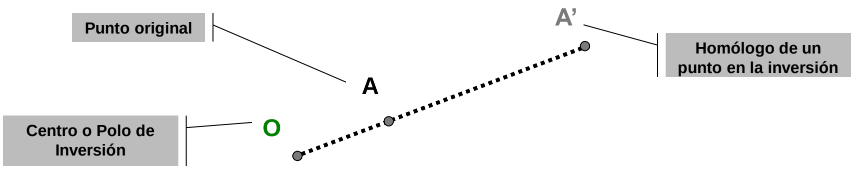
K es una constante positiva o negativa, llamada **potencia de inversión**.

A **O** se le llama **centro de inversión** o también **polo de inversión**



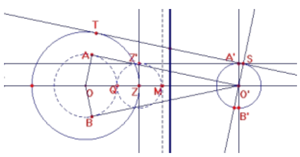


C. INVERSIÓN
EN EL PLANO



Como puede verse en la figura, para obtener el homólogo de un punto en la inversión (A'), se traza la recta que contiene al punto (A) y al Centro o Polo de Inversión (O), y a continuación se lleva sobre dicha recta, y a partir del polo de inversión la distancia correspondiente a dividir la potencia de inversión por la longitud que hay entre el polo de inversión y el punto original.

$$K = OA \times OA'$$



C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

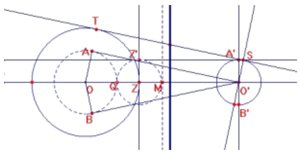
El producto OA x OA' se considerará positivo si A y A' están en la misma semirrecta respecto a O, y negativo en caso contrario.

La potencia de inversión K, debe darse con indicación de la unidad usada. La inversión queda definida si se conocen O y K; o bien y se conocen O y un par de puntos inversos cualesquiera A y A', alineados con O.

Corolario: La inversión es una transformación involutiva.

$$OA \times OA' = |K|$$

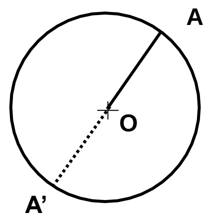
Es decir, que si A' es el inverso de A, para la misma inversión, A lo es de A'.



C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

TEOREMA IX-4

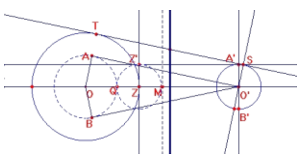
La circunferencia de centro O y radio $\sqrt{|K|}$ es doble.



DEMOSTRACIÓN TEOREMA IX-4

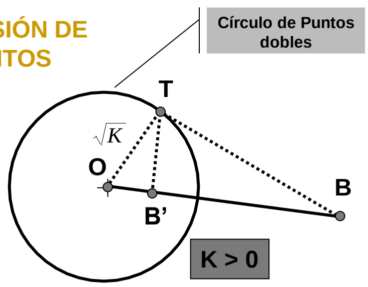
Si K > O, A es inverso de sí mismo pues OA x OA = K.

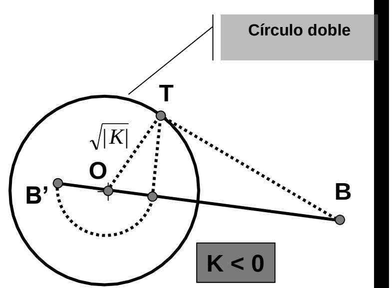
Si K < O, A' es el inverso de A y está también en la misma circunferencia.



C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

INVERSIÓN DE PUNTOS





$$\Delta OTB \cong \Delta OTB'$$

$$\frac{OB}{OT}=\frac{OT}{OB'} \Rightarrow OBxOB' = OT^2 = K$$

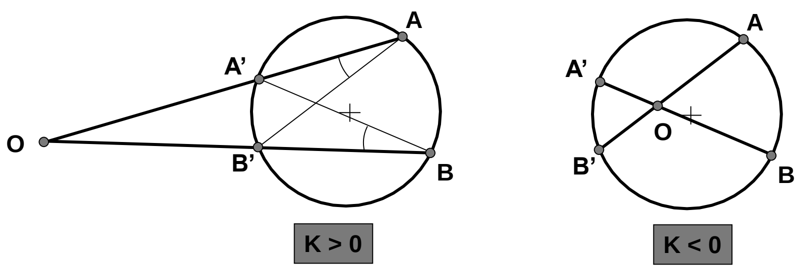
Desde **B** se traza una tangente a la circunferencia y luego desde ese punto de tangencia (**T**) una perpendicular a la línea que une **B** con el Polo de Inversión. el punto hallado será **B'**

B' se hallará a igual distancia pero al otro lado de **O**.

C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

TEOREMA IX-5

Dos pares de puntos inversos no alineados están en una circunferencia doble.



C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

DEMOSTRACIÓN TEOREMA IX-5

Sean A, A' y B', B' los pares de puntos inversos.

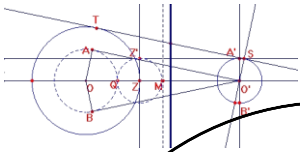
OA.OA' = OB.OB' implica que son concíclicos. (v. TEOREMA IX-2)

Ahora bien, dado un punto C de la circunferencia que los contiene, su inverso C' también estará en la misma circunferencia por la misma razón.

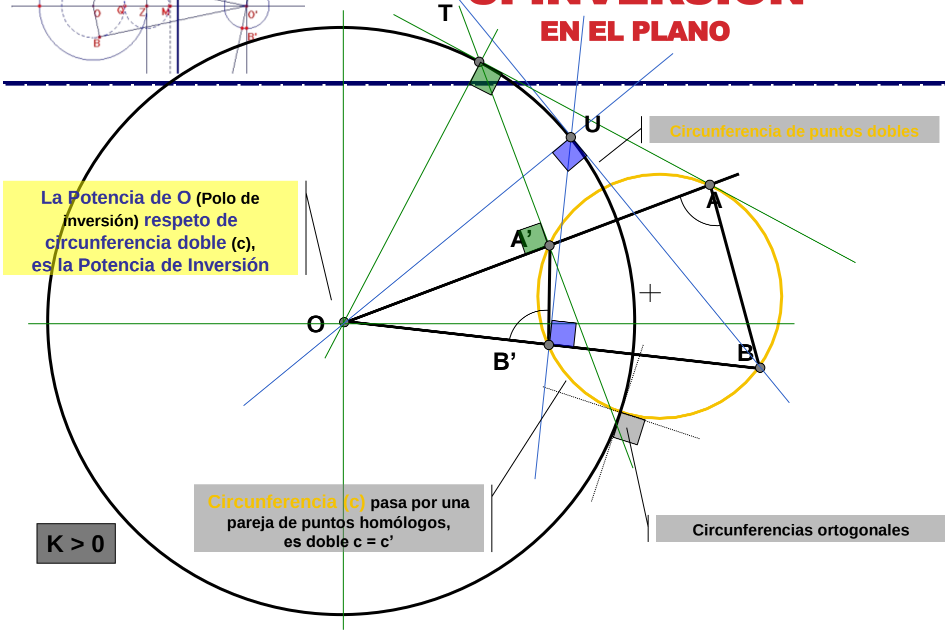
Bastará unir con una recta el punto (C) con el Polo de Inversión. Donde corte dicha recta a la circunferencia tendremos el inverso del punto dado (C').

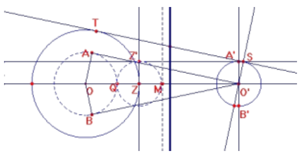
COROLARIO:

Cualquier circunferencia que contenga un par de puntos inversos es doble.



C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

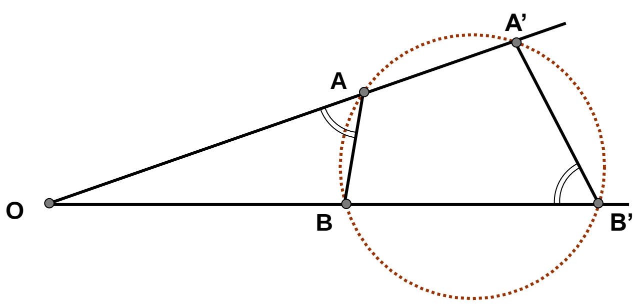


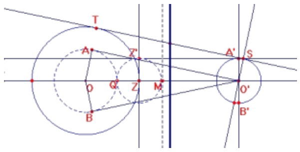


C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

TEOREMA IX-6

Si AA' y BB' son dos pares de puntos inversos no alineados, el ángulo OAB es igual al OB'A' (dicho de otro modo, las rectas AB y A'B' son antiparalelas respecto al ángulo AOB).

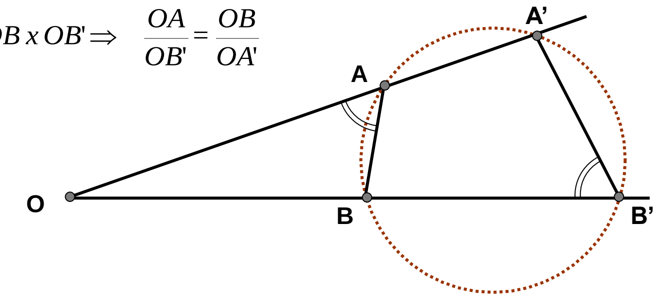




C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

DEMOSTRACIÓN TEOREMA IX-6

$$OA\,x\,OA' = OB\,x\,OB' \Rightarrow \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$$



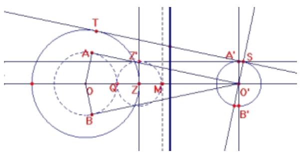
Esto indica que:

Δ OAB ≅ Δ OB'A'

Luego:

∡ OAB = ∡ OB'A'.

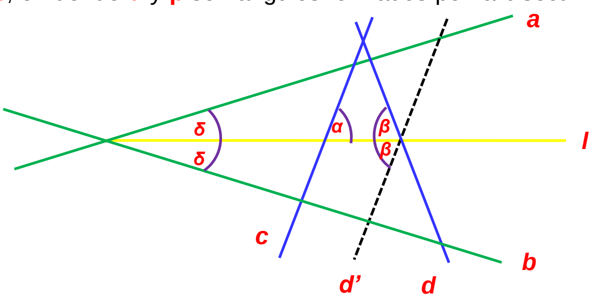
Dos rectas tales que una de ellas forme con un lado de un ángulo el mismo ángulo que la otra con el otro lado, se llaman antiparalelas.



C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

ANTIPARALELAS

Dos rectas ***a*** y ***b*** no paralelas y ***l*** la bisectriz del ángulo formado por ***a*** y ***b***. Decimos que las rectas ***c*** y ***d*** son **antiparalelas** con respecto a las rectas ***a*** y ***b*** si y sólo si **α=β**, en donde **α** y **β** son ángulos formados por la bisectriz ***l*** y las rectas ***c*** y ***d***.



Si se hace girar la recta ***d*** usando como eje la bisectriz ***l*** del ángulo formado por ***a*** y ***b***, obtenemos una recta ***d'*** paralela a ***c***, puesto que **α=β**, de ahí viene el nombre de antiparalelas.

C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

TEOREMA IX-7 **(Inversa de una recta, que pasa por O)**

Una recta que pasa por el centro de inversión es doble.

DEMOSTRACIÓN TEOREMA IX-7

El inverso de cualquier punto de la recta está en la misma recta.

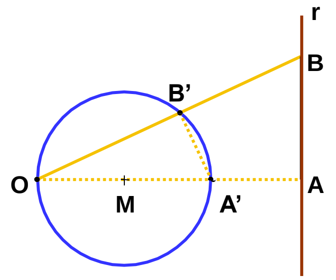
NOTA:

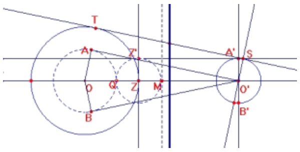
Debemos excluir de la inversión, por ahora, al centro O; por tanto, al decir "recta" en el teorema anterior, hay que entender una recta incompleta, de la que se excluye el punto O.

C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

TEOREMA IX-8 **(Inversa de una recta, que no pasa por O)**

La figura inversa de una recta r que no pasa por O, es una circunferencia que pasa por O. El diámetro de esta circunferencia que pasa por O es perpendicular a r.





C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

DEMOSTRACIÓN
TEOREMA IX-8

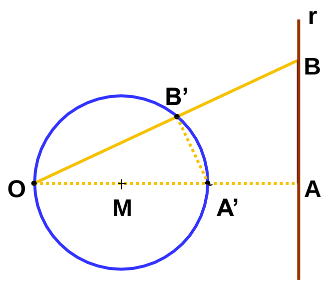
Desde **O** trazamos la perpendicular **OA'** a **r**.

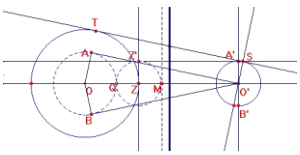
Hallamos **A'** inverso de **A**.

Cualquier punto **B** de la recta tiene un inverso **B'** tal que:

∡ OAB = ∡ OB’A’ = ∡ 90º

Lo que indica que **B'** está sobre la circunferencia de diámetro **OA'**.





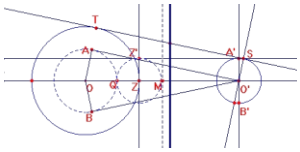
C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

TEOREMA IX-9 **(Teorema recíproco del anterior).**

La figura inversa de una circunferencia que pasa por O, es una recta perpendicular al diámetro que pasa por O.

NOTA:

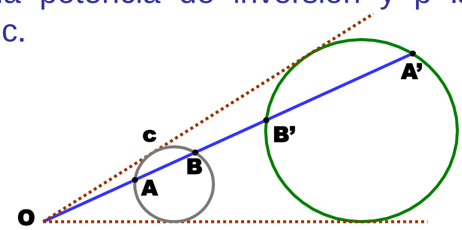
En los dos teoremas anteriores, se sobreentiende que a la circunferencia se le excluye el punto O.

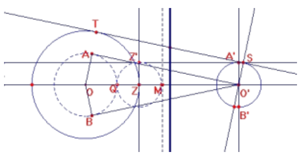


C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

TEOREMA IX-10 **(Inversa de una circunferencia).**

La figura inversa de una circunferencia c que no pasa por el centro de inversión O, es otra circunferencia c' homotética de c, con centro de homotecia O y razón de homotecia K/p, siendo K la potencia de inversión y p la potencia de O respecto a c.





C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

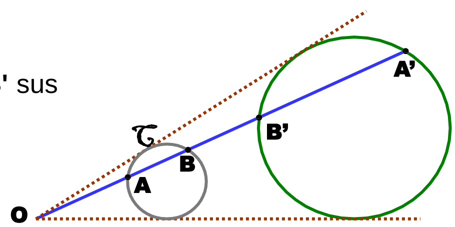
DEMOSTRACIÓN TEOREMA IX-10

Sean **A** y **B** dos puntos de $\mathcal{C}$ y **A'** y **B'** sus inversos.

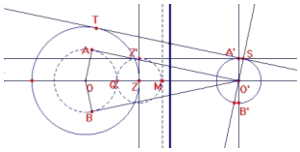
OA x OA' = OB x OB' = K

dividiendo entre **OA x OB**

$$\frac{OA'}{OB}=\frac{OB'}{OA}=\frac{K}{OA \times OB}=\frac{K}{P}$$



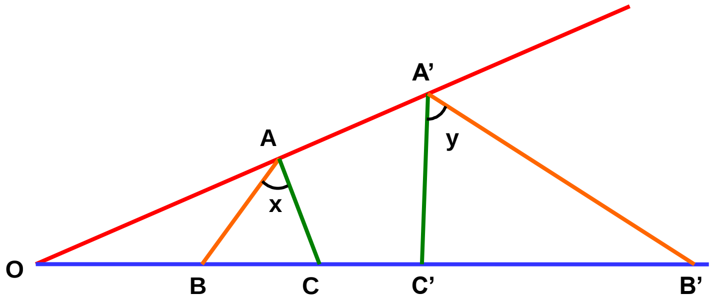
Lo que indica que A' es homotético de B (y B' es homotético de A) con centro O y razón K/P

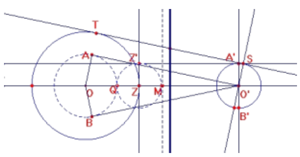


C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

TEOREMA IX-11

La inversión conserva los ángulos que forman 2 curvas y cambia su sentido.





C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

DEMOSTRACIÓN TEOREMA IX-11

Demostraremos primero que los ángulos se conservan en formas geométricas rectas, es decir, **∡ BAC = - ∡ B’A’C’** luego veremos el caso formas curvas.

BB' y CC' son dos pares de puntos homólogos alineados con O;

AA' otro par de puntos fuera de la recta anterior.

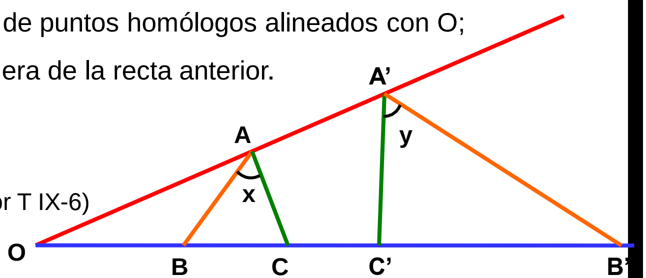
∡ x = ∡ OAC - ∡ OAB

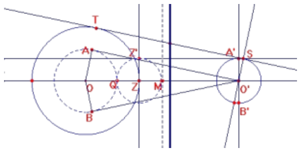
∡ y + ∡ OB’A’ = ∡ OC’A’

∡ y = ∡ OC’A’ - ∡ OB’A’ (por T IX-6)

∡ y = ∡ OAC - ∡ OAB

∡ x = - ∡ y (sentidos distintos)





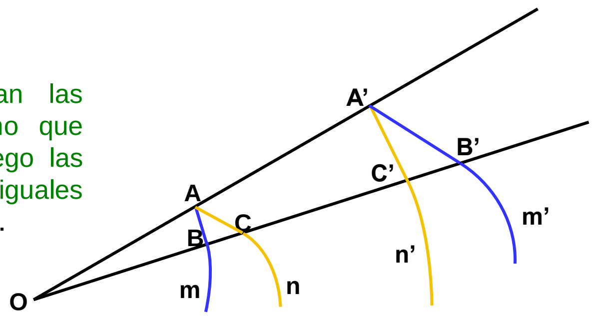
C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

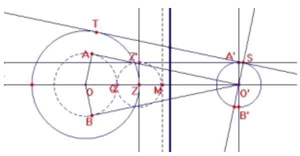
Si suponemos 2 curvas que se cortan, m y n; y sus inversas m' y n':

Los ángulos **∡ BAC** y **∡ B'A'B'** son iguales.

Si OB tiende a confundirse con OA, en el límite AB y AC se convierten en las tangentes a m y n en A; y lo mismo A'B' y A'C' pasan a ser tangentes de m' y n'.

El ángulo que forman las tangentes es el mismo que forman las curvas. Luego las curvas forman ángulos iguales y con sentidos opuestos.



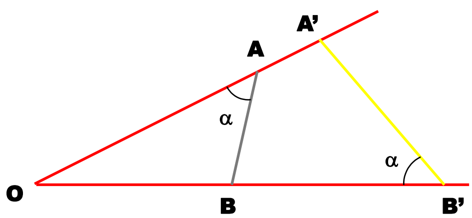


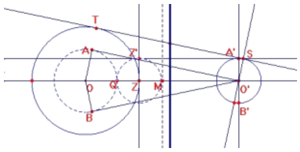
C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

TEOREMA IX-12 **(Distancia entre dos puntos inversos).**

Si A' y B' son inversos de A y B respecto a O, con potencia K, entonces:

$$A'B' = AB \times \frac{|K|}{OA \times OB}$$

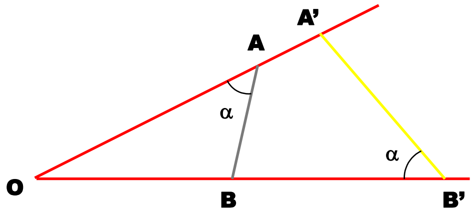




C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

DEMOSTRACIÓN
TEOREMA IX-12

Como ya hemos visto antes, los triángulos OAB y OB'A' son semejantes, por tanto:

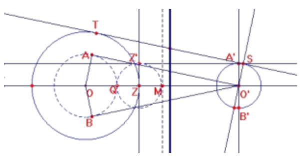


$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$A'B' = AB \times \frac{O'B}{OA}$$

Si multiplicamos y dividimos por **OB**

$$A'B' = AB \times \frac{OB' \times OB}{OA \times OB} = AB \times \frac{|K|}{OA \times OB}$$



C. INVERSIÓN
EN EL PLANO

GENERALIZACIÓN DE LA INVERSIÓN

El único punto del plano que no podemos hacer entrar, hasta ahora, ni como objeto ni como imagen, en la transformación inversiva, es el centro de inversión O.

Cuando un punto A se mueve acercándose a O; su inverso A' se aleja. Si A tiende a O, A' se aleja más allá de todo límite.

En vista de ello, se puede ampliar la inversión a todo el plano, si se considera que el inverso de O es un "punto en el infinito", en cualquier dirección.