



UNIVERSIDAD  
DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL  
**PIRHUA**

# UNA METODOLOGÍA DE DISEÑO PARA TURBINAS DE GAS DE FLUJO AXIAL

Yury Mike Alvarado Vicuña

Piura, 25 de Marzo de 2009

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Mecánico-Eléctrica



Esta obra está bajo una [licencia](#)  
[Creative Commons Atribución-](#)  
[NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú](#)

Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura

**UNIVERSIDAD DE PIURA  
FACULTAD DE INGENIERÍA**



**Una metodología de diseño para turbinas de gas de flujo axial**

**Tesis para optar el Título de  
Ingeniero Mecánico-Eléctrico**

**Yury Mike Alvarado Vicuña**

**Piura, Enero 2009**

**Una metodología de diseño para turbinas de gas de flujo axial**

**Tesis para optar el Título de  
Ingeniero Mecánico-Eléctrico**

**Yury Mike Alvarado Vicuña**

**Asesor: Dr. Ing. Rafael Saavedra García Zabaleta**

**Piura, Enero 2009**

## **Prólogo**

El objetivo del presente trabajo es proporcionar los fundamentos en la termodinámica, aerodinámica y mecánica para el diseño de turbinas o expansores de flujo axial, que son parte esencial en los motores de turbina de gas.

Durante el desarrollo del tema, se ha omitido hablar de aspectos de tipo práctico, tales como los elementos de acoplamiento del expansor con otros componentes, los tipos de carcasa y otras que no están relacionadas con las partes esenciales del mismo, como son: el eje, el disco y los álabes.

Por último, se ha intentado completar la información en la medida de lo posible, teniendo en cuenta que el diseño y construcción es una técnica muy avanzada y del dominio de no más de media docena de casas especialistas, por lo que, no encaja en el ámbito de una obra como la presente, de carácter fundamental y en la que por tanto, han de tratarse el problema del diseño con un cierto grado de generalidad.

## Resumen

En el presente trabajo se ha desarrollado una metodología que permite establecer las bases para el diseño de una turbina de gas de flujo axial. Así, mediante la teoría presentada, es posible predecir en forma satisfactoria el comportamiento de la turbina en el punto de diseño.

Los capítulos se han desarrollado con el fin de dar a entender lo mejor posible los métodos que determinan la geometría de la turbina en función de una determinada potencia, rendimiento y resistencia mecánica. Se ha obviado aquellos fenómenos que se presentan durante el funcionamiento fuera del punto de diseño, además, se ha prescindido de hablar de los fenómenos vibratorios que suceden durante el funcionamiento normal de la turbina ya que éstos resultan ser muy complejos y de continua investigación.

En el capítulo 4 se desarrolla, a modo de ejemplo, el diseño de una turbina para un turborreactor pequeño y en los capítulos 5 y 6 se desarrollan las simulaciones de flujo y de esfuerzos mecánicos utilizando los programas Cosmosfloworks y COSMOSworks, respectivamente. Así pues, los resultados obtenidos en el capítulo 4 han sido complementados con las simulaciones hechas en los programas mencionados, pues éstos, han permitido determinar las pérdidas de energía y los esfuerzos, respectivamente, de una manera precisa y clara, así como juzgar la precisión de la metodología presentada en los capítulos 1, 2 y 3.

## Nomenclatura

$c_p$	:	Calor específico a presión constante [kJ/kgK]
$h$	:	Entalpía específica [kJ/kg]
$\dot{m}$	:	Flujo másico [kg/s]
$p$	:	Presión absoluta [Pa]
$T$	:	Temperatura absoluta [K]
$\gamma$	:	Relación de calores específicos
$\eta$	:	Rendimiento
$C$	:	Velocidad absoluta [m/s]
$V$	:	Velocidad relativa [m/s]
$U$	:	Velocidad del álabe [m/s]
$\alpha$	:	Ángulo absoluto del flujo de gas [Grados]
$\beta$	:	Ángulo relativo del flujo de gas [Grados]
$\omega$	:	Velocidad angular del rotor [rad/s]
$w_e$	:	Trabajo específico [kJ/kg]
$w_f$	:	Trabajo específico hecho por la fricción [kJ/kg]
$\psi$	:	Coefficiente de carga
$\phi$	:	Coefficiente de flujo
$\Lambda$	:	Grado de reacción
$M$	:	Número de Mach
$r$	:	Distancia radial [m]
$L$	:	Fuerza de sustentación [N]
$D$	:	Fuerza de arrastre [N]
$C_L$	:	Coefficiente de sustentación
$C_D$	:	Coefficiente de arrastre
$s$	:	Paso de los álabes [m]
$o$	:	Diámetro de la garganta [m]
$e$	:	Radio de curvatura de los álabes [m]
$c$	:	Cuerda del álabe [m]
$t_e$	:	Espesor del borde de salida del álabe [m]
$t$	:	Espesor máximo del álabe [m]
$x$	:	Espesor del disco [m]
$\sigma_r$	:	Esfuerzo radial [MPa]
$\sigma_t$	:	Esfuerzo tangencial [MPa]

## Subíndices

$o$	:	Magnitud de estancamiento
1,2,3, etc	:	Secciones de referencia
$N$	:	Magnitud correspondiente al estator
$R$	:	Magnitud correspondiente al rotor

## Índice

Introducción.....	1
Capítulo 1: Principios fundamentales de la turbina de gas y parámetros de diseño.....	3
1.1 Triángulos de velocidades.....	3
1.2 Dinámica del flujo en la turbina de flujo axial.....	4
1.3 Coeficiente de carga, de flujo y grado de reacción .....	9
1.4 Coeficiente de pérdidas en los álabes del estator y del rotor .....	16
1.5 Flujo tridimensional.....	20
Capítulo 2: Aerodinámica y geometría de los álabes.....	25
2.1 Nomenclatura de cascada.....	25
2.2 Análisis de fuerzas en las cascadas.....	27
2.3 Resultados de pruebas de cascada .....	32
2.4 Forma, espaciado y número de álabes .....	40
2.5 Procedimiento de diseño .....	47
2.6 Estimación del comportamiento en el punto de diseño .....	47
Capítulo 3: Esfuerzos mecánicos y térmicos en la turbina .....	55
3.1 Esfuerzos mecánicos y térmicos en el disco .....	55
3.2 Esfuerzos mecánicos y térmicos en los álabes .....	58
Capítulo 4: Diseño de una turbina de gas de flujo axial: caso estudio turborreactor .....	65
4.1 Cálculo del número de etapas.....	66
4.2 Cinemática del flujo a través de los álabes .....	66
4.3 Cálculo de las propiedades termodinámicas .....	68
4.4 Cálculo de la forma del conducto anular .....	70
4.5 Cálculo de la distribución de los ángulos de la corriente.....	71
4.6 Cálculo de la forma de los álabes .....	72
4.7 Cálculo de los esfuerzos centrífugos en los álabes.....	75
4.8 Cálculo de los esfuerzos de flexión en los álabes.....	76
4.9 Cálculos de los esfuerzos centrífugos y térmicos en el disco .....	77
Capítulo 5: Procedimiento para la simulación en Cosmosfloworks.....	89



5.1 Enunciado del problema .....	89
5.2 Crear un proyecto en CosmosFlowworks con Wizard .....	90
5.3 Dominio de cálculo.....	98
5.4 Condiciones de frontera (Boundary Conditions).....	99
5.5 Definiendo las metas de ingeniería ( <i>Goal</i> ) .....	102
5.6 Solución del problema .....	103
5.7 Observar las variantes en las soluciones.....	104
5.8 Accediendo a los resultados .....	104
5.9 Mostrar los resultados en forma gráfica .....	104
Capítulo 6: Procedimiento para la simulación en COSMOSWorks .....	117
6.1 Crear un estudio para el análisis de esfuerzos centrífugos .....	118
6.2 Definiendo las propiedades del material.....	118
6.3 Definiendo las cargas y restricciones .....	119
6.4 Definiendo el mallado.....	121
6.5 Acceso a los resultados .....	123
6.6 Presentación de resultados .....	123
6.7 Crear un estudio para el análisis de la distribución de temperatura y de los esfuerzos térmicos .....	126
6.8 Definiendo las propiedades del material.....	127
6.9 Definiendo las cargas y restricciones .....	131
6.10 Definiendo el mallado para el cálculo de la distribución de temperatura.....	132
6.11 Acceso a los resultados .....	133
6.12 Presentación de resultados .....	133
6.13 Definiendo el Mallado para el cálculo de los esfuerzos térmicos .....	135
6.14 Acceso a los resultados .....	135
6.15 Presentación de resultados .....	135
Conclusiones.....	141
Bibliografía.....	142

## Índice de figuras

### Capítulo 1

Figura 1.1 Triángulos de velocidades en la etapa de una turbina de flujo axial .....	4
Figura 1.2 Volumen de control para el análisis de una turbina de flujo axial.....	5
Figura 1.3 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.3 [5].....	13
Figura 1.4 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.5 [5].....	13
Figura 1.5 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a cero (Impulso) [5].....	14
Figura 1.6 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.1 [5].....	14
Figura 1.7 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.7 [5].....	15
Figura 1.8 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.9 [5].....	15
Figura 1.9 Diagrama T-s de una etapa de reacción .....	16
Figura 1.10 Desplazamiento radial .....	21
Figura 1.11 Equilibrio radial de un elemento de fluido .....	22

### Capítulo 2

Figura 2.1 Parámetros que definen la forma de una cascada .....	26
Figura 2.2 Cascada para el análisis dinámico del flujo.....	27
Figura 2.3 Fuerza de sustentación y de arrastre.....	30
Figura 2.4 Medidores de presión y velocidad.....	33
Figura 2.5 Túnel de viento .....	34
Figura 2.6 Variaciones de la pérdida de presión de estancamiento y de la deflexión en una cascada de incidencia fija [1].....	36
Figura 2.7 Deflexión media y pérdida media de presión de estancamiento en una cascada de forma geométrica fija [1].....	36
Figura 2.8 Curvas de deflexión de diseño [1].....	37
Figura 2.9 Coeficiente de sustentación y de arrastre de una cascada de forma geométrica fija [1].....	39
Figura 2.10 Coeficiente de sustentación de diseño [1] .....	39
Figura 2.11 Variación de las pérdidas del perfil con el ángulo de incidencia para los álabes de una turbina típica [3].....	40
Figura 2.12 Criterio de Zweifel .....	41
Figura 2.13 Distribución de presión alrededor de los álabes de una cascada de turbina [3].....	42
Figura 2.14 Incidencia inducida debido a Dunavant y Edwin 1956 [5] .....	43
Figura 2.15 Ángulo de calado debido a Kacker y Okapuu 1981 [5] .....	46
Figura 2.16 Coeficiente de pérdidas para álabes de impulso y reacción con incidencia igual a cero ( $t/l=20\%$ ; $Re=2 \times 10^5$ ; $M<0.6$ ) (Adaptado por Ainley y Mathieson 1951) [1].....	48
Figura 2.17 Parámetro de pérdida secundaria .....	51
Figura 2.18 Juegos de cabeza .....	52
Figura 2.19 Factor de corrección por el espesor del borde de salida.....	52

### Capítulo 3

Figura 3.1 Elemento diferencial de disco giratorio .....	56
Figura 3.2 Elemento diferencial del álabe rotativo.....	60
Figura 3.3 Momentos flectores en el álabe del rotor .....	61
Figura 3.4 Módulo de la sección de la raíz según Ainley .....	63

### Capítulo 4

Figura 4.1 Triángulo de velocidades.....	68
Figura 4.2 Diagrama T-s de la etapa de reacción .....	68
Figura 4.3 Distribución de temperatura .....	70
Figura 4.4 Distribución de presión y velocidad.....	70
Figura 4.5 Distribución de los ángulos del flujo .....	73
Figura 4.6 Borde de salida del álabe del estator para el punto medio .....	74
Figura 4.7 Borde de salida del álabe del rotor para el punto medio .....	75
Figura 4.8 Distribución de temperaturas en el disco .....	79
Figura 4.9 Esfuerzos centrífugos radiales y tangenciales en el disco.....	79
Figura 4.10 Esfuerzos centrífugos en el disco.....	80
Figura 4.11 Esfuerzos térmicos radiales y tangenciales en el disco .....	80
Figura 4.12: Esfuerzo térmico en el disco.....	81
Figura 4.13 Esfuerzos centrífugos .....	82
Figura 4.14 Esfuerzos térmicos .....	82

### Capítulo 5

Figura 5.1 Modelo para el análisis del flujo a través de los álabes .....	90
Figura 5.2 Creación de un proyecto en el CosmosFlowworks.....	91
Figura 5.3 Selección del sistema de unidades .....	92
Figura 5.4 Elección del tipo de fluido.....	93
Figura 5.5 Elección del tipo de análisis .....	93
Figura 5.6 Ajuste de la rugosidad .....	94
Figura 5.7: Elección del tipo de sustancia.....	95
Figura 5.8 Definiendo el tipo de pared .....	95
Figura 5.9 Definiendo las condiciones iniciales y ambientales.....	96
Figura 5.10 Definiendo la resolución de los resultados .....	97
Figura 5.11 Resumen del proyecto .....	97
Figura 5.12 El dominio de cálculo.....	98
Figura 5.13 Definiendo las condiciones de frontera .....	99
Figura 5.14 Definiendo las condiciones de frontera.....	100
Figura 5.15 Definiendo las condiciones de frontera.....	100
Figura 5.16 Definiendo las condiciones de frontera.....	101
Figura 5.17: Ajustando la rugosidad de las paredes .....	101
Figura 5.18: Ajustando la rugosidad de las paredes .....	102
Figura 5.19 Definiendo las metas de ingeniería .....	103
Figura 5.20 Solución del problema.....	104
Figura 5.21 Distribución de presiones .....	105
Figura 5.22 Distribución del módulo de la velocidad.....	105
Figura 5.23: Isolíneas del módulo de la velocidad .....	106

	VIII
Figura 5.24: Isolineas del módulo de la velocidad en el borde de salida.....	106
Figura 5.25 Isolineas del módulo de la velocidad en el borde de ataque.....	107
Figura 5.26 Campo de velocidades.....	107
Figura 5.27 Campo de velocidades en el borde de salida.....	108
Figura 5.28: Campo de velocidades en el borde de ataque.....	108
Figura 5.29 Trayectorias del flujo.....	109
Figura 5.30 Línea de trayectoria para la visualización de las propiedades del fluido.....	110
Figura 5.31 Distribución de temperaturas.....	110
Figura 5.32 Distribución de la presión estática.....	111
Figura 5.33: Distribución del módulo de la velocidad.....	111
Figura 5.34 Distribución del número de Mach.....	112
Figura 5.35 Distribución del módulo de la velocidad.....	113
Figura 5.36 Distribución de la presión estática.....	113
Figura 5.37 Distribución del módulo de la velocidad.....	114
Figura 5.38 Distribución de la temperatura.....	114
Figura 5.39: Distribución del número de Mach.....	115

## Capítulo 6

Figura 6.1 Creando un estudio en el COSMOSWorks.....	118
Figura 6.2 Especificando las propiedades del material.....	119
Figura 6.3 Definiendo las cargas y restricciones.....	120
Figura 6.4 Definiendo las cargas y restricciones.....	121
Figura 6.5 Definiendo el mallado.....	121
Figura 6.6 Definiendo el mallado.....	122
Figura 6.7 Borde en el que se obtendrán los esfuerzos centrífugos.....	124
Figura 6.8 Distribución de los esfuerzos centrífugos.....	124
Figura 6.9 Distribución de los esfuerzos centrífugos de Von Misses.....	125
Figura 6.10 Desplazamientos.....	125
Figura 6.11 Distribución de los factores de seguridad.....	126
Figura 6.12 Definiendo las propiedades del material.....	127
Figura 6.13 Especificando el Módulo de Elasticidad.....	128
Figura 6.14 Especificando los esfuerzos de rotura.....	128
Figura 6.15 Especificando el esfuerzo de fluencia.....	129
Figura 6.16 Especificando el coeficiente de dilatación térmica.....	129
Figura 6.17 Especificando la conductividad térmica.....	130
Figura 6.18 Especificando el calor específico.....	130
Figura 6.19 Definiendo la temperatura en la periferia.....	131
Figura 6.20 Definiendo el coeficiente de convección y la temperatura ambiente.....	132
Figura 6.21 Definiendo el mallado.....	133
Figura 6.22 Distribución de temperaturas.....	134
Figura 6.23 Distribución de temperatura en el disco.....	134
Figura 6.24 Restricción para el análisis de los esfuerzos térmicos.....	135
Figura 6.25 Borde en el que se obtendrán los esfuerzos térmico.....	137
Figura 6.26 Esfuerzos térmicos en el disco.....	137
Figura 6.27 Esfuerzos térmicos de Von Misses.....	138
Figura 6.24 Esfuerzos térmicos de Von Misses.....	138
Figura 6.29 Desplazamientos.....	139

## Introducción

Los motores de turbina de gas poseen varias características que resultan ser satisfactorias para la gran mayoría de aplicaciones; entre las ventajas que posee esta máquina y que hacen que sea la mejor opción para la producción de potencia mecánica, se pueden citar: la ausencia de elementos alternativos y friccionantes que hace que haya pocos problemas de equilibrado, que el consumo de aceite sea excepcionalmente bajo y que la fiabilidad de la máquina pueda ser grande.

A diferencia de las turbinas hidráulicas y las turbinas de vapor, cuyas ventajas han sido conocidas desde mucho tiempo atrás, las turbinas de gas comenzaron a desarrollarse poco antes de la segunda guerra mundial, aunque en un principio se pretendía obtener potencia mecánica, pronto se abandonó esta idea a favor del turborreactor para la propulsión aérea. Hasta mediado de los años cincuenta no empezó la turbina de gas a competir ventajosamente en otros campos, pero a partir de entonces su impacto en una variedad cada vez mayor de aplicaciones ha ido en aumento.

Las dos principales áreas de aplicación son la propulsión de aviones y la generación de energía eléctrica. Cuando se emplean en propulsión de aviones, la turbina de gas produce la potencia suficiente para accionar el compresor y a un pequeño generador que alimenta al equipo auxiliar. Los gases de escape de alta velocidad son los responsables de producir el empuje necesario para impulsar la aeronave. Los motores de turbina de gas también se utilizan como centrales estacionarias que producen energía eléctrica. Estas centrales eléctricas son empleadas por la industria de generación eléctrica en emergencias y durante periodos pico gracias a su bajo costo y rápido tiempo de respuesta.

Es importante tener en cuenta que los motores de turbina de gas comprenden tres componentes esenciales para su funcionamiento, éstos son: el compresor, la cámara de combustión y la turbina propiamente dicha o expansor. Cada uno de éstos componentes cumplen una función específica que al combinarse dan lugar a una de las variantes más simples para la producción de potencia mecánica. Así pues, se puede observar que a diferencia de los motores alternativos, en los motores de turbina de gas los diferentes procesos, a los que se ve sometido el fluido de trabajo, no tiene lugar en un único elemento, sino en elementos separados, lo que permite que sean diseñados, probados y desarrollados individualmente. El número de elementos posibles no se reduce a los tres ya citados, sino que se puede añadir otros compresores y turbinas, además de interrefrigeradores entre los compresores y cámaras de recalentamiento entre las turbinas.

Mediante estos refinamientos es posible aumentar la potencia y el rendimiento del motor a expensas de una mayor complejidad, tamaño y coste superiores.

Se ve pues, que el desempeño de un motor de turbina de gas dependerá del comportamiento de cada uno de sus componentes. Es posible comprobar que debido a las irreversibilidades que suceden dentro de la turbina y el compresor, la eficiencia de la máquina en conjunto no llegaba a alcanzar valores competitivos, y precisamente por los bajos rendimientos y la mala calidad de los materiales de la turbina fue por lo que fracasaron muchas de las primeras tentativas de construir un motor de este tipo. Sin embargo, con el desarrollo de la aerodinámica y de la ciencia de los materiales se ha podido vencer estas adversidades con el resultado de que hoy en día es posible encontrar compresores y turbinas con rendimientos del 85 al 90% y temperatura de entrada a la turbina de hasta 1500 K, Ref. [1].

Hasta este punto nos podemos dar cuenta de cuán importante es diseñar cada componente con el máximo rendimiento posible de tal forma de obtener el mejor desempeño del sistema de potencia del cual formará parte. Con este propósito en los capítulos siguientes se ha desarrollado las teorías que explican los diferentes fenómenos que ocurren en uno de los componentes más importantes y el que se ve sometido a las más severas condiciones durante el funcionamiento de la maquinaria en conjunto. Nos referimos a la turbina, el cual es obligado a girar a grandes velocidades y en un ambiente a alta temperatura.

Así pues, en el capítulo 1 y 2 se habla de los fenómenos asociados con el flujo del gas a través de la turbina, también se define las diferentes variables que permiten determinar su geometría. En el capítulo 3 se analiza los esfuerzos que se producen como consecuencia de las altas velocidades de giro y las elevadas temperaturas que presenta el gas a la entrada de la turbina. En el capítulo 4 se desarrolla a modo de ejemplo el diseño de una turbina pequeña para un turborreactor y en el capítulo 5 y 6 se realiza las simulaciones respectivas mediante el programa Cosmosflow y COSMOSWorks, lo cual permite predecir el desempeño en forma precisa y clara.

# 1

## Principios fundamentales de la turbina de gas y parámetros de diseño<sup>(1)</sup>

### 1.1 Triángulos de velocidades

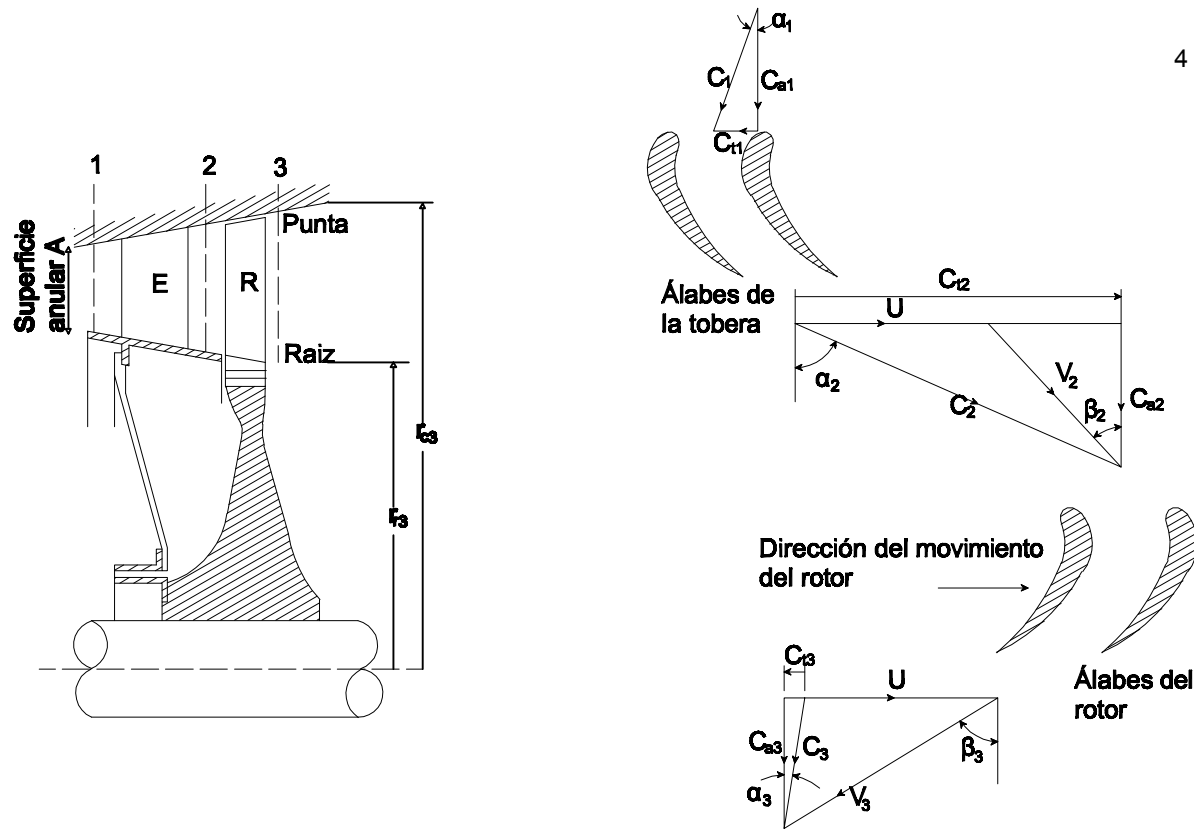
En la figura 1.1 pueden verse los triángulos de velocidades en el radio medio de la etapa de una turbina de flujo axial. En las turbinas los álabes del estator siempre deben preceder a los del rotor. En la misma figura también se muestra la nomenclatura que será utilizada para designar las diferentes velocidades y sus ángulos.

El gas entra en la fila de álabes del estator (o toberas) con una presión y temperatura estáticas  $p_1$  y  $T_1$  y una velocidad  $C_1$ , se expande hasta  $p_2$  y  $T_2$  y sale con una velocidad mayor  $C_2$  de ángulo  $\alpha_2$  medido entre dicha velocidad y la dirección axial (a diferencia de la turbinas de vapor que se miden con respecto a la dirección tangencial). Se toma un ángulo de entrada de los álabes del rotor tal, que se acomode a la dirección  $\beta_2$  de la velocidad relativa de entrada del gas respecto del álabe, ( $V_2$ );  $\beta_2$  y  $V_2$  se determina restando vectorialmente la velocidad periférica de la velocidad absoluta  $C_2$ . Después de ser desviado y, por lo común, expandido de nuevo en los conductos formados por los álabes del rotor (turbinas de reacción), el gas sale con  $p_3$  y  $T_3$ , y una velocidad relativa  $V_3$  de ángulo  $\beta_3$ . Sumando vectorialmente  $U$  se obtiene la magnitud y la dirección de la velocidad absoluta del gas a la salida de la etapa,  $C_3$  y  $\alpha_3$ . A  $\alpha_3$  se le conoce como ángulo de turbulencia y, por lo general, es igual a cero en la última etapa de una turbina con el objeto de disminuir las pérdidas en el tubo de salida.

Dado que la velocidad del alabe  $U$  crece con el radio, la forma de los triángulos de velocidades variará desde la raíz a la punta del álabe. En este apartado se hace referencia a las condiciones correspondientes al diámetro medio del conducto anular y de esta forma se obtiene un promedio de lo que le sucede al flujo másico total  $\dot{m}$  al atravesar la etapa. Este planteamiento es válido cuando la razón de radios de punta - raíz es baja, es decir, para álabes cortos, pero para álabes altos es indispensable tener en cuenta los efectos tridimensionales como se verá más adelante.

---

(1) El presente capítulo ha sido elaborado tomando como base la información del siguiente libro: Cohen [1]



**Figura 1.1 Triángulos de velocidades en la etapa de una turbina de flujo axial**

## 1.2 Dinámica del flujo en la turbina de flujo axial

En la figura 1.2 se muestra el volumen de control para analizar la dinámica de flujo en una turbina de flujo axial. Este volumen de control es de forma cilíndrica y tiene una extensión diferencial en la dirección radial y abarca la longitud axial de la entrada a la salida del rotor. El volumen de control está fijo en el espacio y no gira, así una parte de los álabes girarán dentro de este espacio. La selección de un volumen de control diferencial da la posibilidad de analizar las condiciones en cada posición radial entre la raíz y la punta del rotor.

El principio del momento angular en el volumen de control se expresa como

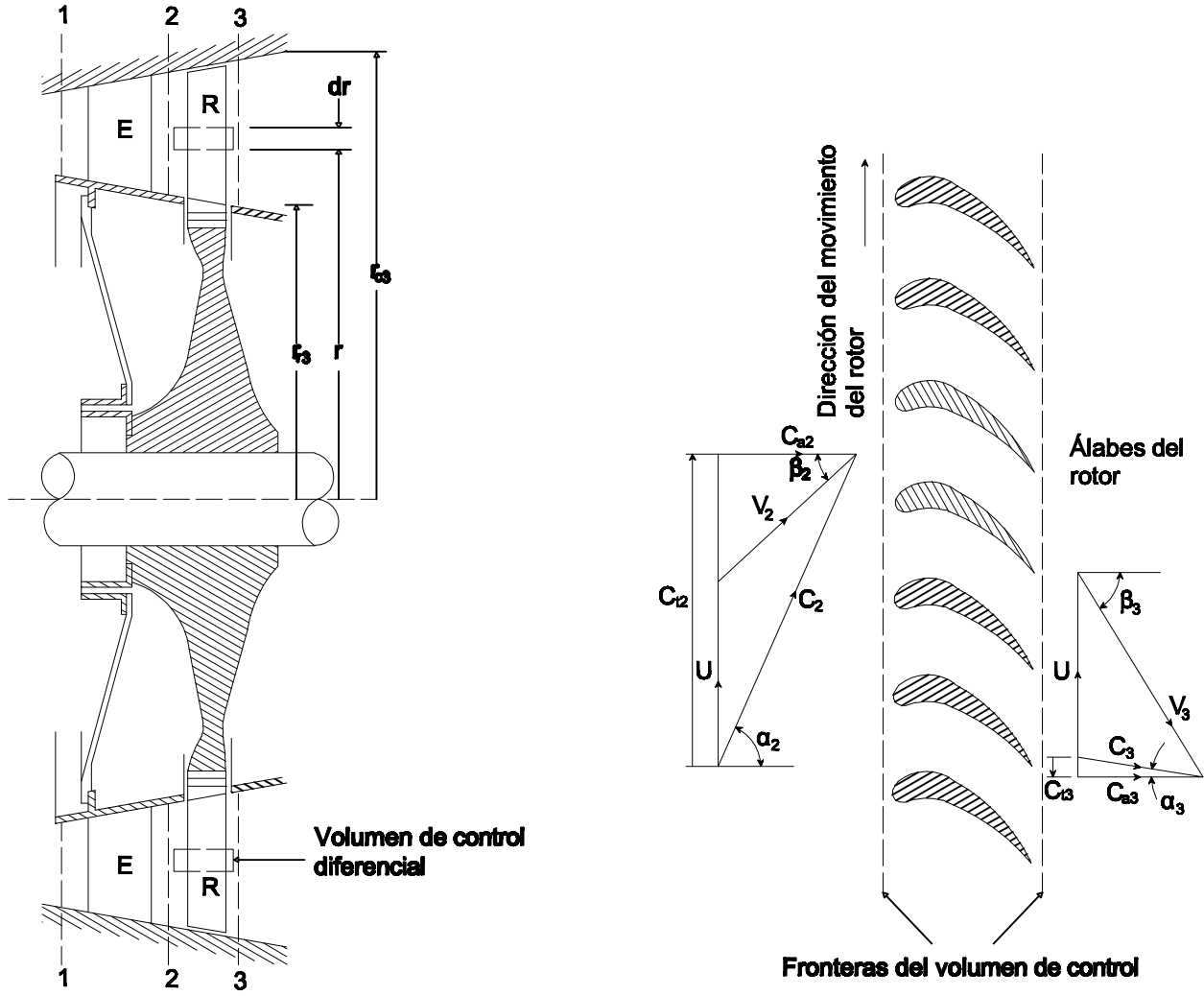
$$-\vec{T}_{flecha} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega} \vec{r} \times \vec{C} \rho dV \right) + \int_{\Gamma} \vec{r} \times \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} \quad (1.1)$$

El lado izquierdo de la ecuación (1.1) es un término para el momento de torsión resultante, con respecto al eje de la máquina, de las fuerzas que el fluido transmite a las partes de los álabes cuando penetra el volumen de control.

Considerando flujo estacionario la ecuación (1.1) se simplifica a

$$d\vec{T}_{flecha} = - \int_{\Gamma} \vec{r} \times \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$





**Figura 1.2 Volumen de control para el análisis de una turbina de flujo axial**

Luego, la potencia transmitida del fluido al rodete se expresa como

$$d\dot{w} = \vec{\omega} \cdot d\vec{T}_{flecha} = \vec{\omega} \cdot \left( - \int_{\Gamma} \vec{r} \times \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} \right)$$

Dado que la velocidad angular es independiente del área se obtiene

$$d\dot{w} = - \int_{\Gamma} \vec{\omega} \cdot \vec{r} \times \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

Y por la propiedad del producto mixto,  $\vec{\omega} \cdot \vec{r} \times \vec{C} = \vec{\omega} \times \vec{r} \cdot \vec{C}$

$$d\dot{w} = - \int_{\Gamma} \vec{\omega} \times \vec{r} \cdot \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

Además  $\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , por lo tanto se tiene

$$d\dot{w} = - \int_{\Gamma} \vec{U} \cdot \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

Debido a la extensión radial diferencial del volumen de control, se puede decir que el triángulo de velocidades es uniforme a la entrada y a la salida de dicho volumen. Por lo tanto

$$d\dot{w} = - \int_{\Gamma_{ent}} \vec{U} \cdot \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} - \int_{\Gamma_{sal}} \vec{U} \cdot \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

$$d\dot{w} = - \vec{U}_2 \cdot \vec{C}_2 \int_{\Gamma_2} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} - \vec{U}_3 \cdot \vec{C}_3 \int_{\Gamma_3} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

Además, el flujo másico que atraviesa el volumen de control se expresa como

$$d\dot{m} = \int_{\Gamma_{ent}} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} = \int_{\Gamma_{sal}} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

Y  $\vec{U}_2 = \vec{U}_3 = \vec{U}$  (para el radio en cuestión, según la figura 1.2). También, el ángulo entre los vectores  $d\vec{A}$  y  $\vec{C}_2$  es mayor de  $90^\circ$  y por lo tanto su producto escalar será negativo. Entonces:

$$d\dot{w} = d\dot{m} \left( \vec{U}_2 \cdot \vec{C}_2 - \vec{U}_3 \cdot \vec{C}_3 \right) = d\dot{m} (UC_{i2} + UC_{i3})$$

$$d\dot{w} = d\dot{m} U (C_{i2} + C_{i3}) \quad (1.2)$$

La ecuación (1.2) se le conoce como la ecuación de Euler. Esta ecuación permite obtener la potencia que se transmite del fluido al rodete independientemente de que si se consideran las pérdidas por fricción o no.

Por otra parte se define el trabajo específico como:

$$w_e = \frac{d\dot{w}}{d\dot{m}} = U (C_{i2} + C_{i3}) \quad (1.3)$$

Además, del triángulo de velocidades se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{C} - \vec{U} \\ \vec{V} \cdot \vec{V} &= (\vec{C} - \vec{U}) \cdot (\vec{C} - \vec{U}) \\ V^2 &= C^2 - 2\vec{C} \cdot \vec{U} + U^2 \end{aligned}$$

Donde:  $\vec{C} \cdot \vec{U} = C_i U$

Despejando  $C_t$  se obtiene

$$C_t = \frac{C^2 + U^2 - V^2}{2U} \quad (1.4)$$

Sustituyendo la ecuación (1.4) en la ecuación (1.3), resulta otra expresión para el trabajo específico:

$$w_e = U \left( \frac{C_2^2 + U^2 - V_2^2}{2U} \right) - U \left( \frac{C_3^2 + U^2 - V_3^2}{2U} \right)$$

$$w_e = \frac{C_2^2 - C_3^2}{2} + \frac{V_3^2 - V_2^2}{2}$$

Además, si se aplica el principio del momento angular a un volumen de control que encierra a los álabes del rotor y que gira con la velocidad periférica  $U$ , y considerando el hecho de que en este caso no habrá intercambios de trabajo entre el fluido y los álabes, se obtiene la siguiente relación entre el cambio de entalpía y el cambio de las velocidades relativas.

$$0 = \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) - \left( h_3 + \frac{V_3^2}{2} \right)$$

Por lo tanto

$$w_e = \left( h_2 + \frac{C_2^2}{2} \right) - \left( h_3 + \frac{C_3^2}{2} \right) \quad (1.5)$$

La ecuación (1.5) es el enunciado de la primera ley de la termodinámica, y que muestra que la energía entregada por unidad de masa del fluido es una fracción de su energía cinética y de su energía potencial expresada por la variación de la entalpía.

Mediante una relación termodinámica se puede desarrollar una ecuación alternativa para el cambio de entalpía estática en el rodete.

$$h_3 - h_2 = \int_2^3 T ds + \int_2^3 dp / \rho \quad (1.6)$$

Se usa el concepto de trabajo por unidad de masa hecho por la fricción sobre el fluido

$$w_f = \int_2^3 T ds \quad (1.7)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.7) y (1.6) en la ecuación (1.5) resulta:

$$w_e = - \left( w_f + \int_2^3 dp / \rho + (C_3^2 - C_2^2) / 2 \right) \quad (1.8)$$

Esto es una forma de balance mecánico de energía. Se analiza la ecuación (1.8) término por término. El término  $w_e$  significa la energía por unidad de masa que el rodete recibe del fluido. Los dos últimos términos son, respectivamente, la caída de la energía de compresión y de la energía cinética del fluido y contribuyen a aumentar el trabajo específico sobre el rodete; pero el incremento de la energía térmica por fricción, disminuye este trabajo específico.

Así pues, de la ecuación anterior se observa como se reparte la energía entre el fluido y el rodete que es el mecanismo fundamental en que se basa las turbinas de gas. También hay que tener en cuenta que el trabajo específico así como el grado de reacción, que será definido más adelante, pueden variar radialmente. Sin embargo, para un diseño preliminar es posible hacer una aproximación evaluando las expresiones obtenidas en un radio medio en el centro de los álabes y suponer que esta condición es representativa en forma promedio de toda la extensión del álabe, luego para el diseño final se debe tomar en cuenta las variaciones radiales como se verá más adelante.

Además de los fenómenos de transferencia de energía, descrito anteriormente, durante el flujo del fluido a través de los álabes se generan fuerzas de empuje que de no ser contrarrestadas causarían que el rotor de la turbina se desplace en la dirección axial; por lo que es importante conocer las magnitudes de estas fuerzas para el diseño o selección del sistema de cojinetes o rodamientos de empuje. Así por el principio del momento lineal aplicada al volumen de control diferencial se establece la siguiente ecuación.

$$p_2 dA \vec{e}_a - p_3 dA \vec{e}_a - d\vec{F} = \int_{\Gamma} \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} \quad (1.9)$$

En donde  $d\vec{F}$  es la fuerza resultante ejercida por el fluido sobre la porción de álabes que se encuentran dentro del volumen de control diferencial. Haciendo las mismas consideraciones anteriores para el triángulo de velocidades a la entrada y a la salida, se obtiene

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= - \int_{\Gamma_{ent}} \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} - \int_{\Gamma_{sal}} \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} + (p_2 - p_3) dA \vec{e}_a \\ d\vec{F} &= - \vec{C}_2 \int_{\Gamma_{ent}} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} - \vec{C}_3 \int_{\Gamma_{sal}} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A} + (p_2 - p_3) dA \vec{e}_a \\ d\vec{F} &= \vec{C}_2 d\dot{m} - \vec{C}_3 d\dot{m} + (p_2 - p_3) dA \vec{e}_a \\ d\vec{F} &= \left( \vec{C}_2 - \vec{C}_3 \right) d\dot{m} + (p_2 - p_3) dA \vec{e}_a \end{aligned}$$

Además, descomponiendo las velocidades absolutas según las direcciones axial y tangencial resulta

$$\begin{aligned}
d\vec{F} &= \left( C_{t2} \vec{e}_t + C_{a2} \vec{e}_a - \left( -C_{t3} \vec{e}_t + C_{a3} \vec{e}_a \right) \right) d\dot{m} + (p_2 - p_3) dA \vec{e}_a \\
d\vec{F} &= (C_{a2} - C_{a3}) d\dot{m} \vec{e}_a + (C_{t2} + C_{t3}) d\dot{m} \vec{e}_t + (p_2 - p_3) dA \vec{e}_a \\
d\vec{F} &= \left( (C_{a2} - C_{a3}) d\dot{m} + (p_2 - p_3) dA \right) \vec{e}_a + (C_{t2} + C_{t3}) d\dot{m} \vec{e}_t \quad (1.10)
\end{aligned}$$

De donde se nota que  $(C_{t2} + C_{t3})$  representa la variación que experimenta la componente tangencial (o de remolino) de la cantidad de movimiento por unidad de flujo másico que da lugar al par útil y la transferencia de energía hacia el rodete. La variación de la componente axial  $(C_{a2} - C_{a3})$  produce un empuje axial sobre el rotor que puede sumarse o bien contrarrestar el empuje de presión derivado del salto de presión.

### 1.3 Coeficiente de carga, de flujo y grado de reacción

Existen tres parámetros adimensionales que se han demostrado de utilidad para el diseño de turbinas. Uno de ellos expresa la capacidad de trabajo de una etapa y se denomina coeficiente de carga del álabe o coeficiente de salto de temperatura,  $\psi$ . Se adopta la práctica seguida por el NGTE (*Nacional Gas Turbine Establishment*) y se define como  $w_e/(U^2/2)$ , aunque también se toma como  $w_e/U^2$ . Hay que tener en cuenta que el trabajo específico también es igual al cambio de entalpía de estancamiento, entre la entrada y salida del rotor, y por tanto igual al cambio de temperatura de estancamiento; entonces el coeficiente de carga puede expresarse mediante la siguiente ecuación.

$$\psi = \frac{w_e}{U^2/2} = \frac{C_p \Delta T_{OS}}{U^2/2}$$

Además, se considera una etapa en el que  $C_{a2} = C_{a3} = C_a$  y en base a la ecuación (1.3) y al triángulo de velocidades se deduce:  $\frac{U}{C_a} = \operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \beta_2 = \operatorname{tg} \beta_3 - \operatorname{tg} \alpha_3$

$$w_e = UC_a (\operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_3)$$

Por lo tanto

$$\psi = \frac{C_p \Delta T_{OS}}{U^2/2} = 2 \frac{C_a}{U} (\operatorname{tg} \beta_2 + \operatorname{tg} \beta_3) \quad (1.11)$$

Si en la etapa las velocidades absolutas a la entrada y a la salida son iguales entonces el cambio en la temperatura de estancamiento entre estos puntos también será igual al cambio en la temperatura estática y por lo tanto  $\psi$  podrá expresarse en términos de esta diferencia de temperatura. Entonces

$$\psi = \frac{C_p \Delta T_{OS}}{U^2/2} = \frac{C_p (T_1 - T_3)}{U^2/2}$$

Otro parámetro de utilidad es el grado de reacción o simplemente reacción  $\Lambda$ , que expresa la fracción de la expansión del escalonamiento que tiene lugar en el rotor, siendo usual definirlo en función de los saltos de temperatura o de entalpía estática; es decir

$$\Lambda = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} = \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_3}$$

En otras bibliografías el grado de reacción suele definirse como la fracción del trabajo específico obtenible en el rodete asociado con el cambio de entalpía específica. La otra parte del trabajo específico está asociado con el cambio de energía cinética del fluido. Esta definición coincidirá con la dada anteriormente cuando la magnitud de la velocidad absoluta a la entrada y a la salida del escalonamiento sea igual.

Si consideramos un escalonamiento en el que  $C_{a2} = C_{a3} = C_a$  y  $C_3 = C_1$ , puede obtenerse una expresión sencilla de  $\Lambda$  como sigue.

$$\text{Se tiene } C_p(T_{01} - T_{03}) = C_p(T_1 - T_3) = UC_a(tg\beta_2 + tg\beta_3)$$

Además.

$$\begin{aligned} h_3 + \frac{V_3^2}{2} &= h_2 + \frac{V_2^2}{2} \\ h_2 - h_3 &= \frac{1}{2}(V_3^2 - V_2^2) = C_p(T_2 - T_3) \\ C_p(T_2 - T_3) &= \frac{1}{2}C_a^2(tg^2\beta_3 - tg^2\beta_2) \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\Lambda = \frac{C_a}{2U}(tg\beta_3 - tg\beta_2) \quad (1.12)$$

El tercer parámetro adimensional al que se hace referencia frecuentemente en el diseño de turbinas de gas, aparece en las ecuaciones (1.11) y (1.12); se trata de la relación  $C_a/U$ , denominado coeficiente de flujo  $\phi$  (juega el mismo papel que la relación cinemática  $U/C_1$  utilizada en el diseño de turbinas de vapor). Así pues, las ecuaciones (1.11) y (1.12) pueden escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{C_p \Delta T_{0s}}{U^2/2} = 2\phi(tg\beta_2 + tg\beta_3) \\ \Lambda &= \frac{\phi}{2}(tg\beta_3 - tg\beta_2) \end{aligned}$$

Ahora pueden expresarse los ángulos de la corriente del gas en función de  $\psi$ ,  $\Lambda$  y  $\phi$  del modo siguiente. Sumando y restando alternativamente las dos últimas ecuaciones anteriores tendremos

$$\operatorname{tg} \beta_3 = \frac{1}{2\phi} \left( \frac{\psi}{2} + 2\Lambda \right) \quad (1.13)$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{1}{2\phi} \left( \frac{\psi}{2} - 2\Lambda \right) \quad (1.14)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \operatorname{tg} \beta_3 - \frac{1}{\phi} \quad (1.15)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \beta_2 + \frac{1}{\phi} \quad (1.16)$$

El triángulo de velocidades quedará totalmente definido si se conoce  $\psi$ ,  $\Lambda$ ,  $\phi$  y la velocidad periférica o tangencial  $U$ .

Incluso con las restricciones que ya hemos introducido ( $C_{a2} = C_{a3}$  y  $C_3 = C_1$ ) y recordando que la velocidad del alabe  $U$  vendrá limitada por consideraciones de resistencia del material, sigue habiendo infinitas posibilidades de elección a disposición del proyectista. Por ejemplo, aunque si el cambio total de temperatura de la etapa vendrá fijado por los cálculos del ciclo, el proyectista es libre de escoger uno o dos escalonamientos de  $\psi$  grande o un gran número de  $\psi$  más pequeño. Para limitar aún más nuestro estudio en este punto, se puede observar que cualquier turbina de gas es esencialmente una máquina de baja relación de expansión, al contrario de las turbinas de vapor (por ejemplo del orden de 10:1 en comparación con más de 1000:1 incluso en ciclos que funcionen con presiones de vapor subcríticas). Así pues, tiene poco sentido adoptar etapas de impulso ( $\Lambda=0$ ) como los que se encuentran en el extremo de alta presión de las turbinas de vapor, donde resultan el tipo más eficaz, ya que en tales condiciones “las pérdidas por fugas” en el juego de la punta de los álabes del rotor resultarían excesivas con escalonamientos de reacción. Se desechan pues los valores de  $\Lambda$  próximos a cero y se consideran por el momento diseños de reacción del 50%.

El conocimiento general del modo en que se comporta la naturaleza sugiere que el diseño más eficaz se conseguirá probablemente cuando la expansión se divida de forma razonablemente igual entre la fila de álabes del estator y las del rotor. Más adelante se verá que la reacción variará desde la raíz hasta la punta del álabe, pero aquí se está hablando de una reacción del 50% para el radio medio.

Haciendo  $\Lambda=0.5$  se obtiene

$$\frac{1}{\phi} = \operatorname{tg} \beta_3 - \operatorname{tg} \beta_2$$

Comparando directamente esta expresión con las relaciones obtenidas para los ángulos de la corriente, vemos que:

$$\beta_3 = \beta_2 \text{ y } \beta_2 = \alpha_3 \quad (1.17)$$

Con lo que el diagrama de velocidades resulta simétrico. Si se considera una etapa de repetición, en el cual  $C_3 = C_1$  en dirección además de magnitud, se tiene también  $\alpha_1 = \alpha_3 = \beta_2$  y los álabes del estator y del rotor tendrán entonces los mismos ángulos de entrada y de salida.

Por último, para  $\Lambda=0.5$  se obtiene

$$\psi = 4\phi \tan \beta_3 - 2 = 4\phi \tan \alpha_2 - 2 \quad (1.18)$$

$$\psi = 4\phi \tan \beta_3 + 2 = 4\phi \tan \alpha_3 + 2 \quad (1.19)$$

Las ecuaciones (1.17), (1.18) y (1.19) proporcionan todos los ángulos de la corriente de gas en función de  $\psi$  y de  $\phi$ .

Los valores del coeficiente de flujo  $\phi$  y del coeficiente de carga  $\psi$  se eligen de tal forma que dé lugar al sistema de potencia más eficaz para la finalidad a la que está destinada. Para este fin en las figuras 1.3 – 1.8 se muestra el resultado de representar el ángulo de salida de la tobera  $\alpha_2$  y el ángulo de salida de la etapa  $\alpha_3$  basándose en  $\psi$  y  $\phi$  tal y como se expresan en las ecuaciones (1.18) y (1.19), además en las mismas figuras se estiman los rendimientos de la etapa que puede definirse de dos maneras: el rendimiento isentrópico total a total de la etapa y el rendimiento isentrópico total a estático, de los cuales, el primero resulta ser el más apropiado cuando el escalonamiento va seguido de otros en una turbina de varios escalonamientos, puesto que la energía cinética de salida  $C_3^2/2$  se utiliza en el escalonamiento siguiente. Es asimismo aplicable cuando la etapa forma parte de un turborreactor, pues la energía cinética de salida es utilizada en la tobera propulsiva. Mientras que el segundo se utilizaría cuando fuese deseable separar las pérdidas de la turbina y las del difusor del escape. Este rendimiento supone que, por lo que respecta a la turbina, toda la energía cinética saliente se pierde, siendo su valor algo menor que el rendimiento total a total que emplearemos aquí. Aplicando estas últimas definiciones a la etapa se tiene

$$\text{Rendimiento total a total: } \eta_s = \frac{T_{O1} - T_{O3}}{T_{O1} - T'_{O3}} \quad (1.20)$$

$$\text{Rendimiento total a estático: } \eta_s = \frac{T_{O1} - T_{O3}}{T_{O1} - T_3'}$$

Siendo  $T'_{O3}$  y  $T_3'$  la temperatura de estancamiento y estática respectivamente que se alcanza tras la expansión isentrópica desde  $p_1$  hasta  $p_{O3}$  y  $p_3$  respectivamente. Es importante aclarar que para obtener los valores de los rendimientos es necesario conocer acerca del perfil de los álabes, la relación de aspecto (altura/cuerda) del álabe, el juego en la punta, etc. Por lo que los valores del rendimiento que se incluyen no ofrecen ninguna confianza; sin embargo, el conocimiento de la tendencia general resultará ser valioso para un diseño preliminar.



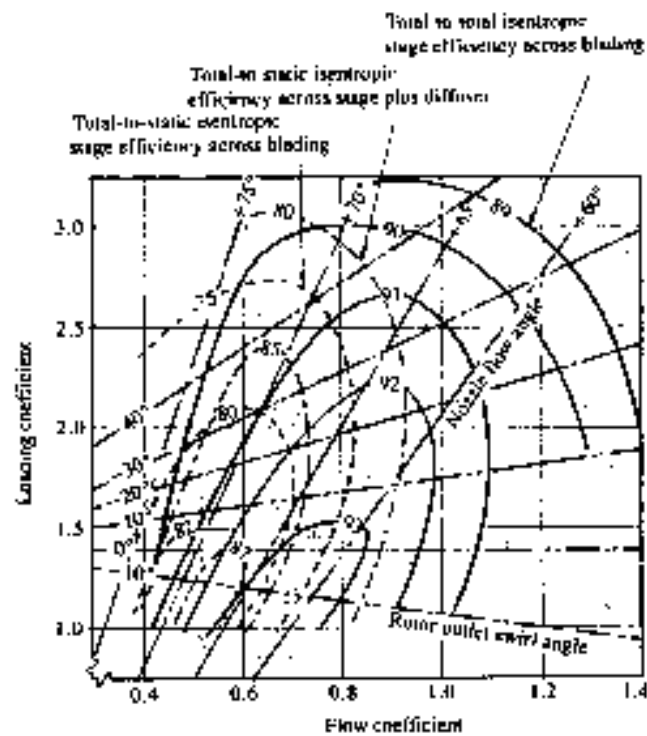


Figura 1.3 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.3 [4]

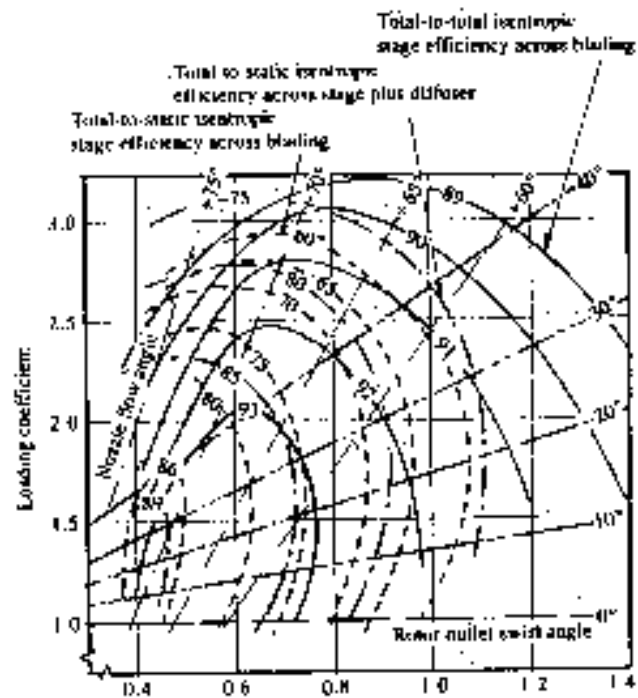


Figura 1.4 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.5 [4]

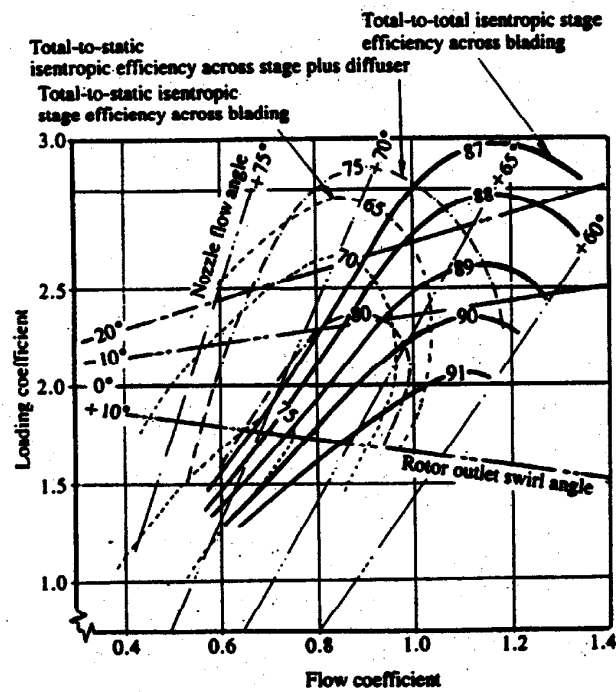


Figura 1.5 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a cero (Impulso) [4]

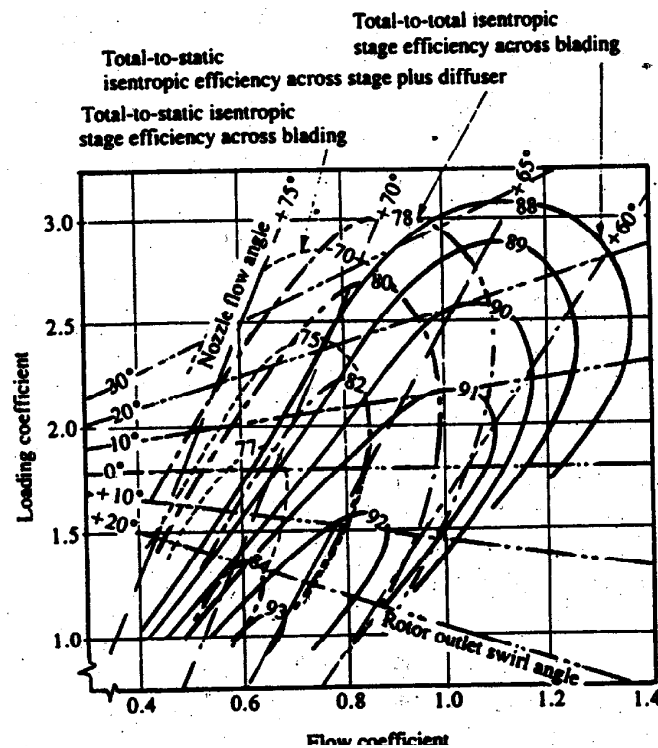


Figura 1.6 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.1 [4]

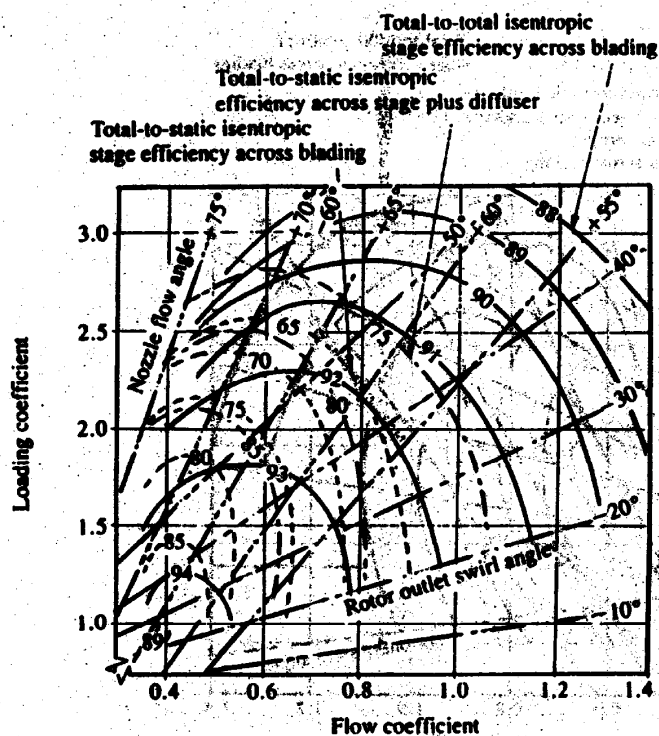


Figura 1.7 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.7 [4]

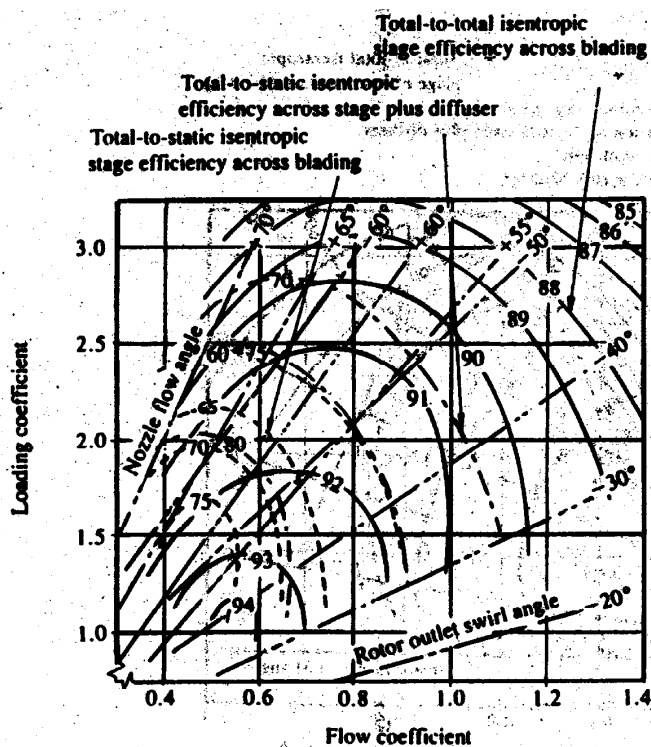


Figura 1.8 Eficiencia vs coeficiente de flujo y de carga para una turbina de flujo axial con grado de reacción igual a 0.9 [4]

Además, de tener en cuenta el rendimiento, para la elección de los valores de  $\psi$  y  $\phi$ , es importante considerar otros aspectos como el tamaño de la máquina, peso, etc en relación con la aplicación que desempeñará. Así pues, de las gráficas se puede observar que los diseños de valores bajos de  $\psi$  y  $\phi$  proporcionan los mejores rendimientos de la etapa. También unos valores bajos de  $\psi$  y  $\phi$  implican velocidades bajas del gas y, por tanto, unas pérdidas por fricción reducidas. Sin embargo un valor bajo de  $\psi$  significa que para una potencia total dada de la turbina, habrá más etapas, mientras que un valor bajo de  $\phi$  significa que, para un flujo másico dado, la superficie anular de la turbina será mayor. En una turbina de gas industrial en que el tamaño y el peso sean de poca importancia y un bajo consumo específico de combustible resulte vital, tendría sentido diseñar con unos valores bajos de  $\psi$  y  $\phi$ . Sin embargo, en un grupo propulsor de aviación es importante que el peso y la superficie frontal sean mínimos, lo que entrañará la adopción de unos valores más altos de  $\psi$  y  $\phi$ . Como ya se ha dicho, el diseño más eficaz de una etapa será el que de lugar al sistema de potencia más eficaz para la finalidad a la que esté destinada, y rigurosamente hablando, los valores óptimos de  $\psi$  y  $\phi$  no podrán determinarse sin efectuar unos cálculos minuciosos del comportamiento en conjunto del sistema de potencia.

#### 1.4 Coeficiente de pérdidas en los álabes del estator y del rotor

Para contabilizar las pérdidas que tienen lugar en las filas de álabes se utilizan dos parámetros basados respectivamente en los saltos de temperatura y de presión. La mejor manera de describirlos es dibujando los procesos que tienen lugar en los conductos de los álabes de la tobera y del rotor en el diagrama T – s. Como puede verse en la figura 1.9.

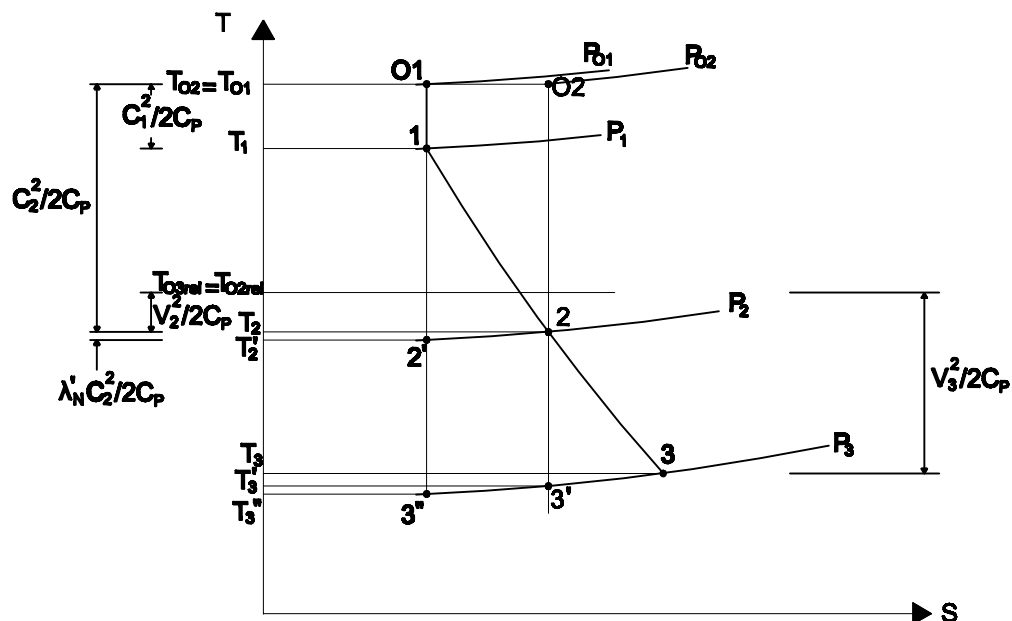


Figura 1.9 Diagrama T-s de una etapa de reacción

Como en las toberas no se realiza trabajo,  $T_{O2} = T_{O1}$  y el corto trazo horizontal de la línea continua representa el salto de presión de parada ( $p_{O1} - p_{O2}$ ) debido a la fricción en las toberas. Las pérdidas están, desde luego, exageradas en la figura.

Al calcular el equivalente de temperatura de la velocidad del gas que sale de la fila de álabes, se puede decir que idealmente el gas se expandirá de  $T_{O1}$  a  $T_2'$ , pero que debido a la fricción la temperatura a la salida de la tobera es  $T_2$ , algo más alta que  $T_2'$ . El coeficiente de pérdida de los álabes de la tobera puede definirse indistintamente por:

$$\lambda_N = \frac{T_2 - T_2'}{C_2^2 / 2C_p} \quad (1.21)$$

o bien:

$$\lambda_N = \frac{h_2 - h_2'}{C_2^2 / 2}$$

Las ecuaciones anteriores expresan la proporción de la energía saliente (energía cinética) que se degrada por fricción, tal y como se demuestra a continuación.

De la termodinámica se obtiene la siguiente expresión para el cambio de entalpía entre la entrada y la salida de los álabes del estator.

$$h_2 - h_1 = w_f + \int_1^2 dp / \rho$$

Si consideramos que el flujo es isentrópico a través de los álabes del estator se obtiene

$$h_2' - h_1 = \int_1^{2'} dp / \rho$$

Dado que la densidad a lo largo de los álabes del estator varía muy poco, a diferencia de la variación de la densidad en toda la máquina que puede ser considerable, resulta

$$\begin{aligned} \int_1^{2'} dp / \rho &\approx \frac{p_2' - p_1}{\rho} \\ \int_1^2 dp / \rho &\approx \frac{p_2 - p_1}{\rho} \end{aligned}$$

Además  $p_2' = p_2$  entonces

$$(h_2 - h_1) - (h_2' - h_1) = w_f + \int_1^2 dp / \rho - \int_1^{2'} dp / \rho$$

$$h_2 - h_2' \approx w_f$$

Siendo  $w_f$  el trabajo hecho por la fricción, quedando demostrado lo que se definió anteriormente.

El coeficiente de pérdidas también puede definirse por:

$$Y_N = \frac{p_{O1} - p_{O2}}{p_{O2} - p_2} \approx \frac{w_f}{C_2^2/2} \quad (1.22)$$

Ya que  $p_{O1} - p_{O2} \approx \rho w_f$  siempre y cuando se desprecie la variación de la densidad a lo largo del álabe del estator.

Tanto  $\lambda$  como  $Y$  expresan la proporción de la energía saliente que se pierde por los efectos de fricción.  $Y_N$  puede medirse con relativa facilidad en ensayos de cascada como se verá más adelante, mientras que  $\lambda_N$  es el que se emplea más fácilmente en el diseño.

Por otra parte las pérdidas en los álaves del rotor se expresa por:

$$\lambda_R = \frac{T_3 - T_3''}{V_2^2 / 2C_p} \quad (1.23)$$

Nótese que se define como una proporción de la energía cinética de salida respecto de la fila de álaves de forma que pueda relacionarse con los resultados de ensayos de cascada. Como el gas no realiza trabajo respecto de los álaves  $T_{O3rel.} = T_{O2rel.}$ . El coeficiente de pérdida de los álaves del rotor en función de los saltos de presión se define como

$$Y_N = \frac{p_{O2rel} - p_{O3rel}}{p_{O3rel} - p_3} \quad (1.24)$$

Mediante el siguiente razonamiento (que es aplicable por igual a las filas de álaves del estator y del rotor, aunque sólo se ha hecho para el primer caso) se demuestra que  $\lambda$  e  $Y$  no son muy diferentes numéricamente.

$$Y_N = \frac{p_{O1} - p_{O2}}{p_{O2} - p_2} = \frac{(p_{O1}/p_{O2}) - 1}{1 - (p_2/p_{O2})}$$

Ahora bien

$$\frac{p_{O1}}{p_{O2}} = \frac{p_{O1}}{p_2} \frac{p_2}{p_{O2}} = \left( \frac{T_{O1}}{T_2'} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left( \frac{T_2}{T_{O2}'} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \left( \frac{T_2}{T_2'} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Ya que  $T_{O1} = T_{O2}$

Por lo tanto:

$$Y_N = \frac{(T_2/T_2')^{\gamma/(\gamma-1)} - 1}{1 - (T_2/T_{O2})^{\gamma/(\gamma-1)}} = \frac{\left[1 + \frac{T_2 - T_2'}{T_2'}\right]^{\gamma/(\gamma-1)} - 1}{1 - \left[\frac{T_2 - T_{O2}}{T_{O2}} + 1\right]^{\gamma/(\gamma-1)}}$$

Desarrollando las expresiones binomiales de los corchetes y utilizando sólo los primeros términos (lo que no es sin embargo muy exacto para el denominador), se tendrá:

$$Y_N = \frac{T_2 - T_2'}{T_{O2} - T_2} \times \frac{T_{O2}}{T_2'} = \lambda_N \left( \frac{T_{O2}}{T_2'} \right) \approx \lambda_N \left( \frac{T_{O2}}{T_2} \right)$$

Además:

$$\frac{T_{O2}}{T_2} = \left( 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M_2^2 \right)$$

Aún cuando el número de Mach a la salida del álabe sea la unidad, como podría suceder en los álaves de la tobera de una etapa altamente solicitado,  $\lambda = 0.86Y$ , con lo que  $\lambda$  sería sólo un 14% menor que  $Y$ . Posteriormente se mostrará el tipo de información que se dispone para calcular los valores de  $\lambda$  e  $Y$ .

$\lambda_N$  y  $\lambda_R$  se pueden relacionar con el rendimiento isentrópico de la etapa  $\eta_s$  del modo siguiente:

$$\eta_s = \frac{T_{O1} - T_{O3}}{T_{O1} - T_{O3}'} = \frac{1}{1 + (T_{O3} - T_{O3}')/(T_{O1} - T_{O3})}$$

Si se observa ahora la figura 1.9 se aprecia que

$$T_{O3} - T_{O3}' \approx (T_3 - T_3') = (T_3 - T_3'') + (T_3'' - T_3')$$

Pero  $(T_2'/T_3') = (T_2/T_3'')$ , ya que ambos son iguales a  $(P_1/P_2)^{(\lambda-1)/\lambda}$ . Reordenando y restando la unidad de ambos miembros, se tiene:

$$\frac{T_3'' - T_3'}{T_3'} = \frac{T_2 - T_2'}{T_2'} \quad \text{ó} \quad (T_3'' - T_3') \approx (T_2 - T_2') \frac{T_3}{T_2}$$

Por tanto  $\eta_s$  es:

$$\begin{aligned} & \approx \frac{1}{1 + [(T_3 - T_3'') + (T_3/T_2)(T_2 - T_2')]/(T_{O1} - T_{O3})} \\ & \approx \frac{1}{1 + [\lambda_R(V_3^2/2C_p) + (T_3/T_2)\lambda_N(C_2^2/2C_p)]/(T_{O1} - T_{O3})} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Alternativamente, sustituyendo  $V_3 = C_a \sec \beta_3$ ,  $C_2 = C_a \sec \alpha_2$  y

$$\begin{aligned} C_p (T_{01} - T_{03}) &= UC_a (tg\beta_3 + tg\beta_2) \\ &= UC_a [tg\beta_3 + tg\alpha_2 - (U/C_a)] \end{aligned}$$

Se puede escribir la ecuación (1.25) de la forma:

$$\eta_s \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{C_a}{U} \left[ \frac{\lambda_R \sec^2 \beta_3 + (T_3/T_2) \lambda_N \sec^2 \alpha_2}{tg\beta_3 + tg\alpha_2 - (U/C_a)} \right]} \quad (1.26)$$

Dado que  $Y \approx \lambda$ , los coeficientes de pérdidas  $Y_R$  e  $Y_N$  pueden si así se desea sustituir a  $\lambda_R$  y  $\lambda_N$  en las ecuaciones (1.25) y (1.26).

### 1.5 Flujo tridimensional

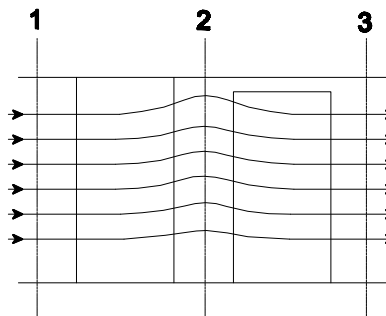
Desde el inicio de este capítulo se señaló que la forma de los triángulos de velocidades varía desde la raíz a la punta del álabe, debido a que la velocidad de éste,  $U$ , aumenta con el radio. Esta variación lleva a establecer álabes torsionados para tener en cuenta la variación de los ángulos de la corriente de gas. Este tipo de álabes se conocen como álabes de torbellino.

La práctica común seguida en las turbinas de vapor, excepto en los álabes de baja presión que son muy altos, consiste en diseñar para las condiciones del diámetro medio, mantener constantes los ángulos del álabe desde la raíz a la punta y suponer que la variación de la incidencia a lo largo del álabe, debida a los ángulos variables de la corriente, no se traduce en ninguna pérdida suplementaria. Se han llevado a cabo ensayos comparativos con una turbina de gas de una sólo etapa de relación de radios (radio de la punta/radio de la raíz) 1.37 empleando alternativamente álabes de ángulo constante y ángulos de torbellino. Los resultados mostraron que cualquier mejora del rendimiento obtenida con álabes de torbellino se hallaba dentro del margen de error experimental, lo cual contrasta con los ensayos análogos realizados con un compresor axial de seis etapas, que mostraron una neta mejora con el uso de álabes de torbellino. Sin embargo, no se trataba tanto de una mejora del rendimiento (de cerca del 1.5%), sino del retraso en la aparición del bombeo, que por supuesto no se da en un flujo que se acelera.

Vemos pues, que los proyectistas de turbinas de vapor han estado acertados al no aplicar la teoría del torbellino, salvo cuando sea absolutamente necesario en el extremo de baja presión, ya que tienen que considerar el coste suplementario de los álabes torsionados para el elevado número de filas que se requiere, sabiendo además que el ciclo de Rankine es relativamente insensible a las pérdidas elementales. Por el contrario, no es de sorprender que el proyectista de turbinas de gas, en un esfuerzo por conseguir el mayor rendimiento posible de los elementos, haya utilizado alguna forma de álabes de torbellino que intuitivamente espera le proporcionen una mejora del comportamiento, por pequeña que ésta sea.



Por otra parte, al suponer que el flujo en el interior del conducto anular es bidimensional, se está despreciando cualquier efecto de un movimiento radial del fluido. Este supuesto no deja de ser razonable para álabes cuya altura sea pequeña en comparación con el diámetro medio. Los primeros procedimientos para tratar el flujo radial se basaban en la teoría del equilibrio radial. Esta teoría se basa en el supuesto de que los movimientos del gas en dirección radial tienen lugar únicamente al atravesar los álabes y no en los espacios comprendidos entre las filas de éstos. También están otras modalidades de análisis como la de cumplir con la condición de equilibrio radial y al mismo tiempo cumplir con una condición de flujo másico constante por unidad de superficie para todos los radios. Los defensores de este criterio sostienen que aún cuando la turbina carezca de acampanamiento, deberá haber un desplazamiento en sentido radial de las líneas de corriente. Tal como se indica en la figura 1.10.



**Figura 1.10 Desplazamiento radial**

Ahora, si nos apegamos al supuesto de que cualquier flujo radial que puede haber en el conducto anular sólo se da cuando el flujo se encuentra atravesando la fila de álabes, el flujo en los espacios comprendidos entre filas sucesivas se hallará en equilibrio radial. En este principio se basa uno de los procedimientos de diseño más corrientemente utilizado, en el que se establece una ecuación que satisfaga la actuación de unas fuerzas radiales de presión sobre los elementos del gas, con el fin de procurar la aceleración centrípeta necesaria para la componente periférica de la velocidad. A partir de esta ecuación es entonces posible, como se verá posteriormente, calcular una distribución completa de los ángulos de la corriente a lo largo de toda la altura del álabes, con ayuda de la cual diseñar la forma del mismo. La ecuación básica del equilibrio radial se deducirá de la consideración de las fuerzas de presión que actúan sobre un elemento de fluido, como puede verse en la figura 1.11. Como la aceleración en dirección radial es elevada, cifrándose en varios miles de veces la aceleración de la gravedad, pueden despreciarse las fuerzas gravitatorias. Por lo tanto, proyectando según la dirección radial, tendremos:

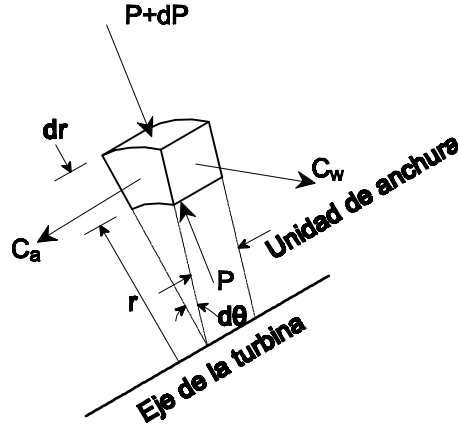
$$(p + dp)(r + dr)d\theta - rpd\theta - 2\left(p + \frac{dp}{2}\right)dr \frac{d\theta}{2} = \rho dr r d\theta \frac{C_t^2}{r}$$

Donde  $p$ ,  $\rho$ ,  $C_t$  y  $r$  son la presión, la densidad, la velocidad tangencial y el radio respectivamente. El tercer término del miembro de la izquierda se deriva de la proyección de las fuerzas de presión que actúan a ambos lados del elemento sobre el plano radial-axial, donde se admite que la presión es la media de las dos presiones extremas, es decir,

$p - dp/2$ . Simplificando  $d\theta$  y despreciando los términos de segundo orden  $dpdr$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{C_t^2}{r} \quad (1.27)$$

La ecuación (1.27) se conoce como condición del equilibrio radial.



**Figura 1.11 Equilibrio radial de un elemento de fluido**

La entalpía de estancamiento<sup>(2)</sup> para un radio cualquiera  $r$  al que corresponda una velocidad absoluta  $C$ , será:

$$h_o = h + \frac{C^2}{2} = c_p T + \frac{1}{2} (C_a^2 + C_t^2)$$

Puesto que se está suponiendo que no hay componente radial de la velocidad. Sustituyendo,

$$c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

Y diferenciando con respecto a  $r$ , se tiene

$$\frac{dh_o}{dr} = C_a \frac{dC_a}{dr} + C_t \frac{dC_t}{dr} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dr} \right]$$

Como la variación de la presión en la sección anular es pequeña, se puede admitir que se cumple la ley isentrópica  $p/\rho^\gamma = \text{Constante}$  con un error muy pequeño a causa de dicha variación. Esta ecuación en forma diferencial será:

---

(2) A las propiedades de estancamiento se les conoce también como propiedades de parada

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dp}{dr}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{dh_o}{dr} = C_a \frac{dC_a}{dr} + C_t \frac{dC_t}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}$$

Por último, introduciendo la condición de equilibrio radial (1.27), se obtiene la ecuación fundamental para el análisis del flujo en el interior del conducto anular de la turbina.

$$\frac{dh_o}{dr} = C_a \frac{dC_a}{dr} + C_t \frac{dC_t}{dr} + \frac{C_t^2}{r} \quad (1.28)$$

### 1.5.1 Diseño de torbellino libre

Como se observa en la ecuación (1.28), existen tres incógnitas involucradas, a saber  $h_o$ ,  $C_a$ , y  $C_t$ . Así pues, queda a criterio del proyectista establecer la variación radial de dos cualesquiera de las variables y determinar la tercera por medio de la ecuación (1.28).

Así si se aplica la condición frecuentemente utilizada de trabajo específico constante para todos los radios, aunque  $h_o$  disminuirá progresivamente en sentido axial a lo largo de la turbina, su distribución radial se mantendrá uniforme. De esta forma,  $dh_o/dr = 0$  en cualquier sección comprendida entre dos filas de álabes. La ecuación (1.28) se reducirá entonces a:

$$C_a \frac{dC_a}{dr} + C_t \frac{dC_t}{dr} + \frac{C_t^2}{r} = 0 \quad (1.29)$$

Se puede considerar ahora el caso especial de que  $C_a$  se mantenga constante en toda la sección anular, de modo que  $dC_a/dr = 0$ . La ecuación (1.29) se convertirá entonces en:

$$\frac{dC_t}{dr} = -\frac{C_t}{r} \quad \text{o} \quad \frac{dC_t}{C_t} = -\frac{dr}{r}$$

E integrando:

$$C_t r = \text{Constante}$$

Así pues, la componente tangencial de la velocidad del flujo varía inversamente con el radio, condición que suele conocerse como **torbellino libre**.

Si se designa por el subíndice  $m$  a las magnitudes correspondientes al diámetro medio, la variación general del ángulo de la tobera  $\alpha$  según el torbellino libre se determinará como sigue:

$$C_t r = r C_a \operatorname{tg} \alpha = \text{Constante}$$

$$C_a = \text{Constante}$$

Por lo tanto,  $\alpha$  para cualquier radio  $r$  estará relacionado con  $\alpha_m$  para el radio medio  $r_m$  por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{r_m}{r} \right) \operatorname{tg} \alpha_m \quad (1.30)$$

Los ángulos relativos de la corriente,  $\beta$ , podrán ahora determinarse de la siguiente manera:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{U}{C_a} = \left( \frac{r_m}{r} \right) \operatorname{tg} \alpha_m - \left( \frac{r}{r_m} \right) \frac{U_m}{C_a} \quad (1.31)$$

En las ecuaciones (1.30) y (1.31) los términos correspondientes al diámetro medio deberán evaluarse para la sección transversal en consideración y entonces estas ecuaciones darán la distribución radial de los ángulos del flujo en dicha sección transversal.

Se ve, por tanto, que las tres condiciones de trabajo específico constante, velocidad axial constante para todos los radios y variación de la velocidad tangencial según el torbellino libre, satisfacen de por sí la condición del equilibrio radial (1.28) y conducen por consiguiente a que se alcancen las condiciones de diseño del flujo. Dado que estas condiciones resultan compatibles entre sí, parecería a primera vista que constituyen una base ideal para el diseño. Por desgracia, los álabes resultantes, algunas veces, llevan aparejados ciertos inconvenientes, y que empujan al proyectista a considerar otras combinaciones de condiciones básicas.

No hay, por ejemplo ninguna razón para que el trabajo específico no varíe con el radio, en cuyo caso  $dh_o/dr$  no sería igual a cero en la ecuación (1.29). Habría que elegir entonces una variación radial de una de las variables restantes, como por ejemplo  $C_a$ , y determinar la variación de  $C_t$  que satisfaga a la ecuación. Así pues, como se dijo anteriormente, un diseño puede basarse en unas distribuciones radiales arbitrarias de dos variables cualesquiera, determinándose la variación adecuada de la tercera por combinación de aquellas con la ecuación (1.29). Hay que advertir que no es obligado el trabajar con  $C_a$ ,  $C_t$  y  $h_o$ , sino que puede tomarse, por ejemplo, una variación del grado de reacción con el radio en vez de la variación correspondiente de  $C_t$ .

# 2

## Aerodinámica y geometría de los álabes<sup>(1)</sup>

Hasta el momento se ha visto el método para establecer los ángulos de la corriente para todos los radios; así como la altura de los álabes y parte de la forma del conducto anular. El paso siguiente es la elección de las formas totales de los álabes del estator y del rotor que admitan la incidencia del gas en su borde de ataque y desvíen a la corriente el ángulo requerido con el mínimo de pérdidas. Para que lo anterior sea posible es necesario conocer la forma en que interactúa el flujo con las superficies sólidas de los álabes. Con este fin, en los siguientes apartados se hará una introducción a los conceptos usados en la aerodinámica con el fin de entender el comportamiento que experimenta el fluido al atravesar la corona de álabes.

### 2.1 Nomenclatura de cascada

El perfil del álabe de una cascada puede ser concebido como una línea curva en la que una distribución de espesor del perfil es sobrepuesto simétricamente.

En la figura 2.1 se representa la sección transversal de tres álabes pertenecientes a una cascada típica de una turbina, incluyéndose también los detalles de los distintos ángulos, longitudes y velocidades asociadas a los experimentos de cascadas. La línea punteada exactamente en medio de la superficie convexa y cóncava se llama la línea de curvatura. La cuerda es la distancia lineal entre los extremos de la línea de curvatura. El ángulo nominal del álabe a la entrada  $\alpha'_1$  es el ángulo entre la tangente a la línea de curvatura y la dirección axial, la tangente se traza a una distancia del 5% de la cuerda medido desde el borde de ataque y a lo largo de la cuerda. Similarmente, el ángulo del álabe en la salida  $\alpha'_2$ , es el ángulo entre la tangente a la línea de curvatura, a una distancia del 95% de la cuerda medido desde el borde de ataque, y la dirección axial. El ángulo entre las tangentes anteriormente mencionadas se llama el ángulo de curvatura  $\theta$ . Se define el ángulo de calado  $\lambda$  como el ángulo entre la cuerda y la dirección axial. Sobre el tercer álabe se muestra el ángulo de flujo  $\alpha_1$  y el ángulo del álabe  $\alpha'_1$  cuya diferencia es el ángulo de incidencia  $i$ . También en la salida la diferencia entre el ángulo de flujo  $\alpha_2$  y el ángulo del álabe  $\alpha'_2$  se llama el ángulo de desviación,  $\delta$ . Se puede comprobar del diagrama que las siguientes relaciones existen entre los ángulos:

---

(1) El presente capítulo ha sido elaborado tomando como base la información de los siguientes libros:  
Cohen [1] y David [4]

Ángulo de incidencia:  $i = \alpha_1 - \alpha'_1$

Ángulo de desviación:  $\delta = \alpha_2 - \alpha'_2$

Ángulo de curvatura:  $\theta = \alpha'_1 - \alpha'_2$

Otro ángulo de importancia en cascadas es el ángulo de deflexión.

Ángulo de deflexión:  $\varepsilon = \alpha_1 - \alpha_2$

Luego se puede deducir la siguiente relación:  $i - \delta = \varepsilon - \theta$

Refiriéndonos a la figura 2.1 la línea curva  $y(x)$  y el espesor del perfil  $t(x)$  se muestran como funciones de la distancia  $x$  a lo largo de la cuerda del álabe  $c$ . En la práctica Británica la forma de la línea de curvatura es usualmente un arco circular o un arco parabólico definido por la máxima curvatura “ $b$ ” localizada a una distancia “ $a$ ” desde el borde de ataque del álabe. La distribución del espesor del perfil puede ser una sección aerodinámica estándar pero, más usualmente, es una de las secciones entregadas por varios estudios establecidos para aplicaciones de compresores o turbinas. La curvatura del álabe y las distribución de espesores son normalmente presentados como tablas de  $y/c$  y  $t/c$  contra  $x/c$ .

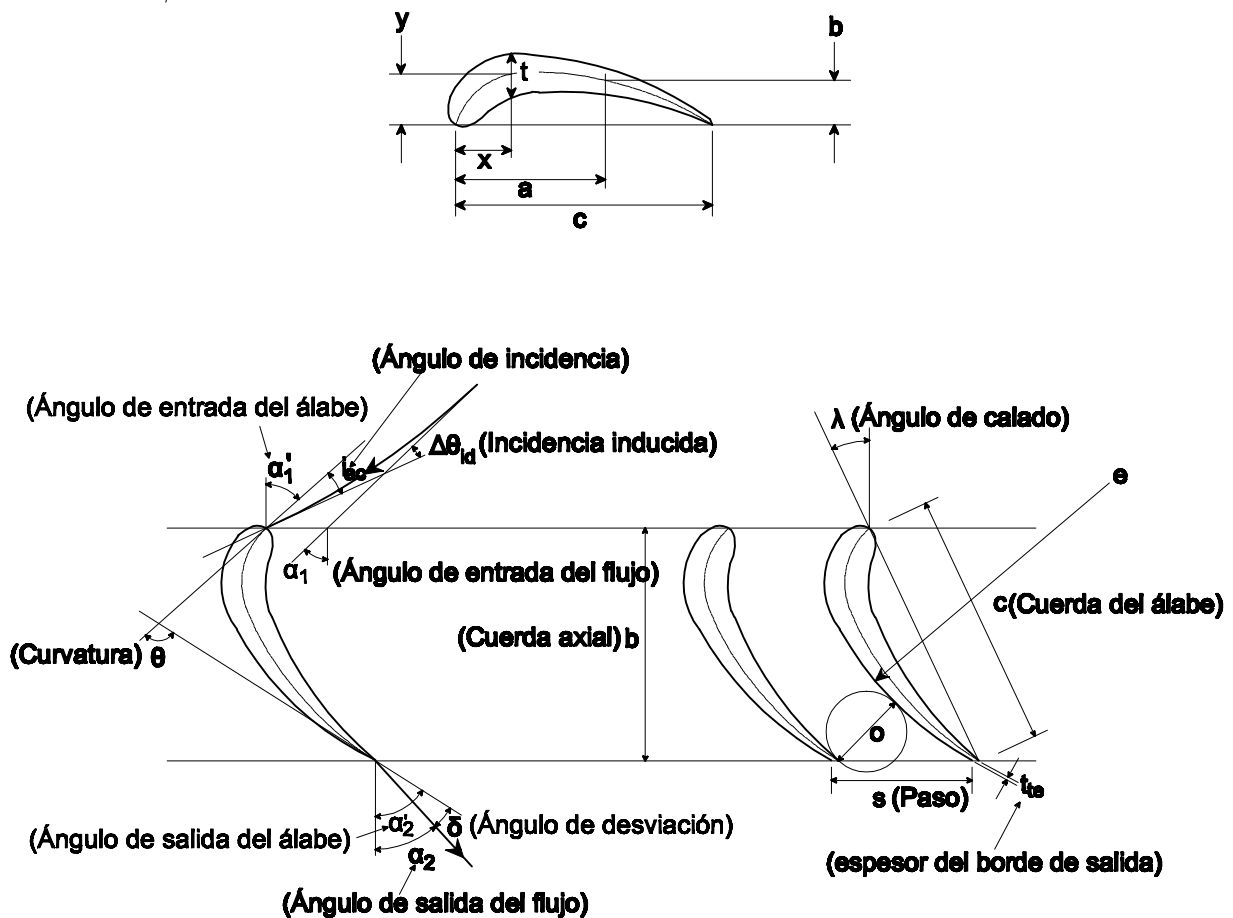


Figura 2.1 Parámetros que definen la forma de una cascada

## 2.2 Análisis de fuerzas en las cascadas

No se puede suponer que los ángulos del flujo son precisamente iguales a los ángulos de los álabes porque la inercia del fluido impide que su trayectoria se adapte perfectamente a las superficies curvas de las partes sólidas. En base a esto en los siguientes párrafos se hará un análisis de las fuerzas originadas por la interacción del fluido con las superficies sólidas de los álabes. Aunque el análisis se realizará para una cascada genérica, los resultados a los que se llegará serán igualmente válidos para la cascada de las turbina de gas.

Sea la cascada de la figura 2.2:

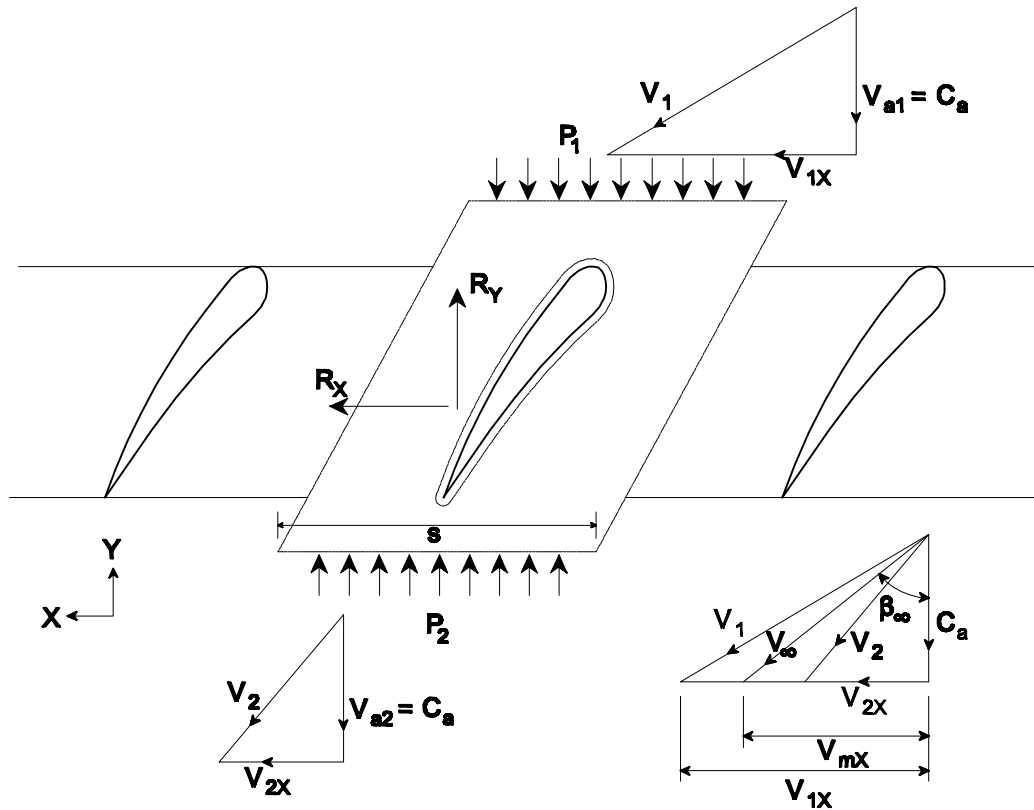


Figura 2.2 Cascada para el análisis dinámico del flujo

Aplicando el teorema de cantidad de movimiento al volumen de control señalado que abarca una parte típica de la cascada se obtendrá las fuerzas sobre la cascada. Nótese que la extensión del volumen de control en “x” es el paso, denotado por la letra “s”. El álabe mismo está excluido del volumen de control. Aquí se hacen las deducciones suponiendo que los álabes están en movimiento, pero cuando los álabes son estacionarios se reemplazan las velocidades relativas señaladas por velocidades absolutas y los ángulos de flujo relativos ( $\beta$ ) por los ángulos de flujo absoluto ( $\alpha$ ). El volumen de control se desplaza con los álabes. Entonces:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

Considerando régimen permanente

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} &= \int_{\Gamma} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Gamma \\ F_x \vec{i} + F_y \vec{j} &= \int_{\Gamma_1} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Gamma \\ F_x \vec{i} + F_y \vec{j} &= -\vec{V}_1 \dot{m} + \vec{V}_2 \dot{m} = \dot{m}(V_{2X} - V_{1X}) \vec{i} + \dot{m}(V_{2Y} - V_{1Y}) \vec{j}\end{aligned}$$

Luego:

$$F_x = \dot{m}(V_{2X} - V_{1X}) = \rho sh C_a (V_{2X} - V_{1X}) \quad (2.1)$$

$$F_y = \dot{m}(V_{2Y} - V_{1Y}) = \rho sh C_a (V_{2Y} - V_{1Y}) \quad (2.2)$$

Donde se ha despreciado cualquier variación en la densidad en las secciones de entrada y salida, y  $h$  viene ser la altura del álabe. También:

$$F_x = -R'_x \quad (2.3)$$

$$F_y = -R'_y + (p_2 - p_1)sh \quad (2.4)$$

Hay que tener en cuenta que el flujo en la delgada región adyacente a una frontera sólida (la capa límite) es importante el efecto de la viscosidad. En la región exterior a la capa límite, el efecto de la viscosidad es despreciable y el fluido puede tratarse como no viscoso. Por esta razón en las secciones 1 y 2 se han despreciado los efectos de la viscosidad; además, por simetría toda fuerza y flujo en los laterales entre los álabes se anulan.

Luego reemplazando las ecuaciones (2.3) y (2.4) en las ecuaciones (2.1) y (2.2) respectivamente se obtiene:

$$\begin{aligned}R'_x &= \rho sh C_a (V_{1X} - V_{2X}) = \rho sh C_a (C_a \operatorname{tg} \beta_1 - C_a \operatorname{tg} \beta_2) = \rho sh C_a^2 (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) \\ R'_y + (p_1 - p_2)sh &= 0\end{aligned}$$

Definiendo  $R_x$  como la componente en X de la fuerza resultante del fluido sobre el álabe por unidad de longitud de éste y  $R_y$  la componente en y de esta fuerza se obtiene:

$$R_x = R'_x / h = \rho s C_a^2 (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) \quad (2.5)$$

$$R_y = R'_y / h = (p_2 - p_1)s \quad (2.6)$$

$R_x$  y  $R_y$  resulta de la combinación de las fuerzas de presión y fuerzas cortantes (fuerzas friccionantes) de álabe sobre el fluido.

Ahora se considera estas ecuaciones para el caso en que los efectos de fricción son despreciables. Suponiendo flujo incompresible como aproximación se puede aplicar la ecuación de Bernoulli en coordenadas móviles.



$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (V_1^2 - V_2^2)$$

Del triángulo de velocidades se puede escribir el miembro derecho

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \frac{\rho}{2} (C_a^2 + V_{1X}^2 - C_a^2 - V_{2X}^2) = \frac{\rho}{2} (V_{1X}^2 - V_{2X}^2) \\ p_2 - p_1 &= \frac{\rho}{2} C_a^2 (tg^2 \beta_1 - tg^2 \beta_2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (2.7) en la (2.6) se tiene:

$$R_Y = \frac{\rho C_a^2 S}{2} (tg^2 \beta_1 - tg^2 \beta_2) \quad (2.8)$$

Se define el vector  $\vec{L}$  como la sumatoria de  $\vec{R}_X$  y  $\vec{R}_Y$ . El ángulo de  $\vec{L}$  con respecto al eje de las x es:

$$\arctg\left(\frac{R_Y}{R_X}\right) = \frac{tg\beta_1 + tg\beta_2}{2} = \beta_\infty \quad (2.9)$$

Se define el vector  $V_\infty$  como la velocidad intermedia entre  $V_1$  y  $V_2$  que tiene el ángulo  $\beta_\infty$  con respecto a  $C_a$ . Ya que  $\vec{L}$  tiene el ángulo  $\beta_\infty$  con respecto al eje de las x se concluye que la dirección de  $\vec{L}$  es normal a la dirección de  $V_\infty$ . La fuerza  $\vec{L}$  es la fuerza de sustentación y la velocidad  $V_\infty$  es una velocidad relativa promedio (aunque el promedio aritmético) sobre los álabes.

Se calcula la fuerza de sustentación mediante la formula

$$L = \frac{R_X}{\cos \beta_\infty} = \frac{\rho S C_a^2 (tg\beta_1 - tg\beta_2)}{\cos \beta_\infty} \quad (2.10)$$

Ahora se introduce un parámetro adimensional de suma importancia en la aerodinámica llamado el coeficiente de sustentación.

$$C_L = \frac{L}{\rho c V_\infty^2 / 2}$$

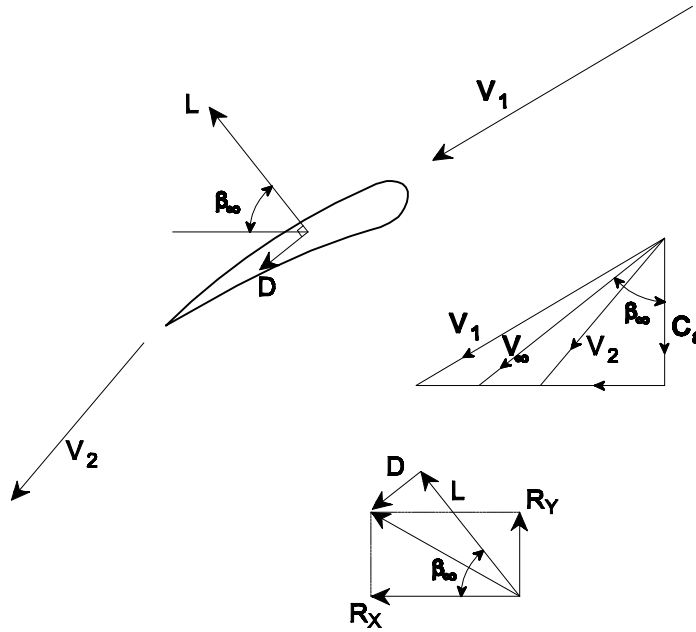
Usando la expresión anterior para  $L$  y la definición de la solidez ( $\sigma = c/s$ ) se llega a la siguiente fórmula para el coeficiente de sustentación en flujo incompresible sin fricción:

$$C_L = \frac{\rho s C_a^2 (tg\beta_1 - tg\beta_2)}{\rho c (V_\infty^2/2) \cos \beta_\infty} = \frac{2\rho s C_a^2 (tg\beta_1 - tg\beta_2)}{\rho c (C_a / \cos \beta_\infty)^2 \cos \beta_\infty}$$

$$C_L = \frac{2}{\sigma} \cos \beta_\infty (tg\beta_1 - tg\beta_2) \quad (2.11)$$

Una interpretación de esta fórmula es que da el coeficiente de sustentación que los álabes tendrán que producir para dar los ángulos de flujo  $\beta_1$  y  $\beta_2$  en la ausencia de fricción. Un modo de ver el problema de diseño, que no se aplicará aquí, pero que se usa en algunas aplicaciones, es en términos de la búsqueda de la forma geométrica de los álabes que produzca este coeficiente y los ángulos de flujo requeridos.

Ahora se considera el problema de tomar en cuenta los efectos de fricción, que produce una fuerza de arrastre sobre los álabes. Se define la fuerza de sustentación como la componente de fuerza sobre los álabes normal al vector de velocidad relativa  $V_\infty$ . De igual manera se define la fuerza de arrastre como la componente de la fuerza sobre los álabes paralela a la dirección de  $V_\infty$ . Estas fuerzas están señaladas en la figura 2.3



**Figura 2.3 Fuerza de sustentación y de arrastre**

Del diagrama de fuerzas se deducen las siguientes relaciones

$$R_X = L \cos \beta_\infty + D \sin \beta_\infty$$

$$R_Y = L \sin \beta_\infty - D \cos \beta_\infty$$

Despejando L y D se obtiene

$$L = R_X \cos \beta_\infty + R_Y \sin \beta_\infty \quad (2.12)$$

$$D = R_X \sin \beta_\infty - R_Y \cos \beta_\infty \quad (2.13)$$

Ahora pasemos brevemente a las consideraciones energéticas sobre la cascada. Así

$$h_2 - h_1 = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}$$

De las ecuaciones de termodinámica para flujo incompresible, resulta:

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 T ds + \int_1^2 dP/\rho = w_f + (p_2 - p_1)/\rho,$$

donde  $w_f$  es el trabajo de disipación por unidad de masa del fluido. Entonces:

$$w_f = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}$$

Se ha aplicado esta ecuación en el sistema de coordenadas que se mueven a la velocidad de la cascada  $U$ . Se puede definir la pérdida de presiones totales referida al sistema de coordenadas móviles.

$$\frac{\Delta p_o}{\rho} = w_f = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2}$$

Entonces la diferencia de presiones estáticas es:

$$p_2 - p_1 = \rho \left( \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} \right) - \Delta p_o$$

$$\text{Luego: } p_2 - p_1 = \frac{\rho C_a^2}{2} (tg^2 \beta_2 - tg^2 \beta_1) - \Delta p_o$$

De la ecuación (2.6), la componente de fuerza en la dirección del eje y es:

$$R_y = s(p_2 - p_1) = \frac{\rho s C_a^2}{2} (tg^2 \beta_1 - tg^2 \beta_2) - s \Delta p_o \quad (2.14)$$

La ecuación (2.5), para la componente x permanece sin cambiar.

Reemplazando la ecuación (2.14) y (2.5) en la (2.13) se obtiene:

$$D = s \Delta p_o \cos \beta_\infty$$

Se define el coeficiente de arrastre,

$$C_D = \frac{D}{\rho c V_\infty^2 / 2} = \frac{2D}{\rho c (C_a^2 / \cos^2 \beta_\infty)} = \frac{2\Delta p_o \cos^3 \beta_\infty}{\rho \sigma C_a^2} \quad (2.15)$$

El coeficiente de arrastre se determina en una cascada al interior de túneles de viento especialmente contruidos para ese propósito. La ecuación anterior da una relación entre este coeficiente y la pérdida de presión total determinada en forma experimental.

También se obtiene:

$$L = \frac{R_x}{\cos \beta_\infty} - D \tan \beta_\infty$$

De donde se deduce sin dificultades

$$C_L = \frac{2 \cos \beta_\infty}{\sigma} (\tan \beta_1 - \tan \beta_2) - C_D \tan \beta_\infty \quad (2.16)$$

En casos prácticos el último término de la ecuación (2.16), con el coeficiente de arrastre, es pequeño y generalmente la precisión de los datos disponibles no justifica tomarlo en cuenta. En este caso el coeficiente de sustentación se simplifica a:

$$C_L = \frac{2 \cos \beta_\infty}{\sigma} (\tan \beta_1 - \tan \beta_2) \quad (2.17)$$

### 2.3 Resultados de pruebas de cascada

Una vez determinadas las distribuciones de los ángulos de la corriente que proporcionan el trabajo requerido en la etapa, habrá que transformarlas en distribuciones de ángulos de álabes con los cuales poder establecer la geometría correcta de los álabes. Los requisitos más obvios que deberá cumplir cualquier fila de álabes son, en primer lugar, que desvíe a la corriente el ángulo adecuado ( $\beta_2 - \beta_3$ ), en el caso del rotor y ( $\alpha_1 - \alpha_2$ ) en el estator, y en segundo lugar que lleve a cabo el correspondiente proceso de expansión con un rendimiento óptimo, es decir con una pérdida mínima de presión de parada. La base del diseño se deriva de los resultados obtenidos en ensayos de álabes aislados o de filas de estos en el túnel de viento.

Hay dos modalidades principales para enfocar este procedimiento empírico. En una de ellas se utilizan los resultados de ensayos con álabes aislados y la influencia de los álabes adyacentes de la fila se tiene en cuenta aplicando unos factores empíricos. En la otra, los ensayos se efectúan con filas enteras o cascadas de álabes.

En los ensayos de cascadas se obtiene dos fuentes de información principales: El ángulo que ha de desviarse la corriente para que la pérdida sea mínima y el correspondiente coeficiente de arrastre del perfil, a partir del cual puede estimarse el rendimiento de la cascada. Cuando se emplea velocidades altas, del orden de la del sonido, estos ensayos proporcionan también una valiosa información acerca de los efectos de la compresibilidad.

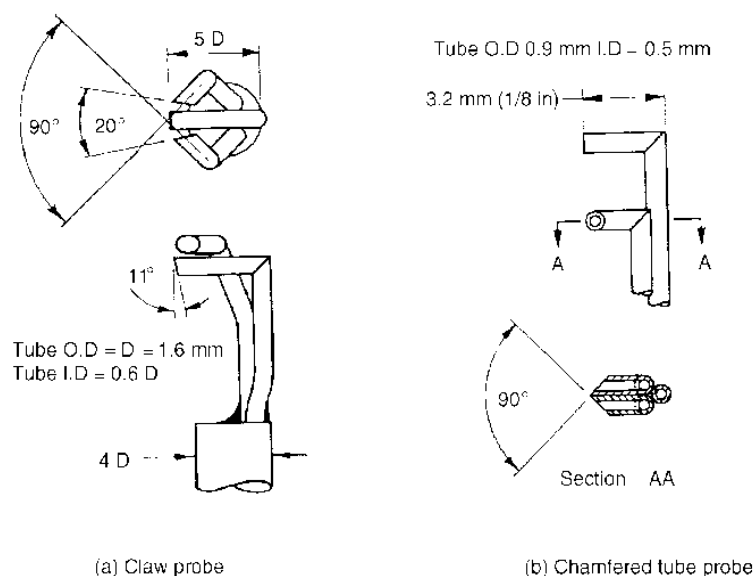
A continuación describiremos un túnel de cascada típico, así como el tipo de resultados que pueden obtenerse de él.

### 2.3.1 Túnel de cascada

Este túnel consiste fundamentalmente en una instalación en la cual puede aspirarse o impulsarse una corriente de aire a través de una serie de álabes dispuestos en forma de cascada recta (figura 2.5). Cuenta con medios para trasladar instrumentos de medida de presión y dirección del flujo a lo largo de dos planos situados antes y después de la cascada, que suelen estar separados entre sí la distancia de una cuerda de álabes. La altura y la longitud de la cascada serán todo lo grande que permita el caudal de aire disponible. Con el fin de tratar de eliminar los efectos de interferencia originados por las paredes del túnel, a menudo se aplica en las paredes una succión de la capa límite, con objeto de evitar la contracción de la corriente de aire al atravesar el túnel.

La cascada va montada sobre una mesa giratoria, de modo que el ángulo formado con el conducto de entrada puede ajustarse a cualquier valor que se desee. Este dispositivo permite efectuar ensayos con la cascada para una gama de ángulos de incidencia de la corriente entrante. En otros túneles más complicados existen medios para modificar la geometría de la fila de álabes. Como la separación entre éstos y su ángulo de colocación, sin necesidad de desmontar la cascada.

Las mediciones de presión y velocidad se realizan mediante los procedimientos habituales de tubos de pitot en L y estáticos. La dirección de la corriente se determina por medio de distintos tipos de instrumento, siendo los más comunes los medidores de giro de Garfio y cilíndricos que se presentan en la figura 2.4. El principio de funcionamiento es igual para ambos y consiste en hacer girar el instrumento alrededor de su eje hasta que las presiones de los dos orificios se equilibran. La bisectriz del ángulo que forman dichos orificios indicará entonces la dirección del aire.



**Figura 2.4 Medidores de presión y velocidad**

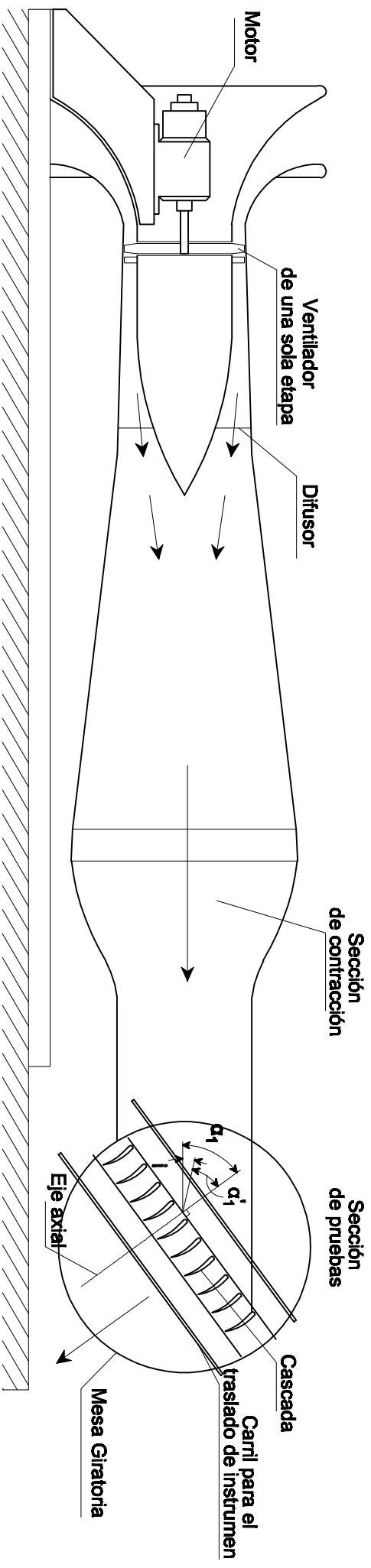


Figura 2.5 Túnel de viento

Para cualquier ensayo en particular, el ángulo de curvatura del álabe  $\theta$ , su cuerda  $c$  y el paso  $s$ , serán fijos, mientras que los ángulos de entrada y salida de los álaves  $\alpha_1'$  y  $\alpha_2'$  vendrán determinados por el ángulo de colocación o de calado  $\lambda$  elegido. El ángulo de incidencia  $i$  se fijará entonces mediante la elección de un ángulo de entrada de la corriente  $\alpha_1$ , adecuado, ya que  $i = \alpha_1 - \alpha_1'$ , lo cual se conseguirá colocando convenientemente la mesa giratoria sobre la que va montada la cascada. Con la cascada en esta posición, los instrumentos de medida de la presión y la dirección se trasladan a lo largo de la fila de álaves, por delante y por detrás de la misma, y los resultados se representan como se muestra en la figura 2.6, en la que se indica la variación de la pérdida de presión de estancamiento y la deflexión de la corriente  $\varepsilon = \alpha_1 - \alpha_2$ , para dos álaves del centro de la cascada.

Como la pérdida dependerá de la magnitud de la velocidad del aire que entra en la cascada, es conveniente expresarla en forma adimensional dividiéndola por la altura dinámica a la entrada, es decir:

$$\text{Pérdida} = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho C_1^2 / 2} = \frac{w}{\rho C_1^2 / 2} \quad (2.18)$$

Lo que facilita la correlación de los resultados de los ensayos que abarcan una gama de valores de  $C_1$ .

Las curvas de la figura 2.6 podrán ahora repetirse para diferentes valores del ángulo de incidencia y el conjunto de los resultados condensarse en la forma mostrada en la figura 2.7 donde se representa la pérdida media  $\bar{w} / \rho C_1^2 / 2$  y la deflexión media  $\varepsilon$  frente a la incidencia para una cascada de forma geométrica fija. En estas curvas se aprecia que la pérdida media se mantiene aproximadamente constante a lo largo de una amplia gama de incidencias, aumentando rápidamente cuando la incidencia toma un valor positivo o negativo grande. Cuando se dan estas incidencias extremas, el flujo de aire a través de los álaves sufre una interrupción similar al desprendimiento en un perfil aerodinámico aislado. La deflexión media aumenta con la incidencia, alcanzando un máximo en la zona de incidencia de desprendimiento positiva. Variando la curvatura, la relación paso/cuerda, etc. se puede obtener resultados como los de la figura 2.7 para una amplia gama de formas geométricas de la cascada.

A partir de la figura 2.7, se pueden construir varias gráficas utilizadas para el diseño de turbomáquinas. Algunas de estas gráficas utilizan el valor de la deflexión más adecuada para la forma particular de la cascada. Dado que la finalidad de este es desviar el aire un ángulo lo mayor posible con una pérdida mínima, la deflexión elegida se hallará en los alrededores del máximo de la curva. No es posible tomar la deflexión máxima debido a las grandes pérdidas por desprendimiento que tendría lugar. Lo que se evita tomando la deflexión correspondiente a una proporción definida de la deflexión de desprendimiento.

La proporción que se ha revelado más satisfactoria es ocho décimos, de manera que la deflexión seleccionada o deflexión nominal sea  $\varepsilon^* = 0.8\varepsilon_g$  donde  $\varepsilon_g$  es la deflexión de

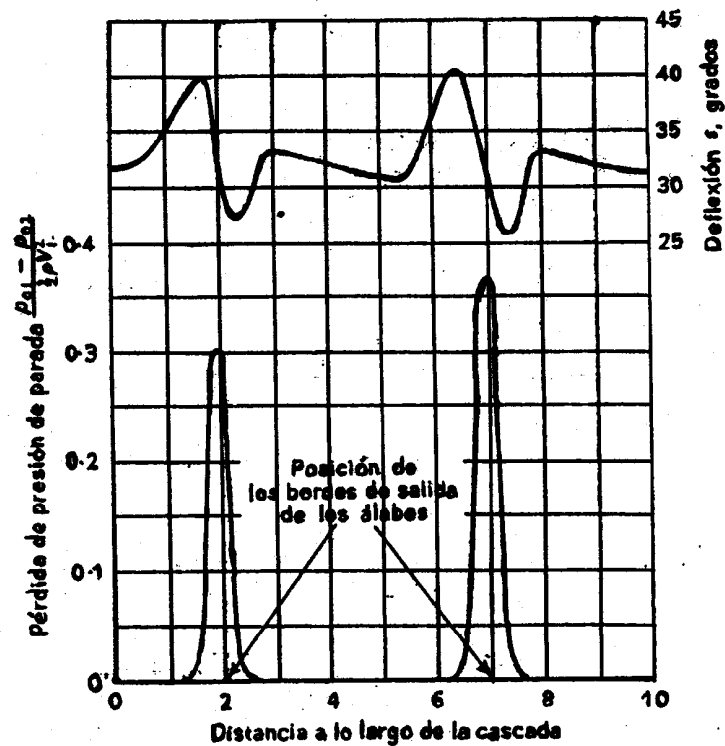


Figura 2.6 Variaciones de la pérdida de presión de estancamiento y de la deflexión en una cascada de incidencia fija [1]

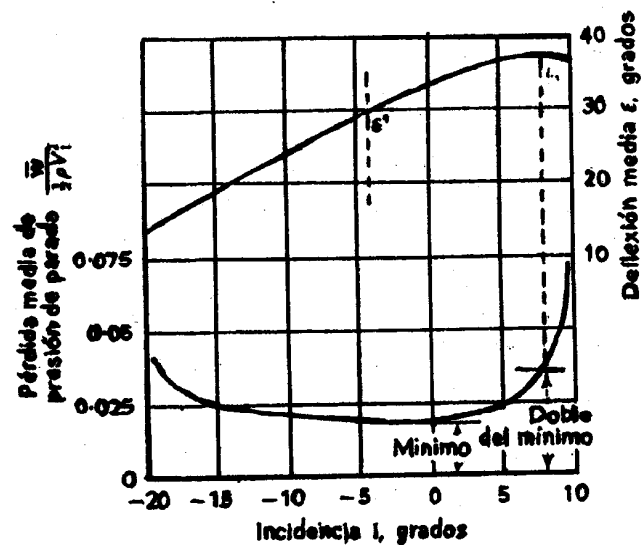


Figura 2.7 Deflexión media y pérdida media de presión de estancamiento en una cascada de forma geométrica fija [1]

desprendimiento. Algunas veces es difícil determinar la posición exacta del desprendimiento, por lo que se normaliza dicha posición admitiendo que el desprendimiento se produce cuando la pérdida ha alcanzado el doble de su valor mínimo.



Analizando los valores de la deflexión nominal  $\varepsilon^*$  determinados en un gran número de ensayos con diferentes formas de cascada, se ha demostrado que, para el margen previsible de incidencias, su valor depende principalmente de la relación paso/cuerda y del ángulo de salida de la corriente  $\alpha_2$ . Su variación con otros factores determinantes de la forma geométrica de la cascada, como el ángulo de curvatura del álabe, resulta pequeña en comparación. En base a ello, se ha podido construir la figura 2.8, donde se representa la variación de la deflexión nominal con el ángulo de salida de la corriente, tomando como parámetro la relación paso/cuerda.

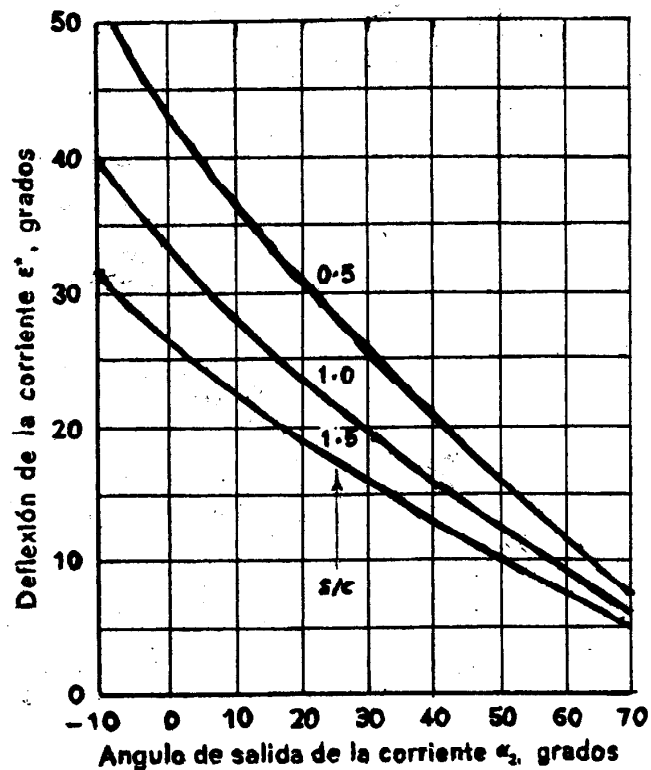


Figura 2.8 Curvas de deflexión de diseño [1]

Una de las gráficas que utiliza el valor de la deflexión nominal para su construcción son las curvas de los coeficientes de sustentación y de arrastre. Así, partiendo de los valores medidos de la pérdida media  $\bar{w}$  y la deflexión media nominal, estas curvas pueden construirse de la siguiente manera:

Las fórmulas para el coeficiente de arrastre y el de sustentación, según las ecuaciones (2.15), (2.16) y teniendo en cuenta la ecuación (2.17), son:

$$C_L = \frac{2 \cos \alpha_m}{\sigma} (tg \alpha_1 - tg \alpha_2) - C_D tg \alpha_m \quad (2.18)$$

$$C_D = \frac{2\Delta p_o \cos^3 \alpha_m}{\rho \sigma C_a^2} = \left(\frac{s}{c}\right) \left(\frac{\bar{w}}{\rho V_1^2 / 2}\right) \left(\frac{\cos^3 \alpha_m}{\cos^2 \alpha_1}\right) \quad (2.19)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}{2}$$

Donde se ha remplazado los ángulos de flujo relativos:  $\beta_\infty, \beta_1$  y  $\beta_2$  por los ángulos de flujo absolutos:  $\alpha_m, \alpha_1$  y  $\alpha_2$  respectivamente, ya que se está considerando una cascada estacionaria ubicada en el interior de un túnel de viento.

Estas fórmulas permiten calcular  $C_L$  y  $C_{DP}$  a partir de los datos dados por las curvas de la figura 2.7. Como  $\alpha_1'$  es conocido por la geometría de la fila de álabes, para cualquier ángulo de incidencia  $i$  pueden determinarse los datos siguientes:

$$\alpha_1 = \alpha_1' + i$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \varepsilon^*$$

$$\alpha_m = \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) \right]$$

Seguidamente, utilizando los valores de  $\bar{w}/\rho V_1^2/2$  que se leen en el gráfico y el valor de  $s/c$  de la cascada, que es conocido, pueden calcularse  $C_L$  y  $C_{DP}$  por las ecuaciones (2.15) y (2.16), y representarlos frente a la incidencia como se muestra en la figura 2.9. Como el valor del término  $C_{DP} \operatorname{tg} \alpha_m$  de la ecuación (2.18) es despreciable, como ya se mencionó anteriormente, suele utilizarse el valor más conveniente de  $C_L$  dado por:

$$C_L = \frac{2 \cos \alpha_m}{\sigma} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

Donde se desprecia el efecto del arrastre del perfil. Mediante esta fórmula se puede representar las curvas de  $C_L$  para condiciones nominales (o de diseño) que corresponde a las curvas de la deflexión de la figura 2.8. Estas curvas, que se representan de nuevo frente al ángulo de salida de la corriente  $\alpha_2$  para valores fijos de la relación paso/cuerda ( $s/c$ ) se dan en la figura 2.10.

Para el estudio de las turbinas nos interesa sólo aquellas curvas en la que se representa el coeficiente de pérdidas en función de los saltos de presión ( $Y$ ) y el ángulo de salida frente a la incidencia. Estas gráficas se pueden obtener en forma similar a lo visto anteriormente y a partir de la figura 2.7. En el diseño de turbinas el análisis de estas curvas nos permitirá obtener resultados importantes que permitirán establecer la forma de los álabes de tal manera de desviar el flujo el ángulo requerido y con el mínimo de pérdidas. En la figura 2.11 se muestra los resultados obtenidos por Ainley (1948) para dos grupos de cascadas de álabes de turbina, impulso y reacción. El término reacción es usado aquí para denotar en sentido cuantitativo, que el fluido acelera a través de la corona de

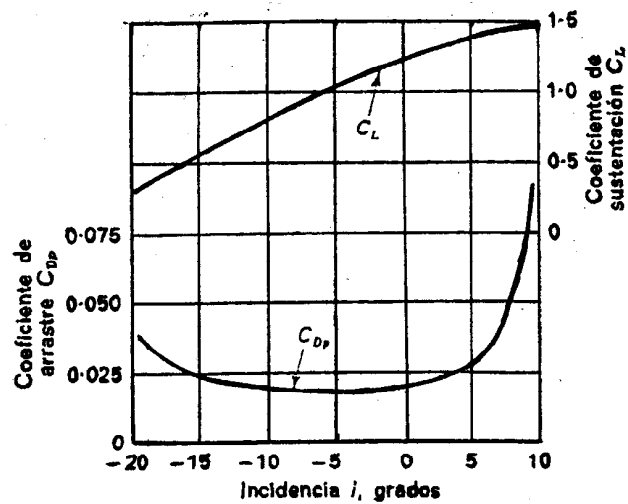


Figura 2.9 Coeficiente de sustentación y de arrastre de una cascada de forma geométrica fija [1] 40

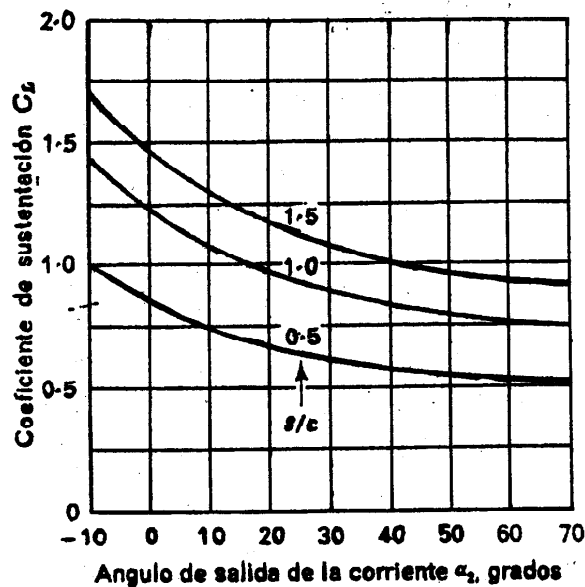
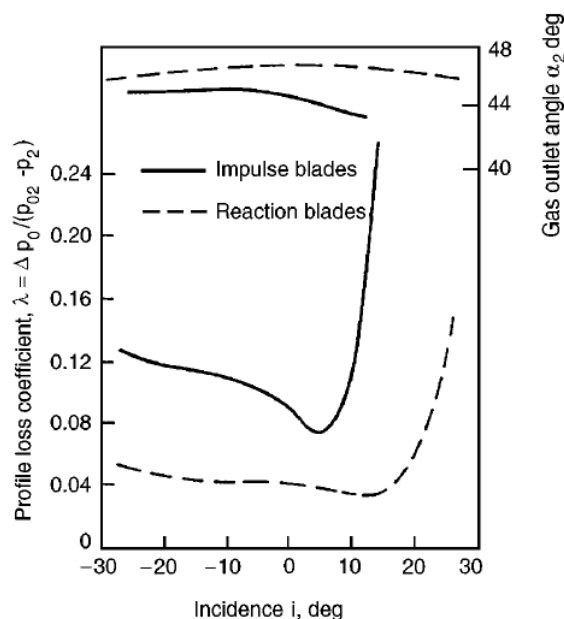


Figura 2.10 Coeficiente de sustentación de diseño [1]

álabes y así experimenta una caída de presión durante su paso. No hay cambio de presión a lo largo de una corona de álabes de impulso.

De dichas figuras se puede empezar a hacer algunas conclusiones, como son:

- Los álabes de reacción tienen para un gran rango, bajas pérdidas respecto a los álabes de impulso, un resultado esperado debido a que la capa límite está sujeto a un gradiente de presión favorable.
- El ángulo de flujo de salida permanece relativamente constante sobre un gran rango de incidencias en contraste con resultados de cascadas del compresor.



**Figura 2.11 Variación de las pérdidas del perfil con el ángulo de incidencia para los álabes de una turbina típica [3]**

En base a los resultados de las pruebas de cascadas, Ainley y Mathieson (1951) desarrollaron correlaciones que permiten predecir el desempeño de turbinas de gas con una tolerancia estimada del 2% en la eficiencia. Estas correlaciones se verán más adelante una vez definido la forma de la geometría exacta de los álabes.

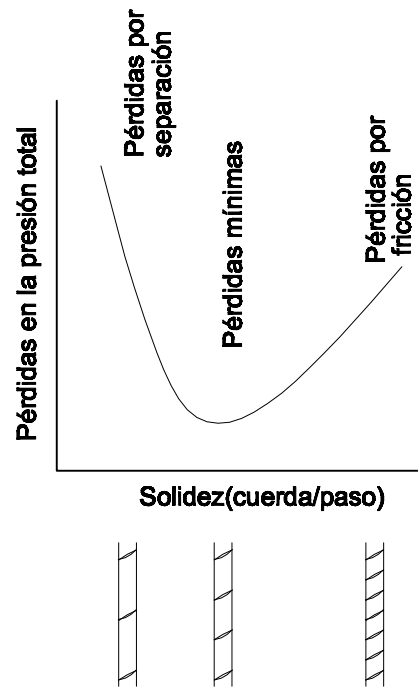
## 2.4 Forma, espaciamento y número de álabes

Una vez entendido los tres apartados anteriores es posible hacer un diseño preliminar de los álabes que incluiría su forma, espaciamento y número. Con este fin en los siguientes apartados se definirán algunos términos adicionales relacionados con el flujo a través de la cascada de una turbina de gas y se mostrará algunas correlaciones, para el cálculo de diferentes variables, obtenidas a partir del análisis de los resultados de ensayos de cascadas.

### 2.4.1 Solidez óptima

Vale la pena reflexionar un poco sobre los efectos de la relación espacio – cuerda en la corona de álabes de una turbina dado que este es un factor que afecta enormemente a la eficiencia. Ahora si el espaciamento entre los álabes se hace pequeño, entonces el fluido tiende a recibir la máxima cantidad de orientación desde los álabes, pero las pérdidas por fricción serían muy grandes. Por otra parte, si los mismos álabes se separaran, las pérdidas por fricción serían pequeñas pero, debido a la pobre guía del fluido, las pérdidas resultantes por la separación del flujo serían altas, tal y como se muestra en la siguiente figura 2.12.

Estas consideraciones permitieron a Zweifel (1945) formular su criterio para la relación espacio – cuerda óptima de los álabes teniendo un gran ángulo de deflexión. Esencialmente



**Figura 2.12 Criterio de Zweifel**

el criterio de Zweifel se simplifica a la proporción ( $\psi t$ ) entre la fuerza tangencial real e ideal del álabes, el cual tiene un cierto valor constante para las pérdidas mínimas. La fuerza o carga tangencial del álabes es obtenido para la distribución de presiones real e ideal en ambas superficies del álabes como se describe a continuación.

La figura 2.13 indica una distribución de presión típica alrededor de un álabes en una cascada de turbina, las curvas P y S corresponden al lado de presión (o cóncavo) y al lado de succión (o convexo), respectivamente. Las presiones son proyectadas paralelamente al frente de la cascada tal que el área encerrada entre las curvas S y P representan carga tangencial del álabes por unidad de extensión.

$$Y = \rho s C_x (C_{y2} + C_{y1}) \quad (2.20)$$

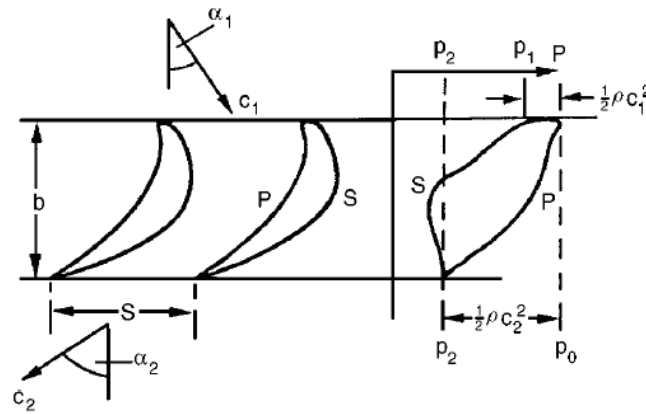
Tomando en cuenta la ecuación (2.10) y despreciando los efectos de la fuerza de arrastre, la expresión anterior puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} C_x &= C_a \\ C_{y2} &= C_a \operatorname{tg} \alpha_1 \\ C_{y1} &= C_a \operatorname{tg} \alpha_2 \end{aligned}$$

$$Y = R_x = \rho s C_a^2 (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2)$$

Donde los ángulos de flujo relativos se han reemplazado por los ángulos de flujo absolutos y debido a que estamos analizando los álabes de una turbina, el signo negativo de la ecuación (2.10) se ha cambiado por positivo.

Es interesante examinar la presión a lo largo de las superficies del álabe. Asumiendo flujo incompresible la presión estática a la entrada es  $p_1 = p_0 - \frac{1}{2}\rho C_1^2$ ; si también las pérdidas son ignoradas la presión estática a la salida es  $p_2 = p_0 - \frac{1}{2}\rho C_2^2$ . La presión en el lado P inicialmente tiene un valor alto ( $p_0$ ), siendo el máximo, obtenido únicamente en el punto de estancamiento, luego cae agudamente a  $p_2$ . En el lado S hay un rápido decremento en la presión estática del borde de ataque, pero puede aumentar de nuevo hacia el borde de salida. Una reducción del espaciamiento  $s$  produce una disminución de la carga tangencial (según la ecuación (2.20)). Recíprocamente, un aumento de  $s$  implica un incremento de la carga con el aumento de la presión en el lado P y una caída en el lado S.



**Figura 2.13 Distribución de presión alrededor de los álabes de una cascada de turbina [3]**

Ahora, mientras que la presión estática nunca puede incrementarse arriba de  $p_0$  en la superficie P; en la superficie S son posibles presiones más bajas. Sin embargo, el incremento de la presión hacia el borde de salida está limitado en la práctica para evitar la separación del flujo. Que implica que el valor de la carga tangencial está restringido.

Para dar una idea de la capacidad de carga del álabe, la distribución de presión real es comparado con una distribución de presión ideal dando una carga máxima  $Y_{id}$  sin riesgo de separación del flujo en la superficie S. Reflexionando, se ve que las condiciones para la carga ideal son establecidas por  $p_0$  actuando sobre la superficie entera P y  $p_2$  actuando sobre la superficie entera S. Con esta distribución de presión ideal (que, no puede, desde luego ser realizado), la carga tangencial por unidad de longitud del álabe es,

$$Y_{id} = \frac{1}{2}\rho C_2^2 b \quad (2.21)$$

y entonces,

$$\psi t = Y/Y_{id} = 2(s/b) \cos^2 \alpha_2 (tg \alpha_1 + tg \alpha_2) \quad (2.22)$$

Zweifel encontró para varios experimentos en cascadas de turbina que para las pérdidas mínimas el valor de  $\psi t$  es aproximadamente 0.8. Sin embargo, de acuerdo a Horlock (1966) el criterio de Zweifel predice la razón espacio - cuerda óptima únicamente para ángulos de salida de 60 a 70 grados. Para otros ángulos de salida no da una estimación precisa de la razón óptima espacio - cuerda.

#### 2.4.2 Incidencia inducida

La circulación alrededor de los álabes que les permite dar sustentación, también causa que las líneas de corriente entrantes volteen al aproximarse a la corona de álabes tal y como se muestra en la figura 2.1.

Dunavant y Edwin (1956) correlacionaron la incidencia inducida,  $\Delta\theta_{id}$  como se muestra en la figura 2.14.

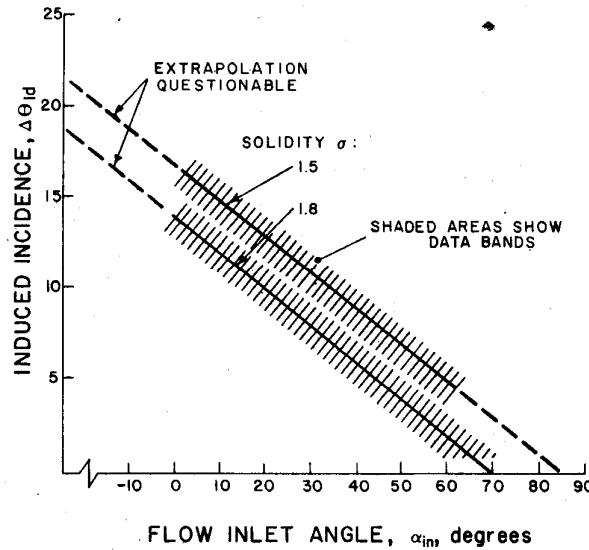


Figura 2.14 Incidencia inducida debido a Dunavant y Edwin 1956 [5]

Una razonable correlación de esos datos está dado por:

$$\Delta\theta_{id} = 14 \left( 1 - \frac{\alpha_1}{70^\circ} \right) + 9 \left( 1.8 - \frac{c}{s} \right) \quad (2.23)$$

La validez de esta expresión fuera del rango de  $\alpha_1$  entre  $0^\circ$  y  $70^\circ$  es incierta. Los álabes de la turbina son a menudo diseñados sin incorporar la incidencia inducida. Esto resulta en una incidencia,  $i_{ac}$ , algo más grande y el ángulo de curvatura más bajo que el calculado si la incidencia fuera tomado en cuenta. Este desprecio de la incidencia inducida, algunas

veces, no es tan opcional como necesario, particularmente para álabes de baja reacción con una pequeña aceleración a través de la corona de álabes. En este caso la adición de curvatura en la región del borde de ataque puede producir una garganta aguas arriba, que es obviamente indeseable y es ciertamente peor que cualquier incidencia positiva.

### 2.4.3 Desviación

Debido a la inercia del fluido, la dirección de salida del flujo se desvía del borde de salida del álabe tal y como se muestra en la figura 2.1. Para tener en cuenta lo anterior se ha definido el ángulo de desviación que es la diferencia entre el ángulo de salida del flujo y el ángulo de salida del álabe.

Entre las alternativas para la correlación de la desviación que han sido publicadas, se escoge aquella dada por Ainley y Mathieson (1951). Esta correlación es normalmente dada gráficamente, con correcciones para números de Mach cercanos a 1 y para el grado de curvatura del álabe de la turbina aguas abajo de la garganta (el radio “ $e$ ” en la figura 2.1). Se ha trasladado esos resultados en tres expresiones analíticas, para diferentes números de Mach. Hay que recalcar que las correlaciones que se presentan a continuación son más bien para el ángulo de salida del flujo que para la desviación.

1. Predicción del ángulo de salida para turbinas de fluido incompresible, y para turbinas de fluido compresible con un número de Mach en la garganta menor a 0.5.

$$|\alpha_2|_{0 < M < 0.5} = \left[ \frac{7}{6} \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{o}{s} \right) - 10^\circ \right\} + 4^\circ \left( \frac{s}{e} \right) \right] \quad (2.24)$$

Donde  $o$  = Diámetro de la garganta (figura 2.1).

$s$  = Paso

$e$  = Radio de curvatura de la superficie convexa del álabe  
aguas debajo de la garganta

$M$  = Número de Mach en la garganta

2. Predicción del ángulo de salida del flujo para turbinas con flujo sónico en la garganta ( $M=1.0$ ):

$$|\alpha_2|_{M=1.0} = \left| \cos^{-1} \left( \frac{o}{s} \right) - \sin^{-1} \left( \frac{o}{s} \right) \left( \frac{s}{e} \right)^{(1.786+4.128(s/e))} \right| \quad (2.25)$$

3. Predicción del ángulo de salida del flujo para número de Mach de la garganta entre 0.5 y 1:

$$|\alpha_2|_{0.5 < M < 1.0} = |\alpha_{sal}|_{0 < M < 0.5} - (2M - 1) |\alpha_{sal}|_{0 < M < 0.5} - |\alpha_{sal}|_{M=1.0} \quad (2.26)$$

### 2.4.4 Selección de la curvatura de la superficie

Los álabes de la turbina usualmente fueron diseñados para ser planos aguas abajo de la garganta, en parte por las limitaciones del método de fabricación normalmente usados para



la manufactura de álabes, y porque los diseñadores sentían que el flujo no sería volteado después de la garganta. Ahora con métodos mejorados y máquinas de control numérico, estas limitaciones ya no existen. Algunos grados de la curvatura de la superficie convexa del álabe (succión) aguas abajo de la garganta es deseable en cascadas de turbinas subsónicas porque, si el flujo permanece fijo a la superficie del álabe, puede continuar acelerando aguas abajo de la garganta. Esta aceleración favorecerá en la preservación de una capa límite laminar, que tiene bajas pérdidas y un coeficiente de transferencia de calor más bajo.

Para un diseño preliminar, relaciones entre el espaciamiento del álabe,  $s$ , y la curvatura de la superficie,  $e$ , de hasta 0.75 son permisibles. Un rango que parece dar formas favorables de los álabes es  $0.25 < (s/e) < 0.625$ .

#### 2.4.5 Bordos de ataque y de salida del álabe

El radio del borde de ataque de los álabes de la turbina es a menudo dada como una relación de la cuerda del álabe,  $c$ , o el espaciamiento,  $s$ . Valores típicamente usuales caen entre  $0.05s$  y  $0.1s$ .

El borde de salida algunas veces se especifica como si tuviera un radio, pero es más usual especificar el espesor del borde de salida,  $t_{ie}$ , a lo largo del plano de salida de la corona de álabes, con los álabes siendo cortados agudamente. Valores típicos están entre  $0.015c$  y  $0.05c$ .

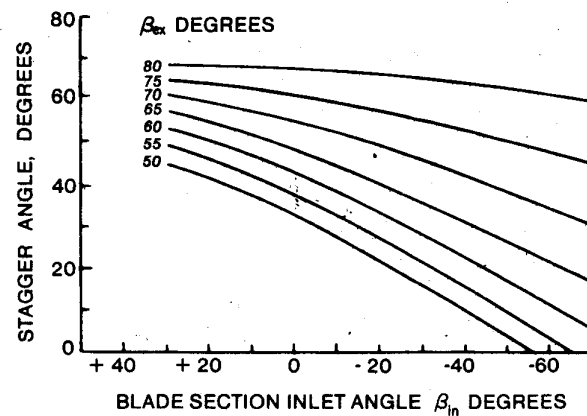
#### 2.4.6 Elección del ángulo de calado

Para definir el “esqueleto” de la configuración de la corona de álabes para un estado radial, es necesario, después de la solidez axial ( $b/s$ ), la incidencia inducida, la curvatura del álabe y el ángulo de salida del flujo, definir una variable adicional. Esta variable es el ángulo de calado  $\lambda$  (ver figura 2.1). Este ángulo se relaciona con la cuerda axial  $b$  y la cuerda del álabe  $c$  por:

$$\cos \lambda = \frac{b}{c} \quad (2.27)$$

El ángulo de calado determina, en gran medida, la forma completa del álabe, y lo más importante, para las turbinas, es de que determina la forma del pasaje a través de los álabes. Uno no tiene la libertad para elegir el ángulo de calado arbitrariamente. Se restringirá la atención a turbinas subsónicas, y cuya garganta (la parte más estrecha del pasaje) puede encontrarse en el borde de salida, y se dice que puede encontrarse porque la ubicación de esta garganta está influenciada por el valor del ángulo de calado. Así, es posible obtener un rango de valores del ángulo de calado para los cuales la garganta se ubicará exactamente en el borde de salida. Ahora, encontrar que valor de este rango sería todavía mejor, aparenta ser más un arte que una ciencia; es decir, mediante el uso de programas de computadoras se puede juzgar la calidad de un pasaje de álabe mediante prueba y error y de esa manera obtener el ángulo de calado más conveniente.

Una guía para obtener el ángulo de calado ha sido publicada por Kacker y Okapuu (1981); sus datos son suministrados en la figura 2.15.



**Figura 2.15 Ángulo de calado debido a Kacker y Okapuu 1981 [5]**

En un programa de computadora para diseñar álabes de turbina, el criterio de calidad sería función de la estabilidad calculada, y las pérdidas totales de la capa límite tal y como se verá más adelante. El tipo de diseño preliminar en el que nosotros estamos concentrándonos hasta aquí será, al menos, tal que obtengamos una garganta en el borde de salida y una reducción estable del área a lo largo del pasaje y, si es posible, curvas graduales de las paredes del pasaje.

#### 2.4.7 Número de álabes

El procedimiento normal es hacer una elección del número de álabes en este punto y cambiarlos después, si se desea, por consideraciones de cálculo de la relación de aspecto (relación altura – cuerda del álabes) o frecuencias de vibración.

La influencia de la relación de aspecto se presta a discusión, pero para el objeto que nos ocupa es suficiente con observar que, aunque no sea crítica, un valor demasiado bajo de  $h/c$  tiende a originar efectos de flujo secundario y de juego de cabeza que abarquen una proporción indebidamente grande de la altura del álabes y aumenten así el valor de las pérdidas secundarias que será definido más adelante. Por otra parte, un valor demasiado alto acrecentará la probabilidad de que surjan problemas de vibraciones; las características vibratorias son difíciles de predecir, dependiendo del amortiguamiento que proporcione el procedimiento de fijación de los álabes al disco de la turbina. Los problemas de vibración que aparecen en los álabes de elevada relación de aspecto se pueden aminorar de forma significativa adoptando llantas en la cabeza de los álabes que impidan las vibraciones de voladizo. A veces se utilizan también llantas para reducir las pérdidas por fugas en la cabeza. Un valor de  $h/c$  comprendido entre 3 y 4 sería ciertamente muy satisfactorio, en tanto que sería imprudente tomar un valor inferior a 2.

Con el valor elegido de la relación de aspecto se puede determinar la cuerda del álabes y por tanto el paso, así como también el número de álabes. También es válido el procedimiento inverso, esto es, como ya se dijo inicialmente, se elige un valor del número

de álabes y luego se determina la relación de aspecto y se hace un análisis de vibración de tal forma de obtener resultados satisfactorios.

## 2.5 Procedimiento de diseño

El trabajo preliminar necesario para el diseño de una corona de álabes incluirá la selección del diagrama de velocidades para el radio en cuestión para el cual deben ser obtenidos los ángulos del flujo. También debe determinarse el número de Mach en la garganta, para que la corona de álabes subsónicos pueda ser aproximada al número de Mach a la salida del álabe. Por otra parte, puede usarse el criterio de Zweifel para encontrar la solidez axial óptima (ecuación (2.22)).

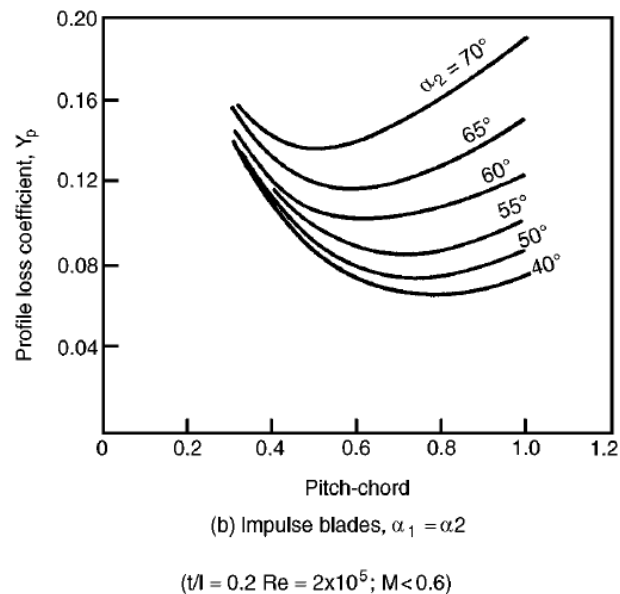
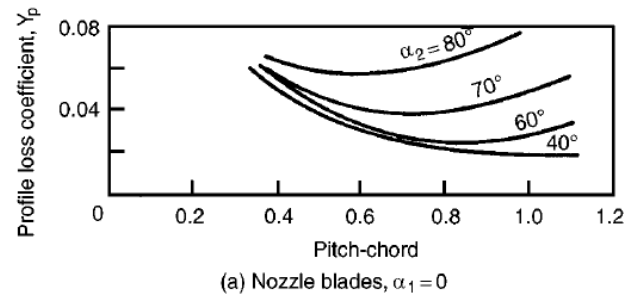
Luego el procedimiento es como sigue.

1. Elegir uno o más valores de la razón paso/curvatura,  $(s/e)$ , el radio del borde de ataque, y el espesor del borde de salida.
2. Calcular la razón de la garganta-paso  $(o/s)$ , de las ecuaciones (2.24), (2.25) o (2.26) para el número de Mach apropiado.
3. Dibujar la forma del pasaje desde la garganta hasta el borde de salida para los valores encontrados en los pasos anteriores.
4. Elegir diferentes valores del ángulo de calado,  $\lambda$ , guiándose de los valores sugeridos por la figura 2.15. Dibujar el borde de ataque usando el radio previamente elegido y un ángulo de entrada del álabe comprendido entre  $\alpha_1$  y  $(\alpha_1 + \Delta\theta_{id})$ , donde  $\alpha_1$  es el ángulo de entrada del fluido y  $\Delta\theta_{id}$  es la incidencia inducida (ecuación (2.23) y figura 2.14).
5. Conectar el borde de ataque a la sección de la garganta con curvas suaves. Dibuja círculos en el pasaje formando tangentes a las superficies convexa y cóncava del álabe. Un pasaje del álabe aceptable será aquel que dé una reducción continua del área de flujo hasta la garganta.

## 2.6 Estimación del comportamiento en el punto de diseño

Como ya se dijo, de las pruebas hechas en el túnel de viento se obtiene dos datos importantes: la pérdida de presión de estancamiento y la deflexión de la corriente para una cascada de forma geométrica fija. Estos datos, a su vez pueden ser presentados de diferentes formas de acuerdo al modo en que resulta más conveniente para una aplicación determinada. A continuación se hará una estimación del comportamiento en el punto de diseño para lo cual se recurrirá al método publicado por Ainley y Mathieson (1951) que permite dar predicciones fiables de la eficacia dentro del 2% sobre un gran rango de diseños, tamaños y condiciones de operación.

Se parte de las gráfica de la figura 2.11 para una incidencia igual a cero y para una variedad de formas geométricas de la cascada identificadas por la relación paso – cuerda y la espesor – cuerda. De estas formas se obtienen curvas que se muestran en la figura 2.16 que corresponden a álabes de tobera ( $\beta_2=0$ ) y de impulso ( $\beta_2 = \beta_3$ ) de perfil convencional (por ejemplo T6) y con una relación espesor/cuerda ( $t/c$ ) de 0.2 y una relación espesor del borde de salida/paso ( $t_e/s$ ) de 0.02.



**Figura 2.16 Coeficiente de pérdidas para álabes de impulso y reacción con incidencia igual a cero ( $t/l=20\%$ ;  $Re=2 \times 10^5$ ;  $M < 0.6$ ) (Adaptado por Ainley y Mathieson 1951) [1]**

En la figura 2.16 y en lo que sigue se utiliza la notación de los álabes del rotor, para poner de manifiesto que se refiere al flujo respecto de cualquier fila de álabes. Cuando se considera la fila de álabes de la tobera,  $\beta_2$  se convierte en  $\alpha_1$  y  $\beta_3$  en  $\alpha_2$ , no habiendo necesidad de duplicar las ecuaciones, que son igualmente válidas para ambas filas.

La pérdida de presión total se divide en tres partes: pérdidas en los perfiles, pérdidas secundarias, pérdidas del juego de cabeza.

- a. Pérdida de perfil: Asociada al crecimiento de la capa límite a lo largo del perfil del álabe (incluyendo la pérdida por separación en condiciones adversas de ángulos de incidencia extremados o de número de Mach altos a la entrada. Este coeficiente de pérdidas de perfil es definido como las pérdidas en la presión de estancamiento al cruzar la corona de álabes o la cascada dividido por la diferencia entre las presiones de estancamiento y estática a la salida del álabe.

$$Y_p = \frac{p_{01} - p_{02}}{p_{02} - p_2} \quad (2.28)$$

La variación de  $Y_p$  para incidencia igual a cero contra  $s/c$  es mostrado en la figura 2.16 para álabes de impulso y de reacción de varios ángulos de salida del flujo. Para otros tipos de álabes intermedios entre álabes de reacción y de impulso el valor de  $Y_p$  está dada por la siguiente fórmula de interpolación. [1]

$$Y_p = \left[ Y_{p(\beta_2=0)} + \left( \frac{\beta_2}{\beta_3} \right)^2 \left[ Y_{p(\beta_2=\beta_3)} - Y_{p(\beta_2=0)} \right] \right] \left( \frac{t/c}{0.2} \right)^{\beta_2/\beta_3} \quad (2.29)$$

Esta ecuación constituye una corrección para una variación del ángulo de entrada con ángulo de salida constante, de manera que  $Y_{p(\beta_2=0)}$  e  $Y_{p(\beta_2=\beta_3)}$  son los valores correspondientes a un álabe de tobera y a uno de tipo impulso cuyo ángulo de salida de la corriente  $\beta_3$  sea el mismo que el del álabe real. En la ecuación (2.28) se incluye también una corrección de  $t/c$  para el caso en que sea distinta de 0.2 ya que una disminución de  $t/c$  entraña una pérdida de perfil más reducido para todos los álabes distintos de los de tobera ( $\beta_2 = 0$ ). El grado de aceleración del flujo en los álabes decrece con el grado de reacción cuando  $\beta_2/\beta_3 \rightarrow 1$  y la influencia del espesor del álabe se hace más marcada a medida que esto sucede. La corrección sólo se considera fiable para  $0.15 < t/c < 0.25$ . Si los álabes actuales tienen un valor de  $t/c$  grande o menor del límite citado, Ainley recomienda que las pérdidas deben ser tomadas como igual a tener un álabe con  $t/c$  de 0.25 o 0.15.

- b. Pérdida del conducto anular y pérdida del flujo secundario: La primera está asociada al crecimiento de la capa límite sobre las paredes interior y exterior del conducto anular. Por otro lado, las pérdidas de flujo secundario son producidas por los flujos secundarios que se originan siempre que la capa límite de una pared se ve desviada un cierto ángulo por una superficie curva adyacente.

Estas dos pérdidas no pueden separarse con facilidad, contabilizándose por un coeficiente de pérdida secundaria  $Y_s$

Los datos de las pérdidas secundarias y del juego de cabeza para  $Y_s$  e  $Y_K$  se han relacionado haciendo uso de los coeficientes de sustentación y de arrastre. Así pues, recordando lo visto en el apartado 2.1, para una cascada de turbina se tiene:

$$C_L = 2(s/c)(tg\beta_2 + tg\beta_3)\cos\beta_m$$

$$C_D = \frac{2\Delta p_o \cos^3 \beta_\infty}{\rho \sigma C_a^2}$$

Donde:

$$\beta_\infty = \arctg((tg\beta_3 - tg\beta_2)/2)$$

Ainley encontró que las pérdidas secundarias pueden ser representadas por:

$$C_{DS} = \lambda \frac{C_L^2}{s/c}$$

Donde  $\lambda$  es un parámetro que es función de la aceleración del flujo a través de la corona de álabes. De la ecuación del coeficiente de arrastre, junto con la definición del coeficiente de pérdida dada en la ecuación (2.28), para flujo incompresible, se obtiene:

$$C_D = Y_s (s/c) (\cos^3 \alpha_m / \cos^2 \alpha_2)$$

Entonces:

$$Y_s = \frac{C_{DS} \cos^2 \alpha_2}{(s/c) \cos^3 \alpha_m} = \lambda \left( \frac{C_L}{s/c} \right)^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^3 \alpha_m} \right) = \lambda Z \quad (2.30)$$

Donde  $Z$  es el coeficiente de carga aerodinámica del álabe. Además, la componente de las pérdidas secundarias  $\lambda$  resulta ser un valor complejo. Se ha sugerido que el flujo secundario y la fricción en las paredes del conducto anular pueden resultar afectados por la relación de aspecto ( $h/c$ ) y/o la razón de radios del conducto anular ( $r_t / r_r$ ). Como se verá, Ainley y Mathieson opinan que ( $r_t / r_r$ ) es el parámetro más importante. (Sostienen que  $h/c$  sólo es importante en tanto haya una variación de  $h$  y no de  $c$ ; además, al igual que la pérdida del perfil,  $Y_s$  se ve considerablemente afectado por el grado de aceleración del flujo en el conducto formado por los álabes. En términos generales, cuanto mayor sea la aceleración, más delgadas y estables serán las capas límites y más pequeño el efecto de una superficie curva adyacente en cuanto a originar flujos secundarios. El grado de aceleración se expresa de forma conveniente mediante el cociente de las superficies normales al flujo a la salida y a la entrada; es decir,  $A_3 \cos \beta_3 / A_2 \cos \beta_2$ , siendo  $A$  la superficie anular. Se ha demostrado que la magnitud  $\lambda$  de la ecuación (2.30) vale aproximadamente,

$$\lambda = f \left\langle \left( \frac{A_3 \cos \beta_3}{A_2 \cos \beta_2} \right)^2 \middle/ \left( 1 - \frac{r_r}{r_t} \right) \right\rangle \quad (2.31)$$

Donde la función  $f$  viene dada por la curva de la figura 2.17

Dunhan y CAME (1970) subsecuentemente encontraron que la ecuación (2.31) no es correcta para álabes de baja relación de aspecto, como en turbinas pequeñas. Ellos modificaron los resultados de Ainley para incluir una mejor correlación. La correlación dada por Dunhan y CAME (1970) es:

$$\lambda = 0.0334 \left( \frac{c}{h} \right) \left( \frac{\cos \beta_3}{\cos \beta_2} \right)$$

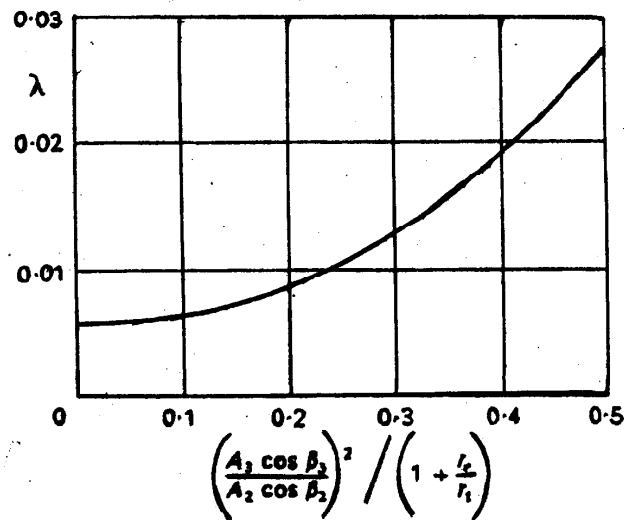


Figura 2.17 Parámetro de pérdida secundaria

Esta ecuación proporciona una significativa mejoría en la predicción de las pérdidas secundarias en comparación al dado por el método de Ainley.

- c. Pérdida del juego de cabeza: Esta pérdida es debida a que en las proximidades de la cabeza del álabe del rotor, la corriente no sigue el camino previsto, no contribuye a la cantidad de trabajo que le corresponde e interfiere con la capa límite de la pared exterior. El coeficiente de pérdidas del juego de cabeza  $Y_K$  depende de la carga del álabe, del tamaño y de la naturaleza del juego de cabeza  $k$

Según Ainley este coeficiente de pérdida está dada por la siguiente expresión:

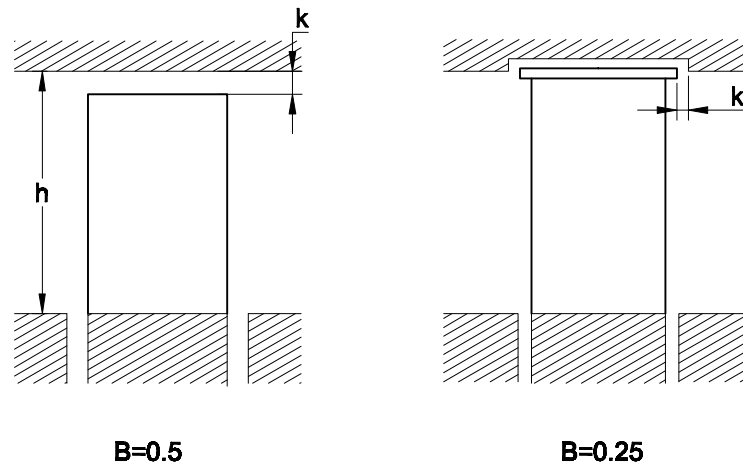
$$Y_K = B \left( \frac{k}{h} \right) Z \quad (2.32)$$

Sin embargo, Dunhan y CAME sugieren que la expresión para  $Y_K$  es susceptible de aplicarse a una gama más extensa de turbinas, si las pérdidas del juego de cabeza, se modifica, tal y como se observa en la siguiente ecuación:

$$Y_K = B \left( \frac{c}{h} \right) \left( \frac{k}{c} \right)^{0.78} Z \quad (2.33)$$

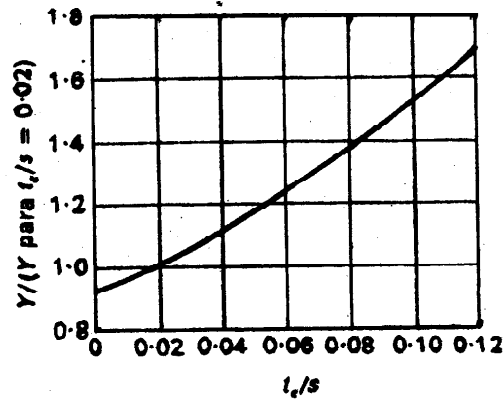
Donde  $k$  es el juego y  $h$  es la altura del álabe. La constante  $B$  vale 0.5 para un juego de cabeza radial y 0.25 para un álabe provisto de llanta y con juego lateral, véase la figura 2.18.

Si la relación espesor del borde de salida/paso es distinta de 0.02, hay que hacer una corrección en el valor de las pérdidas totales ya que el espesor del borde de salida



**Figura 2.18 Juegos de cabeza**

afecta a todas las pérdidas y no sólo a las pérdidas del perfil. La curva de corrección de la figura 2.19 se ha deducido de los resultados de ensayos con turbinas.



**Figura 2.19 Factor de corrección por el espesor del borde de salida**

Para concluir hay que poner de manifiesto que los datos de cascada y las demás expresiones de las pérdidas sólo son estrictamente válidas para diseños cuyos números de Mach sean tales que no se incurra en pérdidas por ondas de choque en los conductos formados por los álabes. Recientemente se ha sugerido que la pérdida suplementaria en que se incurre al diseñar con un número de Mach a la salida de los álabes mayor que la unidad, se puede tener en cuenta ajustando el coeficiente de pérdida del perfil  $Y_p$  de la fila de álabes en cuestión. La corrección viene dada por:

$$Y_p = \left[ Y_p \text{ Según la fórmula (2.29)} \right] \times \left[ 1 + 60(M-1)^2 \right] \quad (2.34)$$



Donde  $M$  puede asumir los valores  $M_{v3}$  o  $M_{c2}$  que son los números de Mach para los álabes del rotor y de la tobera, respectivamente. Existe otra restricción que aún no se ha mencionado acerca de la validez de los datos; el número de Reynolds del flujo debe estar comprendido entre  $1 \times 10^5$  y  $3 \times 10^5$ ; siendo  $Re$  definido en función de la cuerda del álabe, la densidad y velocidad a la salida de una fila de álabes. Si el número de Reynolds medio en una turbina, dado por la media aritmética de  $Re$  en la primera fila de toberas y en la última del rotor (abarcando así la turbina de varios escalonamientos), difiere mucho de  $2 \times 10^5$ , puede hacerse una corrección aproximada del rendimiento isentrópico global mediante la expresión:

$$(1 - \eta_t) = \left( \frac{Re}{2 \times 10^5} \right)^{-0.2} (1 - \eta_t)_{Re=2 \times 10^5} \quad (2.35)$$

# 3

## Esfuerzos mecánicos y térmicos en la turbina<sup>(1)</sup>

Los motores de turbina de gas cuando son comparados con otros tipos de máquinas ofrecen muchas ventajas como son: alta relación potencia-peso, no posee elementos reciprocantes y por tanto su marcha es suave, y tiene un bajo consumo de combustible. Sin embargo, estas máquinas también tienen sus desventajas, siendo la principal, el hecho que en condiciones de operación la mayoría de sus principales componentes están sometidos a altos esfuerzos mecánicos y térmicos. En este capítulo, el propósito es elaborar un procedimiento de cálculo para evaluar los esfuerzos que actúan sobre el disco y los álabes de la turbina, que son los componentes más solicitados durante el funcionamiento normal de la máquina.

### 3.1 Esfuerzos mecánicos y térmicos en el disco

El disco de la turbina trabaja con una gran diferencia de temperatura entre su periferia y su centro y como consecuencia se producen esfuerzos térmicos. A estos esfuerzos térmicos se añaden los producidos por la fuerza centrífuga siendo estos los de mayor valor.

Si bien la misión de los discos de las turbinas es transmitir a los ejes de estos las fuerzas originados por el gas o vapor sobre los álabes, en su cálculo tan sólo se tienen en cuenta las fuerzas debidas a los gradientes térmicos; y las fuerzas de inercia, siendo estos últimos de mayor significancia.

El problema se simplifica por la simetría del disco y sobre todo, por la hipótesis de una distribución uniforme de los esfuerzos en el espesor del mismo, hipótesis justificada a causa de la pequeña magnitud de este espesor y su paulatina variación.

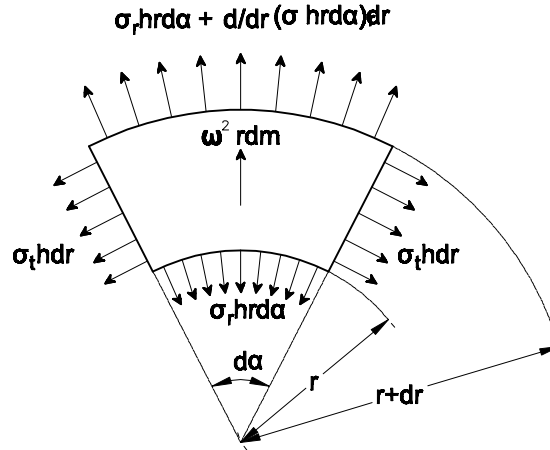
A continuación se formula las ecuaciones básicas que permitirán determinar los esfuerzos centrífugos y térmicos sujetándonos a las limitaciones y simplificaciones que se plantea, tal y como se expresa en los siguientes párrafos.

Se designa con:  $r$  es el radio del disco;  $\sigma_r$  es el esfuerzo radial,  $\sigma_t$  es el esfuerzo

---

(1) El presente capítulo ha sido elaborado tomando como base la información de los siguientes libros: Cohen [1] y M. Lucini [2].

tangencial,  $x$  es el espesor del disco,  $\delta$  es el peso específico,  $\omega$  es la velocidad angular,  $\rho$  es la dilatación radial,  $\varepsilon_r$  es la dilatación unitaria radial y  $\varepsilon_t$  es la dilatación unitaria tangencial. Se estudiará el equilibrio de una porción elemental de disco limitada por las superficies cilíndricas de radios  $r$  y  $r + dr$ , y dos planos meridianos que formen un ángulo  $d\alpha$  tal y como se muestra en la figura 3.1.



**Figura 3.1 Elemento diferencial de disco giratorio**

Sobre dicho sólido actúan esfuerzos radiales, cuya resultante, en sentido también radial, vale la diferencia entre las dos caras cilíndricas, o sea:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r x r d\alpha) dr$$

Los esfuerzos tangenciales dan una componente radial, cuyo valor es:

$$\sigma_t x dr d\alpha$$

Por último, la fuerza centrífuga vendrá medida por el producto de la masa del sólido elemental por  $\omega^2 r$ , es decir:

$$\frac{\delta}{g} x dr r d\alpha \omega^2 r = \frac{\delta}{g} x \omega^2 r^2 dr d\alpha$$

La condición de equilibrio será pues:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r x r d\alpha) dr - \sigma_t x dr d\alpha + \frac{\delta}{g} x \omega^2 r^2 dr d\alpha = 0$$

De donde:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r x r) - \sigma_t x + \frac{\delta}{g} x \omega^2 r^2 = 0 \quad (3.1)$$

Por otra parte, la teoría de la elasticidad suministra las dos relaciones:

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_t \quad (3.2)$$

$$E\varepsilon_t = \sigma_t - \nu\sigma_r \quad (3.3)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad, y  $\nu$  es el módulo de Poisson. La ecuación (3.2) muestra que debido al esfuerzo tangencial el alargamiento unitario radial se ve disminuido ya que considerando que el volumen del elemento diferencial cumple con la ley de Hook, una deformación tangencial, debido a  $\sigma_t$ , obligatoriamente conduce a una reducción en el alargamiento unitario radial debido a  $\sigma_r$ , así mismo, la ecuación (3.3) muestra que debido al esfuerzo radial el alargamiento unitario tangencial también se ve disminuido.

Hasta aquí, sólo se ha considerado las deformaciones y esfuerzos mecánicos debido a cargas centrífugas, pero, aún no se ha dicho nada sobre los esfuerzos y deformaciones debido a cambios en la temperatura. Así pues, si al elemento de volumen diferencial se somete a un incremento de temperatura ; su volumen aumentará, pero debido a la restricción impuesta por el resto del material a su alrededor dicho elemento encontrará oposición a su expansión y como consecuencia los esfuerzos a los que está sometido aumentaran ( $\sigma_t$  y  $\sigma_r$ ) en un valor que será igual al necesario para no permitir este aumento de volumen debido al calentamiento, el cual resulta ser  $E\alpha\Delta T$ . De lo anterior, se deduce que el efecto de los cambios en la temperatura del elemento diferencial se toma en cuenta añadiendo el término  $E\alpha\Delta T$  en el segundo miembro de las ecuaciones (3.2) y (3.3) que toma en cuenta el esfuerzo adicional para una determinada deformación unitaria radial  $\varepsilon_r$  y tangencial  $\varepsilon_t$  respectivamente; así pues, se obtiene

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_t + E\alpha\Delta T \quad (3.4)$$

$$E\varepsilon_t = \sigma_t - \nu\sigma_r + E\alpha\Delta T \quad (3.5)$$

El alargamiento unitario radial, teniendo en cuenta que el primitivo radio  $r$  se transforma en  $r + \rho$ , vendrá dado por

$$\varepsilon_r = \frac{d(r + \rho) - dr}{dr} = \frac{d\rho}{dr}$$

Y el alargamiento unitario tangencial, por

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + \rho) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\rho}{r}$$

Lo que permite dar a las ecuaciones (3.4) y (3.5) la nueva forma

$$E \frac{d\rho}{dr} = \sigma_r - \nu\sigma_t + E\alpha\Delta T \quad (3.6)$$

$$E \frac{\rho}{r} = \sigma_t - \nu\sigma_r + E\alpha\Delta T \quad (3.7)$$

El sistema formado por las ecuaciones (3.1), (3.6) y (3.7) tienen cuatro incógnitas que se deben determinar

$$x, \sigma_r, \sigma_t, \rho$$

Luego falta una condición para determinar sus valores en cada punto. Esta condición puede ser, bien distribución arbitraria o prefijada de las tensiones (igual resistencia por ejemplo), bien el conocimiento del perfil del disco, o sea la  $x$  correspondiente a cada  $r$ . Si además se considera el cálculo de los esfuerzos térmicos, se tiene que determinar la evolución de la temperatura en el disco, la cual se puede aproximar mediante la siguiente ecuación basado en datos experimentales

$$t = t_c + (t_p - t_c) \left( \frac{r}{r_p} \right)^2 \quad (3.8)$$

Donde  $t_c$  es la temperatura en el centro del disco y  $t_p$  la temperatura en la corona del disco y en el pie de los álabes.

La variación del módulo de Young ( $E$ ) y del coeficiente de dilatación lineal ( $\alpha$ ) como función de la temperatura dependerá del material del disco.

Para el cálculo de los esfuerzos se considerará que únicamente el disco trabaja, la presencia de los álabes es manifestado por un incremento en la fuerza centrífuga mediante la adición de un esfuerzo periférico dado en kilogramos por metro lineal, esto es:

$$F_1 = \frac{G}{g} \omega^2 x_1$$

Siendo  $\omega$  la velocidad angular,  $G$  el peso de los álabes por unidad de longitud del disco y  $x_1$  el radio del centro de gravedad de los álabes. Así la tensión inicial correspondiente valdrá:

$$\sigma_r = \frac{Gx_1}{gh} \omega^2 \quad (3.9)$$

Representando por  $h$ , la anchura o espesor axial del disco en la periferia.

### 3.2 Esfuerzos mecánicos y térmicos en los álabes

Los álabes deben ser lo suficientemente fuertes para soportar las diferentes cargas a las que se ve sometidos en condiciones de operación. Hay tres tipos principales de cargas que actúan en el álabe: (i) Los esfuerzos producidos por cargas de tracción centrífugas que se originan durante la rotación a gran velocidad; así, un álabe que pese sólo dos onzas (56.7 gramos) pueden ejercer una carga de más de dos toneladas a máxima velocidad. Estos esfuerzos son los mayores a los que se ve sometido el rotor, en general, pero no son los más importantes ya que se trata de tensiones constantes. (ii) Los esfuerzos producidos por

las cargas flectoras que el gas ejerce a medida que pasa a través de los álabes del rotor. Estos esfuerzos fluctúan a medida que los álabes del rotor pasan por delante de los bordes de salida de las toberas, originando la fatiga del material, el cual, es una falla que se presenta muy a menudo en los álabes. (iii) Los esfuerzos de flexión, producidos por cargas centrífugas y que tienen lugar cuando los centros de gravedad de las secciones transversales del álabe a distintos radios no se encuentran sobre la misma línea radial. Estos esfuerzos en la mayoría de los casos son lo suficientemente pequeños como para poderlos despreciar.

### 3.2.1 Esfuerzos centrífugos

Como ya se mencionó estos esfuerzos llegan a tomar valores muy altos pero no resultan ser tan críticos ya que se trata de un valor constante. El valor máximo de dicho esfuerzo tiene lugar en la raíz del álabe y el cálculo es como sigue.

Sea un elemento diferencial de masa de longitud  $dr$  y de área igual a “ $a$ ”, correspondiente a la distancia  $r$  tal y como se muestra en la figura 3.2.

La fuerza centrífuga que actúa sobre el elemento diferencial es el producto de su masa y la aceleración normal dado por  $\omega^2 r$ . Entonces:

$$dFuerza \text{ centrífuga} = dm\omega^2 r = \rho a dr(\omega^2 r)$$

Donde:

$\rho$  : Es la densidad del material del álabe  
 $\omega$  : Es la velocidad angular

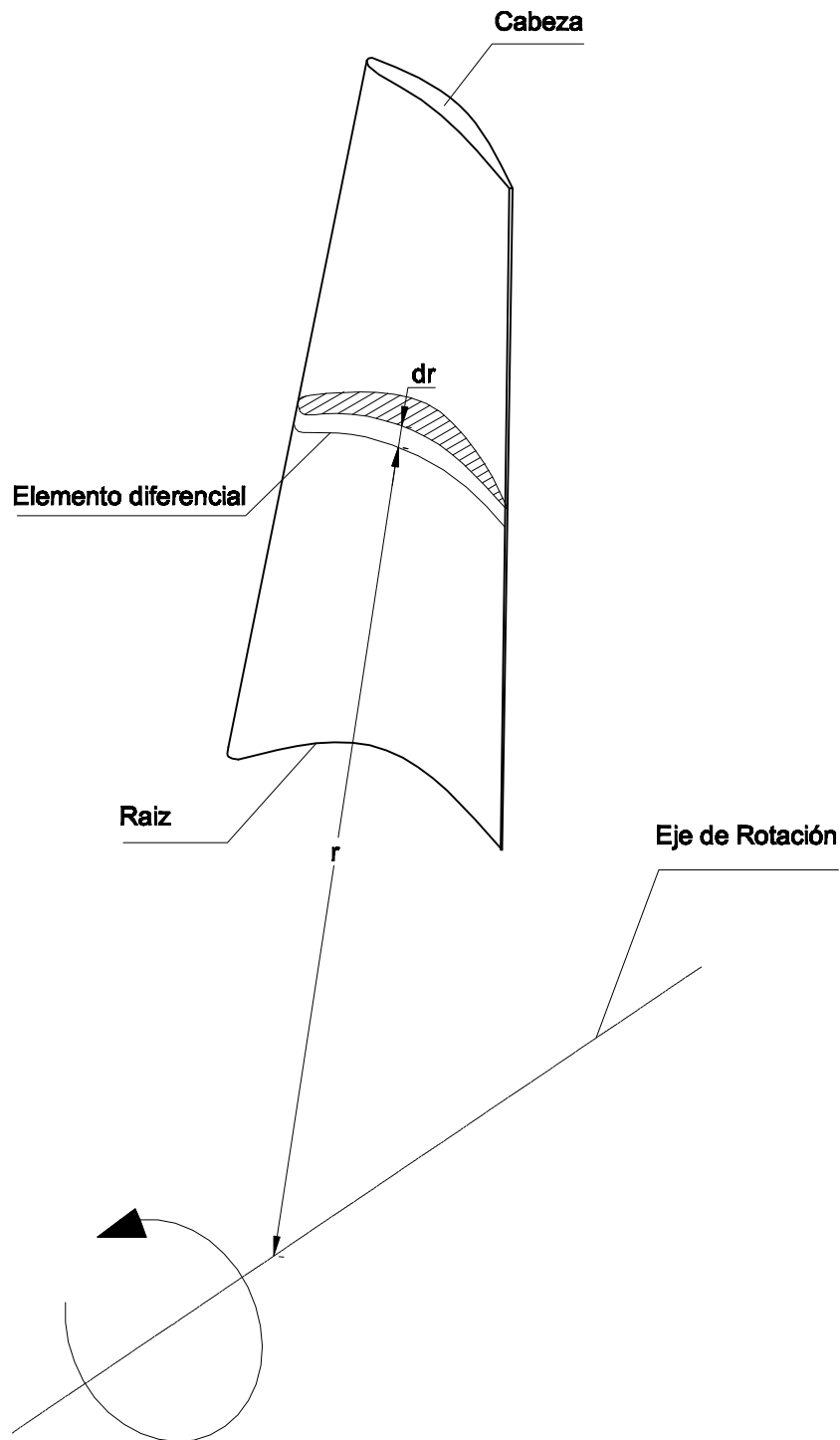
Cada elemento diferencial, a distintos radios  $r$ , estará sometido a esta fuerza centrífuga y cada una de estas fuerzas será transmitida y soportada por la sección de la raíz. Luego:

$$Fuerza \text{ centrífuga total} = \int_{r_r}^{r_c} \rho a r \omega^2 dr$$

Siendo la fuerza centrífuga total, el resultado de sumar la contribución, en la fuerza centrífuga, de cada uno de los elementos diferenciales. Si  $a_r$  es el área de la raíz, el esfuerzo en este punto será:

$$\sigma_r = \frac{1}{a_r} \int_{r_r}^{r_c} \rho a r \omega^2 dr = \frac{\rho \omega^2}{a_r} \int_{r_r}^{r_c} a r dr \quad (3.10)$$

En la práctica, la integración se realiza gráfica o numéricamente, tomando en cuenta la torsión del álabe y la reducción de su sección transversal de la raíz a la cabeza.



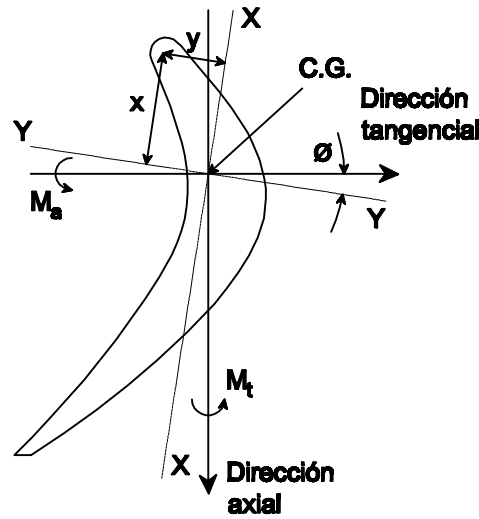
**Figura 3.2 Elemento diferencial del álabe rotativo**

### 3.2.2 Esfuerzos de flexión

La fuerza derivada de la variación del momento angular del gas según la dirección tangencial, que produce el par útil, genera también un momento flector del gas con respecto a la dirección axial, designado en la figura 3.3 por  $M_w$ . Puede haber una variación del momento angular según la dirección axial (es decir cuando  $C_{a3} \neq C_{a2}$ ) y, en

el caso de álabes de reacción, habrá sin duda una fuerza de presión en dicha dirección  $(p_2 - p_3)2\pi r/N_{\text{alabes}}$  por unidad de altura, de manera que también habrá un momento flector del gas  $M_a$  con respecto a la dirección tangencial. Proyectando estos momentos flectores según los ejes principales de la sección transversal del álabe, podrán calcularse las tensiones máximas por el procedimiento apropiado para secciones asimétricas. Un álabe torsionado y con decrecimiento debe dividirse en bandas de altura  $dh$ , calculándose el momento flector a partir de la fuerza media que actúa sobre cada banda.

La tensión flectora del gas será de tracción en los bordes de ataque y de salida y de compresión en el dorso del álabe, su máximo valor suele darse en el borde de ataque o en el de salida de la sección de la raíz, incluso en álabes torsionados y con decrecimiento.



**Figura 3.3 Momentos flectores en el álabe del rotor**

La magnitud de la fuerza tangencial que actúa en el elemento diferencial del álabe de altura  $dr$  y que contribuye al par útil está dada por la siguiente expresión:

$$dF_t = \frac{(C_{t2} + C_{t3})}{N_{\text{alabes}}} d\dot{m}$$

Es importante determinar el momento flector de esta fuerza ( $M_t$ ) con respecto a la raíz del álabe ya que en ese punto se darán los máximos esfuerzos de flexión. Por lo tanto, el valor de  $M_t$  en la raíz será:

$$dM_t = (r - r_r) dF_t = \frac{(r - r_r)(C_{t2} + C_{t3})}{N_{\text{alabes}}} d\dot{m}$$

Y si se considera la contribución de las fuerzas  $dF_t$ , que actúan en todos los elementos diferenciales, al momento flector resultante  $M_t$ , se obtiene:



$$M_t = \int_{r_r}^{r_c} \frac{(r - r_r)(C_{t2} + C_{t3})}{N_{\text{álabe}}} d\dot{m} \quad (3.11)$$

El flujo másico diferencial está dado por:

$$d\dot{m} = 2\pi C_a \rho_2 dr \quad (3.12)$$

Además:

$$C_{t2} = C_a \tan \alpha_2 \quad (3.13)$$

$$C_{t3} = C_a \tan \alpha_3 \quad (3.14)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.12) en la ecuación (3.11), se obtiene:

$$M_t = \frac{2\pi C_a^2}{N_{\text{álabe}}} \int_{r_r}^{r_c} (\tan \alpha_2 + \tan \alpha_3)(r - r_r) r \rho_2 dr \quad (3.15)$$

Al igual que los esfuerzos centrífugos, la integral debe resolverse numéricamente y teniendo en cuenta que los ángulos del flujo y la densidad varían con el radio. Como el momento flector más grande es de lejos  $M_t$  y el eje principal XX no se desvía mucho de la dirección axial (el ángulo  $\emptyset$  es pequeño), se obtiene la siguiente expresión para el esfuerzo de flexión en la raíz del álabe.

$$\sigma_f = \frac{M_t}{I_{xx}} y = \frac{M_t}{(I_{xx}/y)} \quad (3.16)$$

Donde  $I_{xx}/y$  es el módulo de la sección de la raíz, el cual, debe ser el menor valor para poder determinar el esfuerzo máximo. Es conveniente tomar el módulo de la sección como  $z$ , siendo este valor una función del ángulo de curvatura del álabe ( $\approx$  deflexión de la corriente) y de la relación espesor/cuerda.

En la figura 3.4 se incluye una fórmula de  $z$  debido a Ainley y que resulta de utilidad para cálculos aproximados y que se aplicará junto con la ecuación (3.16) al diseño de la turbina. En dicha figura se grafican los valores de  $B$  y  $n$  en función del ángulo de curvatura que se puede aproximar al ángulo de deflexión de la corriente, luego el valor de  $z$  se obtiene a partir de los valores de  $B$ ,  $n$  y la relación espesor/cuerda tal y como se muestra en la formula.

Se ha establecido la forma de determinar los valores de los esfuerzos que resultan ser de gran importancia en condiciones normales de operación de la turbina; así pues, se ha obtenido los esfuerzos centrífugos cuyo valor se mantiene constante y es dado por la ecuación (3.10), también, se ha determinado la expresión para calcular los esfuerzos flectores del gas, ecuación (3.16), que es objeto de una fluctuación periódica cuya

frecuencia depende de la velocidad de giro  $N$  y del número de álabes del rotor  $N_R$  y del estator  $N_N$ .

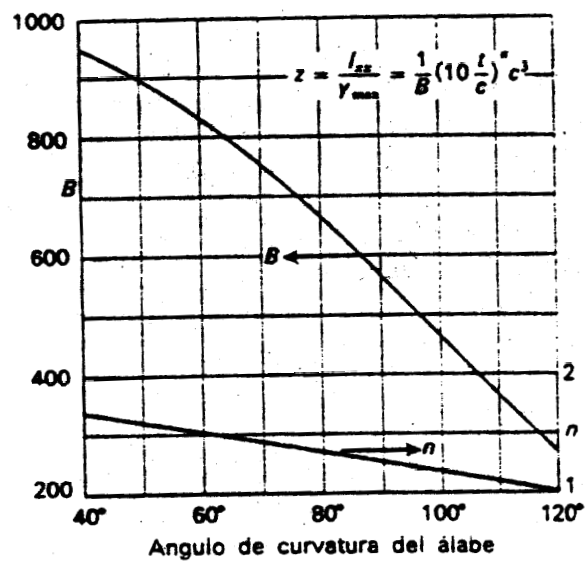


Figura 3.4 Módulo de la sección de la raíz según Ainley

# 4

## Diseño de una turbina de gas de flujo axial: caso estudio turborreactor

En los apartados siguientes se desarrollará el diseño de una turbina de un turborreactor pequeño basándose en la teoría expuesta en los capítulos anteriores.

Antes de iniciar con los cálculos de diseño, es necesario efectuar un estudio exhaustivo del ciclo del sistema del cual formará parte nuestra turbina y de esa manera establecer las condiciones termodinámicas a la entrada y a la salida de acuerdo a las exigencias de potencia o rendimiento óptimo. El análisis de los ciclos ideales y reales de los sistemas de turbinas de gas puede hallarse en los textos de termodinámica, por lo que aquí no nos concentraremos en este tema y supondremos que a partir de dichos cálculos se establecen los siguientes datos para el punto de diseño.

- Aplicación	:	Turborreactor
- Flujo másico $\dot{m}$	:	20 kg/s
- Rendimiento isentrópico $\eta_s$	:	0.9
- Temperatura de estancamiento de entrada $T_{01}$	:	1100 K
- Salto de temperatura total $T_{01} - T_{03}$	:	145 K
- Relación de expansión $P_{01}/P_{03}$	:	1.873
- Presión de estancamiento de entrada $P_{01}$	:	405.2 kPa

Los datos proporcionados corresponden a propiedades termodinámicas totales o de estancamiento ya que en los cálculos de los ciclos reales lo que se maneja son estos valores y no es necesario referirse explícitamente a los términos de la energía cinética. Una ventaja de tipo práctico es que resulta más fácil medir la temperatura de estancamiento de una corriente a gran velocidad que su temperatura estática. Los términos de la energía cinética se especificarán y estudiarán en detalle cuando se analice la cinemática del flujo de gas a través de los álabes de la turbina.

Además de estos datos se puede contar con la velocidad de giro, que viene fijada por el compresor del turborreactor, cuyo diseño es siempre más crítico que el de la turbina debido a que el flujo sufre una desaceleración. También, de la experiencia se sabe que para

velocidades mayores a un cierto valor habrá serios problemas de resistencia. Por lo tanto, se considera los siguientes datos adicionales que permitirá determinar la cinemática del flujo a través de los álabes.

- Velocidad de rotación N : 250 rps
- Velocidad media del álabe : 340 m/s

#### 4.1 Cálculo del número de etapas

El número de etapas a usar estará directamente relacionado con el coeficiente de carga que se ha elegido por consideraciones de máximo desempeño. De acuerdo a las gráficas de las figuras 1.3-1.8 y en base a la experiencia, los valores recomendados de  $\psi$  y  $\phi$  para un escalonamiento de un turborreactor son 2.5 y 0.8 respectivamente. Por otro lado, a partir de los datos, el coeficiente de carga valdrá

$$\psi = \frac{2C_p \Delta T_o}{U^2} = \frac{2 \times 1147 \times 145}{340^2} = 2.8774$$

Como se trata de un valor próximo al recomendado, es posible obtener la potencia requerida con una sola etapa de la turbina. Si el coeficiente de carga calculado hubiera sido mucho mayor, entonces se hubiera necesitado más de un escalonamiento, cada uno con un coeficiente de carga próximo al valor recomendado adecuándose de esta manera a la potencia exigida. Hay que tener en cuenta que si el número de etapas necesarias es grande, entonces es conveniente adoptar etapas de repetición, en las cuales el valor del coeficiente de carga será el mismo.

#### 4.2 Cinemática del flujo a través de los álabes

Para determinar el triángulo de velocidades es importante tener en cuenta las consideraciones hechas para determinar las expresiones del grado de reacción y del coeficiente de carga, tal y como se estableció en el Capítulo 1.

Así pues, se tendrá en cuenta que  $C_{a2} = C_{a3}$  y  $C_1 = C_2$ . Además, para el diseño se considera una velocidad del flujo a la entrada axial y se trabajará con un grado de reacción próximo al 50%, el ángulo del flujo de salida se fijará en  $10^\circ$ .

Así de la ecuación (1.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_3 &= \operatorname{tg} \beta_3 - 1/\phi \\ \operatorname{tg}(10^\circ) &= \operatorname{tg} \beta_3 - 1/0.8 \\ \operatorname{tg} \beta_3 &= 1.4263 \\ \beta_3 &= 55^\circ \end{aligned}$$

Luego el grado de reacción será:

$$\operatorname{tg} \beta_3 = \frac{1}{2\phi} \left( \frac{1}{2} \psi + 2\Lambda \right)$$

$$1.4263 = \frac{1}{2(0.8)} \left( \frac{1}{2}(2.58) + 2\Lambda \right)$$

$$\Lambda = 0.4975$$

Además de la ecuación (1.14) se obtiene:

$$tg\beta_2 = \frac{1}{2\phi} \left( \frac{1}{2}\psi + 2\Lambda \right)$$

$$tg\beta_2 = \frac{1}{2(0.8)} \left( \frac{1}{2}(2.58) - 2(0.4975) \right)$$

$$tg\beta_2 = 0.1843$$

$$\beta_2 = 10.4453^\circ$$

Luego:

$$tg\alpha_2 = \frac{1}{\phi} + tg\beta_2$$

$$tg\alpha_2 = \frac{1}{0.8} + 0.1843$$

$$tg\alpha_2 = 1.4343$$

$$\alpha_2 = 55.1166^\circ$$

Una vez calculados los ángulos del flujo se procederá a determinar las velocidades.

Por la definición del coeficiente de flujo.

$$C_{a2} = u\phi = 340 \times 0.8 = 272 \text{ m/s}$$

$$C_{a3} = C_{a2} = 272 \text{ m/s}$$

Luego, por la geometría del triángulo de velocidades, se obtiene:

$$C_2 = \frac{C_{a2}}{\cos\alpha_2} = \frac{272}{\cos(55.1166^\circ)} = 475.6 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{C_{a2}}{\cos\beta_2} = \frac{272}{\cos(10.4453^\circ)} = 276.5834 \text{ m/s}$$

$$C_3 = \frac{C_{a3}}{\cos\alpha_3} = \frac{272}{\cos(10^\circ)} = 276.2 \text{ m/s}$$

$$V_3 = \frac{C_{a3}}{\cos\beta_3} = \frac{272}{\cos(55^\circ)} = 474.2175 \text{ m/s}$$

También:

$$C_1 = C_3 = 276.2 \text{ m/s}$$

Puede ya dibujarse el diagrama de velocidades tal y como se muestra en la figura 4.1. El siguiente paso es determinar las propiedades termodinámicas, para ello se supondrá que el coeficiente de pérdida del álabe del estator es  $\lambda_N = 0.05$ .

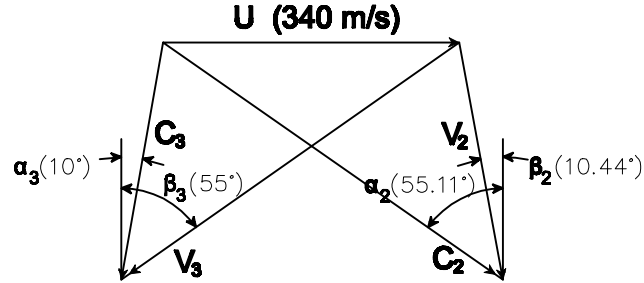


Figura 4.1 Triángulo de velocidades

### 4.3 Cálculo de las propiedades termodinámicas

En base a la figura 4.2, que muestra los procesos que tiene lugar en los conductos de los álabes del estator y del rotor, y tomando como datos de partida las dadas al principio de este capítulo se determinará las propiedades termodinámicas para diferentes puntos a través de las coronas de álabes.

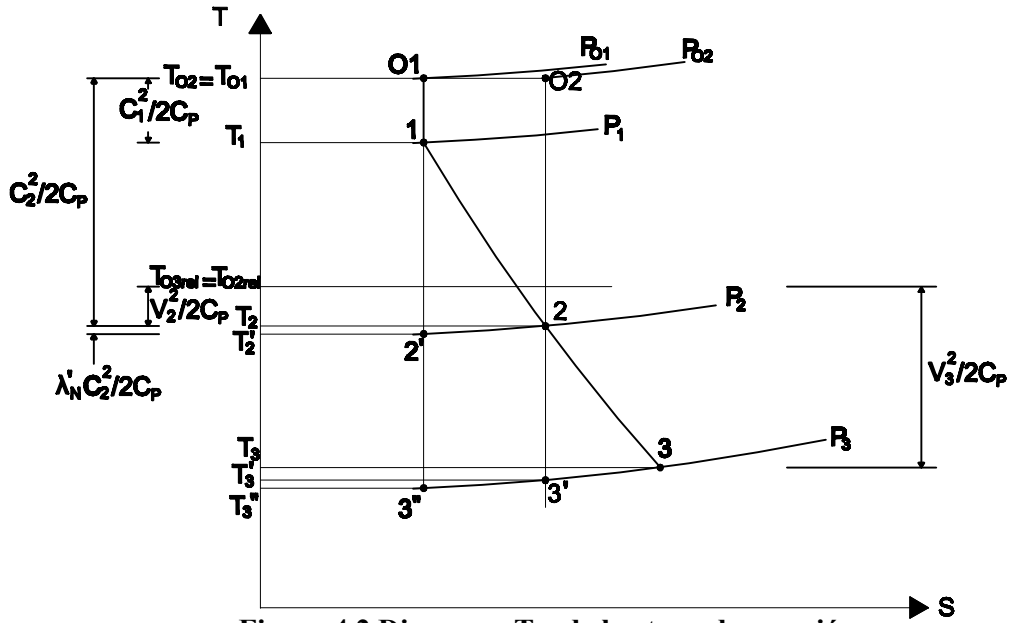


Figura 4.2 Diagrama T-s de la etapa de reacción

La temperatura, presión y densidad en el punto 1 se determinará mediante las siguientes expresiones:

$$T_1 = T_{O1} - \frac{C_1^2}{2C_p}$$

$$p_1 = p_{o1} \left( \frac{T_1}{T_{o1}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1}$$

Así mismo, tomando en cuenta el coeficiente de pérdidas  $\lambda_N$  en el estator, las propiedades en el punto 2 serán:

$$T_{o2} = T_{o1}$$

$$T_2 = T_{o2} - \frac{C_2^2}{2C_p}$$

$$T_2' = T_2 - \lambda_N \frac{C_2^2}{2C_p}$$

$$p_2 = p_{o1} \left( \frac{T_2'}{T_{o1}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$p_{o2} = p_2 \left( \frac{T_{o2}}{T_2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Ya que las propiedades termodinámicas en el punto 3 son conocidas, éstas quedan completamente definidas en los tres puntos de interés. Por otra parte el valor del coeficiente de pérdidas en los álabes del rotor puede determinarse calculando el valor de la expresión  $T_3 - T_3''$ ; entonces.

$$\frac{T_2}{T_3''} = \left( \frac{p_2}{p_3} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

Luego:

$$\lambda_R = \frac{T_3 - T_3''}{V_3^2 / 2C_p}$$

Los resultados a los que se llega se resumen en la tabla 4.1

**Tabla 4.1: Propiedades termodinámicas en diferentes puntos de la turbina**

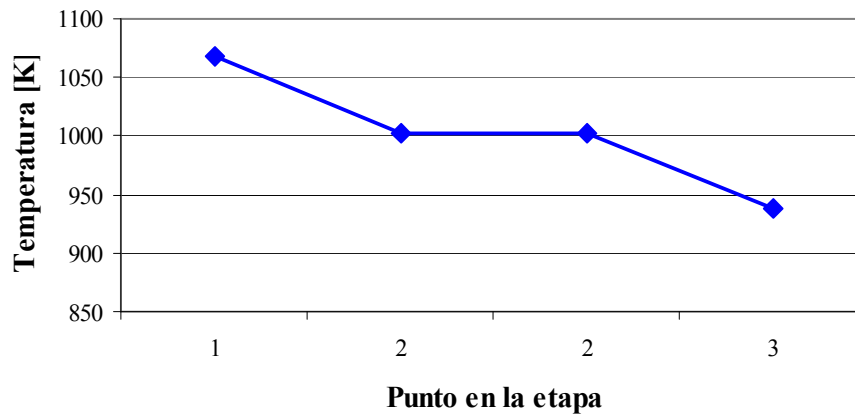
Punto	Temperatura [K]	Presión [kPa]	Densidad [kg/m <sup>3</sup> ]	Temperatura de estancamiento [K]	Presión de estancamiento [kPa]
1	1067.75	359.615	1.1735	1100	405.2
2	1002.45	273.930	0.9521	1100	397.1544
3	937.774	201.1387	0.7473	955	216.3374

Entonces el coeficiente de pérdidas del rotor es:

$$\lambda_R = \frac{T_3 - T_3''}{V_3^2 / 2C_p} = \frac{937.774 - 927.9546}{474.2175^2 / 2 \times 1147} = 0.1$$

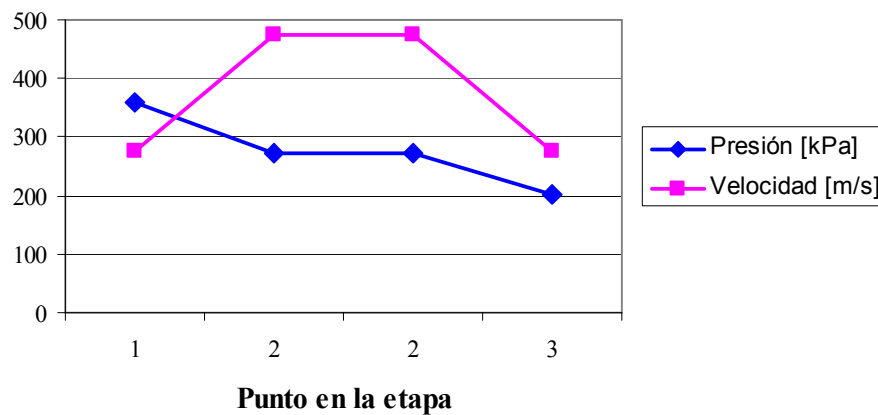
En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran la presión, temperatura y velocidad a lo largo de la etapa.

**Temperatura en diferentes puntos de la turbina**



**Figura 4.3 Distribución de temperatura**

**Presión y velocidad en diferentes puntos de la turbina**



**Figura 4.4 Distribución de presión y velocidad**

#### 4.4 Cálculo de la forma del conducto anular

A continuación se calcula una parte de la geometría del conducto anular basándonos en los resultados anteriores. Así pues, considerando un conducto anular simétrico se obtiene:

$$U_m = 2\pi r_m N$$

De donde:

$$r_m = U_m / 2\pi N$$



Como la superficie anular viene dado por

$$A = 2\pi r_m h = U_m h / N$$

La altura y la razón de radios del conducto anular se obtendrán a partir de

$$h = \frac{AN}{U_m}$$

$$\frac{r_c}{r_r} = \frac{r_m + h/2}{r_m - h/2}$$

Resumiendo y reemplazando datos, se muestra los resultados en la tabla siguiente.

**Tabla 4.2 Dimensiones parciales del conducto anular y de los álabes**

Punto	Área anular [m <sup>2</sup> ]	Altura [cm]	Relación cabeza/raíz
1	0.0617	4.54	1.2341
2	0.0772	5.68	1.3019
3	0.0984	7.23	1.4013

Es importante mencionar que si la etapa no es simétrica,  $U_m$  será diferente en cada uno de ellos y por tanto los cálculos deberán realizarse con sus respectivas velocidades periféricas que serán establecidas por criterios del proyectista y teniendo en cuenta los esfuerzos mecánicos permisibles.

#### 4.5 Cálculo de la distribución de los ángulos de la corriente

Hasta aquí sólo se ha definido el triángulo de velocidades y las propiedades termodinámicas para el diámetro medio. Además se sabe que la velocidad periférica  $U$  aumenta con el radio y como consecuencia los triángulos de velocidades variará desde la raíz hasta la cabeza de los álabes tal y como se señaló en el capítulo 1.

La teoría del torbellino se expuso en el apartado 1.5, donde se dedujo las expresiones necesarias para obtener los ángulos de la corriente del gas para diferentes radios; así aplicando las ecuaciones (1.30) y (1.31) al diseño de la turbina se obtiene los resultados que se muestra en la tabla 4.3.

**Tabla 4.3 Ángulos de la corriente del gas para diferentes radios**

Radio [cm]	$\alpha_1$ [Grados]	$\alpha_2$ [Grados]	$\beta_2$ [Grados]	$\alpha_3$ [Grados]	$\beta_3$ [Grados]
25.2622	-	-	-	8.6695	57.9638
24.5277	-	51.6943	-8.57	8.8435	57.5434
24.0277	0	52.2670	-5.4541	9.0245	57.1152
23.5277	0	52.8486	-2.2415	9.2130	56.6793
23.0277	0	53.4393	1.0535	9.4095	56.2357
22.5277	0	54.0392	4.4140	9.6145	55.7844
22.0277	0	54.6484	7.8209	9.8285	55.3254
21.5277	0	55.2669	11.2531	10.0522	54.8590
21.0277	0	55.8948	14.6891	10.2862	54.3853

Radio [cm]	$\alpha 1$ [Grados]	$\alpha 2$ [Grados]	$\beta 2$ [Grados]	$\alpha 3$ [Grados]	$\beta 3$ [Grados]
20.5277	0	56.5321	18.1070	10.5312	53.9045
20.0277	0	57.1790	21.4859	10.7880	53.4168
19.5277	0	57.8354	24.8063	11.0575	52.9226
19.0277	-	58.5014	28.0514	11.3406	52.4224
18.5277	-	-	-	11.6384	51.9166
18.0277	-	-	-	11.9520	51.4058

La variación de los ángulos de la corriente con el radio se representa en la figura 4.5, en la cual se incluye también los triángulos de velocidades en la raíz y la cabeza dibujados a escala, también se muestra un esbozo de los álabes trazados en base a los ángulos de flujo calculados. Hay que tener en cuenta que estos álabes no son la forma final y más bien son una aproximación, pues los ángulos del flujo no necesariamente coincidirán con los de los álabes.

Es importante comprobar que el grado de reacción es positivo en toda la extensión del álabe ya que los valores negativos implicarían que la expansión en las toberas viniera seguida de una recompresión en el rotor y las pérdidas serían grandes; además, el número de Mach a la entrada de los álabes del rotor no debe de ser en ningún punto superior a unos 0.75.

#### 4.6 Cálculo de la forma de los álabes

En el apartado anterior, se ha visto cómo establecer los ángulos de la corriente para todos los radios. El paso siguiente es transformar estos ángulos de flujo en distribuciones de los ángulos del álabe y de esta manera obtener su geometría para desviar la corriente el ángulo requerido con el mínimo de pérdidas.

Se empieza por especificar el número de álabes del estator y del rotor. Así basándonos en lo señalado en el capítulo 3 consideraremos 70 álabes para el estator y 71 álabes para el rotor. Entonces el paso de los álabes para el radio medio será:

$$s_N = \frac{2\pi r_m}{N_N} = \frac{2 \times \pi \times 21.645}{70} = 1.9428 \text{ cm}$$

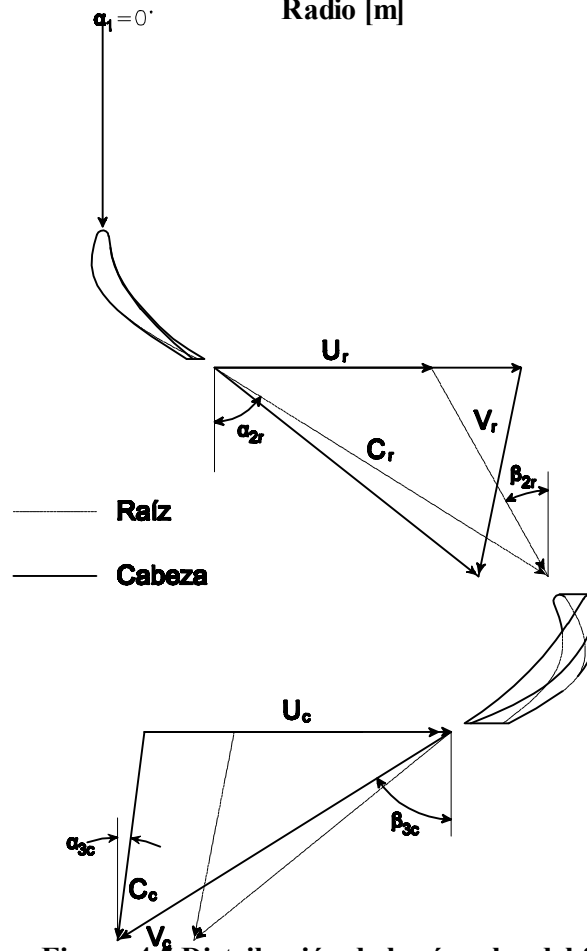
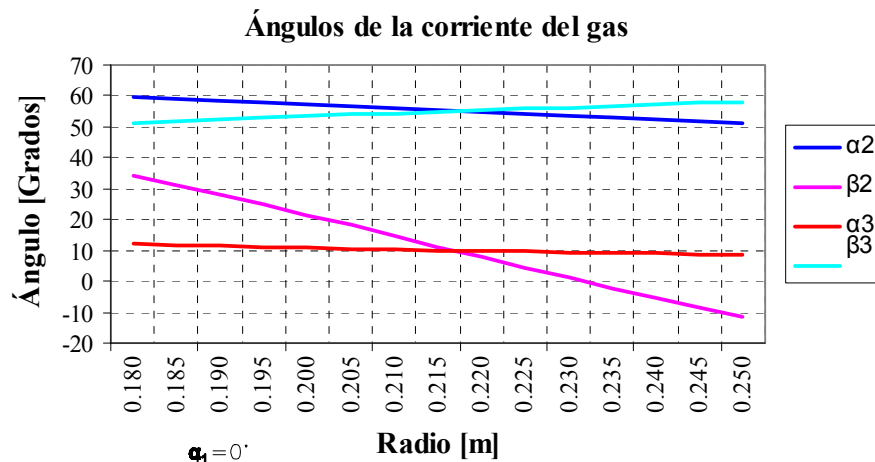
$$s_R = \frac{2\pi r_m}{N_R} = \frac{2 \times \pi \times 21.645}{71} = 1.9155 \text{ cm}$$

A partir del criterio de Zweifel es posible determinar la relación paso/cuerda axial ( $s/b$ ) óptimo para controlar adecuadamente la corriente de gas. Hay que tener en cuenta que el adjetivo óptimo hace referencia a un valor óptimo con respecto a las pérdidas de perfil  $Y_p$  y no con respecto a la pérdida total  $Y$ .

Así pues, haciendo  $\psi t = 1$  en la ecuación (2.22) y teniendo en cuenta que los ángulos del flujo varían desde la raíz hasta la cabeza de los álabes, se han obtenido los resultados que se resumen en la tabla 4.4 para los dos puntos mencionados incluyendo el punto medio.

**Tabla 4.4 Valores de la cuerda axial y de la relación paso-cuerda óptima para diferentes radios**

Alabe	Punto	Radio [cm]	(s/b)	s [cm]	b [cm]
Estator	Cabeza	24.1450	0.9173	1.9428	2.1170
	Medio	21.6459	0.9399	1.9428	2.0660
	Raíz	19.1450	0.9958	1.9428	1.9500
Rotor	Cabeza	24.6450	1.2391	1.9155	1.5450
	Medio	21.6450	0.9459	1.9155	2.0240
	Raíz	18.6450	0.7096	1.9155	2.6980



**Figura 4.5 Distribución de los ángulos del flujo**

La otra variable que permitirá definir la geometría de los álabes es el diámetro de la garganta, el cual, como ya se ha visto en el apartado 2.4.3 está relacionado con el ángulo de salida que ha de desviarse el flujo y con la curvatura que presente el álabe cerca del borde de salida. Así considerando la relación paso-curvatura igual a  $s/e = 0.333$  se obtiene los resultados que se muestran en la tabla 4.5.

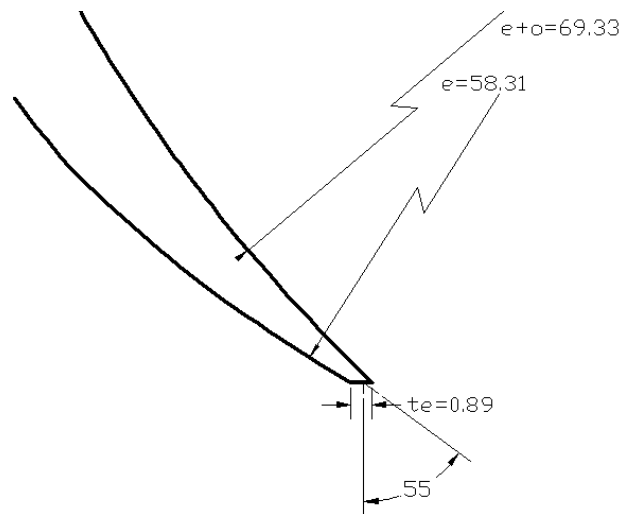
**Tabla 4.5: Valores del diámetro de la garganta (O) y del número de Mach para diferentes radios**

Alabe	Punto	Radio [cm]	$\alpha_2/\beta_3$	$C2/V3$ [m/s]	$T2/T3$ [K]	$M2/M3$	(s/e)	O [cm]
Estator	Cabeza	24.1450	52	441.8012	984.6737	0.8416	0.333	1.16
	Medio	21.6450	55	474.2175	1002.4017	0.7657	0.333	1.10
	Raíz	19.1450	58.2286	516.5882	1015.9183	0.70866	0.333	1.00
Rotor	Cabeza	24.6450	57.6388	508.17	938.0042	0.8483	0.333	1.001
	Medio	21.6450	55	474.2175	937.774	0.7917	0.333	1.071
	Raíz	18.6450	52.0327	442.1242	937.4263	0.7382	0.333	1.150

Por lo tanto, en el borde de salida; la superficie de succión estará definida por el radio de curvatura  $e$  y la superficie de presión por el radio de curvatura  $e + o$ .

Para establecer completamente el borde de salida del álabe es necesario determinar su espesor ( $te$ ), para lo cual según lo dicho en el apartado 2.4.5, se tomará un valor de la relación espesor-cuerda igual a 0.035.

En la figura 4.6 y 4.7 se ha dibujado una ampliación del borde de salida de los álabes del estator y del rotor en base a los resultados obtenidos.

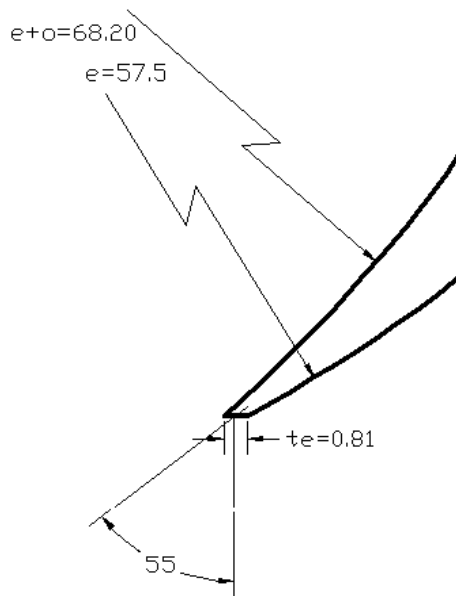


**Figura 4.6 Borde de salida del álabe del estator para el punto medio**

El siguiente paso, para determinar completamente la geometría del álabe, es definir el valor de la incidencia es decir la diferencia entre el ángulo del flujo a la entrada y el ángulo del álabe también a la entrada, el cual, ha sido definido en el capítulo 2. En nuestro caso se toma una incidencia igual a  $0^\circ$  que quiere decir que el ángulo del álabe a la entrada será

igual al ángulo del flujo. Además, la forma del borde de ataque es redondeada cuyo radio se estableció en el apartado 2.4.5. Y por tanto se tomará  $r_b = 0.05s$ .

Por último la forma final del álabe dependerá del ángulo de calado  $\lambda$  que, según lo establecido en el apartado 2.5.6 su valor queda a criterio del proyectista basado en su experiencia y a los resultados que obtenga de la pruebas aerodinámicas con el objetivo de obtener una buena distribución de la velocidad del gas con la menor pérdida posible.



**Figura 4.7 Borde de salida del álabe del rotor para el punto medio**

En el Anexo 1 se muestran los planos acotados de las diferentes partes del expansor, cuyas dimensiones han sido determinadas mediante los cálculos realizados en este capítulo.

El siguiente paso del proceso de diseño es la comprobación de que el diseño de la etapa es compatible con un nivel permisible de los esfuerzos en los álbes del rotor. Con este objetivo en los siguientes párrafos se evaluarán los esfuerzos centrífugos, de flexión y térmicos que actúan en el disco y en los álbes del rotor.

#### 4.7 Cálculo de los esfuerzos centrífugos en los álbes

El cálculo de estos esfuerzos fue presentado en el apartado 3.2. La ecuación (3.10) permite determinar los esfuerzos centrífugos en la raíz del álabe, para lo cual, es necesario conocer la variación de su sección transversal con el radio. Con este fin en la tabla 4.6 se muestran los valores del área de la sección transversal, así como los valores del producto área x radio para diferentes radios comprendidos entre la raíz y la cabeza del álabe.

Luego, evaluando la integral de la ecuación (3.10) por el método de Simpson se obtiene:

$$\int_{r_r}^{r_c} ar dr = \frac{0.005}{3} \times 52.4392 \times 10^{-5} = 8.7398 \times 10^{-7}$$

**Tabla 4.6 Área de la sección transversal del álabe para diferentes radios**

Radio [m]	Área [m <sup>2</sup> ]	Área x Radio [m <sup>3</sup> ]
0.1864	1.0116x10 <sup>-4</sup>	1.8861x10 <sup>-5</sup>
0.1914	0.9334x10 <sup>-4</sup>	1.787x10 <sup>-5</sup>
0.1964	0.8590x10 <sup>-4</sup>	1.6875x10 <sup>-5</sup>
0.2014	0.7903x10 <sup>-4</sup>	1.5920x10 <sup>-5</sup>
0.2064	0.7292x10 <sup>-4</sup>	1.5054x10 <sup>-5</sup>
0.2114	0.6764x10 <sup>-4</sup>	1.4302x10 <sup>-5</sup>
0.2164	0.6340x10 <sup>-4</sup>	1.3723x10 <sup>-5</sup>
0.2214	0.6018x10 <sup>-4</sup>	1.3326x10 <sup>-5</sup>
0.2264	0.5779x10 <sup>-4</sup>	1.3086x10 <sup>-5</sup>
0.2314	0.5602x10 <sup>-4</sup>	1.2965x10 <sup>-5</sup>
0.2364	0.5470x10 <sup>-4</sup>	1.2933x10 <sup>-5</sup>
0.2414	0.5354x10 <sup>-4</sup>	1.2927x10 <sup>-5</sup>
0.2464	0.5248x10 <sup>-4</sup>	1.2933x10 <sup>-5</sup>

Entonces, el esfuerzo centrífugo en la raíz del álabe será:

$$\sigma_r = \frac{\rho \omega^2}{a_r} \int_{r_r}^{r_c} ar dr = \left( \frac{8220 \times (1570.8)^2}{101.16 \times 10^{-6}} \right) \times (0.087398 \times 10^{-5}) = 175.2304 \text{ MPa}$$

#### 4.8 Cálculo de los esfuerzos de flexión en los álaves

El cálculo de estos esfuerzos también fue presentado en el apartado 3.2. Así la ecuación (3.15) permite determinar los esfuerzos flexionantes en la raíz del álabe, para lo cual, es necesario conocer la variación radial de la densidad y de los ángulos absolutos del flujo a la entrada y a la salida del rotor. Con este fin en la tabla 4.7 se muestran los valores de los ángulos absolutos del flujo y de la densidad, así como, el valor de la expresión  $(tg\alpha_2 + tg\alpha_3)(r - r_r)r\rho_2$  para diferentes radios comprendidos entre la raíz y la cabeza del álabe.

**Tabla 4.7 Variación de los ángulos absolutos y de la densidad con el radio**

Radio [m]	Ángulo absoluto a la entrada $\alpha_2$ [Grados]	Ángulo absoluto a la salida $\alpha_3$ [Grados]	Densidad a la salida $\rho_2$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$(tg\alpha_2 + tg\alpha_3)(r - r_r)r\rho_2$ [kg/m]
0.18645	59.1771	11.6384	0.8815	0.0000
0.19145	58.5015	11.3406	0.8943	0.0016
0.19645	57.8354	11.0575	0.9063	0.0032
0.20145	57.1790	10.7880	0.9174	0.0048
0.20645	56.5322	10.5312	0.9278	0.0065
0.21145	55.8948	10.2862	0.9376	0.0082
0.21645	55.2669	10.0522	0.9467	0.0099
0.22145	54.6484	9.8285	0.9553	0.0117
0.22645	54.0393	9.6145	0.9634	0.0134
0.23145	53.4394	9.4095	0.9710	0.0152
0.23645	52.8487	9.2130	0.9781	0.0171
0.24145	52.2670	9.0245	0.9848	0.0189
0.24645	51.6944	8.8435	0.9912	0.0207

Luego, evaluando la integral de la ecuación (3.15) por el método de Simpson se obtiene:

$$\int_{r_r}^{r_c} (tg\alpha_2 + tg\alpha_3)(r - r_r)r\rho_2 dr = 0.00060337 \text{ kg/m}^3$$

Entonces, el momento de flexión resultante en la raíz del álabe será:

$$M_t = \frac{2\pi C_a^2}{N_R} \int_{r_r}^{r_c} (tg\alpha_2 + tg\alpha_3)(r - r_r)r\rho_2 dr = \frac{2 \times 3.1416 \times 272^2}{71} \times 6.0337 \times 10^{-4} = 4 \text{ Nm}$$

Además, de la figura 3.4, el menor valor del módulo de la sección es:

$$z_{raiz} = \frac{(10(t/c))^n}{B} c^3$$

Donde:

$$B = 750$$

$$t/c = 0.2$$

$$n = 1.3$$

$$c = 0.0227 \text{ m}$$

$$\text{Entonces: } z_{raiz} = \frac{(10(0.2))^{1.3}}{750} \times 0.0227^3 = 3.8401 \times 10^{-8} \text{ m}^3$$

Por lo tanto, el máximo esfuerzo de flexión en la raíz del álabe será:

$$\sigma_f = \frac{M_t}{z} = \frac{4}{3.8401 \times 10^{-8}} = 104.1625 \text{ MPa}$$

Como ya se mencionó anteriormente este esfuerzo de flexión varía entre un valor mínimo y un valor máximo a medida que los álabes del rotor pasan por delante de los álabes del estator siendo el valor del esfuerzo obtenido anteriormente el valor máximo de dicho esfuerzo fluctuante.

#### 4.9 Cálculos de los esfuerzos centrífugos y térmicos en el disco

Las expresiones que permiten evaluar los esfuerzos en el disco fueron presentados en el apartado 3.1. Así, las ecuaciones (3.1), (3.6) y (3.7), permiten determinar los esfuerzos centrífugos y térmicos en todos los puntos del disco, sin embargo, el principal problema

radica en su solución, la cual no puede realizarse en forma cerrada, recurriéndose a métodos numéricos.

Es sumamente cómodo para los cálculos combinar las tres ecuaciones mencionadas en una sola en la que aparezcan sólo los términos de interés como son  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$ . Así pues, combinando y reordenando las ecuaciones, se obtiene:

$$d\sigma_r = -\sigma_r \left( \frac{dx}{x} + \frac{dr}{r} \right) + \sigma_t \frac{dr}{r} - \frac{\delta w^2 r dr}{g}$$

$$d\sigma_t = \sigma_t \left( \frac{dE}{E} - \frac{dr}{r} \right) + \sigma_r \left( \frac{dr}{r} - \nu \frac{dE}{E} - \nu \frac{dx}{x} \right) - Ed(\alpha \Delta T) - \frac{\nu \delta w^2 r^2}{g} \frac{dr}{r}$$

En nuestro caso se aplica el método de diferencias finitas para resolver estas ecuaciones y determinar los esfuerzos radiales y tangenciales. Según este método numérico todos los diferenciales se reemplazan por sus correspondientes diferencias finitas obteniéndose un sistema de ecuaciones que deben ser solucionadas simultáneamente. Además, para dar solución a dichas ecuaciones se requiere que se establezcan unas condiciones límites o de contorno que en nuestro caso serían los valores de los esfuerzos en la periferia y en el interior del disco. Así pues, el esfuerzo en la periferia sería igual al esfuerzo centrífugo originado por los álabes, sometidos a grandes velocidades de giro, y cuyo valor ya ha sido establecido en el apartado 4.7. Así mismo, el esfuerzo en el interior será igual al esfuerzo radial cuyo valor será igual al esfuerzo tangencial.

En el caso del análisis de los esfuerzos térmicos es necesario conocer la distribución de temperaturas en el disco y la variación de las propiedades del material con la temperatura como ya se mencionó en el Capítulo 3. Con este fin en la tabla 4.8 se han tabulado los valores de las propiedades que han sido utilizados en la solución y en la figura 4.8 se muestra la distribución de la temperatura calculada según la ecuación (3.8) y en base a los datos proporcionados en la tabla 4.9. Además, es importante mencionar que el material utilizado en las turbinas de los turborreactores es una aleación Cromo-Niquel, lo cual es el resultado de una investigación metalúrgica incesante.

**Tabla 4.8 Propiedades del material para diferentes temperaturas**

Temperatura [K]	Módulo de elasticidad E [Pa]	Coefficiente de dilatación térmica $\alpha$ [K <sup>-1</sup> ]	Esfuerzo de fluencia $\sigma_f$ [Pa]
300	2.027x10 <sup>11</sup>	1.242x10 <sup>-5</sup>	10.35x10 <sup>8</sup>
470	1.946x10 <sup>11</sup>	1.332x10 <sup>-5</sup>	9.69x10 <sup>8</sup>
620	1.865x10 <sup>11</sup>	1.395x10 <sup>-5</sup>	10.02x10 <sup>8</sup>
770	1.783x10 <sup>11</sup>	1.440x10 <sup>-5</sup>	9.32x10 <sup>8</sup>
920	1.706x10 <sup>11</sup>	1.476x10 <sup>-5</sup>	8.90x10 <sup>8</sup>

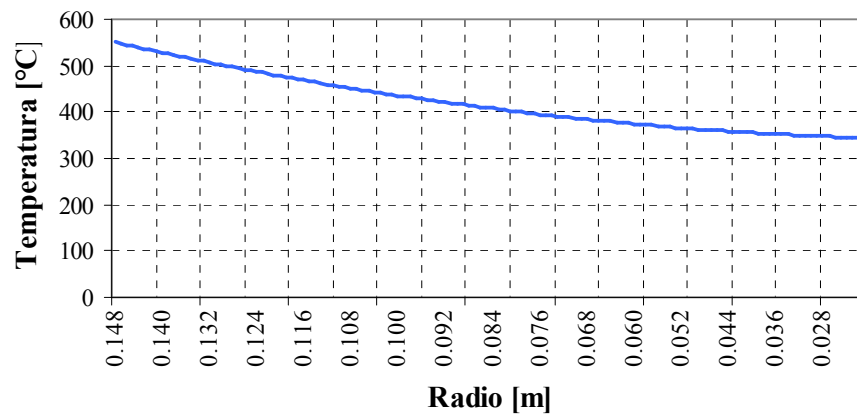
El estudio completo del método de diferencias finitas puede encontrarse en textos especializados de cálculo numérico, por lo que aquí no se tratará este punto y solo nos limitaremos en presentar la solución en forma gráfica, figuras 4.9-4.12 determinados en base a las restricciones y cargas que se muestran en la tabla 4.9.



**Tabla 4.9 Cargas centrífugas y térmicas en el disco**

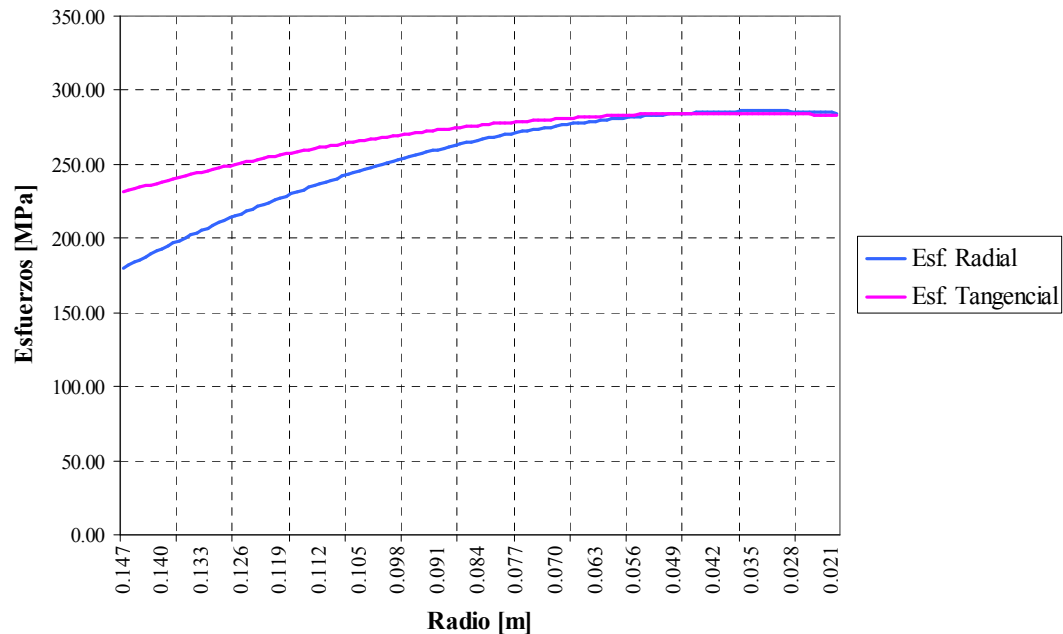
Cargas centrífugas	
Velocidad angular [rad/s]	1570.8
Esfuerzo radial en la periferia [MPa]	178
Cargas térmicas	
Temperatura ambiente [°C]	27
Temperatura en la periferia [°C]	550
Temperatura en el interior [°C]	340

### Distribución de temperatura

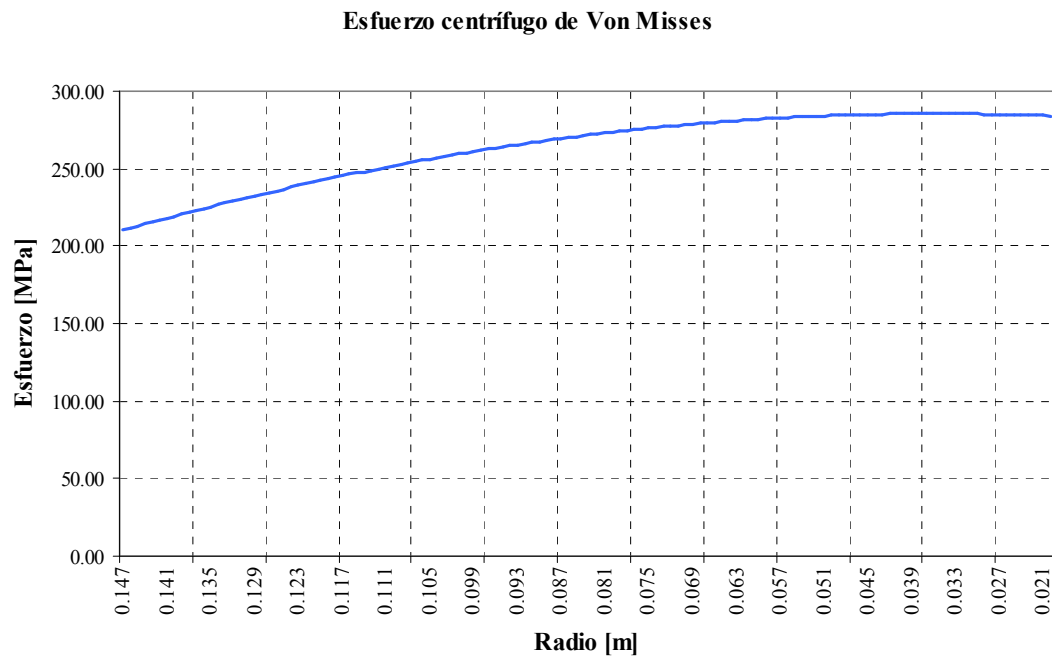


**Figura 4.8 Distribución de temperaturas en el disco**

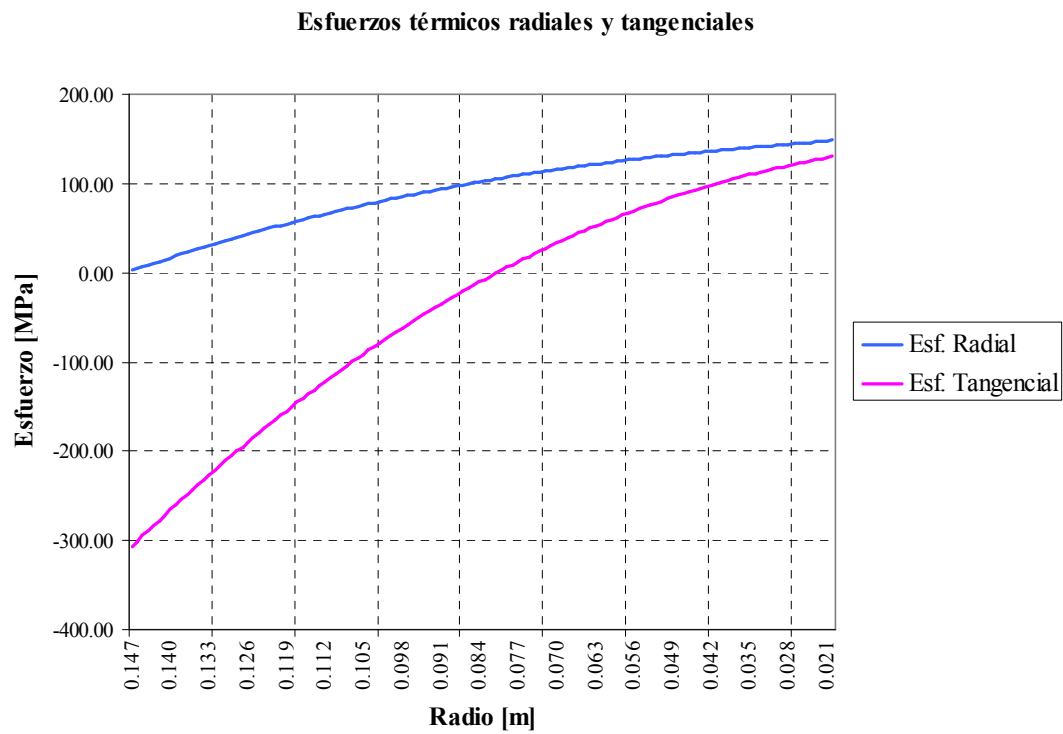
### Esfuerzos centrífugos radiales y tangenciales



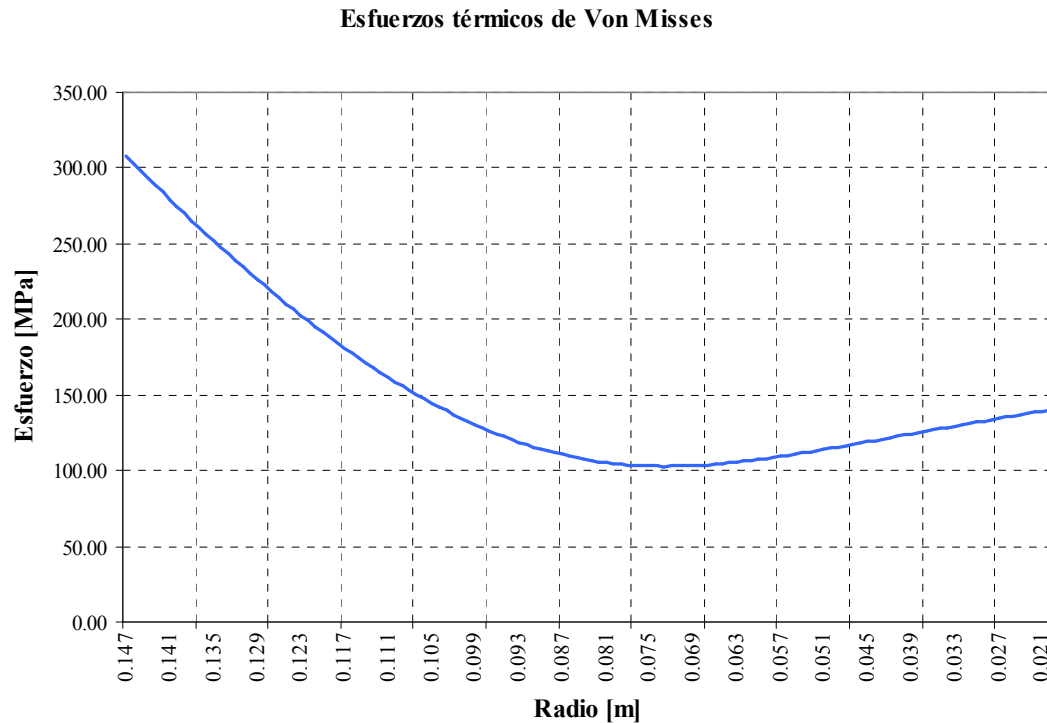
**Figura 4.9 Esfuerzos centrífugos radiales y tangenciales en el disco**



**Figura 4.10 Esfuerzos centrífugos en el disco**



**Figura 4.11 Esfuerzos térmicos radiales y tangenciales en el disco**



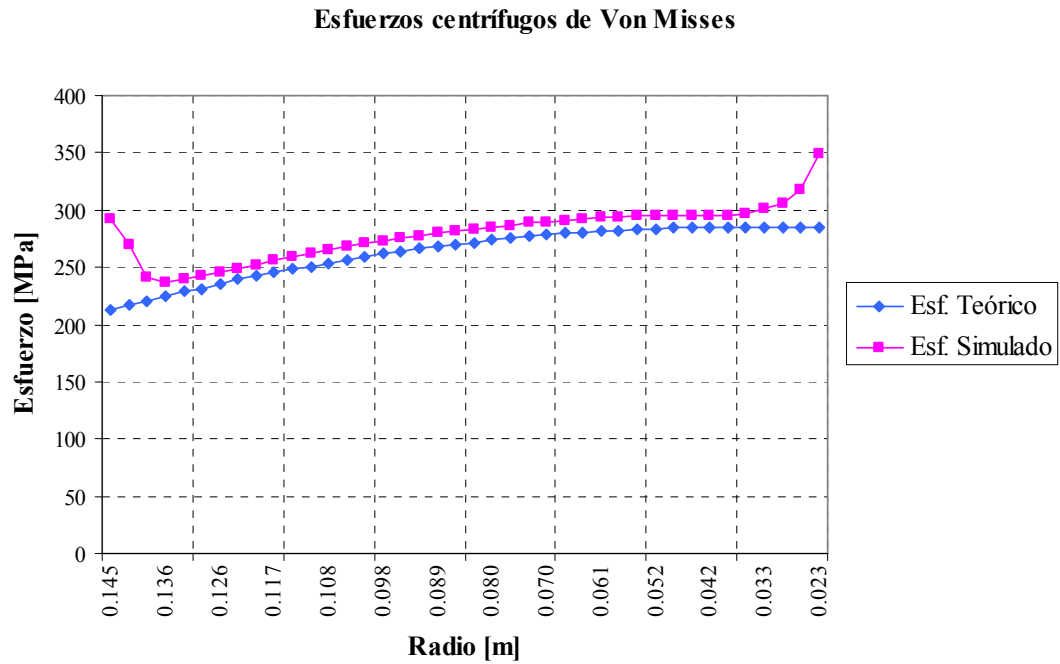
**Figura 4.12: Esfuerzo térmico en el disco**

En las figuras 4.13 y 4.14 se comparan los esfuerzos calculados en este capítulo y en el capítulo 6 por medio del programa *COSMOSWorks*. De dichas gráficas se observa que no hay una grande diferencia entre los esfuerzos en la mayor parte del disco, sin embargo, en aquellas zonas en las que hay un cambio de sección el programa muestra unos picos como consecuencia de la concentración de esfuerzos presentes en dichas zonas. Hay que tener en cuenta que estos gráficos sólo muestran el valor de los esfuerzos para una parte del disco y no el de los álabes. No obstante, los resultados presentados en el capítulo 6 abarcan la totalidad del disco incluyendo los álabes.

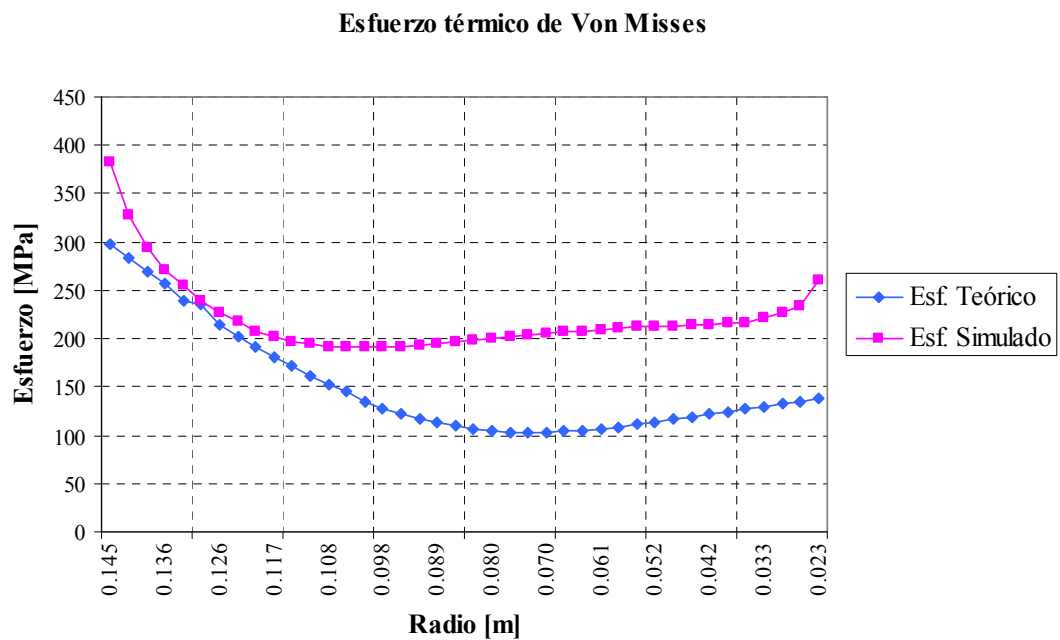
De los resultados obtenidos en este capítulo y en el capítulo 6, se comprueba que el valor de los esfuerzos máximos centrífugos y térmicos, así como, de los coeficientes de seguridad son los que se muestran en la tabla 4.10.

**Tabla 4.10: Esfuerzos centrífugos y térmicos máximos**

<b>Punto del esfuerzo centrífugo máximo: Entre el eje y el disco</b>	
Esf. centrífugo máximo [MPa]	473
C.S. mínimo	2.2
<b>Punto del esfuerzo térmico máximo: Borde de salida del álabe</b>	
Esf. térmico máximo [MPa]	897
C.S. mínimo	1.1



**Figura 4.13 Esfuerzos centrífugos**



**Figura 4.14 Esfuerzos térmicos**

#### 4.9 Cálculo del comportamiento de la etapa

El último paso del proceso de diseño la etapa es la comprobación de que la forma del álabe puede dar como resultado los valores inicialmente supuestos del coeficiente de pérdida de

la tobera y del rotor, así como, el rendimiento de la etapa. De no ser así, se repetirán los cálculos del diseño con valores más probables del coeficiente de pérdida y del rendimiento.

La estimación de los coeficientes de pérdidas, tanto en el estator como en el rotor, fue discutido en el apartado 2.6 del capítulo 2, donde se expuso el método debido a Ainley y Mathieson que permite predecir la eficacia de la turbina dentro del 2%. Así pues, en los siguientes párrafos se determinará los coeficientes de pérdidas basándonos en este método y en el capítulo 5 se determinará en base a las simulaciones de flujo realizadas mediante el programa Cosmosflow.

#### 4.9.1 Cálculo del coeficiente de pérdidas del estator $(Y)_N$

Como ya se mencionó en el apartado 2.6 las pérdidas totales se dividen en dos grupos, así pues, tenemos: pérdidas del perfil y pérdidas secundarias. Por tanto, para determinar las pérdidas totales, se empieza por encontrar el coeficiente de pérdidas de perfil para el diámetro medio. El valor de este coeficiente, según lo discutido en el apartado 2.6, es

$$Y_p = \left[ Y_{p(\alpha_1=0)} + \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^2 \left[ Y_{p(\alpha_1=\alpha_2)} - Y_{p(\alpha_1=0)} \right] \right] \left( \frac{t/c}{0.2} \right)^{\alpha_1/\alpha_2}$$

Además, de la geometría del álabe y para la sección media se tiene:

$$\begin{aligned} (s/c) &= \frac{1.9420}{2.5221} = 0.77 \\ (t/c) &= 0.16 \\ (t_e/s) &= 0.05 \\ \alpha_1 &= 0^\circ \\ \alpha_2 &= 55.1166^\circ \end{aligned}$$

También, el valor de  $Y_{p(\alpha_1=0)}$ , según la figura 2.16, es:

$$Y_{p(\alpha_1=0)} \approx 0.023$$

$$\text{Entonces: } Y_p = \left[ 0.023 + 0 \right] \left( \frac{0.16}{0.2} \right)^{0^\circ/55.116^\circ} = 0.023$$

Por otra parte, el coeficiente de pérdidas secundarias es:

$$Y_s + Y_k = \left[ \lambda + B \left( \frac{k}{h} \right) \right] \left( \frac{C_L}{s/c} \right)^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^3 \alpha_m} \right)$$

Donde  $C_L$  es el coeficiente de sustentación y cuyo valor es:

$$C_L = 2(s/c)(\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) \cos \alpha_m$$

$$C_L = 2 \times (0.77) \times (tg(0^\circ) + tg(55.1166^\circ)) \cos \alpha_m$$

Además:

$$\alpha_m = \arctg((tg \alpha_2 - tg \alpha_1) / 2)$$

$$\alpha_m = \arctg((tg(55.1166^\circ) - tg(0^\circ)) / 2) = 35.6472^\circ$$

$$\text{Luego: } C_L = 2 \times (0.77) \times (tg(0^\circ) + tg(55.1166^\circ)) \times \cos(35.6472) = 1.8$$

También, considerando que las pérdidas por fugas en los álabes sea muy pequeño, entonces podrá suponerse que  $B$  sea nulo. Y finalmente, el valor de  $\lambda$ , según lo visto en el apartado 2.6 es:

$$\lambda = f \left\langle \left( \frac{A_2 \cos \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1} \right)^2 \middle/ \left( 1 - \frac{r_r}{r_t} \right) \right\rangle$$

Donde la función  $f$  viene dado por la curva de la figura 2.16.

Además:

$$A_2 = 2\pi r_m h_2 = 2 \times 3.1416 \times 0.2164 \times 0.0568 = 0.0772 \text{ m}^2$$

$$A_1 = 2\pi r_m h_1 = 2 \times 3.1416 \times 0.2164 \times 0.0454 = 0.0617 \text{ m}^2$$

$$(r_r / r_t) = \frac{0.1914}{0.2414} = 0.8$$

$$\text{Entonces: } \left( \frac{A_2 \cos \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1} \right)^2 \middle/ \left( 1 - \frac{r_r}{r_t} \right) = \left( \frac{0.0772 \times \cos(55.1166^\circ)}{0.0617 \cos(0^\circ)} \right)^2 \middle/ (1 + 0.8) = 0.2846$$

$$\text{Luego: } \lambda = 0.013$$

Por lo tanto, el coeficiente de pérdidas secundarias será:  $Y_s + Y_k = 0.0433$

El coeficiente de pérdida total del estator resulta ser:

$$Y = Y_p + (Y_s + Y_k) = 0.023 + 0.0433 = 0.0663$$

Dado que la relación espesor del borde de salida/paso ( $t_e/s$ ) es distinta de 0.02, se hará una corrección de los coeficientes de pérdidas calculados anteriormente. Así pues, de la figura 2.18 se obtiene:

$$\frac{Y}{Y \left( \text{Para } t_e / s = 0.02 \right)} = 1.1$$

Entonces:  $(Y)_N = 1.1 \times 0.0663 = 0.073$

#### 4.9.1 Cálculo del coeficiente de pérdidas del rotor $(Y)_R$

El valor del coeficiente de pérdida del perfil es:

$$Y_P = \left[ Y_{p(\beta_2=0)} + \left( \frac{\beta_2}{\beta_3} \right)^2 [Y_{p(\beta_2=\beta_3)} - Y_{p(\beta_2=0)}] \right] \left( \frac{t/c}{0.2} \right)^{\beta_2/\beta_3}$$

Además, de la geometría del álabe y para la sección media se tiene:

$$\begin{aligned} (s/c) &= \frac{1.9145}{2.2716} = 0.8428 \\ (t/c) &= 0.2 \\ (t_e/s) &= 0.0425 \\ \beta_2 &= 10.4455^\circ \\ \beta_3 &= 55^\circ \end{aligned}$$

También, los valores de  $Y_{p(\beta_2=0)}$  y  $Y_{p(\beta_2=\beta_3)}$ , según la figura 2.16, es:

$$\begin{aligned} Y_{p(\beta_2=0)} &\approx 0.021 \\ Y_{p(\beta_2=\beta_3)} &\approx 0.09 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces: } Y_P = \left[ 0.021 + \left( \frac{10.4455^\circ}{55^\circ} \right)^2 [0.09 - 0.021] \right] \left( \frac{0.2}{0.2} \right)^{10.4455^\circ/55^\circ} = 0.02348$$

Por otra parte, el coeficiente de pérdidas secundarias es:

$$Y_S + Y_K = \left[ \lambda + B \left( \frac{k}{h} \right) \right] \left( \frac{C_L}{s/c} \right)^2 \left( \frac{\cos^2 \beta_3}{\cos^3 \beta_\infty} \right)$$

Donde el valor del coeficiente de sustentación es:

$$\begin{aligned} C_L &= 2(s/c)(tg\beta_2 + tg\beta_3) \cos \beta_\infty \\ C_L &= 2 \times (0.8428) \times (tg(10.4455^\circ) + tg(55^\circ)) \cos \beta_\infty \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \beta_\infty &= \arctg((tg\beta_3 - tg\beta_2)/2) \\ \beta_\infty &= \arctg((tg(55^\circ) - tg(10.4455^\circ))/2) = 31.8773^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } C_L = 2 \times (0.8428) \times (tg(10.4455^\circ) + tg(55^\circ)) \times \cos(31.8773^\circ) = 2.3081$$

Para el cálculo del término  $B(k/h)$ , se supone unos álabes del rotor desprovisto de llanta y con un juego de cabeza radial de 2.08 mm, con lo que:

$$B(k/h) = 0.5 \times \left( \frac{0.00208}{0.06} \right) = 0.0173$$

Y finalmente, el valor de  $\lambda$ , según lo visto en el apartado 2.6 es:

$$\lambda = f \left\langle \left( \frac{A_3 \cos \beta_3}{A_2 \cos \beta_2} \right)^2 \right\rangle \left\langle \left( 1 - \frac{r_r}{r_i} \right) \right\rangle$$

Además:

$$A_3 = 2\pi r_m h_3 = 2 \times 3.1416 \times 0.2164 \times 0.07234 = 0.09838 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0.0617 \text{ m}^2$$

$$(r_r/r_i) = \frac{0.1864}{0.2464} = 0.7563$$

$$\text{Entonces: } \left( \frac{A_3 \cos \beta_3}{A_2 \cos \beta_2} \right)^2 \left\langle \left( 1 - \frac{r_r}{r_i} \right) \right\rangle = \left( \frac{0.09838 \times \cos(55^\circ)}{0.0617 \times \cos(10.44^\circ)} \right)^2 \left\langle (1 + 0.7563) \right\rangle = 0.5$$

Luego, de la figura 2.17, se obtiene:  $\lambda = 0.027$

En consecuencia, el coeficiente de pérdidas secundarias es:  $Y_s + Y_k = 0.1785$

El coeficiente de pérdida total del rotor resulta ser:

$$Y = Y_p + (Y_s + Y_k) = 0.02348 + 0.1785 = 0.2019$$

En este caso, la relación espesor del borde de salida/paso ( $t_e/s$ ) es 0.0425, por lo que es necesario aplicar el factor de corrección de la figura 2.19 al coeficiente calculado anteriormente, entonces:

$$\frac{Y}{Y \left( \text{Para } t_e/s = 0.02 \right)} = 1.12$$

Por lo tanto:  $(Y)_R = 1.12 \times 0.2019 = 0.2261$

Con lo que el rendimiento de la etapa será:

$$\eta_s \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{C_a}{U} \left[ \frac{\lambda_R \sec^2 \beta_3 + (T_3/T_2) \lambda_N \sec^2 \alpha_2}{tg \beta_3 + tg \alpha_2 - (U/C_a)} \right]}$$



$$\eta_s \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{272}{340} \times \left[ \frac{\lambda_R \sec^2(55^\circ) + (937.774/1002.45)\lambda_N \sec^2(55.1166^\circ)}{\operatorname{tg}(55^\circ) + \operatorname{tg}(55.116^\circ) - (340/272)} \right]}$$

Donde:

$$\lambda_N = Y_N \left( \frac{T_2}{T_{O2}} \right) = 0.073 \times \left( \frac{1002.45}{1100} \right) = 0.0665$$

$$\lambda_R = Y_R \left( \frac{T_3}{T_{O3rel}} \right) = 0.2261 \times \left( \frac{937.774}{1035.8046} \right) = 0.2047$$

Entonces:

$$\eta_s \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{272}{340} \times \left[ \frac{0.2047 \times \operatorname{Sec}^2(55^\circ) + (937.774/1002.45) \times 0.0665 \times \operatorname{Sec}^2(55.1166^\circ)}{\operatorname{tag}(55^\circ) + \operatorname{tag}(55.116^\circ) - (340/272)} \right]}$$

$$\eta_s = 0.8322$$

Así pues, el diseño proporciona  $\lambda_N = 0.0665$  y  $\eta_s = 0.83$  en comparación con los valores de 0.05 y 0.9 que se supusieron inicialmente. Esta aproximación puede considerarse satisfactoria, pero si es que se quiere mayor precisión habrá que recalcular todas las variables con unos valores más probables de los coeficientes de pérdidas y del rendimiento.

# 5

## Procedimiento para la simulación en Cosmosfloworks

### 5.1 Enunciado del problema

Como ya se mencionó anteriormente la forma final de los álabes, obtenidos a partir de las teorías vistas en los capítulos anteriores, tienen que ser refinados en base a los experimentos o simulaciones de flujo mediante algún programa de computadora con el objetivo de obtener una buena distribución del campo de velocidades y las menores pérdidas posibles. Con este fin, en este capítulo se realizará las simulaciones en el programa cosmosfloworks tanto para los álabes del rotor como del estator, aunque los procedimientos expuestos en los siguientes párrafos son aplicados a los álabes del estator, serán igualmente válidos para los álabes del rotor.

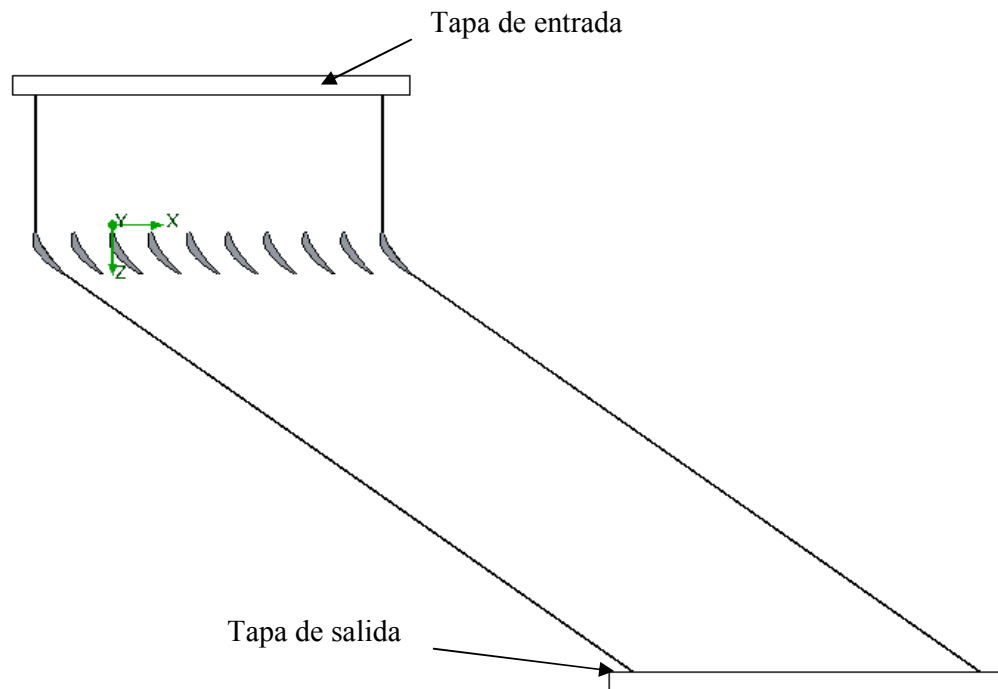
Las pérdidas están contabilizadas por el rendimiento isentrópico y éste a su vez se relaciona con los coeficientes de pérdidas estudiados en el capítulo 1. Así pues, en lo que sigue nos limitaremos en obtener dicho coeficiente de pérdidas y la distribución del campo de flujo para el diámetro medio y a partir de ello juzgar el desempeño del perfil del álabe y considerarlo como algo representativo, en forma promedio, de lo que le sucede al flujo en toda la extensión del álabe.

Para la simulación y análisis del flujo en Cosmosfloworks puede ser necesario, en algunos casos, simplificar el modelo removiendo aquellas partes que no influyen en la solución del problema pero que consumen recursos de cálculo como la memoria y tiempo del CPU. También puede ocurrir lo contrario; es decir, añadir partes auxiliares que consecuentemente requeriría más memoria y tiempo del CPU, pero que serían necesarias para obtener la solución del problema.

Así pues, para nuestro caso se ha visto necesario añadir paredes ideales, es decir sin fricción y adiabáticas, para definir los límites dentro de los cuales se establecerá el campo de flujo y de esa manera plantear el problema como de flujo interno a través de un conducto en cuyo interior se encuentra una fila de álabes, cuya distribución del flujo es requerida. También ha sido necesario crear unas “tapas” que permitirá establecer las propiedades del fluido que son necesarios para la simulación tal y como se verá más adelante.

Por último como lo que se quiere es analizar como influye el perfil del álabe, para el diámetro medio, sobre el campo de flujo, se ha visto conveniente plantear el problema como un flujo en dos dimensiones desarrollado en el plano x-z tal y como se muestra en la figura 5.1. Así mismo, para la simulación se ha considerado lo siguiente:

El aire ingresa al conducto con un flujo másico igual a  $0.3 \text{ kg/s}$  y en la dirección de z positivo, luego pasa por la fila de álabes estacionarios puestos de tal forma que la incidencia sea igual a cero y desvíen la corriente un ángulo de  $55^\circ$ , finalmente a la salida del conducto se tiene que la presión y la temperatura estática es igual a  $299274.7 \text{ Pa}$  y  $1015.054 \text{ K}$  respectivamente.



**Figura 5.1 Modelo para el análisis del flujo a través de los álabes**

## **5.2 Crear un proyecto en CosmosFlowworks con Wizard**

### **5.2.1 Nombre del proyecto**

Para comenzar un proyecto en Cosmosflowworks primero se debe especificar la configuración de Solidworks a la cual el proyecto estará conectado. Se puede usar la configuración actual de Solidworks o crear una nueva configuración basada en la actual configuración. También puedes agregar comentarios al proyecto.

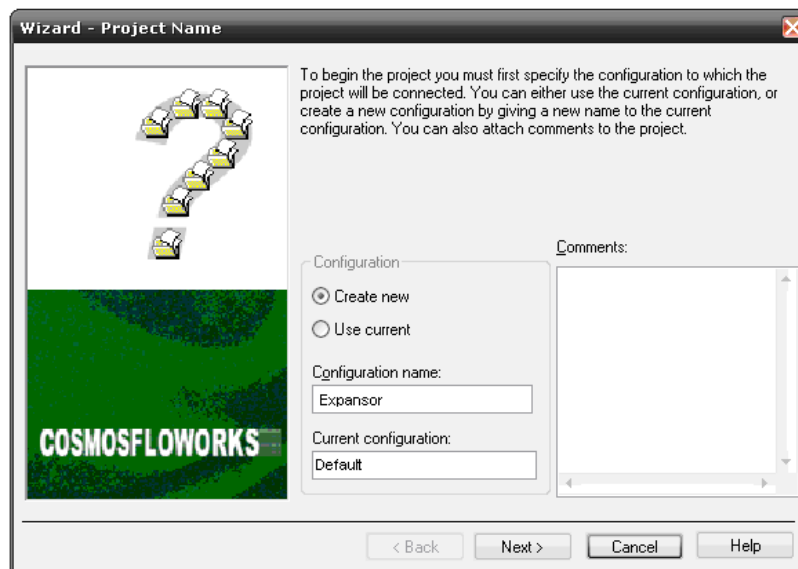
Para especificar una configuración se debe seguir los siguientes pasos:

1. Click en Flowworks, *Project*, *Wizard*.
2. Escoger la configuración actual o crear una nueva configuración para el proyecto (Ver figura 5.2).

- Click en *Create new* si deseas copiar la actual configuración de Solidworks y agregarla a un nuevo proyecto de Cosmosfloworks. Ingresa una nueva *Configuracion name*.
- Click en *Use current* si deseas agregar un nuevo proyecto de cosmosfloworks a la actual configuración de Solidworks. Si la configuración actual también contiene un proyecto, el proyecto es reemplazado y toda la información puede perderse.

En nuestro caso crearemos una nueva configuración para el proyecto con el nombre expensor.

3. Agregar los comentarios que deseas al proyecto. Después de que el proyecto sea creado puedes revisar los comentarios haciendo Click en Floworks, *Project*, *Edit Comment*.
4. Pulse el botón *next*.



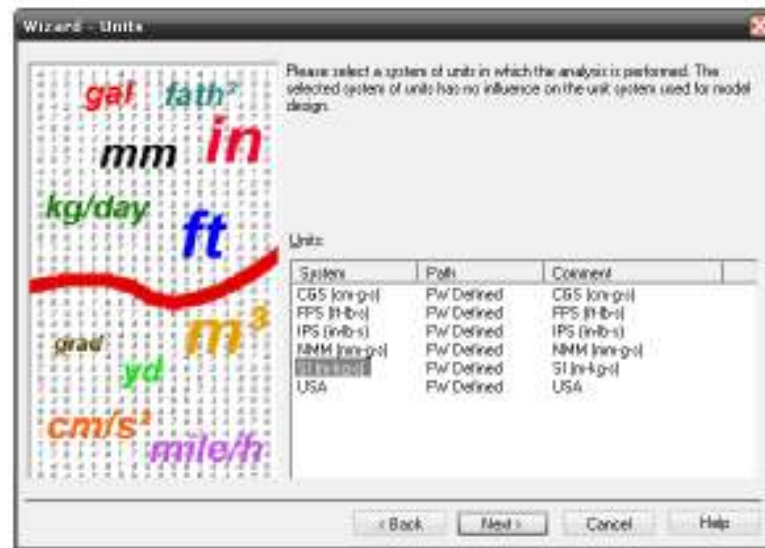
**Figura 5.2 Creación de un proyecto en el CosmosFloworks**

### 5.2.2 Sistema de unidades

Permite seleccionar un sistema de unidades de la base de datos *Units* con el que se va a trabajar.

Para seleccionar un sistema de unidades:

1. Se elige el sistema de unidades con el cual se va a trabajar, en nuestro caso se seleccionó el Sistema Internacional (SI) (Ver fig. 5.3).
2. Pulse el botón *next*.



**Figura 5.3 Selección del sistema de unidades**

### 5.2.3 Tipo de fluido y características físicas

Permite seleccionar el tipo de fluido con el que se va a realizar nuestro análisis, se puede escoger entre un líquido y un gas.

Cosmosflowworks puede analizar líquidos o gases pero no ambos a la vez, además, en el análisis se puede tener en cuenta la transferencia de calor, análisis transitorios, efectos gravitacionales, flujos turbulentos o laminares, y flujo de gases de bajo o alto número de Mach.

Para seleccionar el tipo de fluido y las características físicas del mismo se debe seguir los siguientes pasos:

1. Se escoge el tipo de fluido. Para nuestro análisis se emplea un gas, por lo tanto seleccionamos la opción Gas. Todos los demás parámetros quedarán por defecto (Ver fig. 5.4).
2. Pulse el botón *next*.

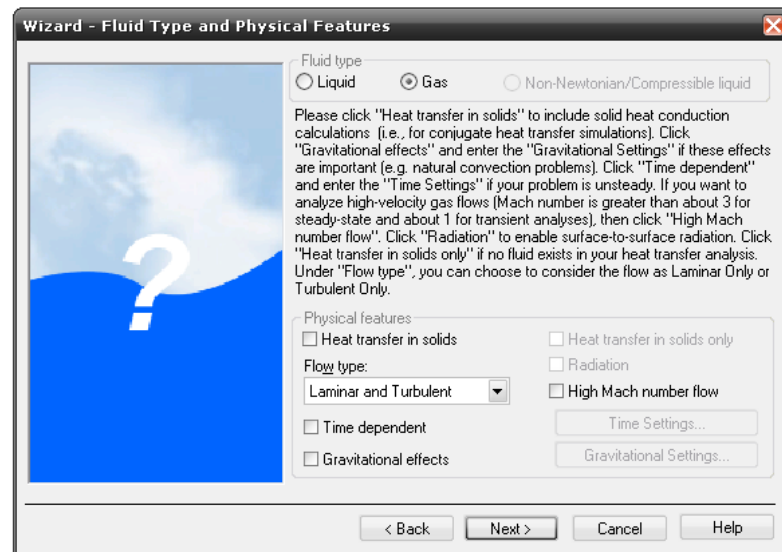
### 5.2.4 Tipo de análisis

Permite definir el tipo de análisis que se utilizará para el problema que se intenta resolver con Cosmosflowworks.

Para definir el tipo de análisis:

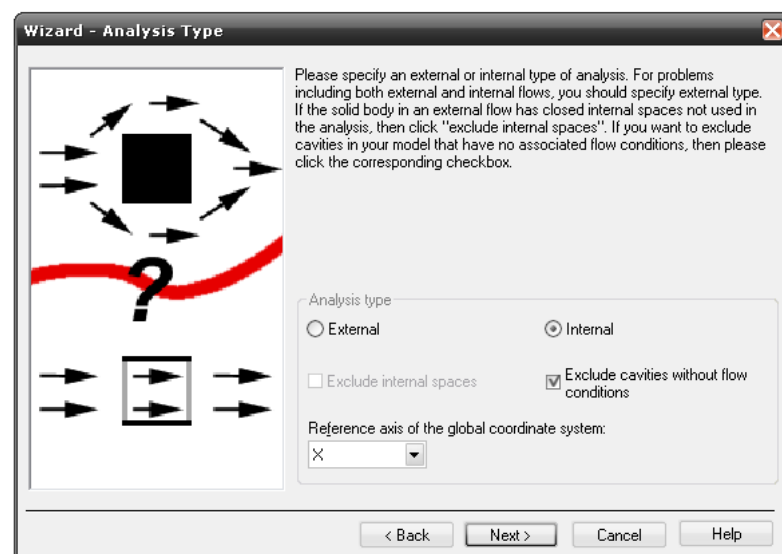
1. Debajo de *Analisis type* seleccionar tipo interno (*Internal*) o externo (*External*). En nuestro caso como se trata del flujo a través de un conducto se selecciona tipo de análisis interno (Ver fig. 5.5).

2. Para descartar posibles espacios internos que no estén involucrados en el análisis del flujo, y por lo tanto simplificar nuestro análisis, seleccionaremos la opción *Exclude cavities without flow conditions*.



**Figura 5.4 Elección del tipo de fluido**

3. Especificar el eje de referencia del sistema de coordenadas globales X;Y, o Z. Se selecciona a X como eje de referencia.
4. Pulse el botón *next*.

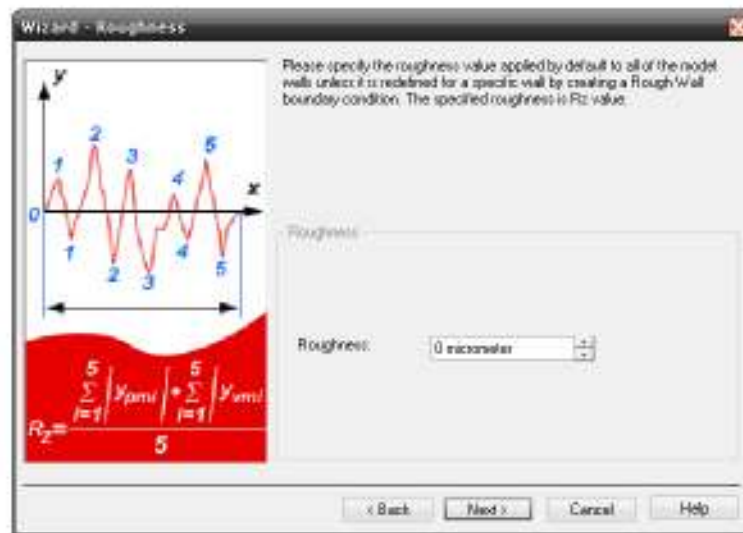


**Figura 5.5 Elección del tipo de análisis**

### 5.2.5 Rugosidad

Permite especificar el valor de la rugosidad que será empleado en todas las paredes que conforman el modelo. Si se desea ajustar el valor de la rugosidad para una pared específica se tiene que definir una condición de frontera de *Reall Wall* como se verá más adelante (Ver fig. 5.6).

1. Pulse *next*, aceptando la condición de rugosidad cero por defecto, para todas las paredes del modelo.



**Figura 5.6 Ajuste de la rugosidad**

### 5.2.6 Tipo de sustancia

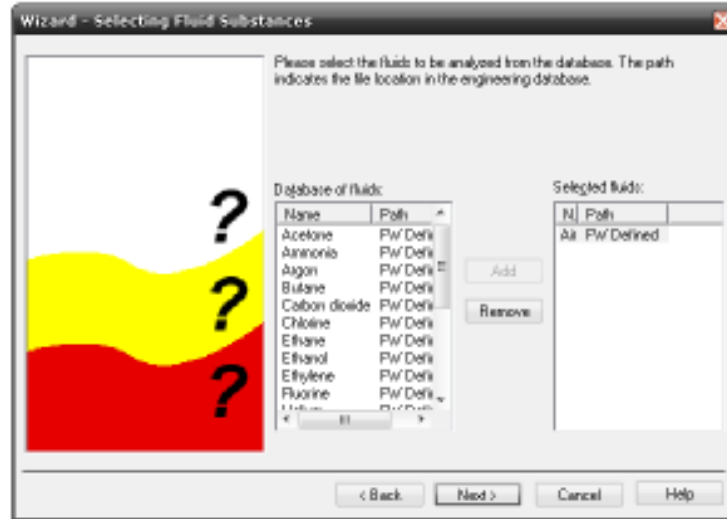
Nos Permite especificar la sustancia cuyo flujo será analizado en el proyecto de Cosmosfloworks. Este programa tiene una base de datos integrada que contiene varios líquidos, gases y sólidos. Como máximo se pueden escoger 10 líquidos o gases para cada análisis.

Para especificar el tipo de sustancia requerida para el análisis:

1. De la base de datos de la izquierda (*Database of fluids*), figura 5.7, se escoge como sustancia el aire (*Air*) (Ver fig. 5.7).
2. Luego presionar *Add* para agregar las propiedades de este gas al análisis.
3. Pulse el botón *next*.

### 5.2.7 Condiciones de pared

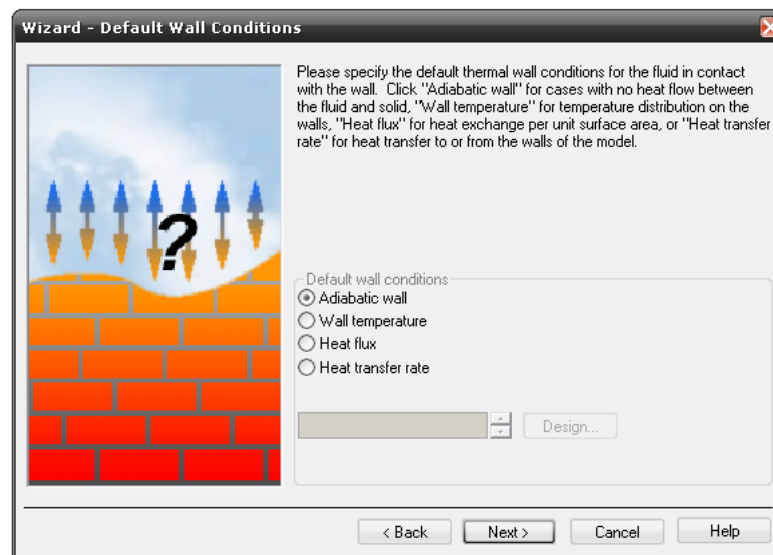
Puede escogerse entre pared adiabática (*Adiabatic wall*), temperatura de pared (*Wall temperature*), Flujo de calor (*Heat flux*) e índice de transferencia de calor (*Heat transfer rate*).



**Figura 5.7: Elección del tipo de sustancia**

Para especificar las condiciones de pared se debe seguir los siguientes pasos:

1. Para configurar las paredes del modelo por donde pasará el fluido, se escoge la condición de pared adiabática (*Adiabatic wall*) ya que se desea que el fluido quede totalmente aislado (Ver fig. 5.8).
2. Pulse el botón *next*.



**Figura 5.8 Definiendo el tipo de pared**

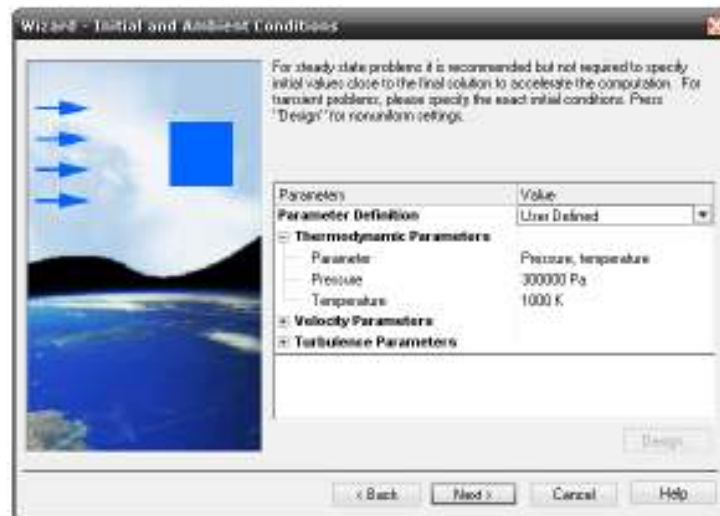
### 5.2.8 Condiciones iniciales y ambientales

En Cosmosfloworks cualquier problema de flujos permanentes es inicialmente considerado como un problema dependiente del tiempo y los valores de las variables se



dan para diferentes incrementos de tiempo (Iteraciones) desde las condiciones iniciales especificadas. Así pues, especificar condiciones iniciales (para análisis interno), o ambientales (para análisis externo) significa especificar valores de parámetros termodinámicos, de velocidad, de turbulencia, de sólidos (para resolver transferencia de calor en sólidos) y concentración (para más de un fluido), a partir de los cuales el programa iniciará las respectivas iteraciones. Por esta razón es recomendable especificar estas condiciones de tal forma que sean valores cercanos a la solución asumida y consecuentemente aminorar el tiempo que el programa utiliza para solucionar el problema. Se debe de seguir los siguientes pasos;

1. Se configurará como paso siguiente las condiciones iniciales, la temperatura, y la presión, que en nuestro caso serán 1000K y 300000 Pa, respectivamente. Los demás valores serán por defecto (Ver fig. 5.9).
2. Pulse el botón *next*.



**Figura 5.9 Definiendo las condiciones iniciales y ambientales**

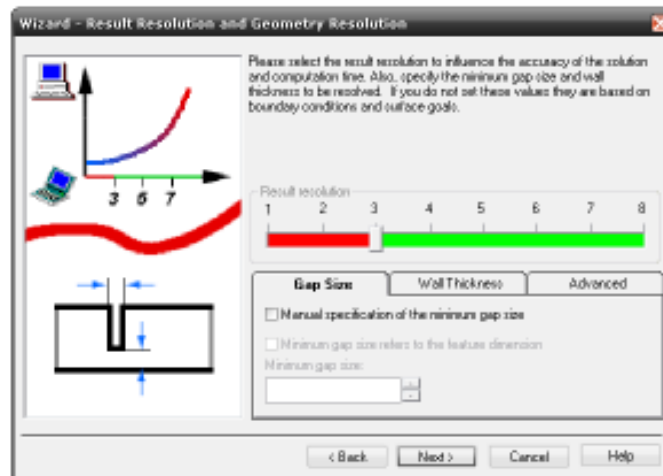
### 5.2.9 Resolución de resultados y geometría

La resolución de resultados se especifica de acuerdo con la precisión deseada de la solución, disponibilidad de tiempo de CPU y memoria de la computadora. Debido a que este parámetro tiene una influencia sobre el número de celdas generadas, una solución más precisa requiere un mayor tiempo de cálculo y mayor memoria del computador. La resolución de la geometría permite especificar la mínima dimensión de un conducto y el mínimo espesor de pared para percibir pequeñas geometrías que no son reconocidas automáticamente por el programa. Estos parámetros tienen una gran influencia sobre la dimensión característica de las celdas y junto con la resolución de resultados gobiernan el número de celdas generadas en la malla computacional.

Para especificar la resolución de resultados y geometría.

1. Usar la barra deslizante y llevarlo al nivel 3 (Ver fig 5.10).

2. Se deja los valores de *Minimum gap size* y *Minimum wall thickness* por defecto, al hacerlo estos valores dependerán de la medida del modelo, de las fuentes de volumen, de las condiciones iniciales y de las condiciones de contorno.
3. Click *next*.

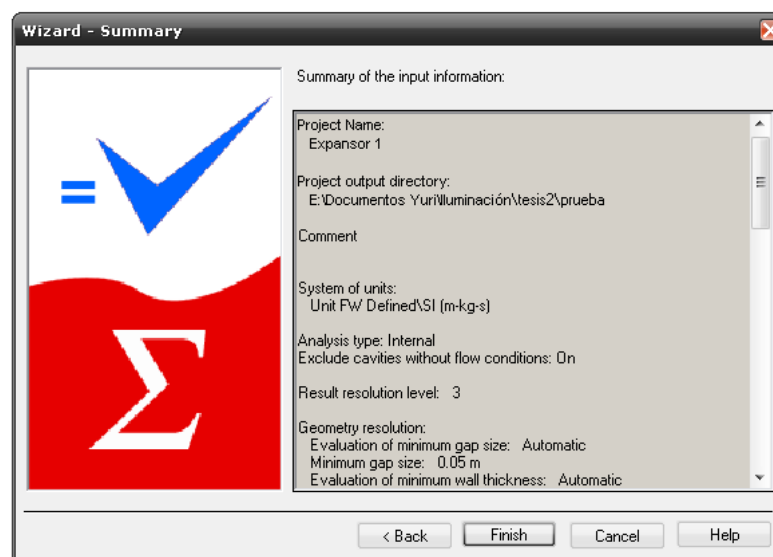


**Figura 5.10** Definiendo la resolución de los resultados

### 5.2.10 Resumen del proyecto

Presenta una concisa y general información sobre el proyecto, especificado en el *Wizard* (Ver fig. 5.11).

1. Finalmente, aparecen todos los cambios y la nueva configuración hecha con cada paso realizado.
2. Luego de finalizar la configuración en el *Configuration Manager* aparecerá la configuración, la cual puede servir de base en otro análisis a realizar.



**Figura 5.11** Resumen del proyecto

Todos los pasos hechos anteriormente definen el proyecto. A continuación en la tabla 5.1 se muestran en forma resumida todas las características que definen el proyecto:

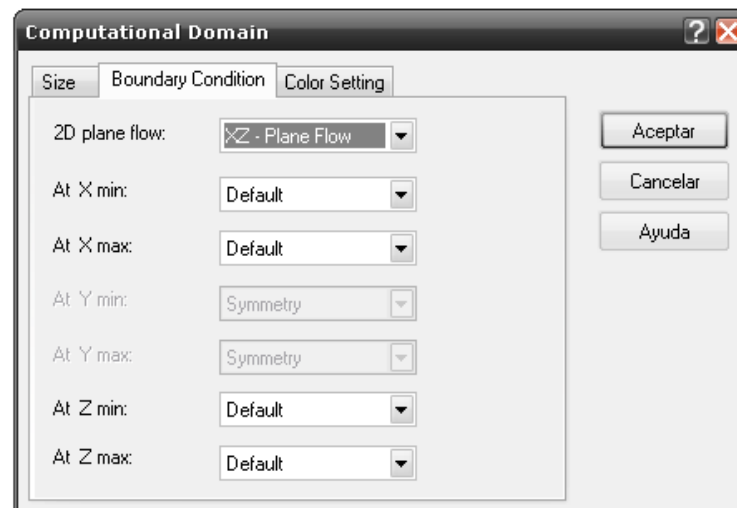
**Tabla 5.1 Características del modelo**

Sistema de Unidades	SI
Tipo de fluido	Gas
Rotación de paredes	No
Tipo de análisis	Interno, y se excluye las cavidades sin condiciones de flujo
Rugosidad	Paredes con rugosidad cero por defecto
Fluido	Aire
Condiciones de pared	Pared adiabática
Condiciones ambientales e iniciales	Temperatura igual a 1000 K y presión igual a 300000 Pa.
Resolución de resultados y geometría	El nivel de resolución es 3, las demás opciones son por defecto.

### 5.3 Dominio de cálculo

Después de completar el *Wizard*, el paso siguiente será definir el dominio de cálculo en el que el programa efectuará el análisis.

1. Click *Flowworks*, *Computacional Domain* (Ver fig. 5.12).
2. En la ficha *Boundary Condition* y en la opción 2D se elegirá el plano en donde se desarrollará el flujo. En este caso será el plano XZ.
3. Click OK. Se notará que los límites del dominio Computacional se modifican para incluir sólo a dicho plano (Considerando flujo en 2D).

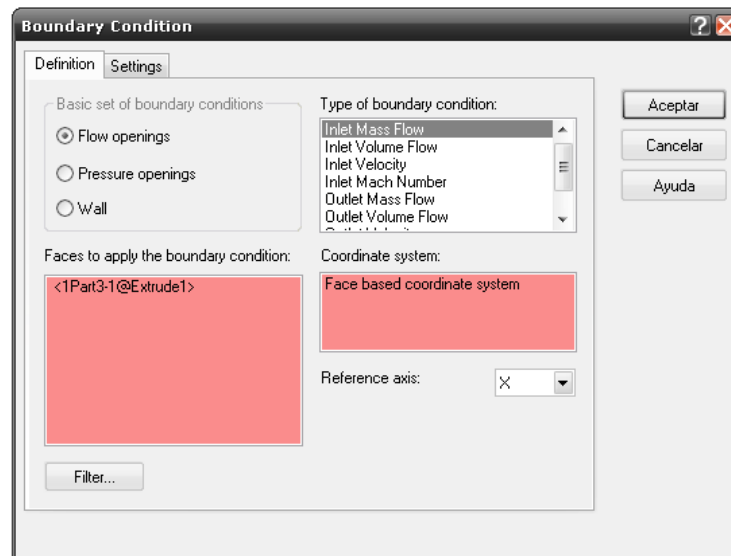


**Figura 5.12 El dominio de cálculo**

## 5.4 Condiciones de frontera (Boundary Conditions)

### 5.4.1 Condiciones de frontera a la entrada y a la salida del flujo

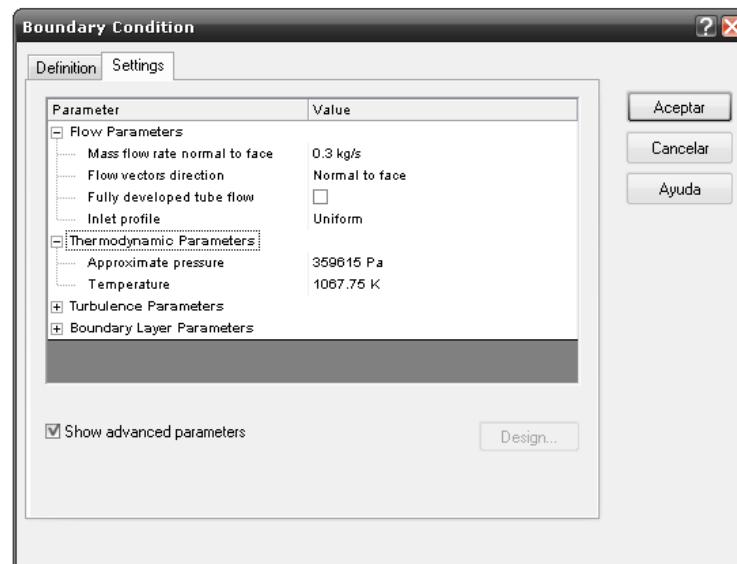
1. En la ventana *CosmosFlowworks analysis tree*, presionar click derecho sobre *Boundary Condition*.
2. Seleccionar *Insert Boundary Condition*.
3. Seleccionar la cara interna de la “tapa 1”, para lograr ésto se debe hacer click derecho sobre la cara y seleccionar la opción seleccionar otra.
4. Aparece un cuadro de diálogo donde se seleccionará la condición para la cara.
5. Seleccionar *Flow openings* y *Inlet Mass Flow*, con esto se definirá el flujo másico a la entrada (Ver fig. 5.13).
6. En la ficha *Settings* se elegirá la opción *Mass flow rate normal to FACE* así el flujo entra en dirección perpendicular a la cara seleccionada, además se colocará el valor del flujo másico y la temperatura del gas, que serán igual a 0.3 kg/s y 1067.75 K, respectivamente. Para la *Aproximate Pressure* se considerará un valor igual a 359615 Pa, este valor será tomado en cuenta por CosmosFlowworks sólo en caso de flujo supersónico.
7. Click en OK. Por lo tanto, en el árbol de datos de entrada aparecerá la condición de contorno *Inlet Mass Flow1* (Ver fig. 5.14).



**Figura 5.13 Definiendo las condiciones de frontera**

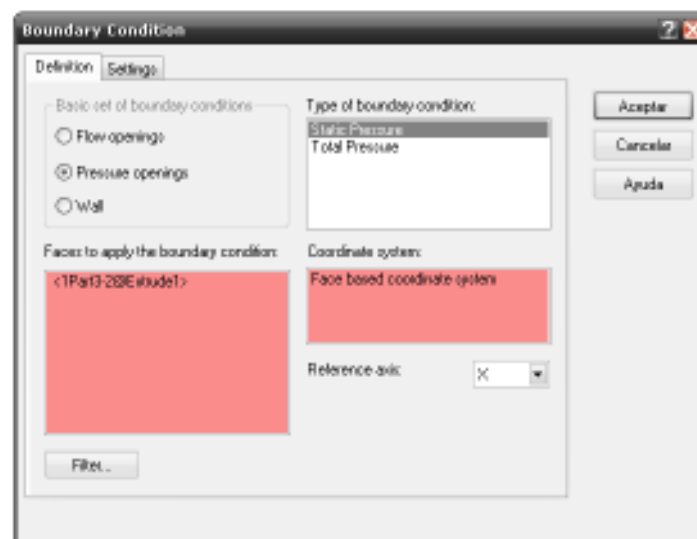
Nota: Con ésto se ha logrado definir el flujo másico y la temperatura con que el gas entra al conducto.

8. Como siguiente paso es darle las condiciones de frontera a la cara interna de la “tapa 2”, que será la condición que presentará el gas en la salida del conducto.
9. Se hace click derecho sobre *Boundary Condition* e *Insert Boundary Condition*.
10. Aparece un cuadro de diálogo donde se seleccionará la condición para la cara.
11. Seleccionar la opción *Pressure openings* y *Static pressure*, con ésto se definirá la presión estática a la salida del conducto (Ver fig. 5.15)

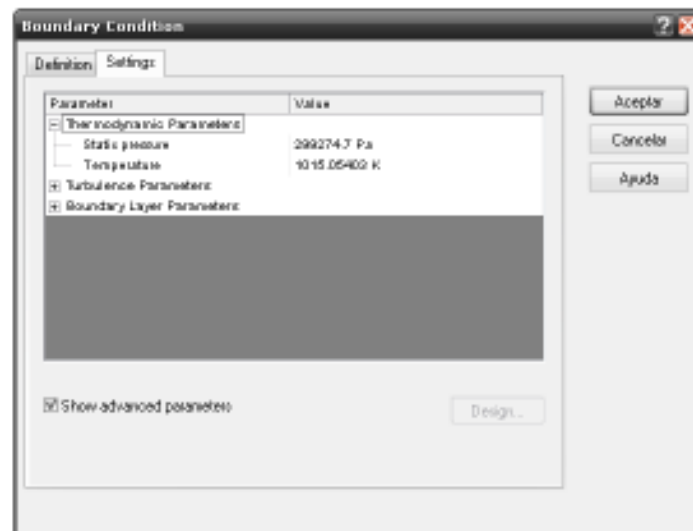


**Figura 5.14 Definiendo las condiciones de frontera**

12. En la ficha *Settings* se colocará el valor de la presión estática, que será igual a 299274.7 Pa. Además, se considerará una temperatura estática igual a 1015.054 K, este valor será tomado en cuenta por Cosmosfloworks sólo en caso de flujo supersónico.
13. Click en OK. Se notará entonces que en el árbol de los datos de entrada aparecerá la condición de contorno *Static Pressure1* (Ver fig. 5.16).



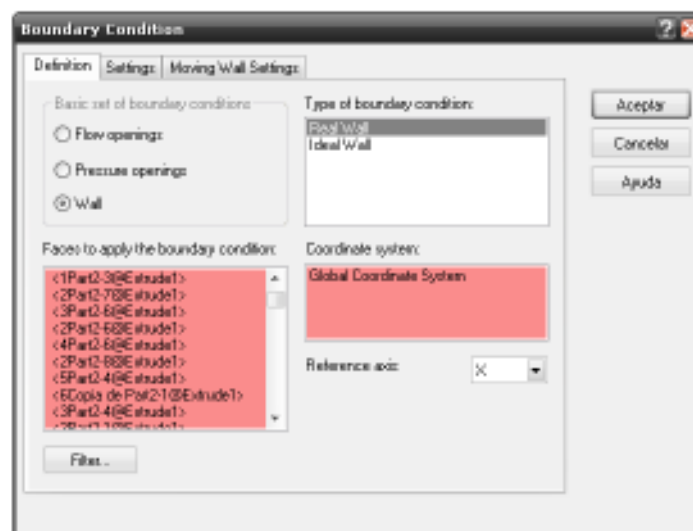
**Figura 5.15 Definiendo las condiciones de frontera**



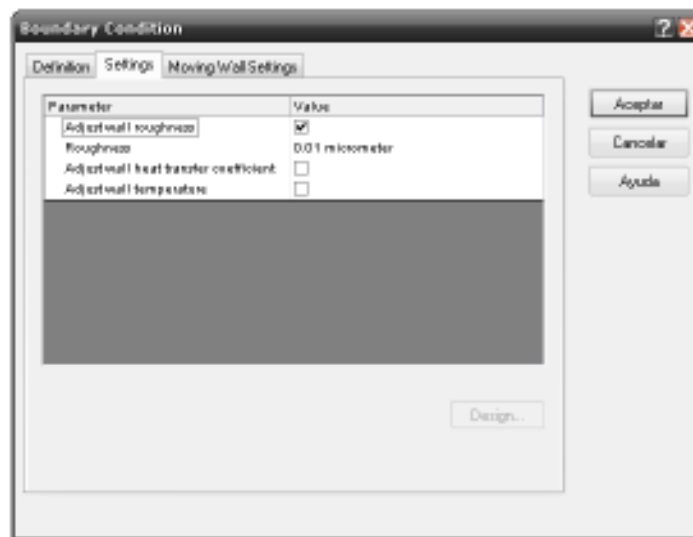
**Figura 5.16 Definiendo las condiciones de frontera**

#### 5.4.2 Condiciones de frontera: paredes rugosas y reales

1. En el *Cosmosflowworks Analysis tree*, presionar clic derecho en el icono *Boundary Conditions* y seleccionar *Insert Boundary Condition*.
2. En el cuadro de diálogo que aparece seleccionar *Wall*, luego *Real Wall* (Ver fig. 5.17).
3. Seleccionar las superficies de los álabes que estarán en contacto con el gas teniendo en cuenta que el flujo se desarrollará en 2D y en el plano medio.(Plano 2).
4. En la ficha *Settings* se colocará el valor de la rugosidad, que será igual a 0.01 micrómetros.
5. Click en OK. Se notará entonces que en el árbol de los datos de entrada aparecerá la condición de contorno *Real Wall 1* (Ver fig. 5.18).



**Figura 5.17: Ajustando la rugosidad de las paredes**



**Figura 5.18: Ajustando la rugosidad de las paredes**

Nota: Con ésto se logra definir las paredes rugosas que serán tomadas en cuenta por Cosmosfloworks mediante el análisis de capa límite que se desarrollará en estas paredes. El resto de las paredes serán consideradas como ideales, tal y como se definió en el *Wizard*. En la tabla 5.2 se muestra en forma resumida las condiciones de frontera.

**Tabla 5.2: Condiciones de frontera**

Condiciones de frontera a la entrada	Flujo másico de entrada: 0.3 kg/s Dirección: Normal a la superficie interna de la "Tapa 1" Temperatura: 1067.75 K Presión aproximada: 359615 Pa
Condiciones de frontera a la salida	Presión estática de salida: 299274.7 Pa Temperatura (aproximada): 1015.04 K
Condiciones de frontera paredes rugosas	Rugosidad: 0.01 micrometros

### 5.5 Definiendo las metas de ingeniería (*Goal*)

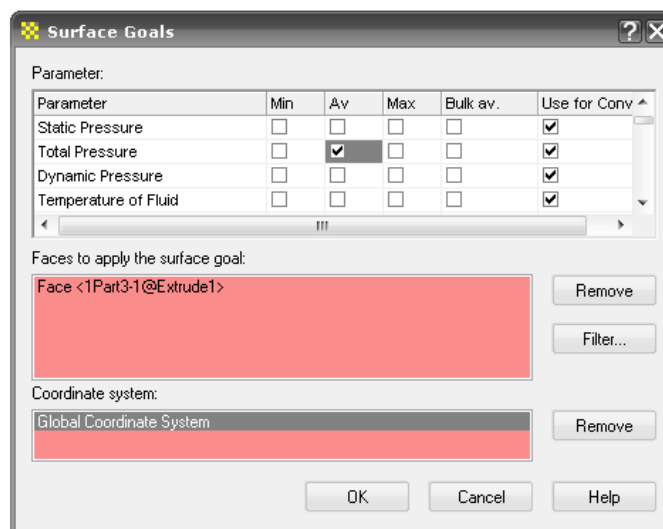
1. En el *CosmosFlowworks design tree* presionar click derecho sobre el icono *Goals* y seleccionar *Insert surface goal*.
2. Click sobre el ítem *Inlet Mass Flow1* (Condición de frontera) para seleccionar la cara donde se definirán las metas de ingeniería.
3. Dado que estamos interesados en la distribución del campo de velocidad y en la caída de la presión de estancamiento o total , seleccionaremos los parámetros *Total pressure 1* y *Velocity 1* como metas (Ver fig. 5.19).
4. Aceptar el valor promedio (*Average value*) y seleccionar *use the goals for convergente control*, que quiere decir que las metas seleccionas serán usadas para la convergencia de la solución.

5. Click en OK. Se notará entonces que en el árbol de los datos de entrada aparecerá las metas.
6. En el *CosmosFlowworks design tree* presionar click derecho sobre el icono *Goals* y seleccionar *Insert surface goal*.
7. Click sobre el ítem *Static Pressure1* (Condición de frontera) para seleccionar la cara donde se definirán las metas de ingeniería.
8. Seleccione los parámetros *Total Pressure* y *Velocity* como metas.
9. Aceptar el valor promedio (*Average value*) y seleccionar *use the goals for convergente control*.
10. Click en OK. Se notará entonces que en el árbol de los datos de entrada aparecerá las metas.

Las superficies o caras donde se señalen las metas de ingeniería son las que nos interesan, es decir, donde se quiere mayor precisión por parte del programa, por lo tanto con estas condiciones de meta se le dice al CosmosFlowworks que la mayor precisión se requerirá a la entrada del conducto y a la salida de la misma. En la tabla 5.3 se resume las metas creadas.

**Tabla 5.3: Metas definidas para el problema**

Tipo de meta	Variable elegida como meta
Meta superficial	Presión total a la entrada del conducto
Meta superficial	Velocidad a la entrada del conducto
Meta superficial	Presión total a la salida del conducto
Meta superficial	Velocidad a la salida del conducto



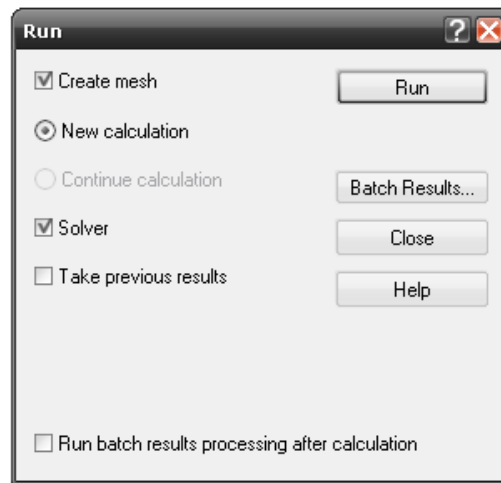
**Figura 5.19 Definiendo las metas de ingeniería**

## 5.6 Solución del problema

1. Click en Flowworks, *Solve*.



2. Click en *New calculation, Run* (Ver fig. 5.20).



**Figura 5.20 Solución del problema**

### 5.7 Observar las variantes en las soluciones

1. Aparecerá el cuadro de solución en el cual se procede con el análisis del problema. En este cuadro se encuentran las opciones para mostrar los cambios que sufre el análisis durante la búsqueda de la solución. Además, se puede acceder a un gráfico con una escala de colores, en la cual se indica la convergencia de las incógnitas.
2. Click en *Insert Goal Plot* en la barra de herramientas *Solver*. El cuadro de diálogo *Add/Remove Goals* aparecerá.
3. Hacer doble click sobre todas las *goals* en la lista *Available goals* y click OK.
4. Click en *Insert Preview* en la barra de herramientas *Solver*.
5. Cuando el cálculo haya finalizado, cerrar el cuadro de monitoreo haciendo click en *File, Close*.

### 5.8 Accediendo a los resultados

1. Click *Flowworks, Results y Load Results*.
2. En el cuadro de diálogo *Load Results* hacer doble click en el archivo 1.fld.

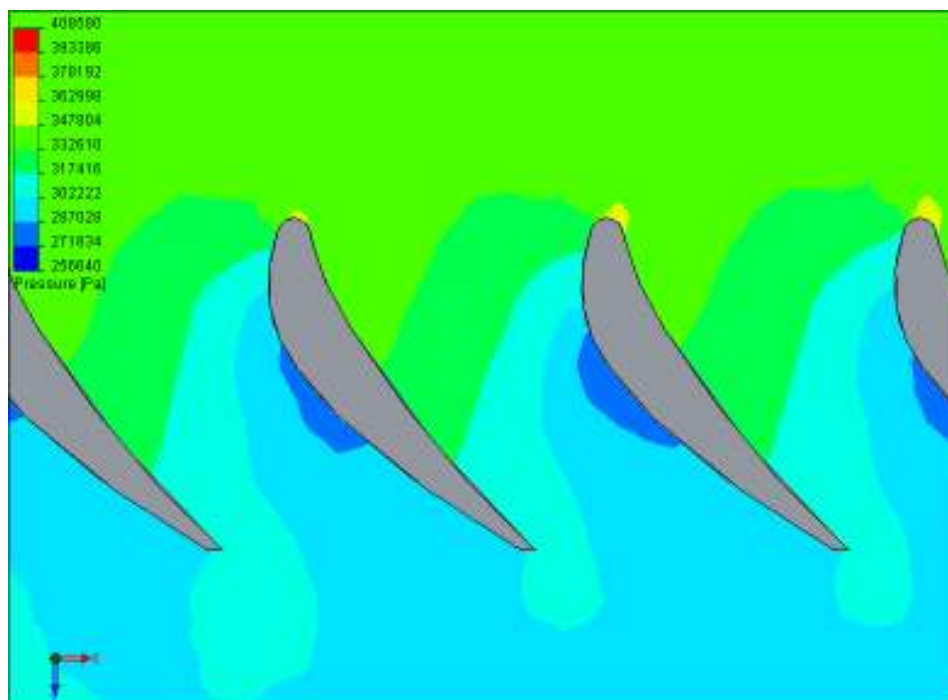
### 5.9 Mostrar los resultados en forma gráfica

En nuestro caso nos interesa ver los resultados del análisis en el plano elegido por el ítem *Computacional Domain*. Así pues, para ver los resultados en forma gráfica debemos seguir los siguientes pasos:

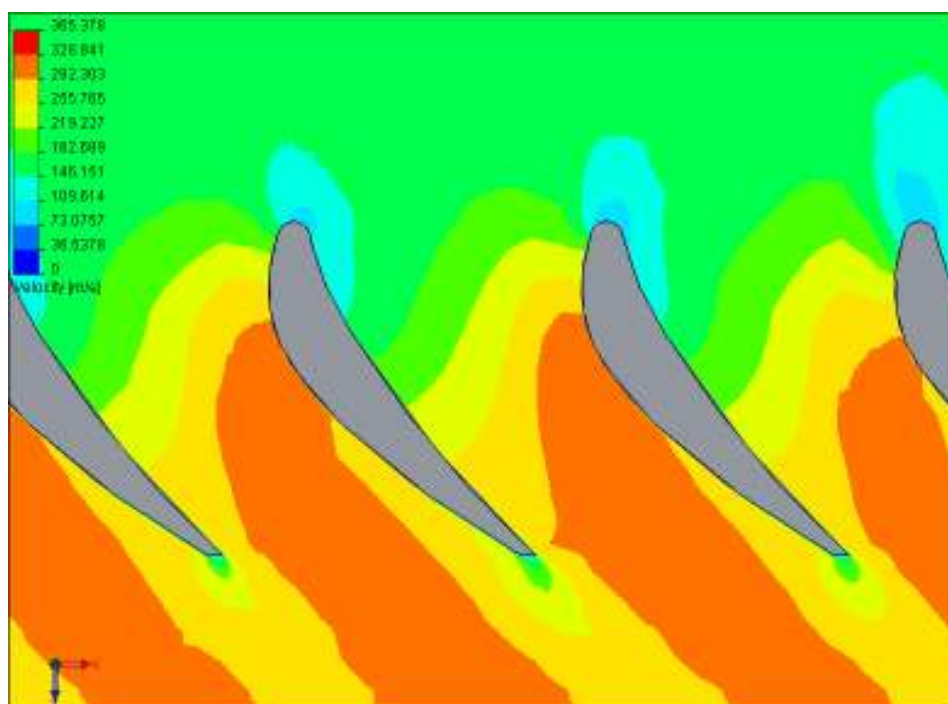
1. Hacer doble click en el icono *Cut Plots* y seleccionar *Insert*.
2. En el cuadro de diálogo que aparece se debe elegir el plano en donde se quiere ver los resultados; y además puede elegirse la forma en que pueden ser presentados, existiendo tres opciones: Contornos, isolíneas y vectores, los cuales muestran en forma grafica la distribución de la propiedad elegida.

3. En el boton *View settings* se podrá regular la escala de colores para un determinado rango de valores de la propiedad del fluido especificado, de tal manera de visualizar de mejor forma los resultados.

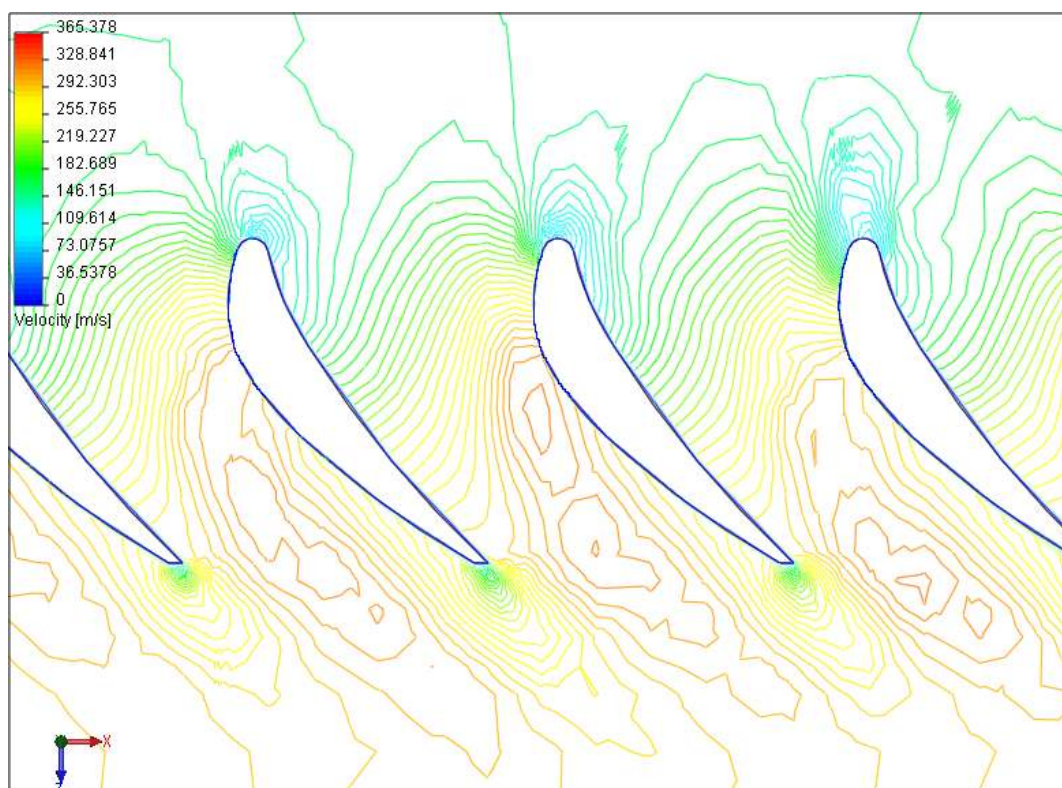
Las figura 5.21 – 5.29 muestran las simulaciones del problema en estudio



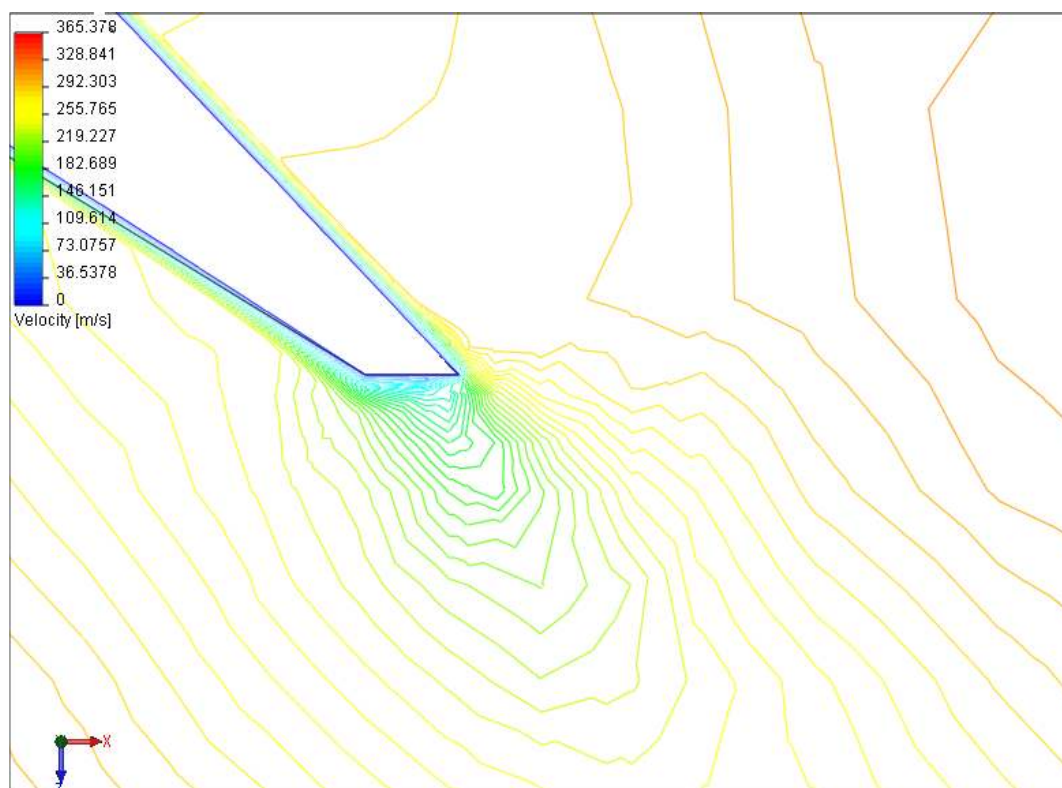
**Figura 5.21 Distribución de presiones**



**Figura 5.22 Distribución del módulo de la velocidad**

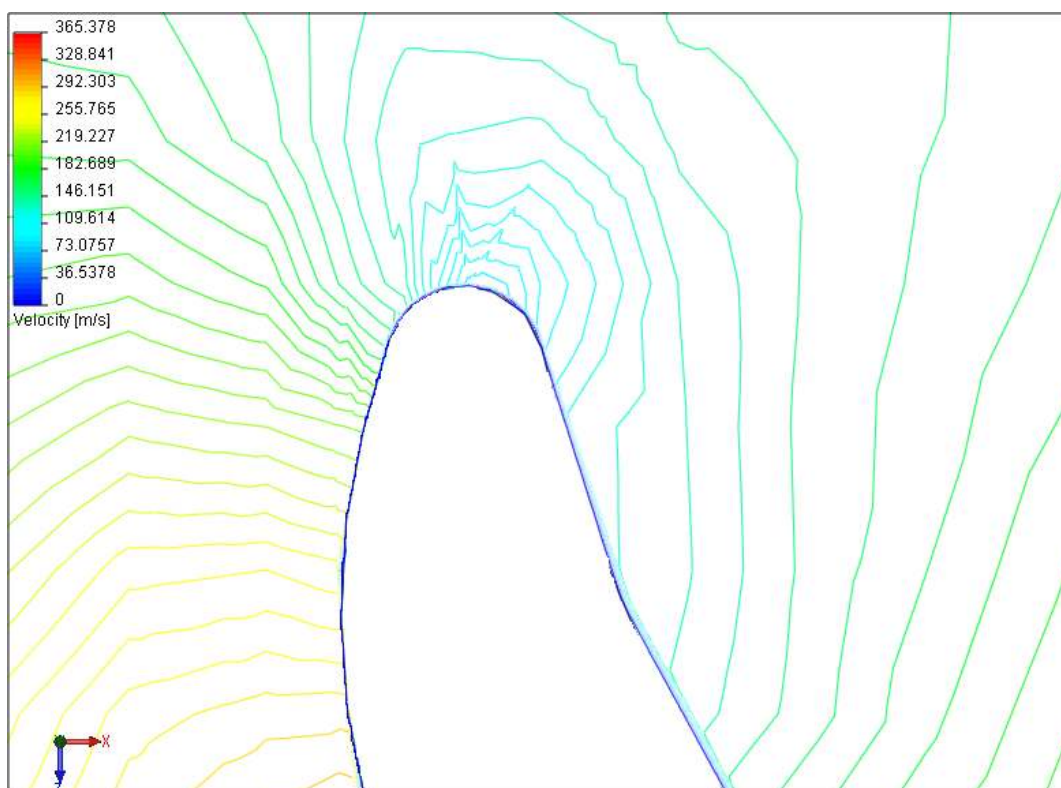


**Figura 5.23: Isolíneas del módulo de la velocidad**

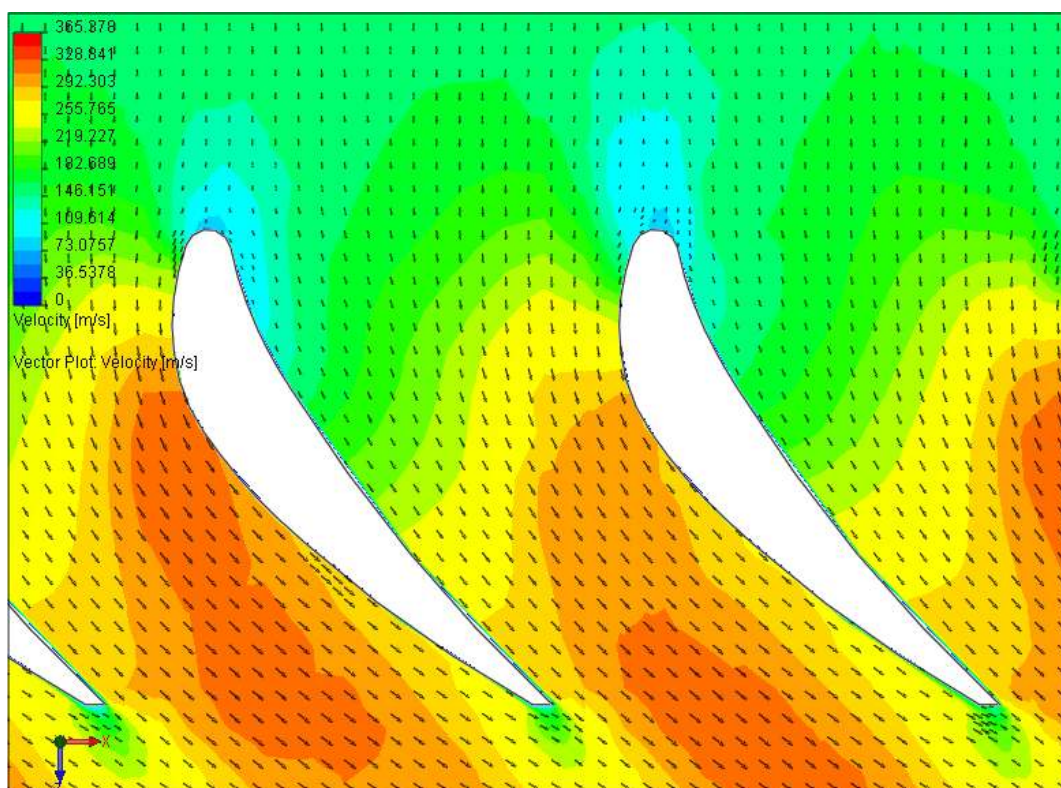


**Figura 5.24: Isolineas del módulo de la velocidad en el borde de salida**

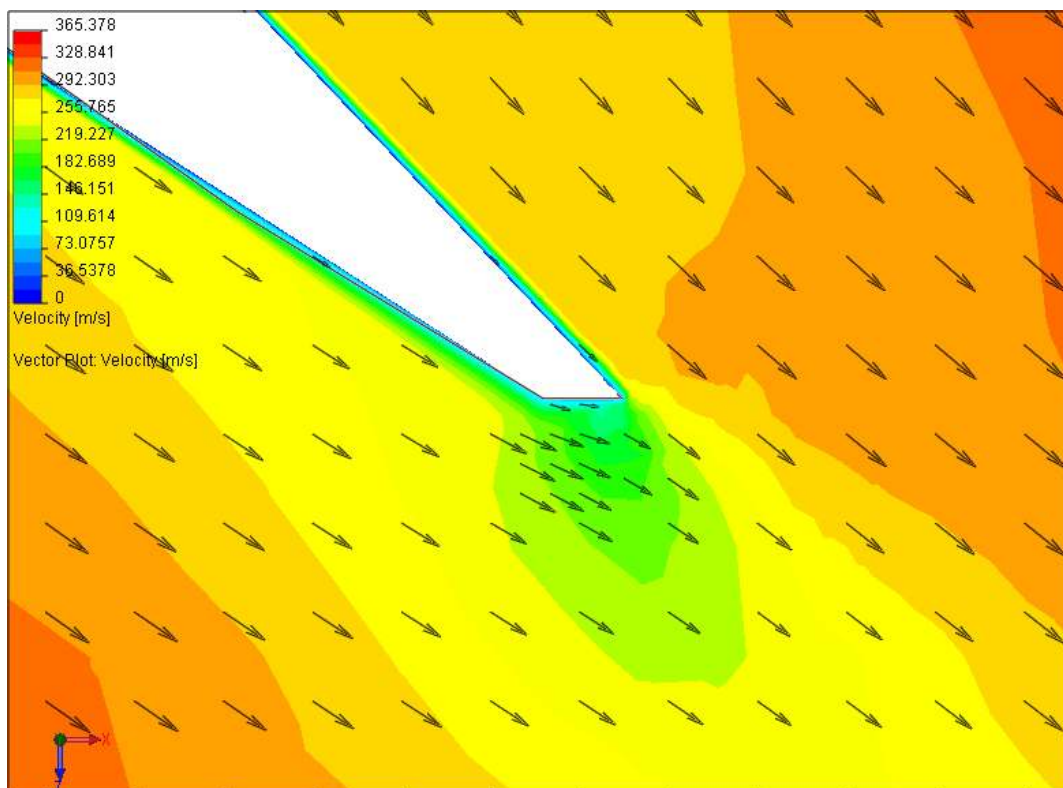




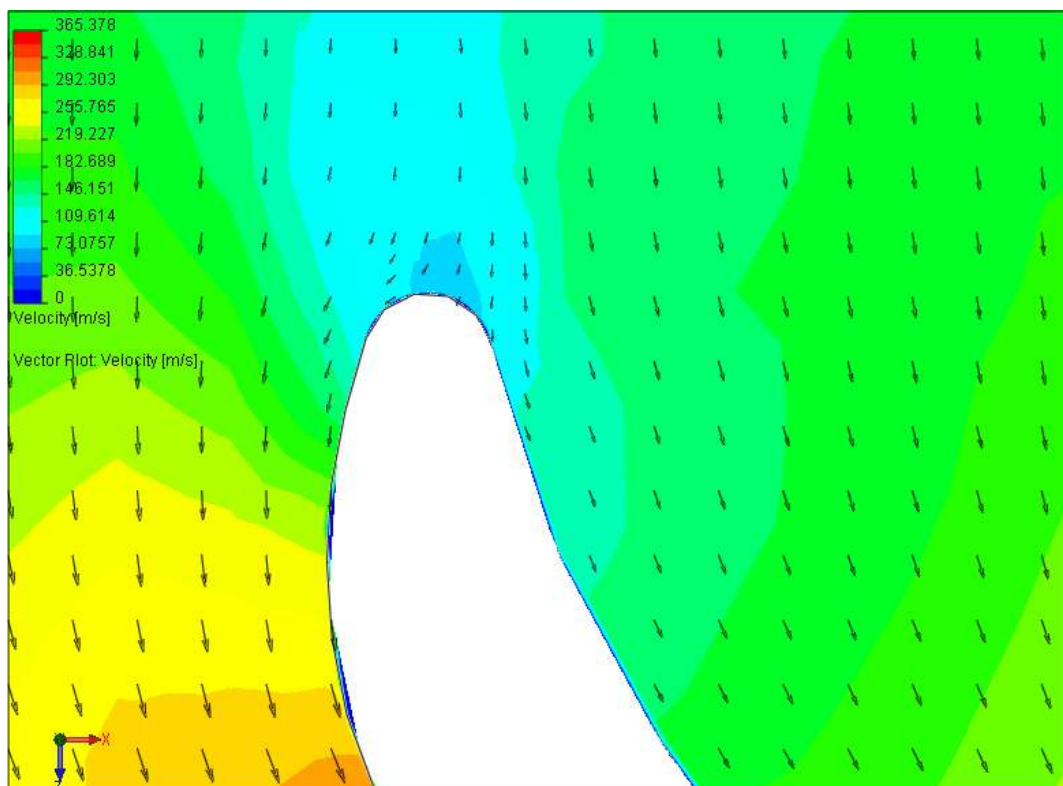
**Figura 5.25** Isolneas del módulo de la velocidad en el borde de ataque



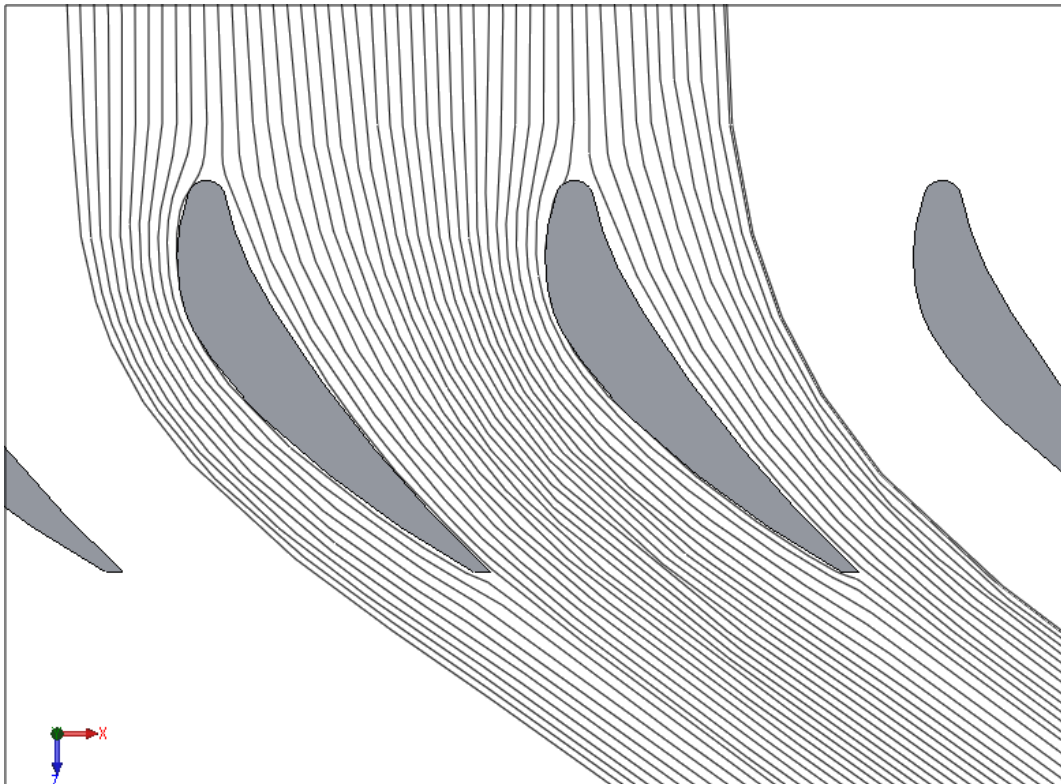
**Figura 5.26** Campo de velocidades



**Figura 5.27** Campo de velocidades en el borde de salida



**Figura 5.28:** Campo de velocidades en el borde de ataque

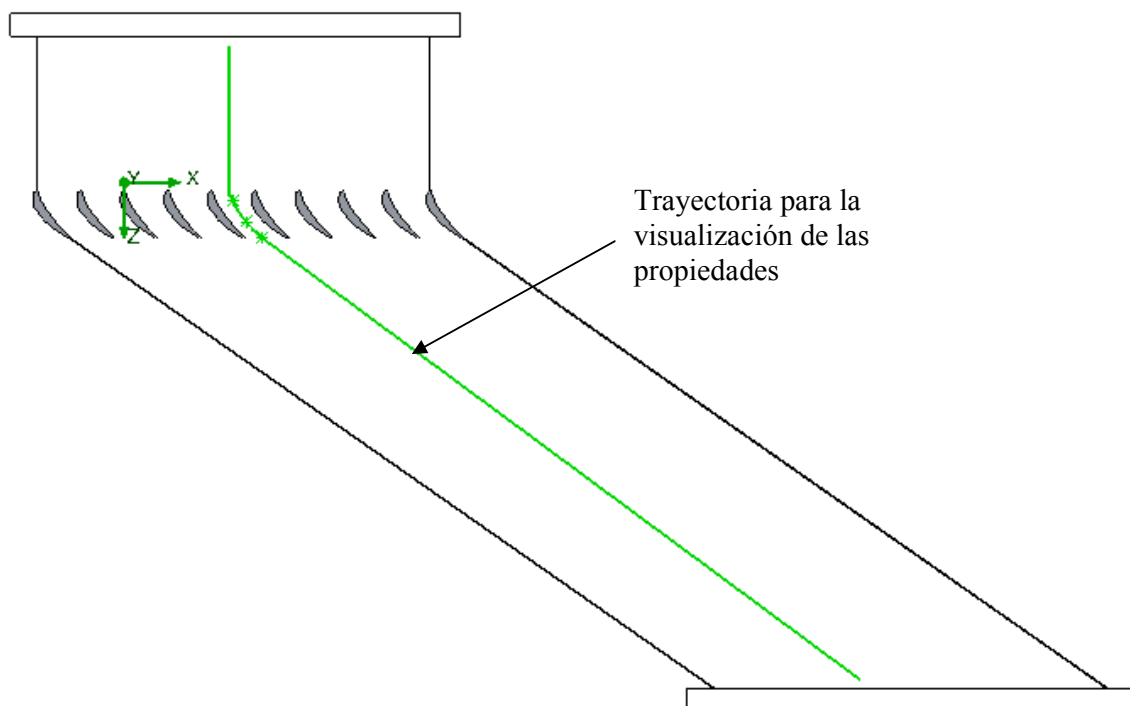


**Figura 5.29 Trayectorias del flujo**

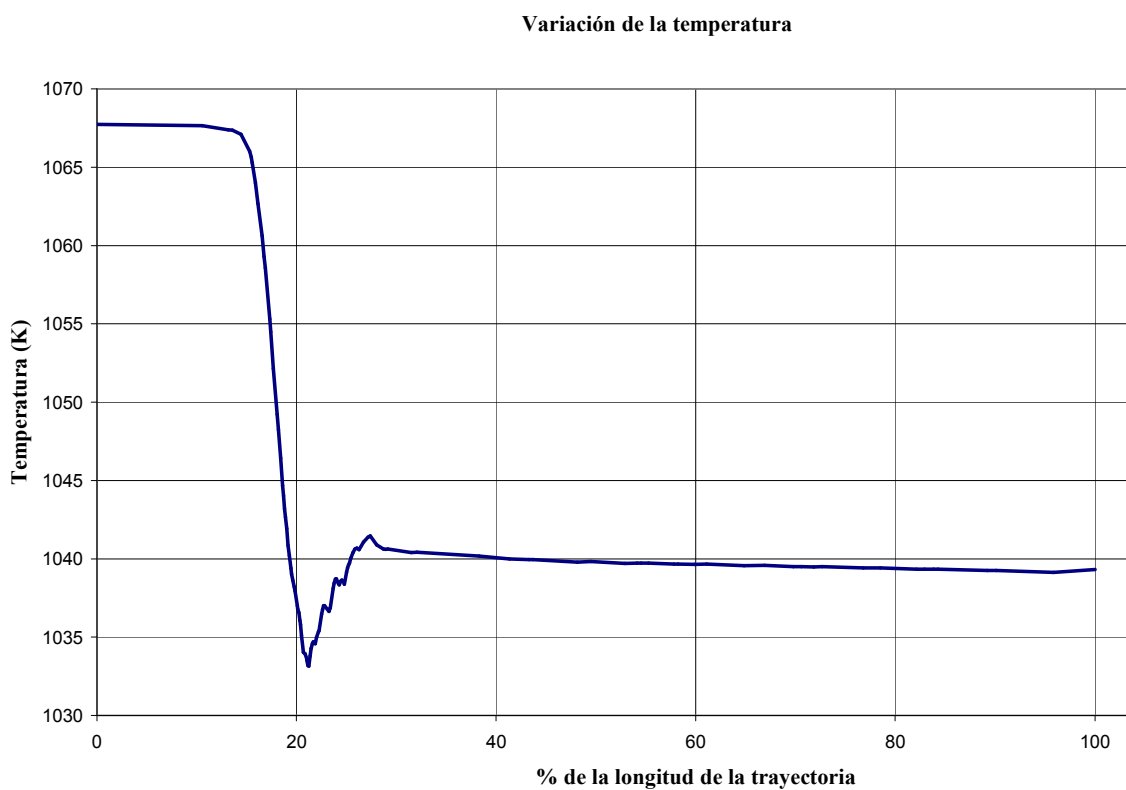
Por otro lado, para observar como cambian las propiedades termodinámicas del fluido al atravesar la corona de álabes del estator se debe hacer lo siguiente:

1. Antes de visualizar los resultados se debe de crear un esbozo de la trayectoria a lo largo del cual se determinará las propiedades del fluido. En nuestro caso este esbozo ya ha sido creado y se extiende desde la entrada del conducto, pasando a través de los álabes ubicados en la posición media, hasta la salida del mismo.
2. Luego de haber creado el esbozo se debe hacer click en el botón CosmosFlowworks de la barra de herramientas y en el menú desplegable *Results* seleccionar Plots XY.
3. Aparece una ventana en la que debe de elegirse las propiedades cuyos valores se requiere. Así, en nuestro caso elegiremos la temperatura, la presión, la velocidad y el número de Mach.
4. Por último, seleccionamos el esbozo o trayectoria a lo largo de la cual se determinarán las propiedades especificadas anteriormente.

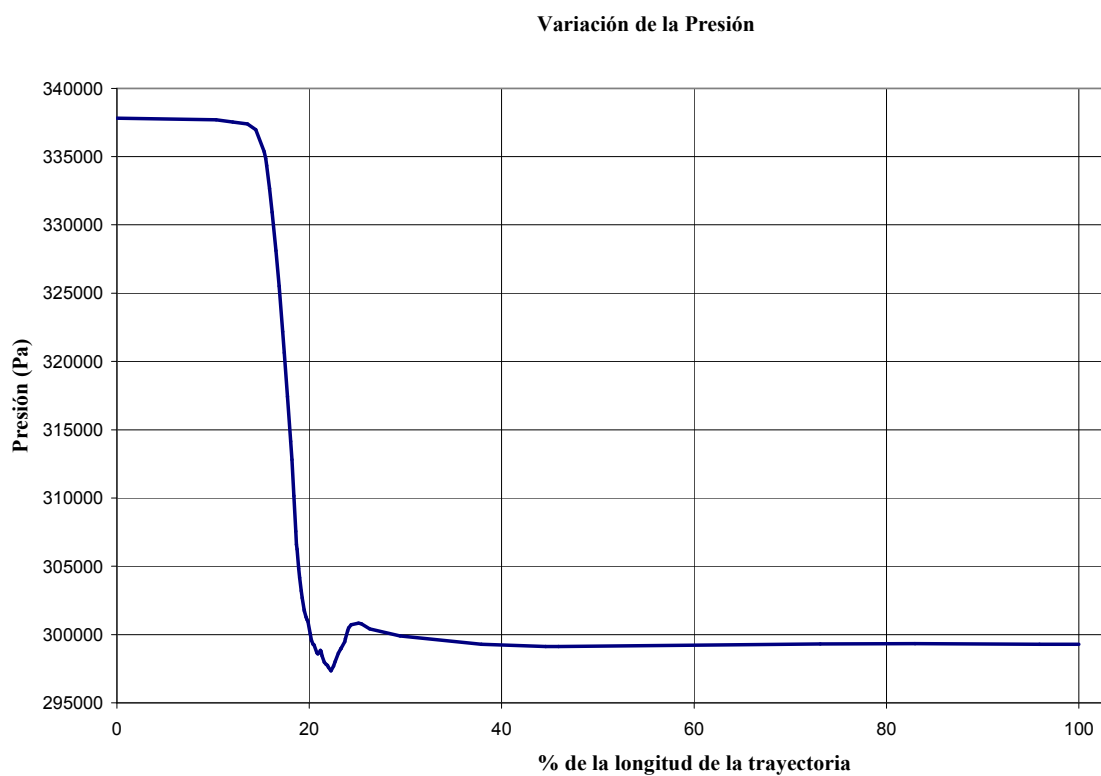
En las figuras 5.30 – 5.34 se presentan el comportamiento de las propiedades del fluido a lo largo de la trayectoria seleccionada.



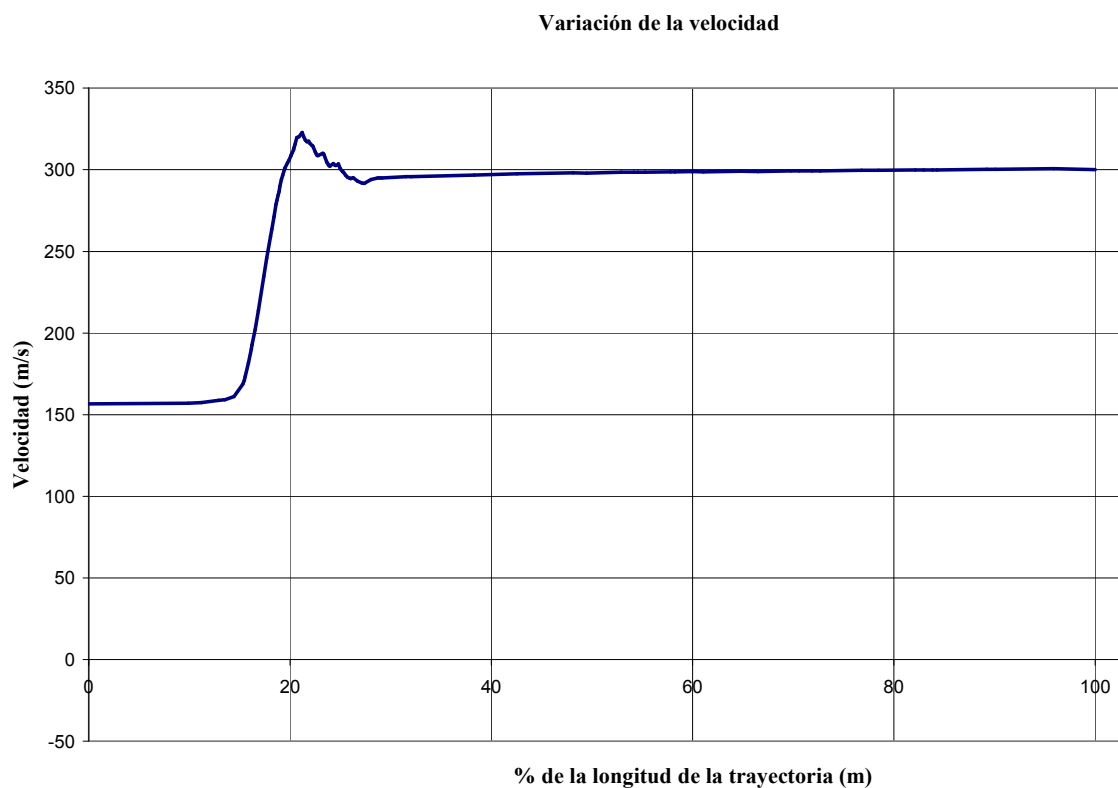
**Figura 5.30** Línea de trayectoria para la visualización de las propiedades del fluido



**Figura 5.31** Distribución de temperaturas

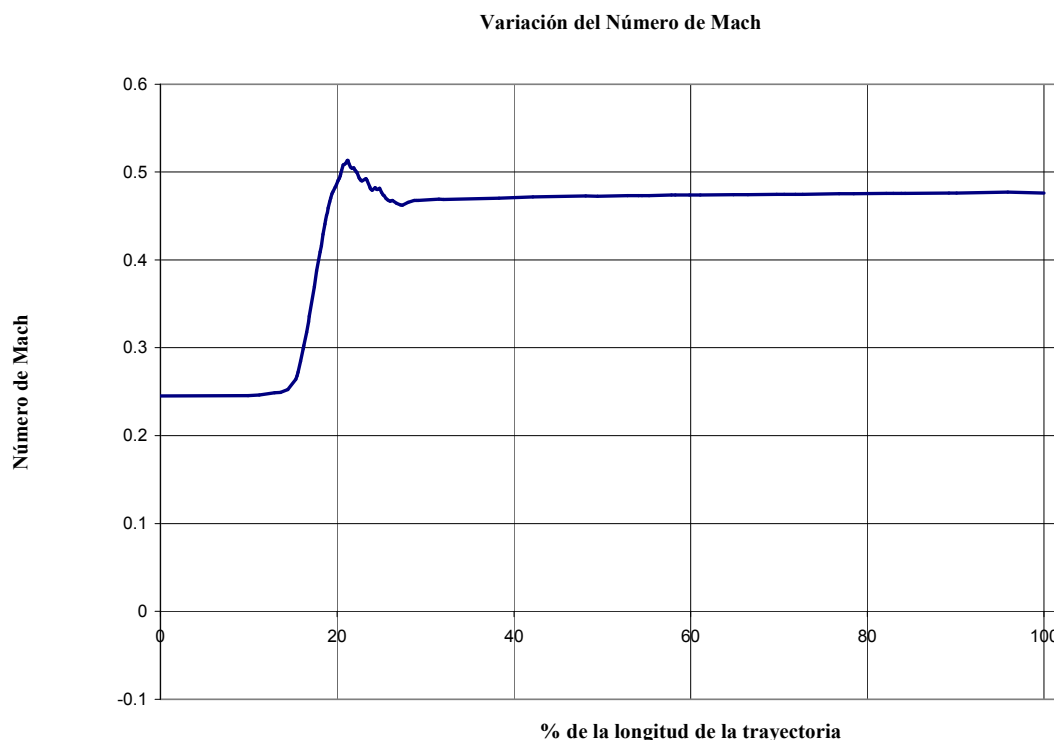


**Figura 5.32 Distribución de la presión estática**



**Figura 5.33: Distribución del módulo de la velocidad**





**Figura 5.34 Distribución del número de Mach**

**Tabla 5.4 Propiedades Termodinámicas a la entrada y a la salida de la fila de álabes**

Punto/ Propiedades	Presión [kPa]	Temperatura [K]	Velocidad [m/s]
Entrada	337.8152	1067.7368	156.5500
Salida	299.2889	1039.3077	298.4300

De las figuras 5.31-5.34, y de la tabla 5.4 que muestra los valores de algunas de las propiedades termodinámicas del fluido a la entrada y a la salida de la fila de álabes, es fácil comprobar que la caída de la presión de estancamiento es:

$$p_{01} - p_{02} = 5145.4861 \text{ Pa}$$

En consecuencia, el coeficiente de pérdidas del perfil de los álabes del estator es:

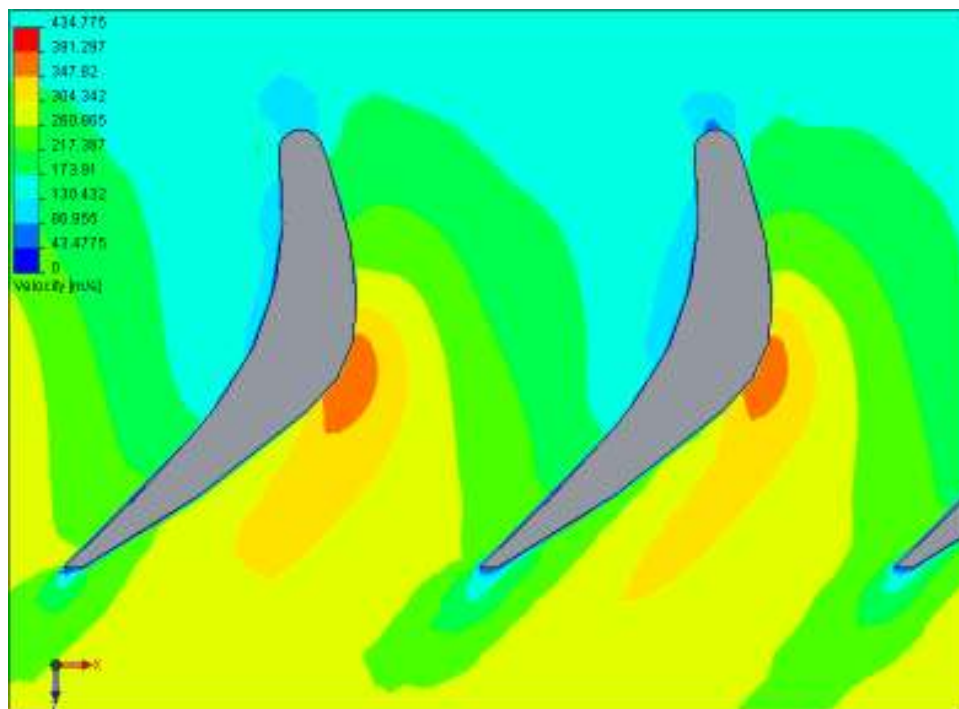
$$Y_p = \frac{p_{01} - p_{02}}{p_{02} - p_2} = \frac{5145.4861}{346365.4885 - 299288.9666} = 0.11$$

Que resulta ser casi cinco veces el valor calculado según el método de Ainley y Mathieson, lo cual es de esperarse ya que éste método es tan sólo una aproximación que consiste en extrapolar las pérdidas determinadas en perfiles convencionales y de una determinada geometría, a otros perfiles de geometría diferente.

Añadiendo este coeficiente del perfil, al valor correspondiente a las pérdidas secundarias, calculado en el capítulo 4 según el método de Ainley y Mathieson, resulta:

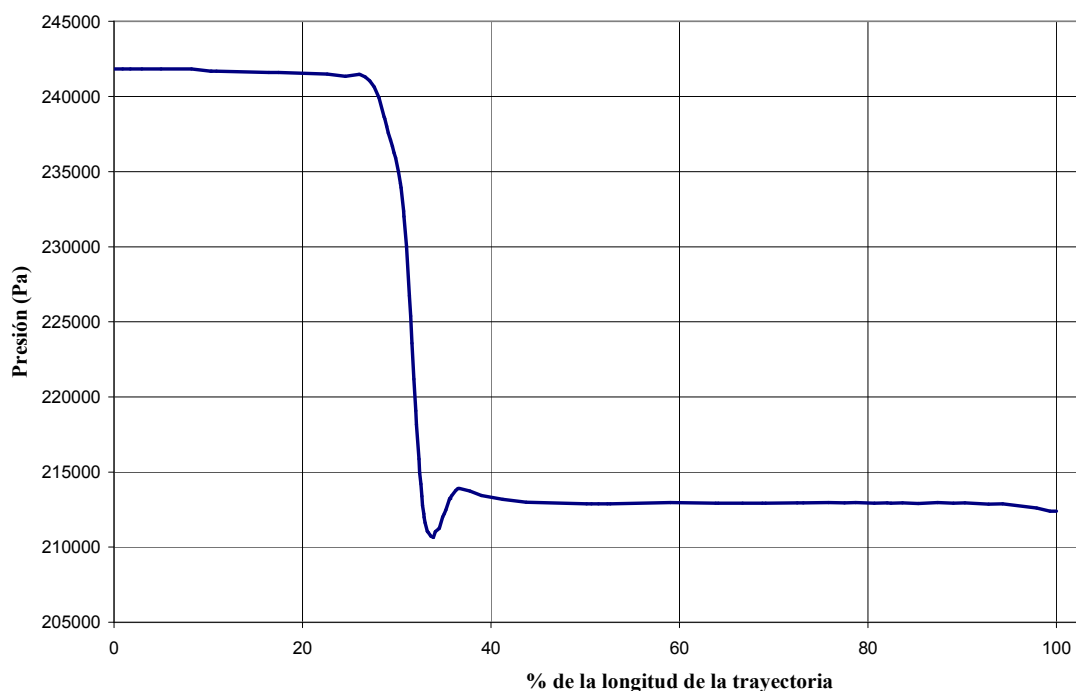
$$Y = (Y)_N = Y_p + (Y_s + Y_k) = 0.11 + 0.0433 = 0.1533$$

Por otra parte, aplicando el mismo procedimiento, expuesto anteriormente, para la simulación del flujo a través de los álabes del rotor, se obtiene los siguientes resultados



**Figura 5.35 Distribución del módulo de la velocidad**

Distribución de la presión a través de los alabes del rotor



**Figura 5.36 Distribución de la presión estática**

Distribución de la velocidad a través de los alabes del rotor

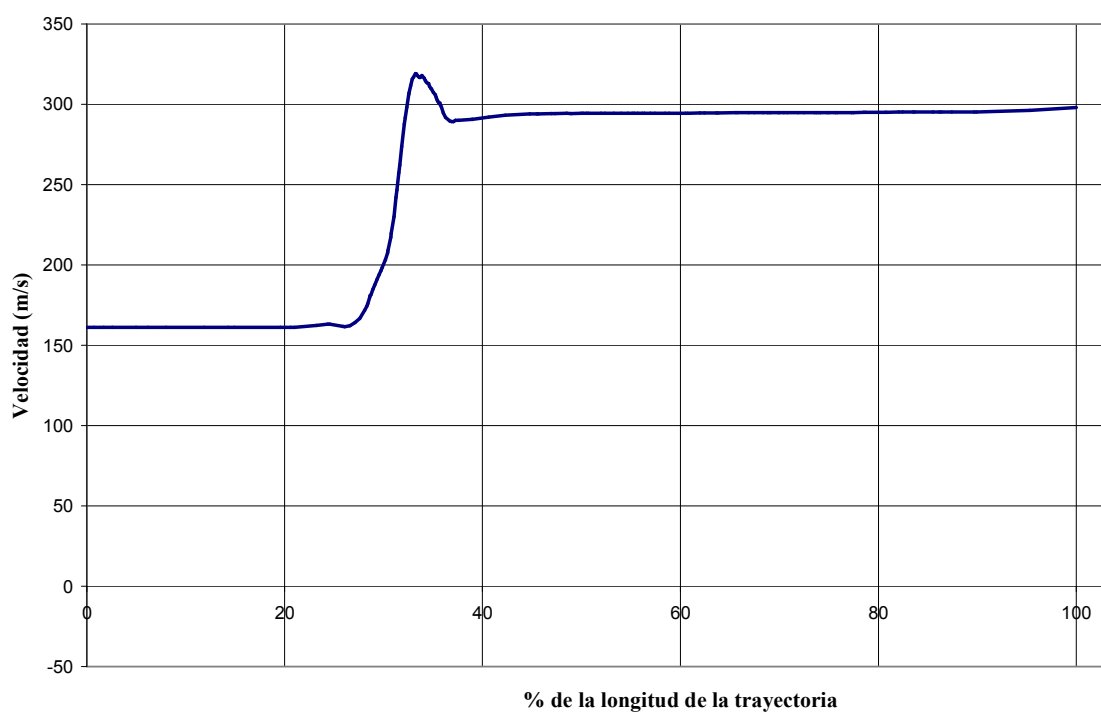


Figura 5.37 Distribución del módulo de la velocidad

Distribución de la temperatura a través de los alabes del rotor

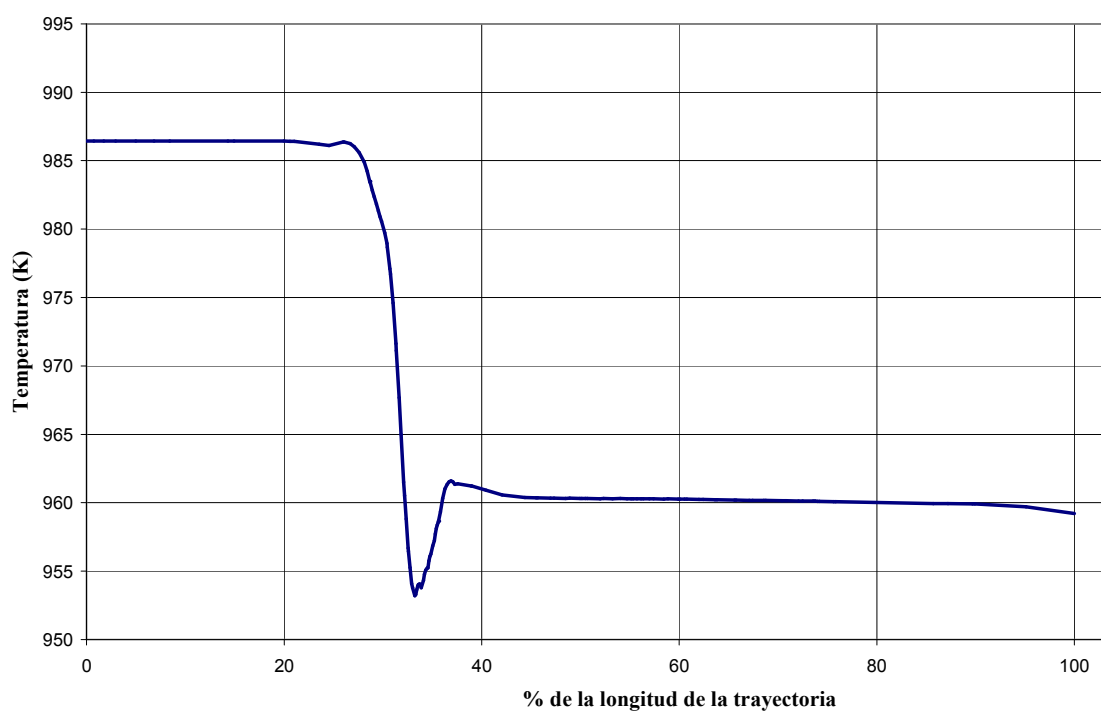
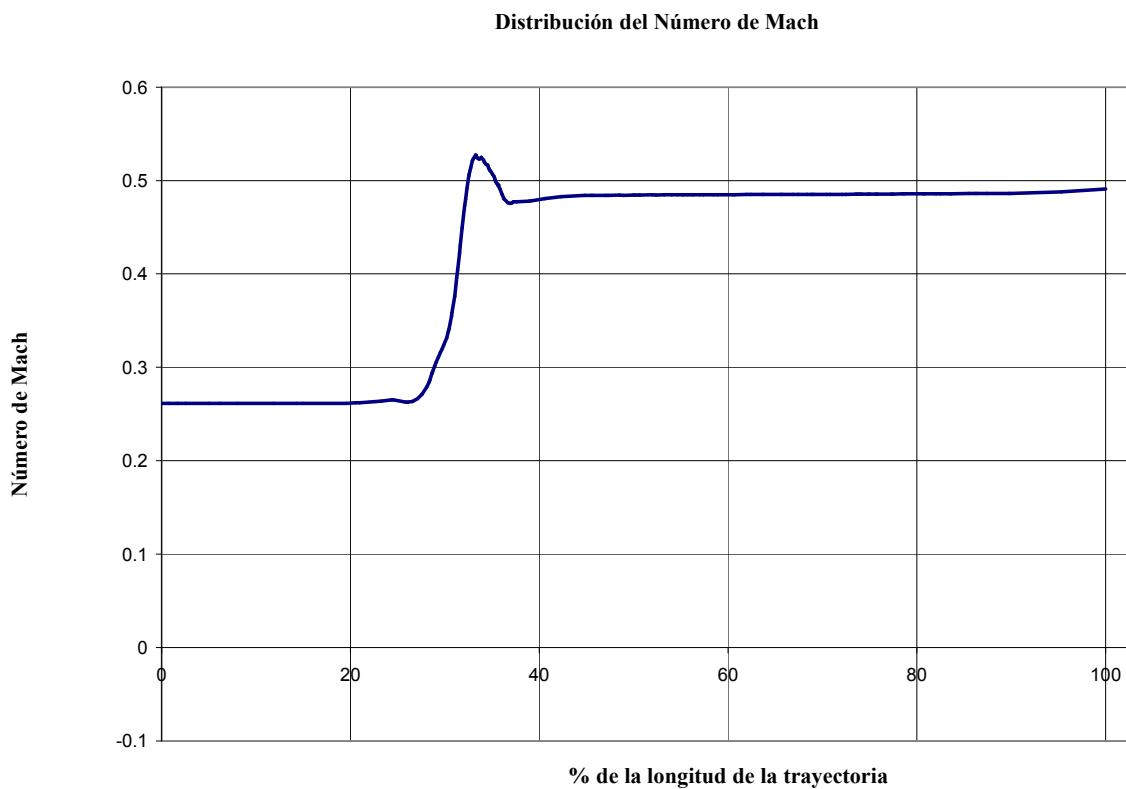


Figura 5.38 Distribución de la temperatura



**Figura 5.39: Distribución del número de Mach**

**Tabla 5.5 Propiedades termodinámicas a la entrada y a la salida de la fila de álabes**

Punto/ Propiedades	Presión [kPa]	Temperatura [K]	Velocidad [m/s]
Entrada	241.4891	986.4400	160.8402
Salida	212.9628	960.0000	294.7528

En este caso, de las figuras 5.36-5.39 y de la tabla 5.5, la caída de la presión de estancamiento será:

$$p_{01} - p_{02} = 4274.3172 \text{ Pa}$$

En consecuencia, el coeficiente de pérdidas del perfil de los álabes del rotor es:

$$Y_p = \frac{p_{01} - p_{02}}{p_{02} - p_2} = \frac{4274.3172}{248476.2073 - 212962.8624} = 0.12$$

Que resulta ser casi seis veces el valor calculado según el método de Ainley y Mathieson. Añadiendo este coeficiente del perfil, al valor correspondiente a las pérdidas secundarias, calculado en el capítulo 4 según el método de Ainley y Mathieson, resulta:

$$Y = (Y)_R = Y_p + (Y_s + Y_k) = 0.12 + 0.1785 = 0.3$$

Con lo que el rendimiento del escalonamiento será:

$$\eta_s \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{C_a}{U} \left[ \frac{\lambda_R \sec^2 \beta_3 + (T_3/T_2) \lambda_N \sec^2 \alpha_2}{\tan \beta_3 + \tan \alpha_2 - (U/C_a)} \right]}$$

$$\eta_s \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{272}{340} \times \left[ \frac{\lambda_R \sec^2 (55^\circ) + (937.774/1002.45) \lambda_N \sec^2 (55.1166^\circ)}{\tan(55^\circ) + \tan(55.116^\circ) - (340/272)} \right]}$$

Donde:

$$\lambda_N = Y_N \left( \frac{T_2}{T_{O2}} \right) = 0.1533 \times \left( \frac{1002.45}{1100} \right) = 0.1397$$

$$\lambda_R = Y_R \left( \frac{T_3}{T_{O3rel}} \right) = 0.3 \times \left( \frac{937.774}{1035.8046} \right) = 0.2716$$

Entonces:

$$\eta_s \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{272}{340} \times \left[ \frac{0.2716 \times \sec^2 (55^\circ) + (937.774/1002.45) \times 0.1397 \times \sec^2 (55.1166^\circ)}{\tan(55^\circ) + \tan(55.116^\circ) - (340/272)} \right]}$$

$$\eta_s = 0.77$$

Comparando este valor con el obtenido por el método de Ainley y Mathieson resulta que no difieren mucho, siendo este último tan sólo un 0.06 mayor que el calculado anteriormente. Con lo que queda demostrada la eficacia del método de Ainley y Mathieson para predecir el comportamiento del escalonamiento en el punto de diseño.

# 6

## **Procedimiento para la simulación en COSMOSWorks**

En este capítulo se expondrá la manera en que se realiza un análisis de esfuerzos en el COSMOSWorks aplicándolo al diseño de nuestra turbina y aprovechando de esta manera todas las ventajas que puede ofrecer este Software orientado al diseño mecánico.

Como ya se dijo anteriormente el desempeño de la etapa de nuestra turbina debe ser compatible con los niveles permisibles de los esfuerzos que se presentan durante las más severas condiciones de operación. Así pues, el rotor de la turbina debe ser capaz de soportar los grandes esfuerzos centrífugos y térmicos originados por las grandes velocidades de rotación y a los saltos térmicos que se dan entre la periferia y el centro del disco. Con este fin, en este capítulo se determinarán los esfuerzos mediante el software COSMOSWorks y se comparará con aquellos que son permisibles para el buen desempeño de la turbina. De esta manera se podrá determinar el coeficiente de seguridad cuyo valor nos indicará si la turbina puede o no puede resistir los esfuerzos presentes durante su funcionamiento.

Antes de realizar un análisis en COSMOSWork, se debe definir un estudio de diseño. Un estudio de diseño es definido por los siguientes factores:

- Dimensiones del modelo
- Definición del tipo de análisis y de estudio
- Definición de las propiedades del material
- Cargas y condiciones límites

Las dimensiones del modelo se establecen por defecto cuando se crea una pieza o ensamblaje en el SolidWork, mientras que los otros factores deben ser establecidos por el usuario siguiendo ciertos procedimientos.

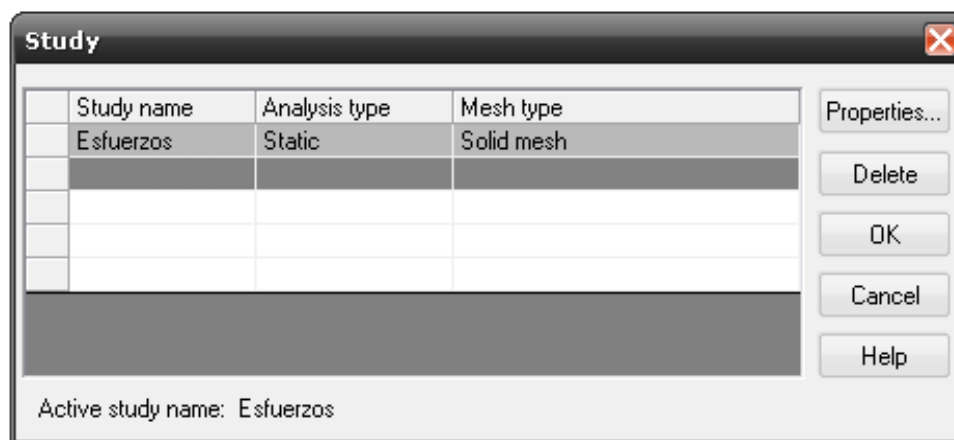
En los siguientes apartados se establecerán los pasos a seguir para determinar los esfuerzos centrífugos.

## 6.1 Crear un estudio para el análisis de esfuerzos centrífugos

Para crear un estudio, con el fin de realizar un análisis de los esfuerzos centrífugos, se debe de seguir los siguientes pasos:

1. Click derecho en el nombre del archivo ubicado en la parte superior del COSMOSWorks *Manager tree* y seleccionar *Study* , o Click en COSMOSWork , *Study*.
2. Sobre *Study Name* tipear el nombre del estudio, en este caso pondremos Esfuerzos.
3. En *Analysis Type* seleccionar *Static* ya que lo que se quiere es determinar los esfuerzos en condiciones de equilibrio dinámico o estático.
4. Sobre *Mesh type*, seleccionar *Solid*, con lo cual todos los elementos del mallado serán tetraédricos.
5. Click OK.

Inmediatamente COSMOSWorks crea el estudio en el COSMOSWork *Manager Tree* con el nombre Esfuerzos (Ver fig. 6.1)



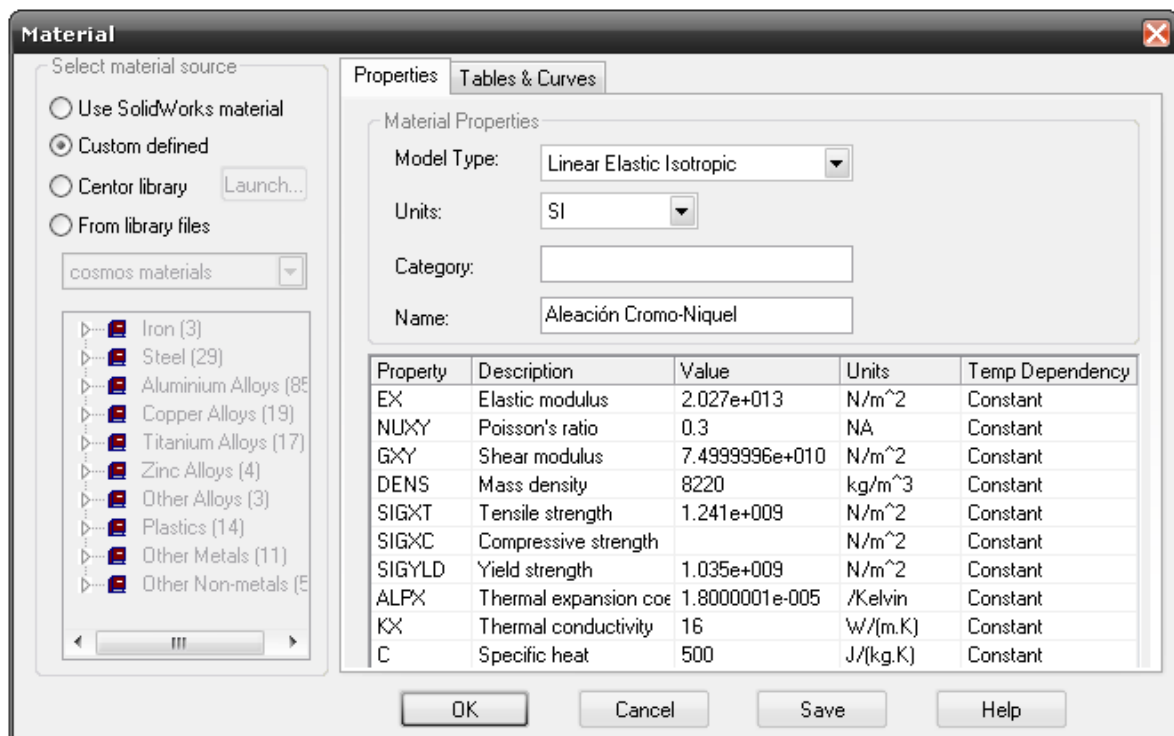
**Figura 6.1** Creando un estudio en el COSMOSWorks

## 6.2 Definiendo las propiedades del material

Para el análisis de los esfuerzos centrífugos se debe hacer lo siguiente:

1. En el COSMOSWorks *Manager Tree*, click derecho en el icono de la pieza y seleccionar *Apply/Edit Material*.
2. Sobre *Select Material Source*, click en *Custom Defined*, lo que quiere decir que el material y sus propiedades serán definidos por el usuario.
3. En *Material Properties*, dentro del menú desplegable *Model Type* seleccionar *Linear Elastic Isotropic* y en *Units* escogemos SI como las unidades que utilizaremos para establecer los valores de las propiedades. En *Name* ponemos el nombre del material que estamos definiendo y que en este caso será Aleación Cromo-Niquel.

4. A continuación procedemos a llenar las celdas con los valores de las propiedades que se requieren para la simulación, tal y como se muestra en la figura 6.2.
5. Click OK.



**Figura 6.2 Especificando las propiedades del material**

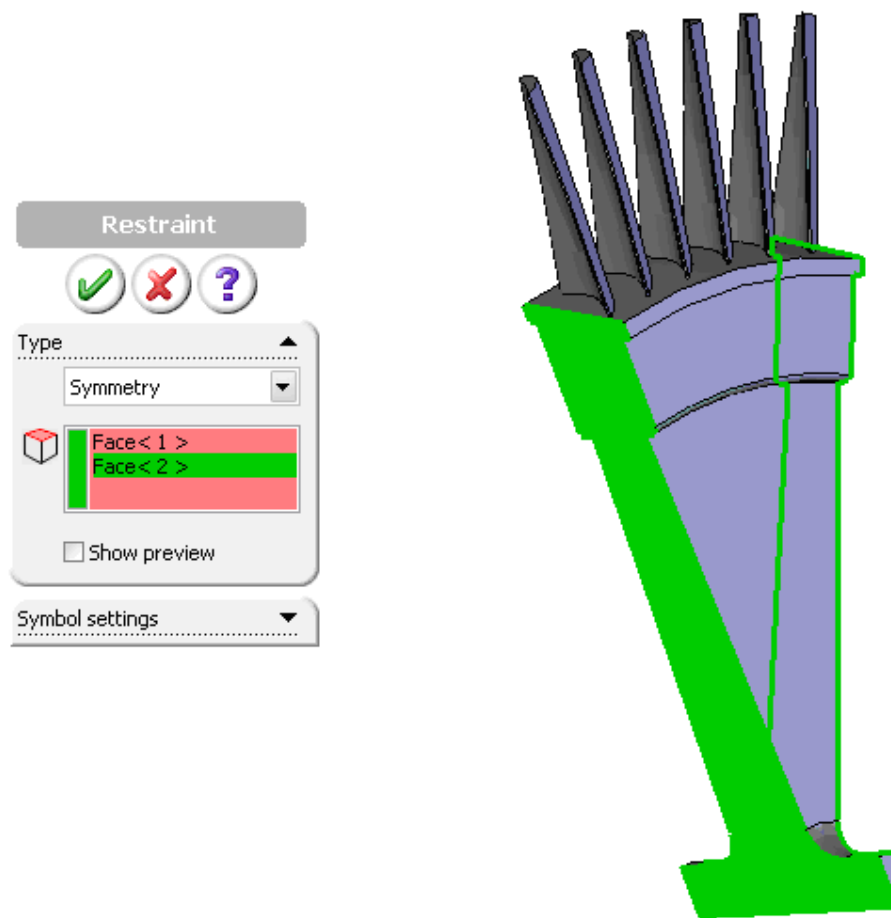
### 6.3 Definiendo las cargas y restricciones

Debido a la simetría que presenta la turbina es posible aplicar la opción *Symmetrical Restraints* del COSMOSWorks que puede ayudarnos a reducir el tamaño del problema y a obtener resultados más exactos.

Así pues para definir las cargas y restricciones en el análisis de los esfuerzos centrífugos se debe de seguir los siguientes pasos:

1. En el icono *Load Restraints* del COSMOSWorks *Manager Tree* hacer click derecho y seleccionar *Restraints*.
2. En *Type* escoger la opción *Symmetry* y seleccionar las dos caras laterales del disco tal y como se muestra en la figura 6.3.
3. Click OK.



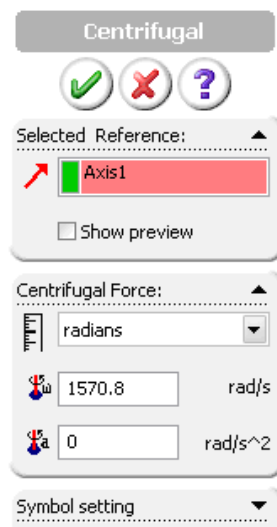


**Figura 6.3 Definiendo las cargas y restricciones**

Con esto estamos simplificando el problema a sólo una parte reducida de la turbina, sabiendo que el estado de esfuerzos es simétrico debido a la simetría de la pieza.

A continuación se procede a definir la carga a la que estará sometida la pieza, para lo cual se debe de seguir los siguientes pasos:

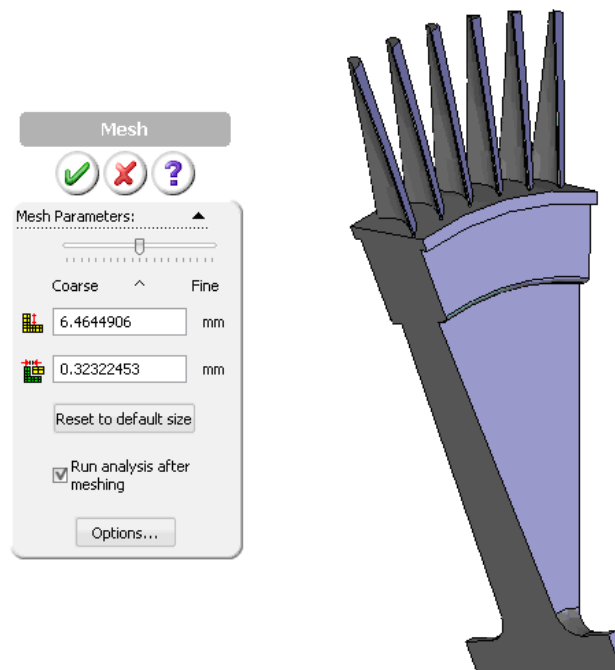
1. En el icono *Load Restraints* del *COSMOSWorks Manager Tree* hacer click derecho y seleccionar *Centrifugal*.
2. En *Selected Reference* escoger el eje de la turbina el cual ha sido previamente creado y que en este caso está con el nombre *Axis 1*.
3. En el menú desplegable del *Centrifugal Force* escoger *radians* y tipear una velocidad angular y aceleración angular de 1570.8 rad/s y 0 rad/s<sup>2</sup> respectivamente (Ver fig. 6.4).
4. Click OK.



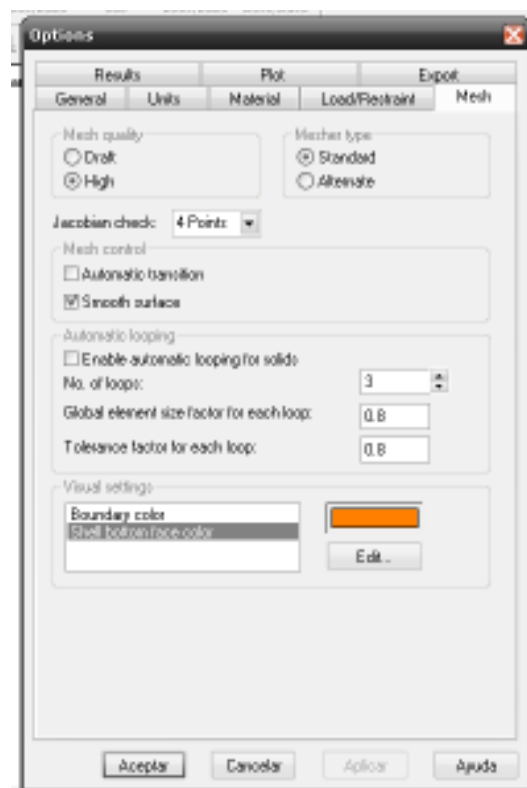
**Figura 6.4 Definiendo las cargas y restricciones**

#### 6.4 Definiendo el mallado.

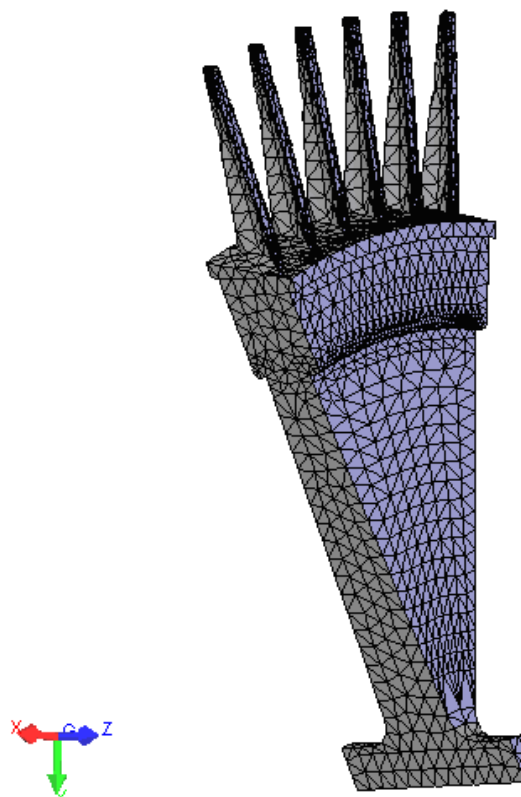
1. En el icono *Mesh* del COSMOSWorks *Manager Tree* hacer click derecho y seleccionar *Create*.
2. En el Menú *Mesh Parameters* hacer click en *Run anaiysis after meshing* con lo que el programa iniciará los cálculos inmediatamente después de crear el mallado. Dejar los demás valores por defecto (Ver fig. 6.5).
3. Hacer click en el botón *Options*.
4. En *Mesh Control* seleccionar la opción *Automatic transition* y dejar los demás valores por defecto. Con ésto el programa realizará el mallado aumentando el número de elementos en aquellas zonas donde hay cambios de sección (Ver fig. 6.6).



**Figura 6.5 Definiendo el mallado**



Model name: esfuerzo mecanico  
 Study name: Esfuerzos  
 Mesh type: Solid mesh



**Figura 6.6 Definiendo el mallado**

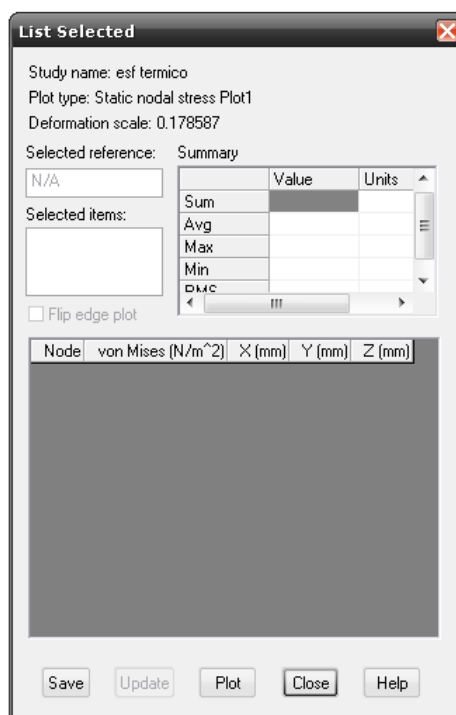
## 6.5 Acceso a los resultados

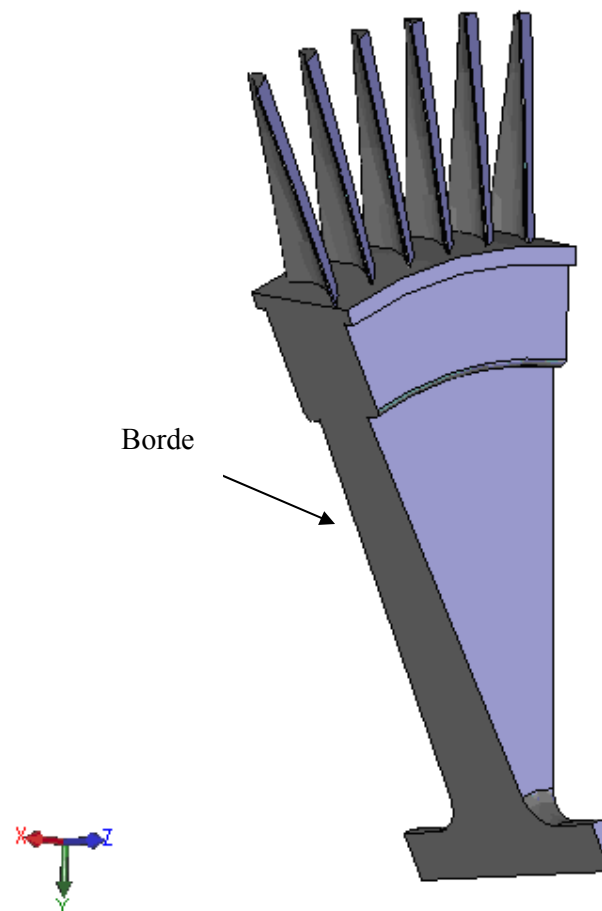
Luego de realizar los cálculos, COSMOSWorks guarda los resultados en forma gráfica en diferentes folders ubicados en el COSMOSWorks *Manager Tree*. Cada uno de estos folders tienen un nombre que se relaciona con el tipo de resultado que contiene, así pues, se puede encontrar el folder Stress que contiene la distribución del esfuerzo equivalente de Von Misses visualizado mediante una escala de colores, también puede encontrarse el folder Design Check que contiene la distribución de los factores de seguridad. De los 6 que pueden encontrarse, sólo nos interesan los dos que acabamos de mencionar, ya que aquellos nos permitirán predecir el desempeño del rotor ante las cargas centrífugas y térmicas.

## 6.6 Presentación de resultados

En nuestro caso, aparte de los gráficos contenidos en el COMOSWorks *Manager Tree*, nos interesa ver los valores numéricos y la variación de la distribución de esfuerzos equivalentes de Von Misses y del factor de seguridad, por lo que debemos seguir los siguientes pasos:

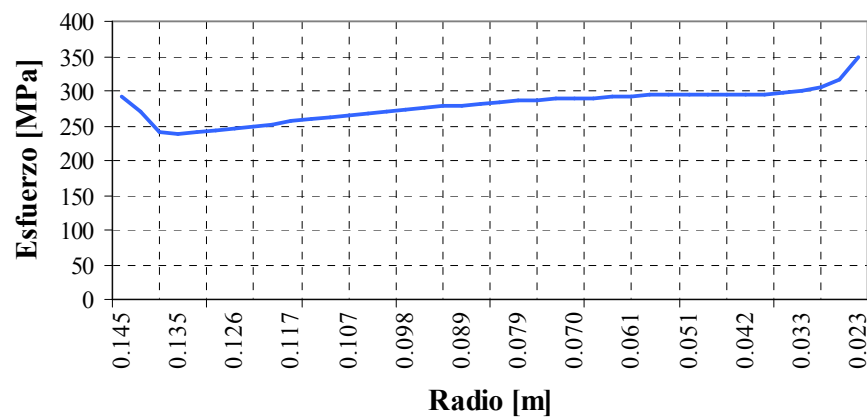
1. Hacer doble click en el Plot 1 del folder *Stress*, con el fin de activar estos resultados.
2. Hacer click derecho en el Plot 1 y seleccionar *List Select*, y en el cuadro de diálogo que aparece se debe elegir el borde en donde se quiere ver los resultados luego hacer click en *Update* para generar los valores de los esfuerzos en dicho borde. Estos resultados pueden ser guardados como un archivo del Excel haciendo click en *Save*. En la figura 6.8 pueden verse los resultados a los que se llega si se elige como borde la línea inclinada ubicada entre la periferia y el centro que define la forma del perfil del disco.





**Figura 6.7 Borde en el que se obtendrán los esfuerzos centrífugos**

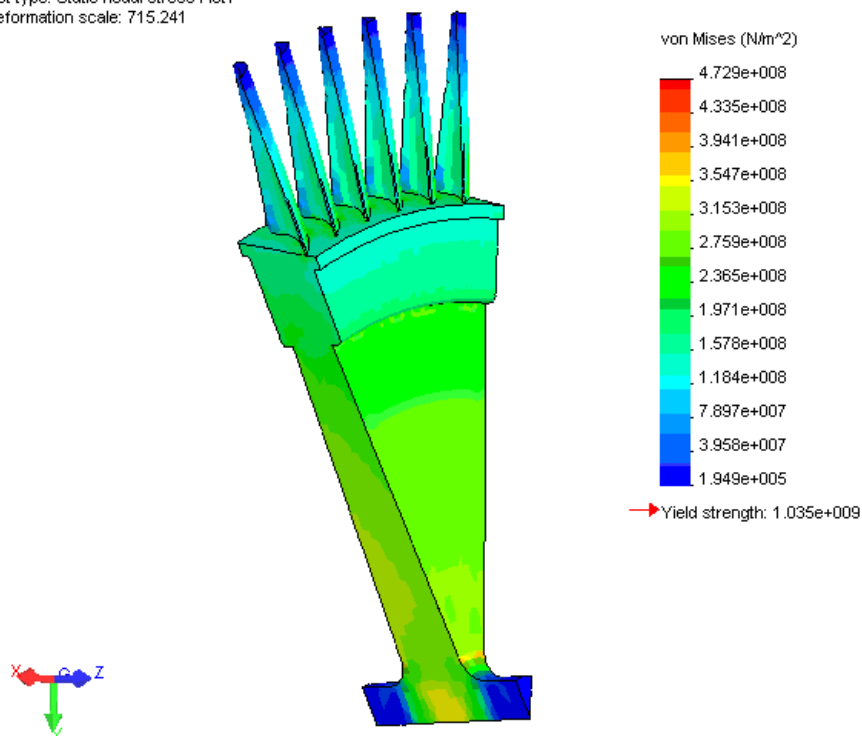
### **Esfuerzo centrífugo de Von Misses**



**Figura 6.8 Distribución de los esfuerzos centrífugos**

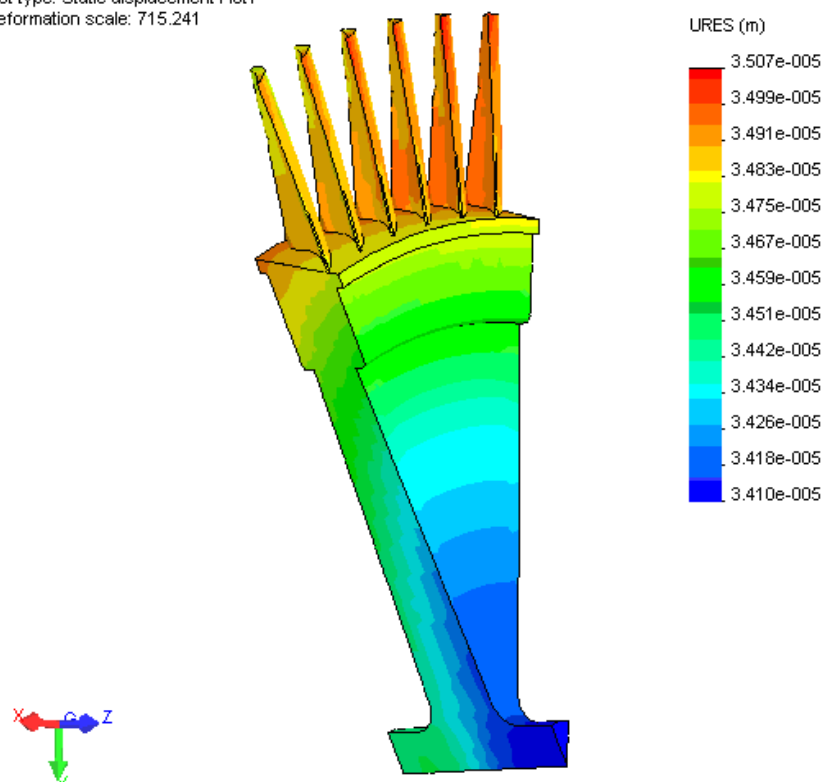
En las figuras 6.9-6.11, se muestran las diferentes formas en que pueden ser presentados los resultados contenidos en el COSMOSWorks *Manager Tree*.

Model name: esfuerzo mecanico  
 Study name: Esfuerzos  
 Plot type: Static nodal stress Plot1  
 Deformation scale: 715.241



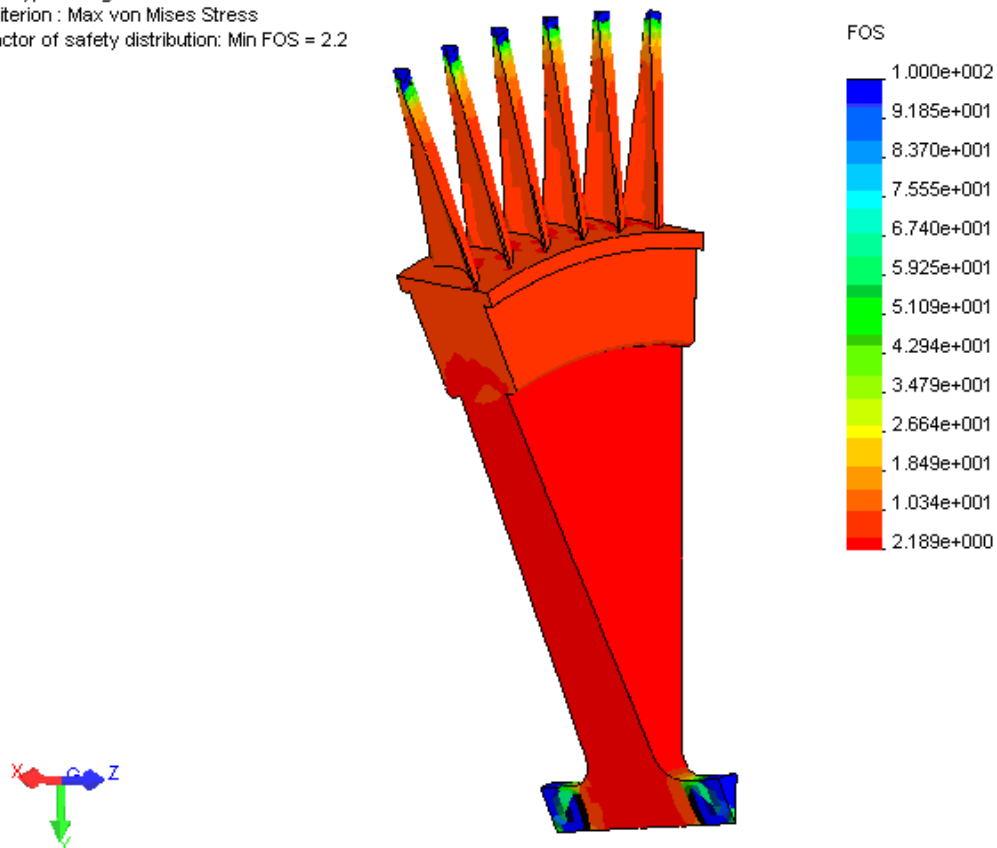
**Figura 6.9 Distribución de los esfuerzos centrífugos de Von Mises**

Model name: esfuerzo mecanico  
 Study name: Esfuerzos  
 Plot type: Static displacement Plot1  
 Deformation scale: 715.241



**Figura 6.10 Desplazamientos**

Model name: esfuerzo mecanico  
 Study name: Esfuerzos  
 Plot type: Design Check Plot1  
 Criterion : Max von Mises Stress  
 Factor of safety distribution: Min FOS = 2.2



**Figura 6.11 Distribución de los factores de seguridad**

Después de haber determinado los esfuerzos centrífugos en los siguientes apartados se establecerán los pasos a seguir para determinar la distribución de temperaturas y los esfuerzos térmicos.

### 6.7 Crear un estudio para el análisis de la distribución de temperatura y de los esfuerzos térmicos

6. Click derecho en el nombre del archivo ubicado en la parte superior del COSMOSWorks *Manager tree* y seleccionar *Study* , o Click en COSMOSWork , *Study*.
7. Sobre *Study Name* tipear el nombre del estudio, en este caso pondremos Térmico.
8. En *Analysis Type* seleccionar *Thermal* ya que lo que se quiere es determinar la distribución de temperaturas en todo el cuerpo de la turbina y los correspondientes esfuerzos térmicos.
9. Sobre *Mesh type*, seleccionar *Solid*, con lo cual todos los elementos del mallado serán Tetraédricos.
10. Click OK.

Inmediatamente COSMOSWorks crea el estudio en el COSMOSWork Manager Tree consistente en dos partes, el primero con el nombre Térmico, que contiene todo lo relacionado con el cálculo de la distribución de temperaturas; y la segunda parte cuyo nombre es por defecto el nombre del archivo, el cual contiene todo lo referente al cálculo de

los esfuerzos térmicos, basándose en la distribución de temperaturas calculadas anteriormente. En resumen cada vez que se haga un análisis térmico en el COSMOSWorks, como primer paso, será realizar un análisis de la distribución de temperaturas para luego dar lugar al cálculo de los esfuerzos.

## 6.8 Definiendo las propiedades del material

En el caso del análisis de la distribución de temperaturas y de los esfuerzos térmicos las propiedades dependen de la temperatura, entonces se debe seguir los siguientes pasos para especificar sus valores:

1. En el COSMOSWorks *Manager Tree*, click derecho en el icono de la pieza y seleccionar *Apply/Edit Material*.
2. Sobre *Select Material Source*, click en *Custom Defined* (Ver fig. 6.12).
3. En *Material Properties* seleccionar las opciones deseadas.
4. En la tabla de *Material Properties*, click en la celda de la propiedad que cambia con la temperatura y seleccionar *Temp dependency*. Se activa la ficha de *Tables and curves* (Ver fig. 6.13).
5. Elegir las unidades de la Temperatura y de la propiedad.
6. Típear los valores de la temperatura y de la propiedad en las celdas correspondientes (Ver figuras 6.13-6.18).
7. Si es que se quiere ver como cambia la propiedad con la temperatura a través de una curva, click en *View*.
8. Click OK.

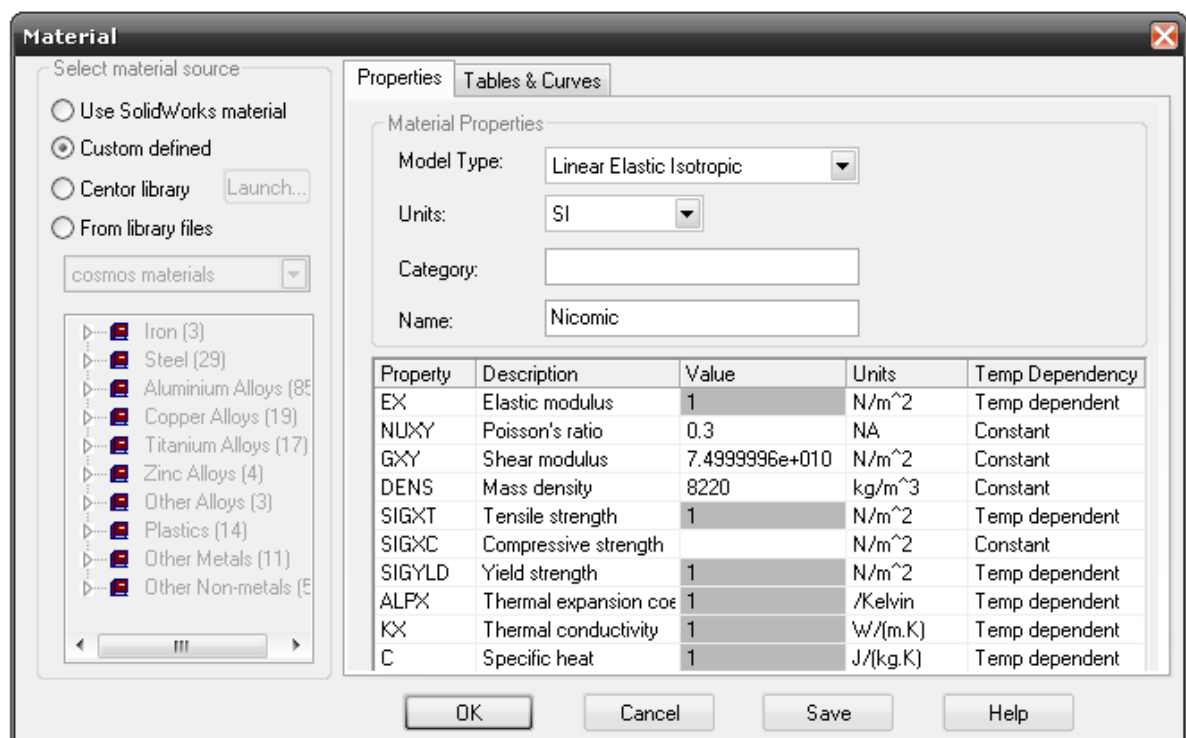
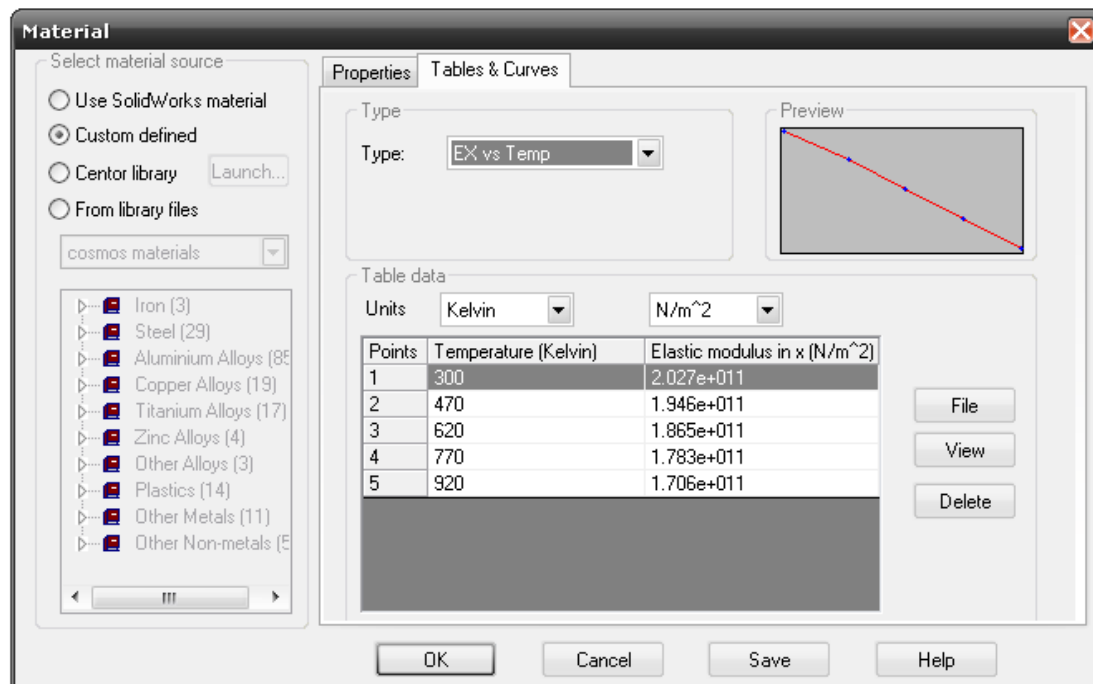
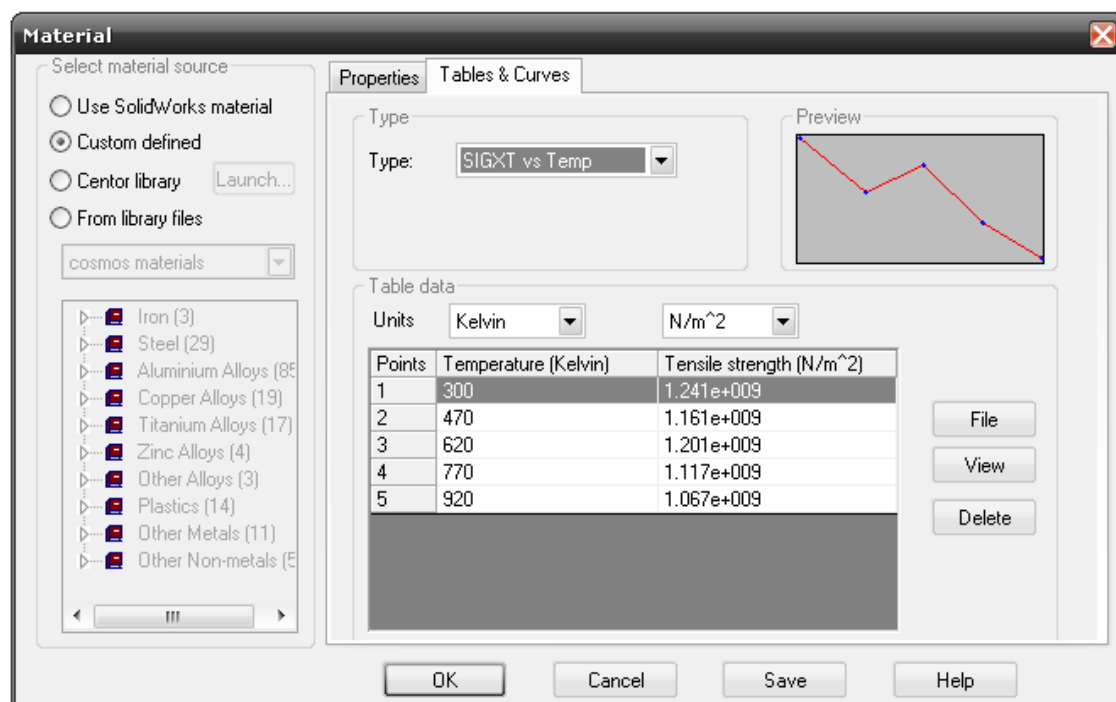


Figura 6.12 Definiendo las propiedades del material

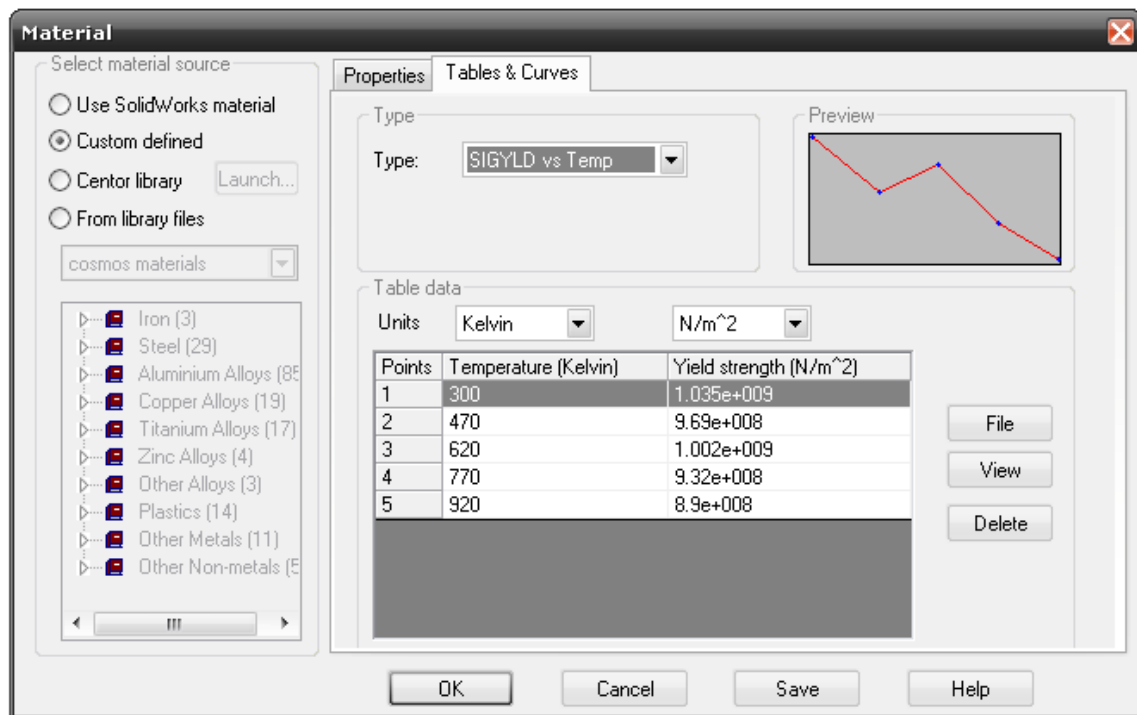




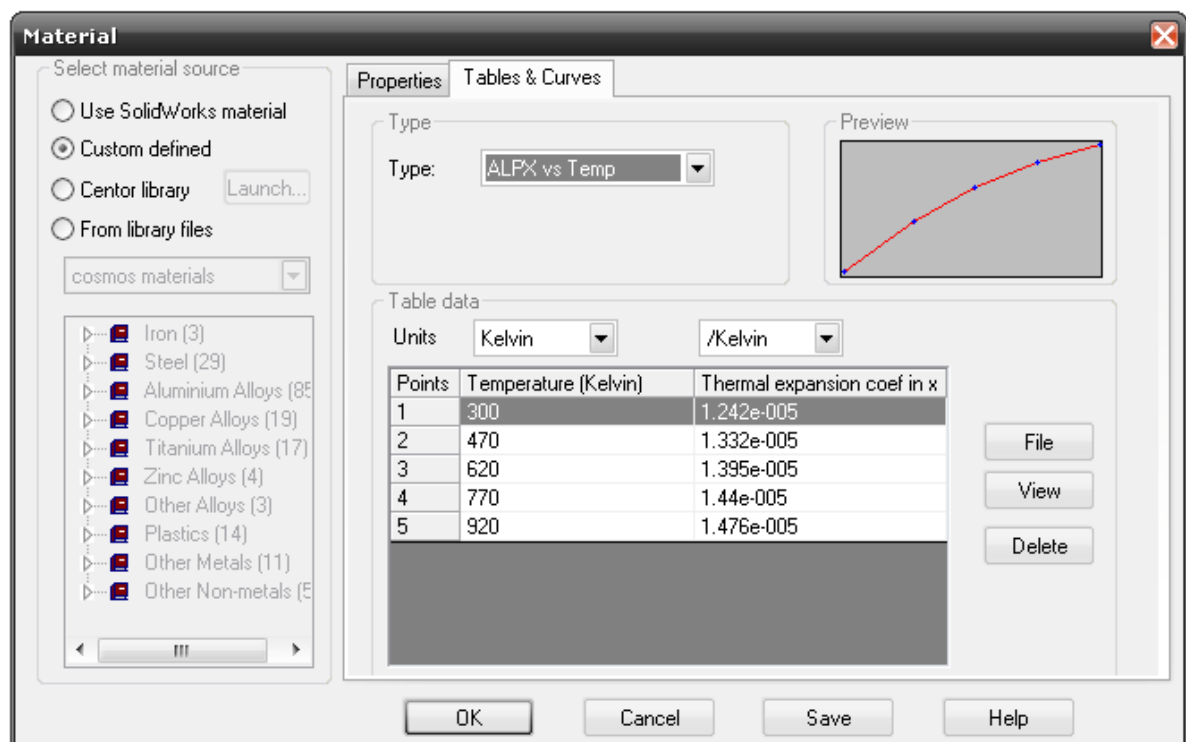
**Figura 6.13 Especificando el módulo de elasticidad**



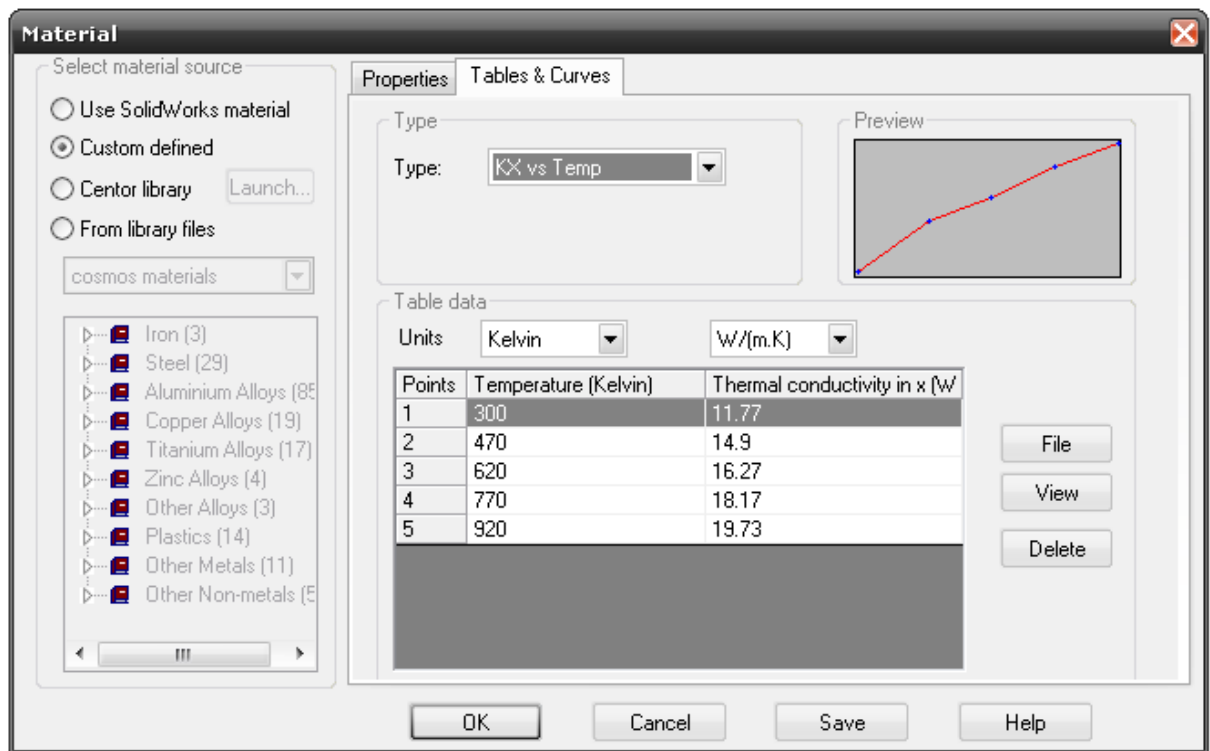
**Figura 6.14 Especificando los esfuerzos de rotura**



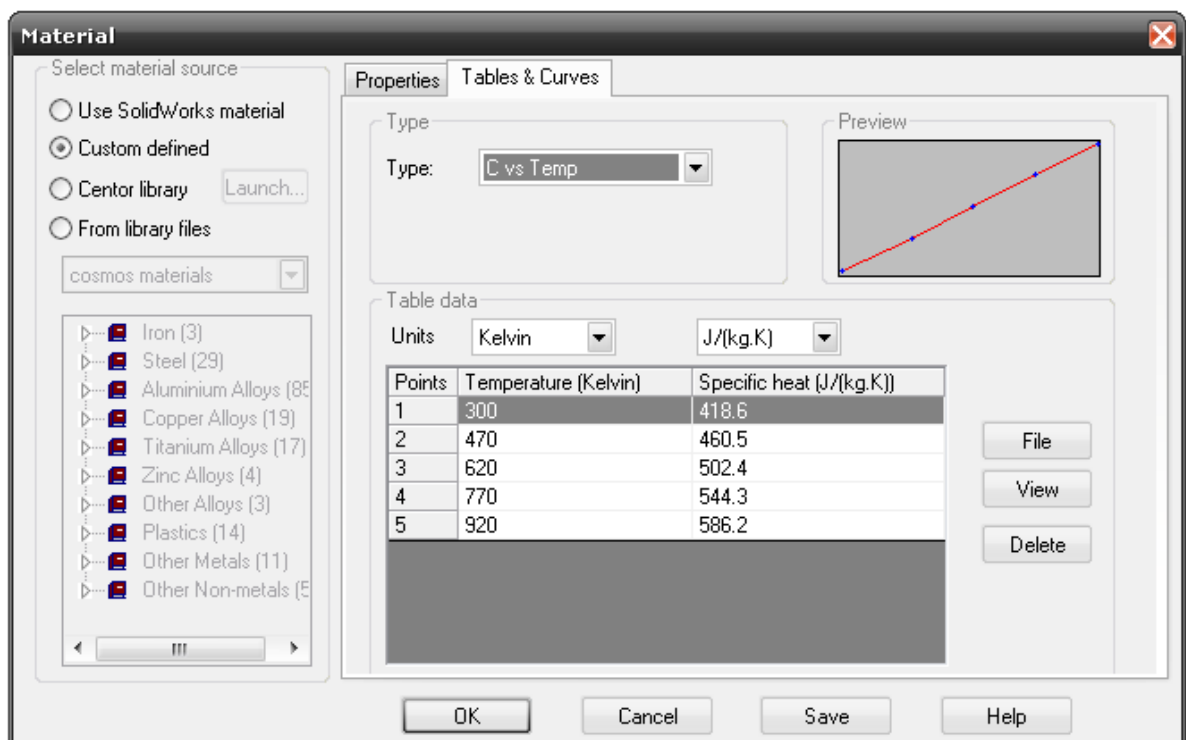
**Figura 6.15 Especificando el esfuerzo de fluencia**



**Figura 6.16 Especificando el coeficiente de dilatación térmica**



**Figura 6.17 Especificando la conductividad térmica**

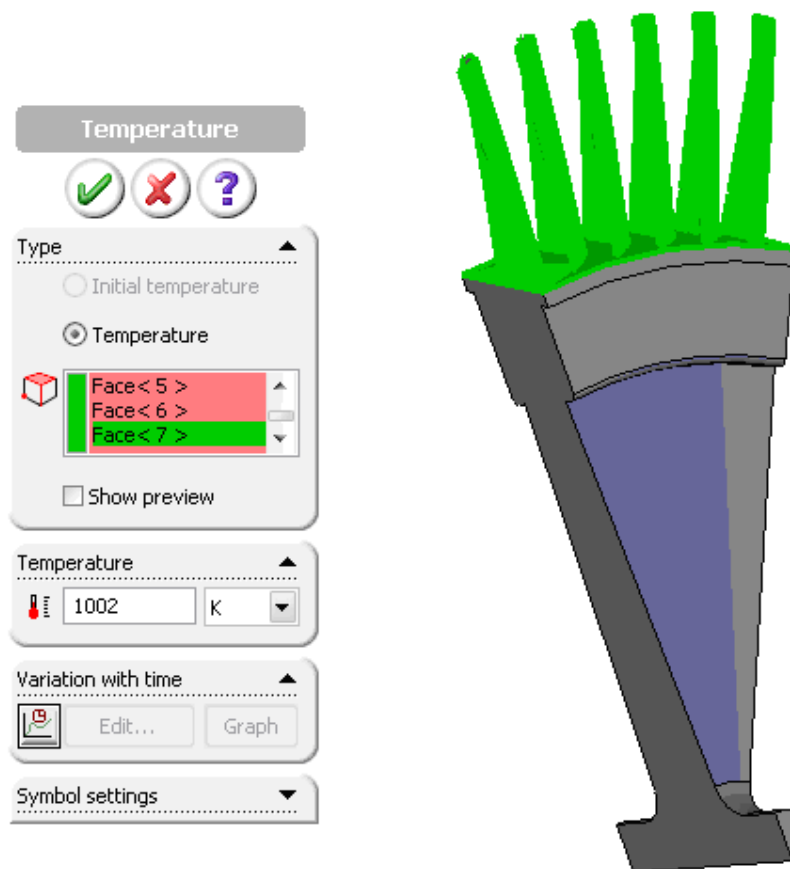


**Figura 6.18 Especificando el calor específico**

## 6.9 Definiendo las cargas y restricciones

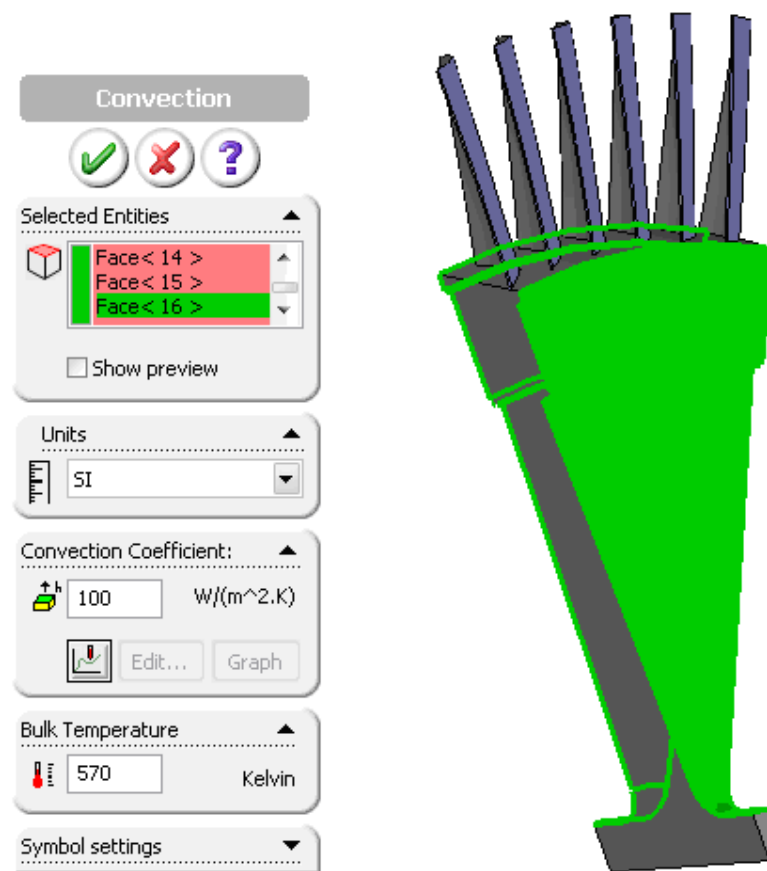
Para el cálculo de la distribución de temperaturas se debe proceder de la siguiente manera.

1. En el icono *Load Restraints* del COSMOSWorks *Manager Tree* hacer click derecho y seleccionar *Temperature*.
2. En *Type* seleccionar los álabes del disco tal y como se muestra en la figura 6.19.
3. En *Temperature* tipear 1002 K.
4. Click OK.



**Figura 6.19 Definiendo la temperatura en la periferia**

1. En el icono *Load Restraints* del COSMOSWorks *Manager Tree* hacer click derecho y seleccionar *Convection*.
2. En *Selected Entities* seleccionar las caras anterior y frontal del disco, tal y como se muestra en la figura 6.20.
3. En el menú desplegable *Units* escoger SI.
4. En *Convection Coefficient* tipear 100 W/m<sup>2</sup>K.
5. En *Bulk temperature* considerar 480 K.
6. Click OK.



**Figura 6.20** Definiendo el coeficiente de convección y la temperatura ambiente

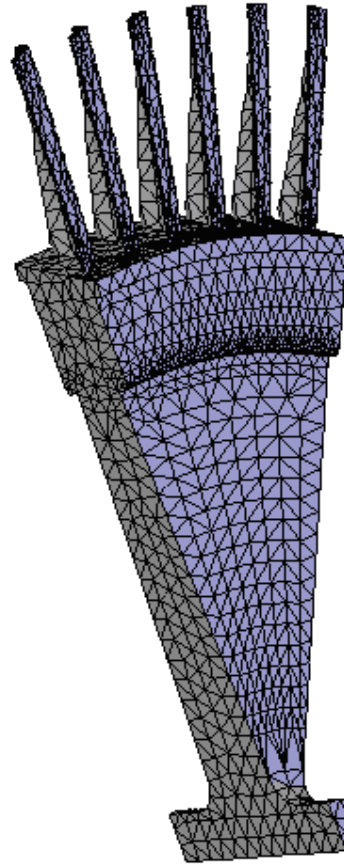
Las caras o superficies que no han sido incluidas dentro de las cargas y restricciones establecidas serán consideradas por el programa como superficies o paredes adiabáticas.

### 6.10 Definiendo el mallado para el cálculo de la distribución de temperatura

Se debe seguir los siguientes pasos:

5. En el icono *Mesh* del COSMOSWorks *Manager Tree* hacer click derecho y seleccionar *Create*.
6. En el Menú *Mesh Parameters* hacer click en *Run Analysis after meshing* con lo que el programa iniciará los cálculos inmediatamente después de crear el mallado. Dejar los demás valores por defecto (Ver fig. 6.21).
7. Hacer click en el botón *Options*.
8. En *Mesh Control* seleccionar la opción *Automatic transition* y dejar los demás valores por defecto.
9. Click OK.

Model name: esfuerzo termico  
Study name: termico  
Mesh type: Solid mesh



**Figura 6.21 Definiendo el mallado**

### **6.11 Acceso a los resultados**

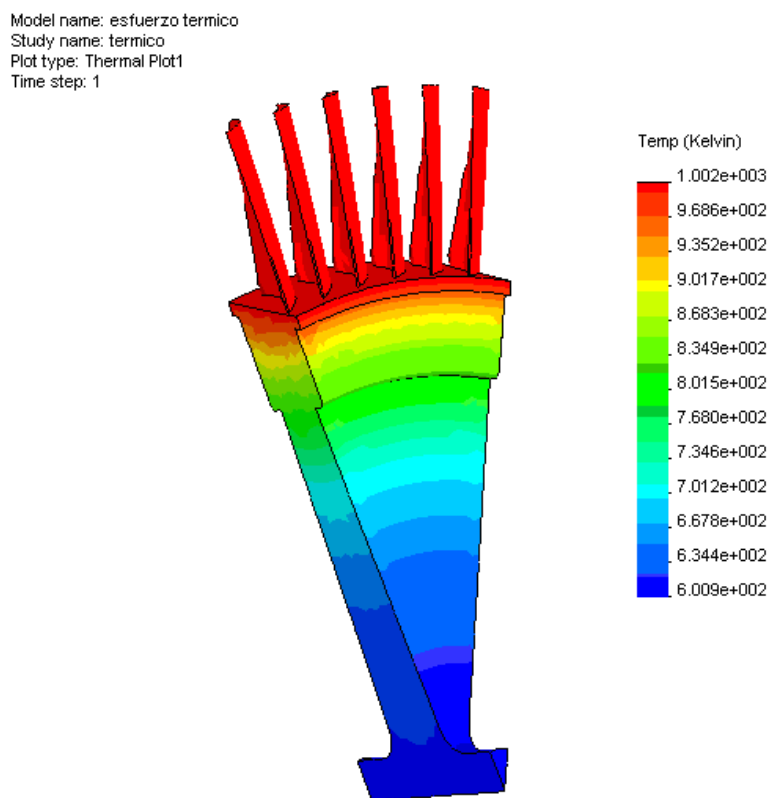
Como en el caso de los esfuerzos centrífugos, COSMOSWorks guarda los resultados del análisis térmico en forma gráfica en un folder ubicado en el COSMOSWorks *Manager Tree*.

### **6.12 Presentación de resultados**

Aparte de los gráficos contenidos en el COMOSWorks *Manager Tree*, nos interesa ver los valores numéricos de la distribución de temperaturas, por lo que debemos seguir los siguientes pasos:

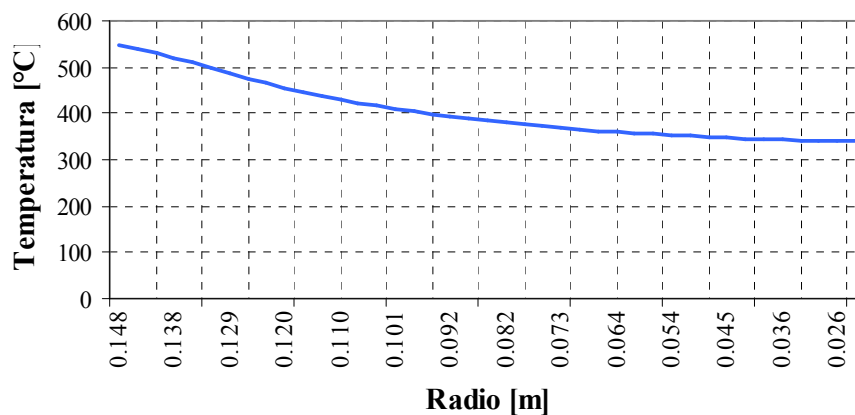
1. Hacer doble click en el Plot 1 del folder *Results*, con el fin de activar estos resultados.
2. Hacer click derecho en el Plot 1 y seleccionar *List Select*, y en el cuadro de diálogo que aparece se debe elegir el borde en donde se quiere ver los resultados que será

aquel que se utilizó en el caso de los esfuerzos centrífugos, luego hacer click en *Update* para generar los valores de las temperaturas en dicho borde. Estos resultados pueden ser guardados como un archivo del Excel haciendo click en *Save*. En las figuras 6.22-6.23 pueden verse los resultados a los que se llega.



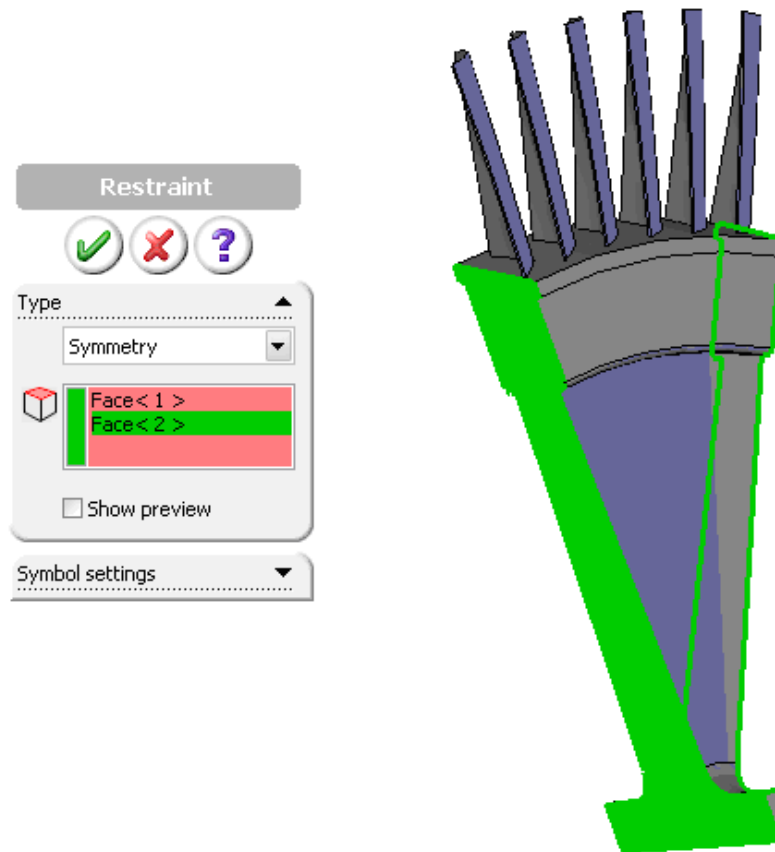
**Figura 6.22 Distribución de temperaturas**

### Distribución de temperatura



**Figura 6.23 Distribución de temperatura en el disco**

En el caso del análisis de los esfuerzos térmicos, la única restricción que se debe especificar es la condición de simetría, figura 6.24, tal y como se hizo para los esfuerzos centrífugos.



**Figura 6.24 Restricción para el análisis de los esfuerzos térmicos**

### 6.13 Definiendo el Mallado para el cálculo de los esfuerzos térmicos

Así como en el análisis de la distribución de temperaturas y de los esfuerzos centrífugos, en el análisis de los esfuerzos térmicos se debe de seguir los mismos pasos para definir el mallado:

### 6.14 Acceso a los resultados

Como en el caso de los esfuerzos centrífugos, COSMOSWorks guarda los resultados en forma gráfica en diferentes folders ubicados en el COSMOSWorks *Manager Tree*.

### 6.15 Presentación de resultados

Tanto para el análisis de la distribución de temperaturas como del análisis de los esfuerzos térmicos, aparte de los gráficos contenidos en el COMOSWorks *Manager Tree*,





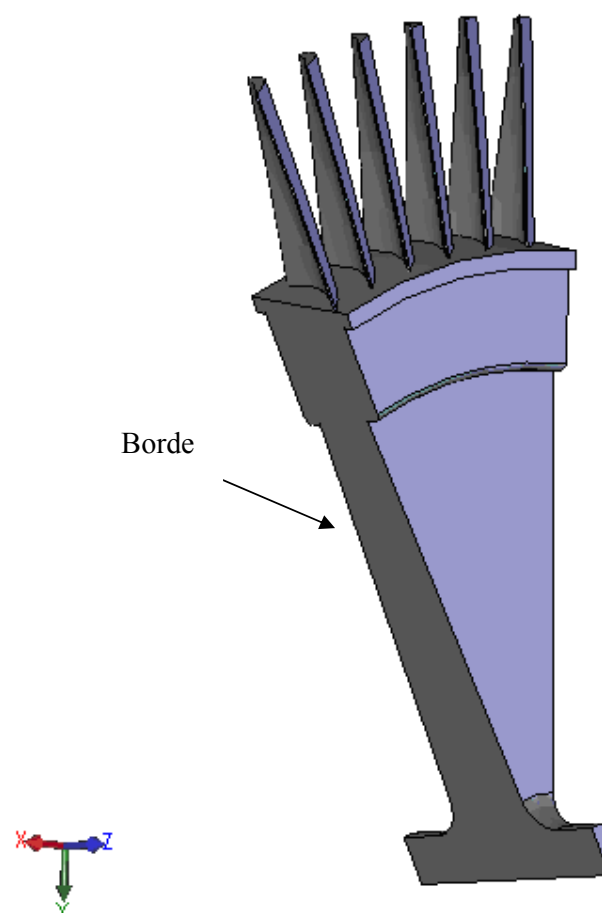


Figura 6.26 Borde en el que se obtendrán los esfuerzos térmicos

### Esfuerzos térmicos de Von Mises

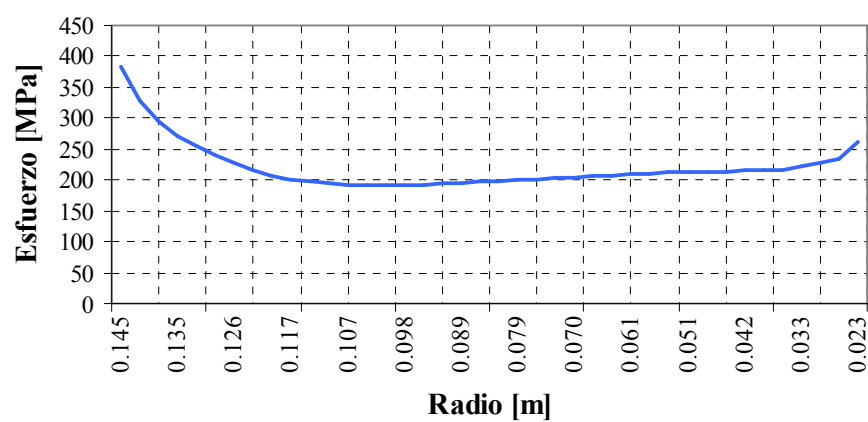
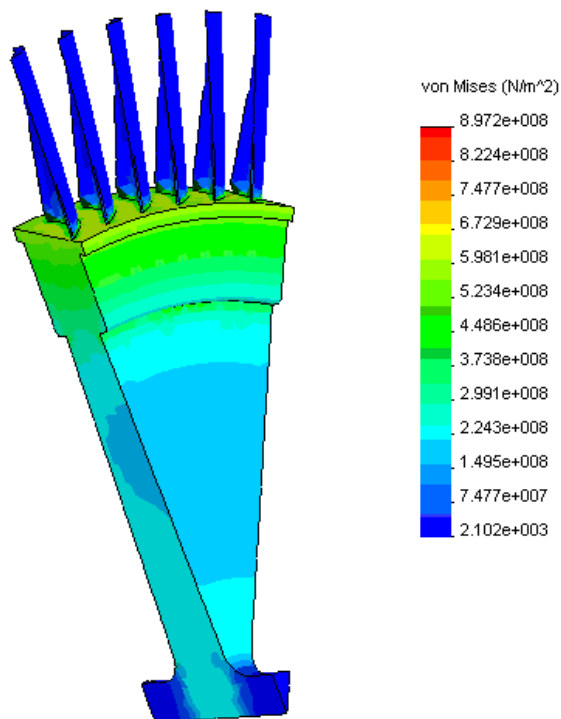


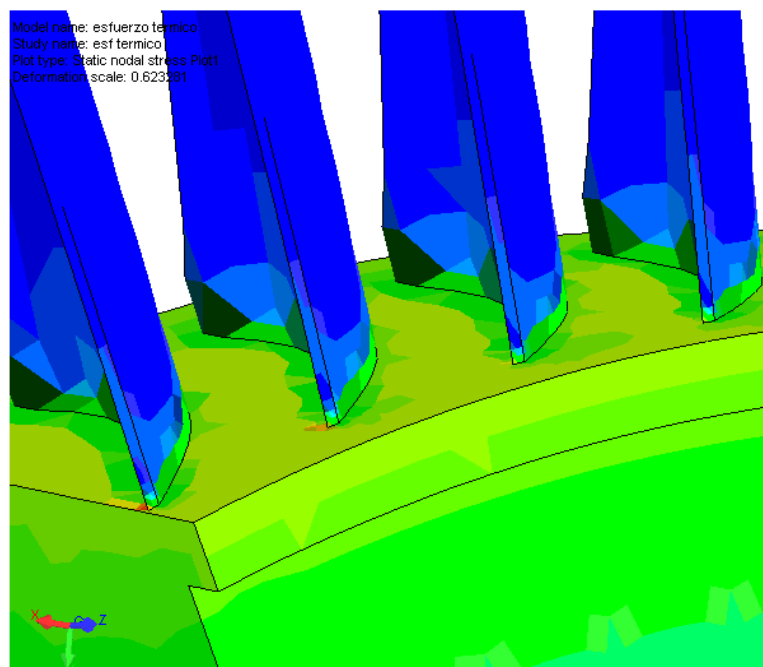
Figura 6.27 Esfuerzos térmicos en el disco

En las figuras 6.28 – 6.30, se muestran las diferentes formas en que pueden ser presentados los resultados contenidos en el COSMOSWorks *Manager Tree*.

Model name: esfuerzo termico  
Study name: esf termico  
Plot type: Static nodal stress Plot1  
Deformation scale: 0.623281

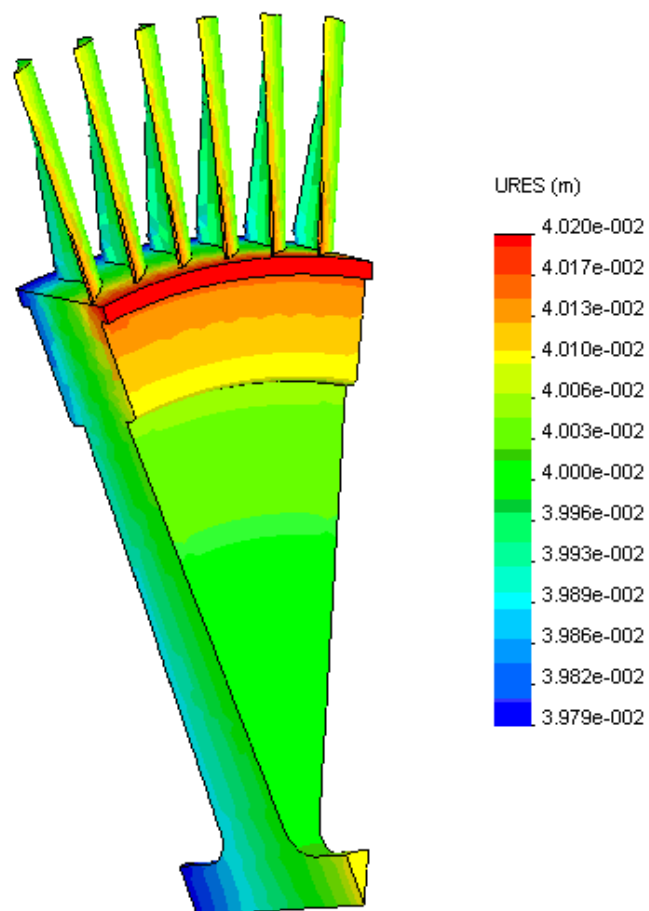


**Figura 6.28 Esfuerzos térmicos de Von Mises**



**Figura 6.29 Esfuerzos térmicos de Von Mises**

Model name: esfuerzo termico  
Study name: esf termico  
Plot type: Static displacement Plot1  
Deformation scale: 0.623281



**Figura 6.30 Desplazamientos**

## Conclusiones

En los capítulos del 1 al 3 se ha expuesto los conceptos básicos para el diseño de las turbina de gas de flujo axial, y en los restantes se aplicó la teoría vista en los capítulos anteriores al diseño de una pequeña turbina para un turborreactor. Además, se realizaron las simulaciones del flujo en los álabes del estator y del rotor y la simulación de los esfuerzos centrífugos y térmicos. El análisis permitió determinar el desempeño de la turbina en el punto de diseño y en forma aproximada a lo que podría encontrarse en la realidad.

El análisis del flujo a través de los álabes muestra que el proceso de expansión a través de nuestra turbina se llevará a cabo con un rendimiento promedio de 0.8 que puede considerarse satisfactorio, además, los coeficientes de seguridad obtenidos en el análisis de los esfuerzos centrífugos y térmicos dan cuenta que la turbina podrá desempeñarse eficientemente ante las cargas centrífugas pero no ante las cargas térmicas.

Hay que recalcar que los resultados obtenidos en las simulaciones de los esfuerzos térmicos han sido sólo una aproximación a los verdaderos valores que podría encontrarse en la práctica, ya que dichas simulaciones han sido realizados considerando algunas simplificaciones como son: la temperatura en la superficie de los álabes del rotor ha sido tomada igual al valor promedio de las temperaturas a la entrada y a la salida del mismo, lo cual no es cierto ya que la temperatura del fluido alrededor del álabe variará tanto en la dirección axial como en la dirección radial, además, existirá una diferencia de temperatura entre el fluido y la superficie del álabe, diferencia que permite la transferencia de calor por convección entre ambos, para luego ser transferido por conducción a través de los álabes y el disco. Así pues, para mayor precisión sería necesario considerar la verdadera distribución de temperaturas, la cual puede ser obtenido realizando las respectivas simulaciones del flujo a través de todo el álabe mediante el programa Cosmosfloworks. También, con la simulación del flujo en todo el álabe del rotor, es posible determinar la distribución de presiones, lo que permitiría calcular en forma más precisa los esfuerzos de flexión en la raíz tanto en la dirección axial como en la tangencial. Así mismo, se ha considerado que el disco es refrigerado con el aire que sale del compresor del turborreactor, cuya temperatura ha sido tomado igual a 300 °C.

Por otra parte, el rendimiento de la turbina es enormemente afectado por el juego de cabeza existente entre los álabes del rotor y la carcasa, por lo que este no debe ser demasiado grande y más bien el valor de 2.08 mm que ha sido considerado para el diseño de nuestra turbina, podría resultar mas bien alto, con lo que podría disminuirse, si fuera necesario, con el fin aumentar el rendimiento.

Finalmente, las simulaciones de los esfuerzos centrífugos y térmicos muestran que las deformaciones correspondientes a las cargas centrífugas son muy pequeñas en comparación con las deformaciones térmicas que llegan alcanzar valores de hasta 4 cm en la punta de los álabes y en la mayor parte del disco. Por esta razón, es importante tomar en cuenta estas deformaciones y su influencia en el juego de cabeza de 2.5 mm que debe de existir entre los álabes y la carcasa.

## **Bibliografía**

- [1] H. Cohen, G.F.C. Rogers y H.I.H. Saravanamuttoo. Gas turbine Theory. Cuarta Edición, 1996.
- [2] M. Lucini. Turbomáquinas de vapor y de gas. Cuarta edición, 1972. Pag. 203-217.
- [3] S.L. Dixon, B. Eng., Ph. D. Fluid Mechanics, Thermodynamics of Turbomachinery. Cuarta Edición, 1998.
- [4] David Gordon Wilson. The design of gas turbine engines Thermodynamics and Aerodynamics. Primera edición, 1991. Pag. 185-228.

