



UNIVERSIDAD
DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL
PIRHUA

INCIDENCIA DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO: ACTIVIDADES CON PAPEL Y GEOGEBRA

Karina Chumacero-Martínez

Piura, noviembre de 2016

Facultad de Ciencias de la Educación

Chumacero, K. (2016). *Incidenia de una propuesta de enseñanza para el aprendizaje de las líneas notables del triángulo: actividades con papel y Geogebra* (Tesis de pregrado en Educación especialidad en Matemática y Física). Universidad de Piura. Facultad de Ciencias de la Educación. Piura, Perú.



Esta obra está bajo una [licencia](#)
[Creative Commons Atribución-](#)
[NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú](#)

[Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura](#)

KARINA LIZBETH CHUMACERO MARTÍNEZ

**INCIDENCIA DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA EL
APRENDIZAJE DE LAS LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO:
ACTIVIDADES CON PAPEL Y GEOGEBRA**



**UNIVERSIDAD DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESPECIALIDAD MATEMÁTICA Y FÍSICA**

2016

APROBACIÓN

La tesis titulada *Incidencia de una propuesta de enseñanza para el aprendizaje de las líneas notables del triángulo: actividades con papel y Geogebra*, presentada por Karina Lizbeth Chumacero Martínez en cumplimiento con los requisitos para optar el Grado de Licenciada en Educación, fue aprobada por la asesora Mgtr. Emma Lizelly Carreño Peña y defendida el.....de.....del 2016 ante el Tribunal integrado por:

.....
Presidente

.....
Informante

.....
Secretario

AGRADECIMIENTOS

Agradezco infinitamente a mi familia, sobre todo a mi mamá por su apoyo incondicional en los momentos complicados, por cuidar largas horas a mi hijo y así poder avanzar esta investigación. A mi hijo, Luiz Favio, que con su mirada tierna me da ánimos para seguir adelante y no rendirme.

Finalmente, un agradecimiento especial a mi asesora Emma por su apoyo, tiempo, dedicación y sus grandes consejos como amiga, mamá y guía.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	3
1.1 Motivación y formulación del problema.....	3
1.2 Antecedentes de la investigación	5
1.3 Contextualización y objetivos de la investigación	7
CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO	9
2.1 Concepción de Educación, Aprendizaje y Enseñanza en el contexto de la Educación Peruana	9
2.2 Teorías del aprendizaje	11
2.2.1 La teoría de Piaget.....	11
2.2.2 La teoría de Bruner.....	13
2.2.3 La teoría de Ausubel	15
2.2.4 La teoría de Gagné	18
2.3 Las estrategias de enseñanza - aprendizaje	21
2.4 Capacidades a desarrollar en el área de matemática	22
2.5 Enseñanza – aprendizaje de la geometría: Niveles de Van Hiele	24
2.6 TIC: Tecnologías de la información y comunicación	26
2.6.1 Las TIC como estrategia de enseñanza - aprendizaje	29
2.6.2 El Geogebra como herramienta de enseñanza - aprendizaje	30

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	33
3.1 Características y diseño de la investigación	33
3.2 Muestra de estudio.....	34
3.3 Variables	34
3.4 Técnicas e instrumentos de recogida de información.....	37
3.4.1 Técnicas de recolección de información.....	37
3.4.2 Instrumentos de recolección de información	38
3.5 Análisis e interpretación de la información	48
3.5.1 El cuestionario	48
3.5.2 El pre test y post test.....	48
3.5.3 Actividad con papel	49
3.5.4 Actividad con el software GeoGebra.....	50
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	53
4.1 Análisis del cuestionario.....	53
4.2 Análisis de los resultados del pre test	63
4.3 Análisis de los resultados de la actividad con papel.....	83
4.4 Análisis de los resultados de la aplicación del GeoGebra	91
4.5 Análisis de los resultados del post test	111
CONCLUSIONES.....	131
COMENTARIOS FINALES Y CUESTIONES ABIERTAS	135
REFERENCIAS	137
APÉNDICES.....	143

LISTA DE TABLAS

Tabla 1.	Las teorías del aprendizaje	20
Tabla 2.	Secuencia de los exámenes y actividades.....	34
Tabla 3.	Indicadores de la investigación.....	36
Tabla 4.	Resumen cronológico de las técnicas aplicas en la investigación	39
Tabla 5.	Indicadores e ítems del pre test.....	64
Tabla 6.	Resumen de trazado de líneas notables del pre test.....	81
Tabla 7.	Resumen del trazado de alturas de la actividad con papel.....	84
Tabla 8.	Resumen del trazado de medianas de la actividad con papel.....	86
Tabla 9.	Resumen del trazado de mediatrices de la actividad con papel.....	87
Tabla 10.	Resumen del trazado de bisectrices interiores de la actividad con papel	89
Tabla 11.	Estructura del desarrollo de la actividad “GeoGebra”	91
Tabla 12.	Resumen del trazado de alturas de la actividad GeoGebra.....	103
Tabla 13.	Resumen del trazado de medianas de la actividad GeoGebra.....	105
Tabla 14.	Resumen del trazado de mediatrices de la actividad GeoGebra.....	109
Tabla 15.	Resumen del trazado de bisectrices de la actividad GeoGebra.....	110
Tabla 16.	Indicadores e Ítems del post test.....	112

Tabla 17.	Tabla de resumen del post test	122
Tabla 18.	Comparación entre pre test y post test	124
Tabla 19.	Estadísticas de muestras emparejadas	125
Tabla 20.	Prueba de muestras emparejadas.....	126
Tabla 21.	Resumen de los resultados del pre y post test	126

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.	Modos de aprendizaje según Ausubel.....	17
Figura 2.	Cuestionario aplicado al iniciar la investigación	40
Figura 3.	Contenido del Pre Test.....	42
Figura 4.	Contenido del Post Test (Parte 1).....	43
Figura 5.	Contenido del Post Test (Parte 2).....	44
Figura 6.	Contenido del Post Test (Parte 3).....	45
Figura 7.	Modelo de Ficha de Observación (actividad con papel).....	46
Figura 8.	Modelo de Ficha de Observación (actividad con GeoGebra).....	47
Figura 9.	Esquema de Metodología de la Investigación.....	51
Figura 10.	Resultados del ítem nº1 del cuestionario.....	54
Figura 11.	Resultados del ítem nº2 del cuestionario.....	54
Figura 12.	Resultados del ítem nº3 del cuestionario.....	55
Figura 13.	Resultados el ítem nº4 del cuestionario.....	56
Figura 14.	Resultados del ítem nº5 del cuestionario.....	57
Figura 15.	Resultados del ítem nº6 del cuestionario.....	58
Figura 16.	Resultados del ítem nº7 de cuestionario.....	59
Figura 17.	Resultados del ítem nº8 del cuestionario.....	60
Figura 18.	Resultados del ítem nº 9 del cuestionario.....	61
Figura 19.	Resultados del ítem nº10 del cuestionario.....	62
Figura 20.	Resultados del ítem nº11 del cuestionario.....	63
Figura 21.	Respuesta de una estudiante del ítem Nº 1; Nº 2 y Nº 3 del pre test	65
Figura 22.	Respuesta de una estudiante al ítem N º4 del pre test.	65
Figura 23.	Frecuencia relativa de los ítems nº1 al nº4 del pre test.	66

Figura 24.	Explicación del ítem N° 5 del pre test.....	67
Figura 25.	Frecuencia relativa con respecto al ítem N° 5 del pre test.....	68
Figura 26.	Explicación del ítem N° 6 del pre test.....	69
Figura 27.	Frecuencia relativa del ítem n°6 de pre test.	70
Figura 28.	Respuesta del ítem n°7 del pre test.	71
Figura 29.	Frecuencia relativa del ítem n°7 de pre test.	71
Figura 30.	Trazado de alturas en el triángulo acutángulo (pre test).	72
Figura 31.	Trazado incorrecto de alturas en el pre test (parte 1).....	73
Figura 32.	Trazado incorrecto de alturas en el pre test (parte 2).....	73
Figura 33.	Trazado correcto de las alturas en el pre test.	74
Figura 34.	Trazado incorrecto de alturas en triángulo obtusángulo (pre test).	74
Figura 35.	Frecuencia relativa del trazado de alturas en el pre test.....	75
Figura 36.	Trazado incorrecto de mediatrices en el pre test (parte 1).....	76
Figura 37.	Trazado incorrecto de mediatrices en el pre test (parte 2).....	76
Figura 38.	Frecuencia relativa del trazado de mediatrices en el pre test.....	77
Figura 39.	Trazado correcto de las medianas en el pre test (parte 1).....	78
Figura 40.	Trazado correcto de las medianas en el pre test (parte 2).....	78
Figura 41.	Frecuencia relativa del trazado de medianas en el pre test.....	79
Figura 42.	Trazado incorrecto de las bisectrices en el pre test.	80
Figura 43.	Trazado correcto de bisectrices interiores en el pre test.....	80
Figura 44.	Frecuencia relativa del trazado de bisectrices interiores en el pre test.....	81
Figura 45.	Histograma de los resultados del pre test.	82
Figura 46.	Trazado correcto de alturas en actividad con papel.....	84
Figura 47.	Trazado de las medianas en actividad con papel.	85
Figura 48.	Trazado incorrecto de mediatrices en actividad con papel.....	86
Figura 49.	Trazado correctos de mediatrices en actividad con papel.....	87

Figura 50.	Trazado de las bisectrices interiores en actividad con papel.	88
Figura 51.	Frecuencia relativa de la actividad con papel.	90
Figura 52.	Barra de herramientas del software GeoGebra.	92
Figura 53.	Ícono de la mediatriz del GeoGebra.	93
Figura 54.	Circunferencia circunscrita en un triángulo acutángulo.	94
Figura 55.	Comparación del trazado de mediatrices en el triángulo rectángulo y obtusángulo.	94
Figura 56.	Ícono de bisectriz.	95
Figura 57.	Punto de intersección de bisectrices en triángulo acutángulo.	95
Figura 58.	Ícono de ángulo del GeoGebra.	96
Figura 59.	Medida de ángulos de los vértices del triángulo.	96
Figura 60.	Resultados de la actividad del GeoGebra.	98
Figura 61.	Histograma del proceso “actividad del GeoGebra”.	99
Figura 62.	Trazado de alturas con el GeoGebra (parte 1).	101
Figura 63.	Trazado de alturas con el GeoGebra (parte 2).	102
Figura 64.	Trazado de las alturas con el GeoGebra (parte 3).	102
Figura 65.	Trazado de las medianas con el GeoGebra (parte 1).	104
Figura 66.	Trazado de las medianas con el GeoGebra (parte 2).	104
Figura 67.	Trazado de mediatrices con el GeoGebra (parte 1).	106
Figura 68.	Trazado de mediatrices con el GeoGebra (parte 2).	106
Figura 69.	Trazado de las mediatrices con el GeoGebra (parte 3). ...	107
Figura 70.	Trazado de las mediatrices con el GeoGebra (parte 4). ...	107
Figura 71.	Trazado de las mediatrices con el GeoGebra (parte 5). ...	108
Figura 72.	Trazado de las mediatrices con el GeoGebra (parte 6). ...	109
Figura 73.	Trazado de las bisectrices con el GeoGebra.	110
Figura 74.	Frecuencia relativa de la actividad GeoGebra.	111
Figura 75.	Respuesta del ítem N° 1 del primer indicador del pos test.	113
Figura 76.	Respuesta del ítem N° 2 del primer indicador del post test.	114
Figura 77.	Resultado del ítem N° 3 del primer indicador del post test.	115
Figura 78.	Trazado correcto de las alturas en el post test.	116
Figura 79.	Frecuencia relativa sobre el trazado de alturas en el pos test.	116
Figura 80.	Trazado correcto de medianas en el del post test.	117
Figura 81.	Trazado incorrecto de las medianas en el post test.	118

Figura 82.	Frecuencia relativa del trazado de medianas en el post test.....	118
Figura 83.	Trazado incorrecto de las mediatrices en el post test (parte 1).....	119
Figura 84.	Trazado incorrecto de mediatrices en el post test (parte 2).....	120
Figura 85.	Frecuencia relativa del trazado de las alturas en el post test.	120
Figura 86.	Trazado correcto de bisectrices en el post test.....	121
Figura 87.	Frecuencia relativa del trazado de bisectrices en el post test.	122
Figura 88.	Histograma de los resultados del post test.	123
Figura 89.	Resultados obtenidos en el pre y post test	127
Figura 90.	Examen desarrollado del post test (Parte 1)	186
Figura 91.	Examen desarrollado del post test (Parte 2)	187
Figura 92.	Estudiantes trabajando	188
Figura 93.	Estudiante haciendo dobleces	188

INTRODUCCIÓN

La experiencia docente ha permitido observar el rechazo de los estudiantes al estudio de la geometría, sobre todo, cuando ésta se basa en el trazado de gráficos y construcciones geométricas. Ante este panorama, nos interesamos en integrar recursos de enseñanza en las sesiones de clase, que motiven a las estudiantes a aprender. Así pues, se elaboraron diversas actividades ideadas desde una postura constructivista con la finalidad de que el estudiante experimente y logre conocer y comprender la geometría de una manera distinta, permitiendo la participación activa de las estudiantes y la interacción entre sus conocimientos previos y los nuevos.

Esta investigación realizada en torno a dichas actividades, aborda los procesos de enseñanza – aprendizaje de las líneas notables del triángulo, mediados por la aplicación de estrategias metodológicas que incluyen actividades con papel y GeoGebra. De esto, se recoge evidencias de los resultados de dicha aplicación y se verifica el rendimiento que obtienen las estudiantes.

El trabajo que se presenta está estructurado en cuatro capítulos que, resumidamente, tratan lo siguiente:

Capítulo I: *Planteamiento del problema*. Se expone la contextualización del problema con sus respectivos objetivos y se presenta las investigaciones previas que se consideran como antecedentes.

Capítulo II: *Marco teórico*. Se presenta los fundamentos teóricos que guían el presente estudio: Teorías del aprendizaje cognoscitivo, aportes de la psicología educativa; capacidades y estrategias de enseñanza- aprendizaje de la matemática, así como la influencia de la tecnología en el aprendizaje de la matemática, especialmente del software GeoGebra en la enseñanza de la geometría.

Capítulo III: *Metodología de la investigación*. Contiene la descripción del tipo de investigación, los participantes del estudio y explicación de las técnicas e instrumentos aplicados para recoger y analizar la información.

Capítulo IV: *Análisis de resultados*. En este capítulo se describe los resultados obtenidos de cada instrumento y se discuten los mismos con el fin de establecer si hay incidencia en la realización de la actividad con papel y con el uso del GeoGebra en la enseñanza de temas geométricos.

Finalmente, se presenta las conclusiones de esta investigación, así como las cuestiones abiertas que suscitan la misma, las referencias y los apéndices que constituyen el material curricular y didáctico empleado en el desarrollo de la investigación.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Motivación y formulación del problema

Debido al desarrollo tecnológico actual, se observa un auge de las Tecnologías de la información y comunicación (TIC) en diversos ámbitos como: educativo, laboral, cultural y social. Como consecuencia a esto, se genera la necesidad de integrar los nuevos recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza–aprendizaje. Esta necesidad no es ajena al área de matemática, por ello uno de los once propósitos de la Educación Básica Regular al 2021 es el “desarrollo del pensamiento matemático y de la cultura científica y tecnológica para comprender y actuar en el mundo” (Diseño Curricular Nacional, 2009, p. 21). En coherencia con lo anterior, se precisa una renovación de la enseñanza que en palabras de Trahtemberg (2013) implica:

Formar ciudadanos con habilidades críticas para funcionar en la sociedad y en el mercado laboral global con creatividad, colaboración, pensamiento crítico y capacidad de comunicación. Para ello hay que usar metodologías relevantes, es decir, trabajar con redes sociales, tecnologías móviles, computación digital y además involucrar a los estudiantes en técnicas de instrucción que faciliten el aprendizaje. En otras palabras, necesitamos poner a los estudiantes en el centro del aprendizaje y permitirles que le encuentren sentido a sus experiencias.

Con relación a lo mencionado anteriormente, buscamos las causas de las dificultades observadas en las estudiantes para realizar trazados de líneas notables en los triángulos, utilizando materiales como regla, transportador o compás (este último para trazar circunferencias sobre el punto de intersección de las mediatrices o bisectrices). En este sentido; se cuestiona la propia práctica pedagógica y la falta de motivación en las estudiantes. Esto ocasiona la necesidad de renovar la práctica docente en relación a los recursos y estrategias didácticas empleadas, así como realizar un profundo análisis del contenido a abordar. En consecuencia, se considera la utilización de materiales como triángulos de papel y de recursos tecnológicos, en este caso el uso del GeoGebra, como una estrategia para mejorar la realidad observada (Zapata, 2004; Puicón y Castillo, 2008), así como servir de recurso motivador en las estudiantes.

Consideramos que los recursos tecnológicos (en la enseñanza), son herramientas que han de ser empleadas para mejorar el nivel educativo, teniendo como supuesto de partida que la tecnología es un medio que permite el desarrollo de las potencialidades y creatividad de los estudiantes, en la medida que el docente tiene claro el propósito del uso de estos recursos y planifica oportuna y adecuadamente la integración de los mismos en las actividades de enseñanza-aprendizaje (Danvila, 2010). En consecuencia a lo anterior, se espera que las estudiantes incrementen las destrezas, habilidades de aprendizaje, su motivación hacia el estudio y finalmente, mejoren su rendimiento académico con ayuda de estos recursos.

En este contexto, se elabora una propuesta de enseñanza que incluye el uso de triángulos de papel (realización de dobleces), y el software GeoGebra en la práctica pedagógica, con el objetivo de investigar los efectos que produce el uso de dichos recursos en el aprendizaje de las estudiantes. Así pues, el interés de la investigación se concreta en la siguiente pregunta:

¿Cómo influye la propuesta metodológica, con actividades con papel y GeoGebra, para el aprendizaje de las líneas notables del triángulo, en las estudiantes de tercer año de secundaria de la Institución Educativa de Chiclayo?

1.2. Antecedentes de la investigación

En la búsqueda de fuentes que confirman la relevancia del tema de investigación, se encuentran trabajos que se consideran referentes, pues abordan el uso de la tecnología (TIC) como herramienta de enseñanza que influye en el aprendizaje de los estudiantes. Entre estos citamos los siguientes:

- Cabero, A. (1997) en su artículo “*El papel de la computadora en el proceso enseñanza – aprendizaje de las matemáticas*” de la revista electrónica de Tecnología Educativa, hace una reflexión sobre la computadora como recurso didáctico y su utilidad en el proceso de enseñanza y sobre todo en el aprendizaje de los estudiantes. Cabrero explica el uso de la computadora y sus efectos motivadores en el proceso de enseñanza por parte de los docentes (utilización de programas interactivos que existen en internet) y del aprendizaje por parte de los estudiantes. Este artículo explica qué hacen los docentes cuando enseñan con diversos software educativos como Cabri Geometre, GeoGebra y el Derive. También, indica las ventajas del uso de la tecnología como recurso y herramienta didáctica en el diseño de las clases, cómo ayuda a resolver problemas diversos de matemática y alienta a los estudiantes a tratar a las matemáticas como un objeto experimental. Este artículo aporta a esta investigación, al explicar la importancia del software educativo como herramienta didáctica y motivadora.
- Zapata, M. (2004) “*Aplicación de una nueva metodología en el área de matemática, usando la tecnología del software Cabri Geometre II, utilizados como recursos didácticos para lograr la experiencia cognitiva necesaria que facilite un aprendizaje significativo de la Geometría en los estudiantes de Educación Secundaria*”. Propuso la integración de las TIC en la enseñanza de la matemática, aplicando una metodología para despertar el interés del estudiante en el curso de geometría, de tal forma que sea apropiado y que permita mejores niveles de logro en el aprendizaje. Zapata usa el software Cabri Geometre II convencido que la geometría debe ser dinámica, puesto que ayuda a desarrollar los diferentes procesos cognitivos como: la memoria, análisis, síntesis, etc. Este software permite diseñar buenos gráficos para el estudio de la geometría. Esta tesis aporta a nuestra

investigación, la certeza de que el uso de recursos tecnológicos contribuye a la motivación de los estudiantes.

- Puicón y Castillo. (2008). *“Influencia de la aplicación del Jclic en el aprendizaje de polinomios orientado al desarrollo de capacidades del área de matemática en los estudiantes del segundo grado de educación secundaria en la institución educativa Mater Admirabilis”*. Determinan la influencia que tiene la aplicación educativa Jclic en el aprendizaje significativo de polinomios. Dicha aplicación se hizo posible a partir de un programa diseñado para desarrollar sesiones de aprendizaje en el área de matemática, utilizando esta aplicación en un laboratorio de cómputo y obtener los resultados perseguidos. Sobre estos aportes, se toma algunas ideas, para la explicación de la influencia del software en el aprendizaje significativo.
- Iranzo y Fortuny. (2009). *“La influencia conjunta del uso papel, lápiz y del GeoGebra en la adquisición de competencias del alumnado”*. Este estudio, analiza la relación entre el uso de GeoGebra, la resolución en lápiz, papel y el pensamiento geométrico. Ellos proponen un análisis de los grados de adquisición de los procesos de instrumentación e instrumentalización de los estudiantes, las estrategias de resolución en ambos medios y las interacciones entre los distintos agentes involucrados. Buscando la relación entre las concepciones de los estudiantes y las técnicas que utilizan en las estrategias de resolución de problemas. Esta tesis está muy relacionada con nuestra investigación, debido a que ambas utilizan actividades con papel y uso del GeoGebra. Además, se enfocan en las estrategias de enseñanza que utiliza el docente y su importancia para mejorar el aprendizaje de temas geométricos, en este caso del trazado de líneas notables.
- Alcas, R. (2013). *“Uso del proyecto Descartes en la enseñanza de la derivada en la asignatura de Matemática 2 de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad de Piura”*. Propone la utilización del proyecto Descartes como una herramienta adecuada que permite al estudiante aprender el concepto de la Derivada y así, mejorar el interés en la asignatura de Matemática 2 por parte de los estudiantes. En consecuencia, mejorar los resultados de las evaluaciones con ayuda de guías pedagógicas y manipulación de las

aplicaciones del proyecto Descartes en el laboratorio. Al final de la investigación, se concluye que el uso de los applets ha permitido que el estudiante interiorice perfectamente el cálculo de la derivada y su interpretación geométrica. Asimismo, la aclaración de conceptos a través de los gráficos. Esta tesis ayuda a la investigación en el análisis de la influencia del GeoGebra en las estudiantes. Además, compartimos el objetivo de la docente de despertar el interés y motivar a las estudiantes para que asimilen los nuevos conocimientos.

1.3. Contextualización y objetivos de la investigación

La inquietud que lleva a realizar la presente investigación surge de la observación del bajo rendimiento de las estudiantes en matemática, en especial en temas geométricos. Este hecho conlleva a implementar herramientas que permitan al docente contar con nuevos recursos didácticos, a partir de los cuales se pueda abordar los contenidos de geometría de manera simple. Puesto que en las evidencias de los antecedentes de esta investigación (apartado anterior), se menciona que los recursos como papel o el uso de herramientas tecnológicas posibilitan que la enseñanza y el aprendizaje sean adecuados y pertinentes, siempre que el docente propicie la integración reflexiva de dicha tecnología con el uso de material concreto.

En el contexto descrito, se inicia la elaboración de actividades que involucran el uso de recursos TIC, concretamente, del software GeoGebra, y de material como triángulos hechos de papel. Dicha elaboración se apoya en un aprendizaje receptivo significativo basándose en Ausubel, en el cual, el estudiante experimente, conozca y comprenda la geometría de una manera distinta a como lo haría con medios tradicionales (solo pizarra y plumón), y en medio de un entorno de trabajo colaborativo.

Lo descrito anteriormente, lleva al planteamiento de los siguientes objetivos:

Objetivo general:

Evaluar la influencia de una propuesta metodológica que implica el uso de material con papel y la aplicación del software GeoGebra en el aprendizaje de líneas notables del triángulo.

Objetivos específicos:

- Identificar las ventajas y limitaciones que ocasiona, en el aprendizaje, las actividades desarrolladas con papel y el GeoGebra en la enseñanza de líneas notables del triángulo.
- Comprobar, mediante la aplicación del post test, si las actividades con papel y GeoGebra favorecen el aprendizaje de las líneas notables del triángulo.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Concepción de Educación, Aprendizaje y Enseñanza en el contexto de la Educación Peruana

La educación debe centrar su atención en el desarrollo de competencias que permitan al estudiante acceder a conocimientos humanísticos, científicos y tecnológicos, con el objetivo de prepararlos para el trabajo, la convivencia democrática y el ejercicio de la ciudadanía (Diseño Curricular Nacional, 2009). Es decir, que está destinada a favorecer el desarrollo integral del estudiante y el desarrollo de sus capacidades, conocimientos, actitudes y valores para actuar adecuada y eficazmente en los diversos ámbitos de la sociedad (Artículo 29 de la Ley General de Educación N°28044).

Así pues, la educación en general, debe ofrecer a los educandos las herramientas esenciales para conseguir aprendizajes, no solo de contenidos básicos sino también de experiencias, que permitan el desarrollo de procesos intelectuales y capacidades, así como la toma de decisiones y el deseo de continuar aprendiendo de forma permanente.

En coherencia con lo anterior, es preciso un cambio en el diseño e implementación de nuevas políticas educativas, que contemple el paso de una educación centrada en la enseñanza (en el docente) y a una educación centrada en el aprendizaje (en el estudiante), puesto que, en concordancia con los fines de la educación peruana, es necesario:

Formar personas capaces de lograr su realización ética, intelectual, artística, cultural, afectiva, física, espiritual y religiosa, promoviendo la formación y consolidación de su identidad y autoestima y su integración adecuada y crítica a la sociedad para el ejercicio de su ciudadanía. Así como el desarrollo de sus capacidades y habilidades para vincular su vida con el mundo del trabajo (Diseño curricular nacional, 2009, p. 10).

Este panorama se ve, además, influenciado por la integración de la tecnología en los distintos campos de desarrollo y entornos de aprendizaje, algunas de cuyas propuestas hemos indicado en los antecedentes de la investigación. Así pues, dado que los docentes son agentes formadores y generadores de cambio, deben prepararse para “promover el desarrollo científico y tecnológico en las instituciones educativas de todo el país y la incorporación de nuevas tecnologías en el proceso educativo” (Artículo 21, Ley General de Educación N° 28044) y para actuar como mediadores efectivos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Respecto del aprendizaje, asumimos la definición elaborada por la Universidad Nacional San Agustín (UNSA, 2005) como “una actividad de construcción personal de representaciones significativas de un objeto o de una situación de la realidad, que se desarrolla como producto de la actividad del sujeto en ella” (p. 95). Por otra parte, entendemos la enseñanza como “un sistema de ayuda hasta que los estudiantes logren un trabajo independiente. Además, el sistema de enseñanza se adapta a las características individuales de los estudiantes” (Valer, 2005, p. 132).

En conclusión, la enseñanza es una actividad que requiere ofrecer experiencias que ayuden a estimular la curiosidad del estudiante y construya una iniciativa a la investigación, la comunicación y solución de problemas, ayudando a construir sus propios aprendizajes. De esta manera los estudiantes aprenden los mejores métodos para determinar cuándo y cómo utilizarlos para aprender temas geométricos (Bernardo, 2009).

2.2. Teorías del aprendizaje

En los últimos años, se ha producido muchos avances con respecto al aprendizaje desde una perspectiva constructivista que, relacionándose con la educación, hace que el estudiante cree sus propias ideas, permitiendo que establezca relaciones entre el nuevo contenido y los esquemas de conocimientos ya existentes, lo cual lleva a que el estudiante pueda modificar su conocimiento. Esta postura constructivista se asocia a diversas corrientes psicológicas tales como: la psicología cognoscitiva como el enfoque piagetiano (teoría de esquemas cognitivos), la teoría ausubeliana de la asimilación y el aprendizaje significativo, la teoría de Gagné, la teoría de Bruner (construcción del aprendizaje) la psicología sociocultural y vygotskiana (Valer, 2005). Sin embargo, para fines de esta investigación, solo se consideran los cuatro primeros.

A continuación se explica de manera sintética las teorías cognoscitivas del aprendizaje:

2.2.1. La teoría de Piaget

Sus aportes se concentran en las estructuras con las cuales interpretamos el mundo. Piaget explica el conocimiento como proceso de elaboración y reelaboración personal de saberes a partir de estímulos y mensaje. En pocas palabras, el conocimiento “es el resultado de la actividad de la inteligencia y el aprendizaje” (Pérez, 1995, p. 18). La tipología del conocimiento es amplia, y esta investigación se refiere, principalmente, al conocimiento científico al que se llega mediante la inteligencia y el aprendizaje.

La inteligencia

Según Piaget, la inteligencia es la habilidad para adquirir y utilizar conocimientos con el objetivo de resolver problemas y adaptarse al mundo. En conclusión, “es la facultad en progreso desde el nacimiento hasta la madurez” (Pérez, 1995, p. 117).

El aprendizaje

El aprendizaje es la consecuencia de la actividad del individuo, es decir, es la acción que origina el dominio de la realidad. Para Piaget el aprendizaje es una acción, en la cual la inteligencia busca la adaptación a la realidad mediante su explicación y control. Cuando esto se consigue se dice que el organismo se encuentra en equilibrio (Pérez, 1995).

Piaget sostiene que los procesos básicos de desarrollo son: adaptación (entrada de información) y organización (estructuración de la información) (Pérez, et al). *La adaptación* es un equilibrio que se consigue a través de la asimilación de elementos del ambiente y de la acomodación de aquellos, debido a la modificación de los esquemas y estructuras mentales existentes, como resultado de nuevas experiencias. Así pues, la adaptación es un proceso de interacción con la realidad mediante el cual los esquemas pretenden adecuarse y tener el control de la misma. En cambio, *la asimilación* se utiliza cuando el esquema poseído es capaz de aprehender la realidad con la que se enfrenta y con la acomodación la inteligencia busca la transformación de los esquemas existentes para adecuarlos a las exigencias de la realidad. Es decir, el sujeto se obliga a adaptarse a la realidad, construyendo o modificando los esquemas precisos.

Además, Piaget tiene en cuenta la madurez biológica del estudiante, considerando cuatro periodos evolutivos del desarrollo de la inteligencia que tienen un carácter universal: sensorio-motor, pre operatorio, operaciones concretas y operaciones formales (Pérez, 1995). Por lo tanto, en esta investigación se plantea una secuencia de instrucciones, teniendo en cuenta lo mencionado por Piaget:

- Se debe tener en cuenta el nivel de desarrollo del estudiante (aunque un estudiante se encuentre en un periodo puede haber regresiones, y también puede darse que en determinados aspectos el estudiante esté más avanzado que en otros).

- La secuencia de los contenidos en el aprendizaje ha de ser flexible.
- Los medios (materiales de trabajo) deben estimular experiencias que lleven al estudiante a preguntar, descubrir o inventar.
- El ambiente del estudiante es un elemento importante en el desarrollo de su aprendizaje. Porque el ambiente, las vivencias, la percepción y la orientación del exterior influye en la conducta y en el aprendizaje de los estudiantes (Pérez, 2006).

En conclusión, la investigación tiene en cuenta aportes piagetianos, debido a que se enfoca en el proceso cognitivo para procesar la información dada. En este caso, las estudiantes de tercer año de secundaria deberían situarse en el estadio de las operaciones formales, lo cual supone el desarrollo del pensamiento abstracto y en consecuencia, la capacidad de desarrollar hipótesis y deducir nuevos conceptos, realizando correctamente operaciones lógicas. En este sentido, el objetivo es que las estudiantes de la Institución Educativa de Chiclayo desarrollan su capacidad reflexiva y se apoyen en la construcción de nuevos conocimientos.

2.2.2. La teoría de Bruner

El aporte de Bruner es relevante, porque menciona que “el aprendizaje es un procesamiento activo de la información y que cada persona lo organiza y construye a su manera” (Pérez, 1995, p. 143), coincidiendo en algunos aspectos con la propuesta de Piaget, el cual menciona que la inteligencia del niño es estructural y cualitativamente distinta a la del adolescente y concibe la vida afectiva y cognoscitiva como inseparables pensando en la inteligencia como la manifestación superior de la conducta humana (Valer, 2005).

Bruner considera que el conocimiento se almacena como expectativas activas, e insiste en que una gran parte del aprendizaje se consigue por descubrimiento, cuyo origen está en la curiosidad. Así pues, la resolución de problemas depende de cómo se presentan

estos en una situación concreta, ya que han de suponer un reto, un desafío que incite a su resolución y propicie la transferencia del aprendizaje.

Para Bruner, el descubrimiento consiste en la transformación de hechos o experiencias que se nos presentan, de manera que se pueda llegar más allá de la información. Es decir, reestructurar o transformar hechos evidentes, de manera que puedan surgir nuevas ideas para la solución de los problemas (Piaget, 1995).

Por otro lado, Valer (2005) menciona algunas ventajas del aprendizaje por descubrimiento:

- Es el mejor medio para estimular el pensamiento simbólico y la creatividad del individuo.
- Estimula la mayor utilización del potencial intelectual, crea una motivación intrínseca, se domina la heurística del descubrimiento y ayuda a la conservación de la memoria.
- La nueva información, al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.

Por eso, se recomienda que se estimule a los estudiantes a realizar exploraciones personales, aprender por cuenta propia, despertar su curiosidad, propiciar hipótesis a los estudiantes mediante las adecuadas interrogantes y, en fin, todo aquello que pueda hacer al estudio más intencional y exploratorio. Es decir, se trata de preparar a los estudiantes de una forma concreta para enfrentarse a la realidad y disponerlos con las herramientas y materiales pertinentes (Pérez, 1995, p. 147).

En sintonía con los aportes de Piaget y de Bruner, se elabora una propuesta metodológica que pretende el desarrollo intelectual de las estudiantes a través del uso del software GeoGebra y de actividades con papel. Estos recursos suponen el uso de un lenguaje simbólico y gráfico (en la pantalla de la computadora), además del trazado de líneas notables a partir de dobleces de papel. Lo anterior, está mediado por el descubrimiento (en el sentido de Bruner) que es contrario al aprendizaje memorístico.

2.2.3. La teoría de Ausubel

Ausubel explica en su teoría que los estudiantes deben realizar un aprendizaje significativo en el colegio con ayuda constante del docente. Dicha expresión "significativo" es utilizada como oposición a "memorístico" o "mecánico". En este sentido, para que un contenido sea significativo ha de ser incorporado al conjunto de conocimientos del estudiante, relacionándolo con sus conocimientos previos y evitando memorizar un contenido sin comprenderlo (Valer, 2005).

Ausubel propone los siguientes modos de aprendizaje:

- a. Según los procedimientos mediante los cuales el material a aprender llega al estudiante.

Aprendizaje receptivo:

El contenido se presenta en su forma final al estudiante, es decir, no tiene que hacer un descubrimiento autónomo sino solo incorporar el material en forma estructurada con el objetivo de recordarlo en un futuro (Pérez, 1995).

Aprendizaje por descubrimiento:

“Lo principal de lo que debe ser aprendido no se da, sino que debe ser descubierto por el estudiante para poder incorporarlo después en su estructura cognoscitiva” (Pérez, 1995, p. 150). Ausubel explica que enseñar a través del aprendizaje por descubrimiento llevaría a la mayoría de estudiantes a entender la información de manera lenta para la velocidad de la educación actual.

- b. Según los modos en que el estudiante incorpora la nueva información en las estructuras cognitivas ya existentes.

Aprendizaje significativo:

Supone que los nuevos conocimientos son incorporados a la estructura cognoscitiva, relacionándose con los conocimientos poseídos (Pérez, 1995), lo cual significa que las ideas se relacionan sustancialmente con lo que el estudiante ya sabe. Estos conocimientos se vinculan de manera estable.

En relación con lo anterior, Valer (2005) menciona las condiciones para que ocurra el aprendizaje significativo:

- La información adquirida debe ser sustancial (lo esencial) y no arbitraria (relacionada con el conocimiento previo que posee el estudiante).
- El material a aprender debe poseer lógica o potencial, es decir, los materiales deben relacionarse con los conocimientos previos de los estudiantes.
- El material debe estar ordenado y organizado.
- Debe existir disponibilidad e intención del estudiante para aprender.
- El estudiante debe procesar la información, asimilarla y retenerla para relacionar las estructuras previas con el nuevo aprendizaje.

Aprendizaje por repetición:

Los nuevos conocimientos no son asociados con los ya existentes, porque el estudiante solo los memoriza, lo cual facilita el olvido y a la vez lo hace menos útil. (Pérez, 1995).

En relación con lo último, Valer (2005) señala que Ausubel considera los siguientes factores que intervienen en el aprendizaje:

- La estructura cognitiva: Es la organización de los conceptos, por tal motivo, el docente debe conocer los conocimientos

previos del estudiante, con el fin de asegurar que el contenido se relacione con las ideas previas.

- La disposición: El docente debe organizar los materiales de manera jerárquica, teniendo en cuenta la forma como se presenta a los estudiantes.
- La motivación de los estudiantes.
- La enseñanza: El docente debe utilizar ejemplos y ayudarse con dibujos, esquemas, fotografías para explicar la teoría.

En resumen, los modos de aprendizaje propuestos por Ausubel, se muestran en la Figura 1:

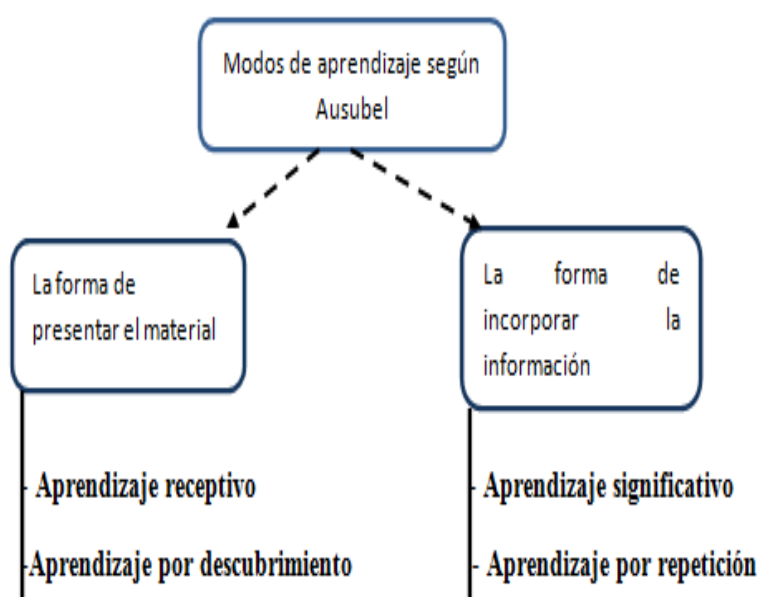


Figura 1. Modos de aprendizaje según Ausubel.

Nota: En este esquema se muestra los cuatro modos en el cual los estudiantes llegan a aprender y puede ser la manera en que se presenta el material y la forma cómo incorporan la información.

Respecto de la propuesta metodológica, evaluada en esta investigación, declaramos la consideración del aprendizaje receptivo significativo, porque “el material potencialmente significativo es presentado a las estudiantes y ellas los incorporan a sus estructuras de manera relevante” (Valer, 2005, p. 316).

Además, la consideración de los medios utilizados para la enseñanza (actividades con papel y GeoGebra), así como del rol del docente en ésta, resulta coherente el planteamiento de Ausubel.

2.2.4. La teoría de Gagné

Gagné describe que el aprendizaje es una secuencia de procesos, que contienen ciertas condiciones para lograr este aprendizaje, iniciándose con la percepción de un estímulo. Por ejemplo, para que la docente logre que el estudiante atienda lo que está diciendo o escribiendo, debe motivarlo a través de una explicación de lo que puede lograr si aprende un tema específico. Luego, los estudiantes percibirán selectivamente los conocimientos de mayor importancia para guardarlos en su memoria de corto plazo. Una vez que la información ha sido almacenada, debe sufrir algunas transformaciones para poder ingresar dicha información a la memoria de largo plazo. Este proceso se llama codificación semántica (organizar de manera significativa lo aprendido) y finalmente, si el estudiante necesita la información aprendida, debe recurrir al proceso de búsqueda y de recuperación de la información (Arancibia, 1999).

Pérez (1995) señala que Gagné expone 8 tipos de aprendizaje:

- Aprendizaje por señales: Aprendizaje relacionado con infantes menores de 5 años, que responden ante señales, figuras, etc.
- Aprendizaje por la respuesta al estímulo: Se consigue por los métodos de condicionamiento. Existe un estímulo, hay un refuerzo y finalmente una respuesta a dicho estímulo.
- Aprendizaje de cadenas motrices y cadenas verbales: Encadenan varias respuestas a etapas anteriores, es decir, se basa en la memorización de hábitos fijos.
- Aprendizaje discriminativo: Discriminar un estímulo del otro y sus respuestas. Seleccionar lo que conviene.

- Aprendizaje conceptual: Es dar respuesta común a estímulos diferentes en varios aspectos, es decir, generalización de respuestas.
- Aprendizaje por reglas¹: Relacionar conceptos para obtener respuestas correctas. Por lo tanto, debe haber un continuo reforzamiento.
- Aprendizaje de solución de problemas: Es la etapa más alta del conocimiento porque, utiliza reglas y las combina para dar respuestas a situaciones nuevas.

En conclusión, Gagné, explica su teoría como un aprendizaje acumulativo, es decir, es la sumatoria de todo lo aprendido. En pocas palabras, un aprendizaje es mejor si parte de lo conocido (Pérez, 1995). Al proceso antes mencionado, Gagné introduce la ejecución, como un proceso que permite verificar si el aprendizaje ha ocurrido.

Después de leer los aportes de Piaget, Bruner, Ausubel y Gagné se presenta, a modo resumen (Tabla 1), las concepciones que tienen cada uno sobre el aprendizaje y lo que aporta cada uno a esta investigación:

¹ Gagné llama “reglas” al encadenamiento de dos o más conceptos.

Tabla 1.
Las teorías del aprendizaje

	Piaget	Bruner	Ausubel	Gagné
Concepción sobre el aprendizaje	El aprendizaje es la asimilación de la información y la acomodación de lo asimilado.	El aprendizaje es un procesamiento activo, en el cual existen estrategias para orientar el proceso de descubrimiento de los estudiantes y la construcción personal del conocimiento.	El aprendizaje es la relación de aprendizajes nuevos con los ya existentes.	El aprendizaje es acumulativo, es decir, los nuevos conocimientos se construyen sobre los anteriores.
Aportes en la investigación	La aportación principal es que las estudiantes llegan a asimilar el contenido, teniendo en cuenta la madurez biológica y los periodos cognitivos.	La investigación coincide con Bruner en que el aprendizaje es activo, es decir, las estudiantes no son pasivas, porque son capaces de organizar los contenidos y establecerlos en esquemas para su fácil estudio.	La investigación se enfoca en un aprendizaje receptivo significativo, porque, las estudiantes interiorizan de forma estructurada el contenido dado por la docente para su fácil comprensión, y poder relacionarlo con los conocimientos ya existentes.	Gagné influye en que las estudiantes van acumulando los contenidos, los estructura con el fin de poder utilizarlos para llegar a la actividad más alta del conocimiento que es la solución de problemas.

Nota: Cuadro comparativo de los aportes sobre el aprendizaje de Piaget, Bruner, Ausubel y Gagné.

2.3. Las estrategias de enseñanza - aprendizaje

Según Bernardo (2009), la *estrategia* etimológicamente “es el arte de dirigir las operaciones militares” (p. 83). En la actualidad, de forma general se entiende como habilidad o destreza para dirigir un asunto. En el campo educativo, la estrategia es el procedimiento de aprendizaje, es la destreza que el estudiante construye a lo largo de su vida, a través de distintos métodos de enseñanza. Estos “métodos consisten en proceder de modo ordenado e inteligente para conseguir el incremento del saber y la formación total de la persona” (Bernardo, J., 2009, p. 84).

En general, las estrategias de aprendizaje son representadas como planes de acción, es decir, es un procedimiento que conduce a una meta. Por eso se habla de un aprendizaje permanente que incluye capacidades intelectuales y la motivación. “Esta concepción (aprendizaje permanente) abarca la educación formal pero se dirige también a aprender en otros contextos más allá del aula e incluye un aprendizaje sobre sí mismo, autónomo, de grupos sociales” (UNSA², 2005, p. 98).

Con respecto al aprendizaje permanente, se debe realizar actividades diferentes, donde los estudiantes desarrollen sus capacidades. Es decir, que accedan a herramientas que les permitan aumentar su eficacia y su eficiencia y ser capaces de transferir de un contexto a otro la información. Los docentes tienen como objetivo conseguir que los estudiantes tengan el deseo de aprender con esfuerzo y hacer de la información un conocimiento útil, que perdure para toda su vida y lo aplique en diversos campos del saber y así cambiar la realidad de manera creativa.

Por lo general, los estudiantes manipulan o modifican los contenidos o estructura de los materiales de aprendizaje con el objetivo de facilitar la comprensión de la información. Todo este material de aprendizaje es planificado por el docente y debe utilizarse de forma inteligente y creativa. De esta manera la UNSA (2005) considera:

² UNSA son las iniciales de la Universidad Nacional San Agustín de Arequipa

El uso de estrategias permite que el estudiante aprenda no solo cómo utilizar determinados procedimientos, sino cuándo y por qué debe utilizarlos y en qué medida favorecen el proceso de resolución de la tarea. De esta manera los estudiantes aprenden a utilizar sus propias estrategias de aprendizaje para continuar aprendiendo (p. 83).

Lo mencionado anteriormente, hace referencia a que el docente debe seleccionar y aplicar las estrategias apropiadas para el desarrollo de las capacidades en los estudiantes, proponiéndose que el docente debe plantear una situación problemática, para que el estudiante analice y sea capaz de solucionarla, desarrollando sus capacidades (ordenar, darle secuencia a la información, comparar los datos, hacer un cuadro de semejanzas y diferencias sobre la información dada por el docente) (UNSA, 2005).

Asimismo, se debe enfocar en estrategias dirigidas a activar los conocimientos previos de los estudiantes o incluso generarlos cuando no existan. “Ya que la activación del conocimiento previo puede servir en un doble sentido: para conocer lo que saben los estudiantes y para utilizar tal conocimiento como base para promover nuevos aprendizajes” (UNSA, 2005, p. 88). Por eso, se debe utilizar las estrategias para mantener la atención de los estudiantes durante la sesión y así hacer eficaz el aprendizaje.

2.4. Capacidades a desarrollar en el área de matemática

“En el área de matemática, las capacidades para cada grado son: el razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas, siendo este último el proceso a partir del cual se formulan las competencias del área en los tres niveles” (Diseño Curricular Nacional, 2009, p. 317).

El diccionario de la Real Academia Española define capacidad como: “Aptitud, talento, cualidad que dispone alguien para el buen ejercicio de algo” (RAE, 2001). Por otro lado, en el Diseño Curricular Nacional (2005) se define *capacidad* como una “potencialidad inherente a la persona y que puede ser desarrollada a lo largo de toda su vida, dando lugar a la determinación de los logros educativos” (p. 27). Concretamente, en este documento se señala las capacidades que han de desarrollarse en el área de matemática:

Razonamiento y demostración, es la capacidad de comprender y saber razonar matemáticamente como un hábito mental; y como todo hábito se desarrolla mediante el uso coherente en muchos contextos. El desarrollo de esta capacidad implica ejercitarla de manera sistemática durante toda la vida. Se expresa al formular, investigar y analizar conjeturas matemáticas, al representar sus conclusiones lógicas o cuando se evalúan las relaciones de los elementos (Diseño Curricular Nacional, 2009).

Con respecto a lo mencionado anteriormente, el estudiante debe justificar, argumentar, demostrar y razonar cada situación, teoremas o procedimientos y no limitándose a repetir lo que dice un libro de texto o el docente.

Comunicación matemática, es una de las capacidades de área que adquiere un significado especial en la educación secundaria, porque permite:

Expresar, organizar, comunicar, compartir y aclarar las ideas, las cuales llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión, análisis y reajuste, entre otros. Ya que el estudiante expresa sus ideas matemáticas con precisión; para reconocer conexiones entre conceptos matemáticos y la realidad, y aplicarlas a situaciones problemáticas reales. Ello es posible cuando discrimina gráficos y expresiones simbólicas, infiere las representaciones gráficas, representa los resultados, etc. (Diseño Curricular Nacional, 2009, p. 316).

Por lo tanto, los estudiantes necesitan aprender a comunicarse matemáticamente de diferentes maneras relacionando activamente el lenguaje cotidiano con ideas o símbolos matemáticos.

Resolución de problemas, es de suma importancia por su carácter integrador, ya que permite una diversidad de transferencias y aplicaciones a otras situaciones y áreas; y en consecuencia, proporciona grandes beneficios en la vida diaria. De allí que:

Resolver problemas de contextos reales o matemáticos; para que tenga la oportunidad de aplicar y adaptar diversas estrategias en diferentes contextos y para controlar el proceso de resolución reflexione sobre éste y sus resultados. La capacidad para plantear y

resolver problemas, dado el carácter integrador de este proceso, posibilita la interacción con las demás áreas curriculares coadyuvando al desarrollo de otras capacidades; asimismo, posibilita la conexión de las ideas matemáticas con intereses y experiencias del estudiante (Diseño Curricular Nacional, 2009, p. 317).

2.5. Enseñanza – aprendizaje de la geometría: Niveles de Van Hiele

Para el aprendizaje de la geometría, el docente ayuda al estudiante a construir, analizar, medir o clasificar a través de materiales concretos, como: compás, transportadores, o recursos tecnológicos como: software geométricos, simulaciones, etc., puesto que, “La geometría es la ciencia que tiene por objeto analizar, organizar y sintetizar los conocimientos espaciales. En un sentido que se puede considerar a la geometría como la matemática del espacio” (Alsina, Burgués y Fortuny, 1997, p. 14).

Se considera que la geometría en la educación básica es obligatoria, porque está presente en múltiples ámbitos productivos de nuestra sociedad, como diseños arquitectónicos, la topografía, construcción de edificios, artes plásticas, etc. También está presente en el estudio de los elementos de la naturaleza y finalmente, es indispensable para el desenvolvimiento en la vida cotidiana, al hacer estimaciones sobre formas y distancias, hacer cálculos sobre objetos en el espacio, para orientarse, etc. (Martínez y Rivay, 1989). A pesar de lo anterior, se observan dificultades en su aprendizaje (Castro, Castro, Domínguez, Quintero, Quintero, y Huertas, 2014):

- Dificultad al comprender el lenguaje matemático, es decir, reconocer términos específicos de la geometría.
- Dificultad en memorizar símbolos geométricos.
- Dificultad en la percepción visual de los contextos geométricos.

Las dificultades observadas en los estudiantes, al estudiar geometría, llevó a los esposos Pierre y Dina Van Hiele a buscar las causas de las mismas. Esto permitió la elaboración de un modelo de enseñanza que explica cómo se produce el razonamiento geométrico en los estudiantes y cómo el docente puede ayudar a sus estudiantes a

mejorar su razonamiento apoyándose de actividades con características específicas, según la fase de enseñanza respectiva.

Martínez y Rivay (1989) explican los cinco niveles de razonamiento geométrico propuesto por los Van Hiele de la siguiente manera:

- I nivel: Reconocimiento de figuras (visualización³). En este nivel los estudiantes reconocen la forma global de las figuras, es decir, el aspecto físico, sin centrarse en el análisis de sus propiedades.
- II nivel: El análisis de las figuras. Los estudiantes analizan los componentes de figuras, sus propiedades, establecen relaciones entre figuras de forma intuitiva, pero no analizan de forma lógica.
- III nivel: Relación lógica (deducción informal). En este nivel los estudiantes relacionan y clasifican las figuras de manera lógica.
- IV nivel: Razonamiento deductivo formal. Los estudiantes entienden los conceptos, teoremas, etc., pero aún no razonan abstractamente, ni hacen demostraciones.
- V nivel: Razonamiento deductivo con rigor. Los estudiantes razonan sin ayuda de la intuición.

Los niveles mencionados anteriormente se pueden desarrollar siempre y cuando los materiales, la programación y las actividades sean utilizados de forma correcta. Entendemos materiales, como los “objetos o medios de comunicación que ayudan a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas formas de aprendizaje” (Alsina, Burgués y Fortuny, 1991, p. 13).

Respecto de las fases de enseñanza, Lastra (2005) las describe como sigue:

³ La visualización en matemática es el proceso de formar imágenes mentales, con lápiz y papel, o con el apoyo de herramientas tecnológicas. El aprender a usar la visualización ayuda a descubrir conceptos matemáticos y a comprenderlos (Lastra, S., 2005, p. 29).

- I fase: La información. El docente debe diagnosticar a los estudiantes a través de exámenes pre test, intervenciones orales, etc., sobre los temas geométricos que se van a abordar.
- II fase: Orientación dirigida. El docente orienta a los estudiantes en el proceso de aprendizaje.
- III fase: Explicitación. En esta fase los estudiantes consolidan su vocabulario, y son conscientes de las características, propiedades o conceptos aprendidos.
- IV fase: Orientación libre. El docente afianza las actividades que ayuden a relacionar las situaciones nuevas con los conocimientos adquiridos anteriormente.
- V fase: Integración. El docente establece y profundiza los conceptos.

El optar por estos niveles, permite explicar la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo los docentes pueden ayudar a mejorar el aprendizaje de temas matemáticos, especialmente geométricos. Además, los niveles permiten al docente orientarse, profundizar, investigar en mejorar las propuestas metodológicas para la enseñanza de temas geométricos y mejorar el aprendizaje de los mismos en los estudiantes.

2.6. TIC: Tecnologías de la información y comunicación

Es evidente la influencia que la tecnología está teniendo en la educación en la mayoría de los países de nuestro entorno. Las TIC han proporcionado la posibilidad de una mayor interacción entre aprendizaje, estudiantes y docente. Es indudable que estas tecnologías poseen un enorme potencial para mejorar y enriquecer los diferentes niveles de educación. Sin embargo, el mal uso de las TIC puede producir un deterioro de la educación, por ello, se exhorta a una inclusión reflexiva y consciente de estos recursos, coherente con los propósitos de la educación básica:

Por lo tanto, la escuela ofrece una formación que desarrolla el juicio crítico y el pensamiento estratégico y reflexivo de los estudiantes, con el fin de que sepan seleccionar las fuentes de información pertinentes. Teniendo en cuenta, que siempre se busca desarrollar en los estudiantes capacidades y actitudes que les permitan utilizar y aprovechar adecuadamente las TIC (Diseño Curricular Nacional, 2009, p. 30).

Las nuevas tecnologías en los últimos años han experimentado un avance extraordinario habiéndose reducido, en gran medida, los costos de adquisición e instalación de las infraestructuras correspondientes. Esto permite a las escuelas tener el acceso de información casi en forma inmediata, es decir, las TIC están transformando la educación, están cambiando las formas de acceso al conocimiento y de aprendizaje. Las TIC, han cambiado tanto la forma de enseñar como la forma de aprender, al mismo tiempo que cambian los objetivos formativos para los estudiantes dado que estos tendrán que formarse para utilizar y producir con los nuevos medios (UNSA, 2005).

Las TIC son una realidad compuesta por un conjunto de procesos, procedimientos e instrumentos digitalizados. Ellas tienen por objetivo la transformación de la información, creación, almacenamiento y difusión, a través de diversos medios electrónicos e informáticos como los blogs, wikis, webquest, foros, videos de conferencias y de telecomunicación. Todo ello para satisfacer las necesidades informativas de los individuos y de la sociedad, desarrollando la creatividad y promoviendo el aprendizaje significativo, activo y flexible a la realidad de los estudiantes.

Se aprecia entonces que “Es bastante notorio el empeño de los diversos sistemas educativos en promover el uso de los recursos tecnológicos en la enseñanza de matemáticas y de cualquier otra materia en general. Esto se debe al beneficio que otorgan las TIC, tales como: desarrollar habilidades intelectuales” (Coscolla y Fuentes, 2010, p.172). Además, se necesita satisfacer una sociedad tecnológica que crece cada año, donde los estudiantes parecen nacer con una predisposición positiva hacia dichos recursos, lo cual exige que los docentes se adapten a esos recursos.

Luego de la reflexión anterior y basándonos en la investigación de Menéndez (2012) y de la Universidad Nacional San Agustín de Arequipa

(2005) se considera que las ventajas del uso de las TIC en la educación son las siguientes:

- Las TIC proporcionan una visión integradora de la organización de la institución, de recursos, docentes y de los estudiantes. Además, los estudiantes manifiestan una alta motivación con el uso de la tecnología y los docentes han de aprovechar este interés para incorporar estos medios en el aprendizaje de los estudiantes.
- Las TIC implican el desarrollo de contenidos y ordenamiento de las actividades educativas que promueven el aprendizaje, generando conciencia crítica y una fácil asimilación de la información.
- Las TIC permiten recrear ambientes organizadores de aprendizajes complejos y estimular el trabajo colaborativo.
- Permiten acceder a mayor información de manera rápida, la cual se puede guardar con facilidad.
- Las herramientas TIC permiten la participación activa del estudiante en la construcción de su conocimiento.
- Facilitan la comunicación y transmisión de contenidos y a una mejor comprensión de la información.
- Estimulan el desarrollo de habilidades cognitivas, por ejemplo, las estrategias de búsqueda de información, las habilidades de procesamiento de información (selección, organización e interpretación), planificación de actividades, desarrollo de expresión de ideas y habilidades de comunicación interpersonal.

Sin embargo, el uso de la tecnología también presenta algunas desventajas (UNSA, 2005) como:

- Falta de interés de los docentes por aprender, por actualizarse en el uso de recursos TIC.
- Algunos centros educativos no disponen de espacios acondicionados para el uso de la tecnología, mientras que otros poseen todos los medios, pero no saben cómo utilizarlos.

- Por último, las actividades con recursos tecnológicos no suelen estar dentro de la programación anual, porque mayormente se trabaja como una actividad complementaria tratando de conectar con la programación de unidades.

En conclusión, las TIC han proporcionado la capacidad para una mayor interacción entre estudiantes y docentes, ya que han abierto nuevas vías de comunicación. Entre la gran cantidad de medios tecnológicos que se utilizan, un lugar destacado lo ocupa las comunicaciones basadas en el ordenador, tales como el correo electrónico, acceso a bases de datos y teleconferencias. Es indudable que estas tecnologías poseen un enorme potencial para mejorar y enriquecer los diferentes niveles de educación.

2.6.1. Las TIC como estrategia de enseñanza - aprendizaje

El uso de las TIC en el proceso enseñanza-aprendizaje se centra en el aprendizaje más que en la enseñanza. En este, el trabajo del docente prioriza la organización y disposición de los contenidos, así como la organización del aprendizaje de los estudiantes mediante tareas individuales y en grupo, con un permanente seguimiento por parte del docente.

Pero, a veces, no es conveniente depender de las tecnologías. Conviene señalar que el potencial de estas herramientas puede arruinarse si los programas diseñados son deficientes o si existe una errónea utilización de la tecnología por parte de docentes. Por eso, se recomienda conocer las diferentes maneras de aplicar las TIC, porque permite al docente redefinir su práctica pedagógica y en “los estudiantes desarrollar sus capacidades como el pensamiento crítico y creativo, la toma de decisiones, la solución de problemas y un afán de sobrevivencias en este contexto globalizado que les ha tocado vivir” (UNSA, 2005, p. 76), a la vez que posibilita un aprendizaje autónomo a lo largo de la vida.

Para que en la educación se puedan explotar los beneficios de las TIC en el proceso de enseñanza - aprendizaje, es esencial que los docentes sepan utilizar estas herramientas. Para ello, es necesario capacitarlos, además de equipar los espacios escolares con aparatos y auxiliares tecnológicos, como son televisores,

videograbadoras, computadoras y conexión a la red, etc. (UNSA, 2005). Sobre la actuación del docente frente a la tecnología, la Universidad Nacional San Agustín (2005), caracteriza la función del docente como:

- Utilizar las TIC y aprovechar sus posibilidades para la mejora de los procesos educativos.
- Buscar materiales y recursos utilizando adecuadamente las herramientas tecnológicas.
- Diseñar materiales curriculares atractivos y cercanos a los intereses del estudiante.

2.6.2.El Geogebra como herramienta de enseñanza-aprendizaje

Centrados en el GeoGebra, empezamos por definir software como un “conjunto de programas, instrucciones y reglas informáticas que permiten ejecutar distintas tareas en una computadora” (RAE, 2015). El GeoGebra, es un software disponible en múltiples plataformas (sistemas operativos), diseñado para interactuar dinámicamente en actividades matemáticas.

Sus características son⁴:

- Es un software fácil de utilizar.
- En el GeoGebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas, construcciones geométricas, cálculos, funciones, etc.
- El GeoGebra ayuda a los estudiantes a construir su propio conocimiento de geometría, que estén mejor capacitados para desarrollar su sentido espacial en dos o tres dimensiones por

⁴ Las características se basan en los aportes de investigación hechos por el observatorio Tecnológico del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España. Recuperado de <http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/fr/equipamiento-tecnologico/didactica-de-la-tecnologia/806-monografico-matematicas-y-las-tic?start=2>

medio de exploración con objetos reales y puedan desarrollar todos los niveles antes mencionados de Van Hiele.

- Permite realizar acciones matemáticas como demostraciones, supuestos, análisis, experimentaciones, deducciones, etc.
- La ayuda del software despierta la curiosidad, estimula la creatividad y desarrolla el sentido de la observación, promoviendo una comprensión y captación de lo espacial.
- Combina geometría, álgebra y cálculo. Además, puede ser utilizado tanto on line como instalado en la computadora.

Con lo dicho en los últimos apartados, puede verse que el software tiene un mayor valor educativo como apoyo en los procesos pedagógicos, debido a que facilitan los procesos de enseñanza – aprendizaje. No obstante, su utilización exige planear (anticipada y oportunamente) qué se quiere enseñar y cuáles son los conceptos o conocimientos matemáticos que se quieren profundizar.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Características y diseño de la investigación

Esta investigación se sitúa en el paradigma positivista también denominado cuantitativo, empírico – analítico o racionalista (Hernández, 1998), puesto que interesa identificar y describir la influencia de una propuesta metodológica para el aprendizaje de las líneas notables del triángulo, a través de una metodología cuasi experimental.

El diseño cuasi experimental según Hernández (1998) y Arnal (1996) manipula al menos una variable independiente (software y actividades con papel) para ver su efecto y relación con una o más variables dependientes (aprendizaje de líneas notables del triángulo). En este diseño los grupos ya están formados antes del experimento, es decir, son grupos intactos (Arnal, 1996) que, en la investigación abordada, son las 30 estudiantes de tercer año de secundaria.

De los tres tipos de diseño cuasi experimental⁵, adoptamos el diseño cuasi experimental de grupos no equivalentes, porque “el docente pretende analizar relaciones de causalidad y puede manipular la variable independiente, pero, a diferencia de la metodología experimental, se ve obligado a partir de grupos ya formados de una manera natural” (Arnal, 1996, p. 155).

⁵ De grupos no equivalentes, de series temporales interrumpidas y de sujeto único (Arnal, 1996).

Dentro del diseño de grupos no equivalentes, se emplea el grupo único, al cual se le aplica un pre test para indagar sobre el conocimiento que tienen las estudiantes respecto de conceptos geométricos básicos y sobre todo, de las líneas notables del triángulo. Luego, se desarrolla el programa para el aprendizaje de dichos contenidos haciendo uso del software GeoGebra y de actividades con papel. Posteriormente, se aplica un post test para evaluar la influencia de dicha metodología en el aprendizaje del contenido en cuestión. Lo comentado se resume en la tabla 2.

Tabla 2.
Secuencia de los exámenes y actividades

Grupo	Pre-Test (examen escrito)	Tratamiento de las dos actividades: con papel y aplicación del GeoGebra	Post-test (examen escrito)
Único	Sí se aplica	Sí se aplica	Sí se aplica

Nota: Secuencia de la aplicación de exámenes y actividades durante la investigación.

3.2. Muestra de estudio

La muestra de estudio está conformada por las 30 estudiantes del tercer año de secundaria de la Institución Educativa de Chiclayo, cuyas edades se sitúan entre los 14 y 15 años. Como se ha mencionado en el primer apartado de este capítulo, la muestra responde a las características de un *grupo intacto* o *formado naturalmente* (Arnal, 1996). Así pues, no se realiza un procedimiento para la selección de la muestra.

3.3. Variables

Se considera que una variable “es una característica o atributo que puede tomar diferentes valores o expresarse en categorías. Así decimos que son variables la temperatura, el coeficiente intelectual, el método de enseñanza, el sexo, etc.”(Arnal, 1996, p. 68).

En esta investigación, se diferencia la clasificación de las variables desde el criterio metodológico (variable independiente, variable dependiente y variable interviniente), teniendo en cuenta indicadores. A continuación, se explica cada variable utilizada en esta investigación.

- *Variable independiente:* Propuesta metodológica, que incluye el software Geogebra (diseñado para interactuar dinámicamente en un ámbito en que se reúnen la geometría, el álgebra y el análisis o cálculo) y las actividades con papel. En esta investigación interesa observar la influencia del software y de las actividades con papel en el aprendizaje de las líneas notables del triángulo.
- *Variable dependiente:* Es el aprendizaje de líneas notables del triángulo, ya que se presume que sufre alguna variación al emplear la variable independiente (propuesta metodológica). Se espera que al usar el software y la actividad con papel, las estudiantes desarrollen o afiancen capacidades que les permita resolver las diferentes situaciones problemáticas con líneas notables.
- *Variables intervinientes:* Se toma en cuenta aspectos como la asistencia a clase de las estudiantes, horarios disponibles para trabajar en el laboratorio, contenido dado por la docente. Además, se tiene en cuenta si la estudiante es puntual al ingresar al aula, si presta atención a las indicaciones que da la docente antes de empezar las actividades, participa constantemente en las sesiones de clase, etc. En este estudio, no se hace un análisis de esta variable, solo se utiliza para justificar algunos resultados de las actividades.

La incidencia de la propuesta metodológica es evaluada constantemente, por la docente, a través de los siguientes indicadores⁶ (Tabla 3).

⁶Los indicadores son contruidos con el objetivo de evaluar las actividades de GeoGebra y de papel, enfocándose solo en el trazado correcto de las líneas notables. Estos indicadores son aprobados por coordinadora del área de Institución educativa.

Tabla 3.
Indicadores de la investigación

Variable	Categorías	Dimensiones	Indicadores
Independiente Propuesta metodológica (actividades con papel y el GeoGebra)	Bueno (16-20)	Aspecto Técnico	Ejecuta las actividades de GeoGebra de forma correcta siguiendo las orientaciones de la docente.
			Maneja la ventana de herramientas del GeoGebra.
			Guarda las actividades desarrolladas en la carpeta (geometría -3ro) con su nombre y entrega la ficha de trabajo desarrollada teniendo en cuenta lo observado en el GeoGebra.
	Regular (11-15)	Aspecto Pedagógico	Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulo, utilizando el GeoGebra.
			Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos hechos de papel utilizando regla y lápiz.
			Realiza la actividad con papel de manera correcta siguiendo las indicaciones de la ficha.
			Entrega la ficha desarrollada de la actividad con papel y presenta el cuaderno con los triángulos pegados y desarrollados.
	Deficiente (01-10)		

Dependiente Aprendizaje de líneas notables del triángulo	Bueno (16-20)	Aspecto Pedagógico	Explica, con sus propias palabras y con ayuda de ejemplos, los conceptos básicos de la geometría.
	Regular (11-15)		Explica correctamente las características de las líneas notables en diferentes tipos de triángulos.
	Deficiente (01-10)		Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz.
Interviniente: Horario de clase, asistencia, motivación de las estudiantes	Sí o No	Aspecto Técnico	Asiste a todas las sesiones de clase de manera puntual tanto en el aula como en la sala de cómputo.
	Sí o No	Aspecto pedagógico	Muestran atención a las indicaciones de la docente.
			Participa constantemente en el desarrollo de las actividades.

3.4. Técnicas e instrumentos de recogida de información

3.4.1 Técnicas de recolección de información

Entendemos técnica como las “acciones más o menos complejas que pretenden conseguir un resultado conocido y que son exigidas para la correcta aplicación de un determinado método” (Bernardo, 1997, p. 106). Las técnicas empleadas en esta investigación son variadas y coinciden con las técnicas de evaluación, las cuales se entienden como “un método de obtener información” (Tenbrink, 1997, p. 134). En este sentido, se emplea las entrevistas, exámenes escritos, observaciones y análisis.

- *La entrevista.*- Es una técnica que emplea la docente con el fin de obtener información a través de preguntas sobre opiniones, relaciones interpersonales y actitudes de las personas. Dicha información se puede obtener a través de cuestionarios (Tenbrink, 1997).

- *Los exámenes.-* Es una técnica de evaluación que permite comprobar los objetivos trazados en la investigación. Esto es, conocer lo que saben las estudiantes antes y después de las actividades que forman parte de la investigación (Barriga, 2005).
- *La observación.-* Es el proceso de mirar y escuchar dándose cuenta de los elementos importantes de una realización o producto. La observación permite al docente obtener información sobre las capacidades cognoscitivas, afectivas y psicomotoras de un estudiante (Tenbrink, 1997, p. 135).

Para verificar la consecución de aprendizajes significativos se utiliza la técnica de la observación en las actividades geométricas (apéndice H y J) con el fin de evaluar los indicadores encontrados en las fichas de observación. Dichas actividades se iniciaron con el uso de papel (apéndice G) y después con el uso del software en el laboratorio de cómputo (apéndice I).

- *El análisis.-* “Es el proceso de dividir algo en sus componentes, averiguar de qué está hecho” (Tenbrink, 1997, p. 135). La docente utiliza constantemente la técnica del análisis en cada actividad y exámenes escritos con el fin de comprobar la eficacia de la propuesta metodológica en el aprendizaje de temas geométricos.

3.4.2. Instrumentos de recolección de información

Se utilizan los instrumentos: cuestionario, pre test, post test y ficha de observación, en correspondencia con las técnicas abordadas en el apartado anterior. Ambas, técnicas e instrumentos, se resumen en la tabla 4 en la que, además, se incluye el cronograma de aplicación.

Tabla 4.
Resumen cronológico de las técnicas aplicas en la investigación

Resumen cronológico de las técnicas aplicas en la investigación										
Técnica	Instrumento		Cronograma (meses)							
			May	Jun	Oct Semana				Nov	
					1	2	3	4		
Entrevista	Cuestionario		x							
Exámenes y análisis	Pre test			x						
Observación y análisis.	F I C H A D E O B S E R V A C I Ó N	Actividad con papel (doblesces)			x					
		Actividad: GeoGebra Altura y Mediana				x				
		Actividad: GeoGebra Finalizar la mediana y se inicia con la mediatriz					x			
		Actividad: GeoGebra Finalizar la mediatriz y bisectriz.						x		
Exámenes y análisis	Post test									x

Nota: obtenido de la programación anual 2013

- *El Cuestionario:* Es un instrumento que consiste en una lista de preguntas que deben ser contestadas por el estudiante. “El cuestionario está diseñado para obtener información sobre las opiniones y actitudes de las personas” (Tenbrink, 1997, p. 141).

Este instrumento consta de once preguntas con alternativas. Las preguntas nº 02; nº 04; nº 07; nº 08 y nº 09 tienen solo dos opciones de respuesta (Sí y No) mientras que las demás, presentan opciones múltiples. La finalidad de este instrumento, es obtener información acerca de la percepción de las estudiantes, respecto de la enseñanza de matemática en el colegio, con relación a la

tecnología. Este instrumento constituye el punto de partida de la investigación.

El cuestionario empleado es el siguiente (Figura 2):

CUESTIONARIO A LAS ESTUDIANTES

1. ¿Cómo es la enseñanza de la matemática en tu colegio?
a. Malo b. Regular c. Buena d. Muy buena
2. ¿Tienes dificultad en el área de matemática?
a. Si b. No
3. De la pregunta anterior, si tu respuesta es "Si" a que crees que se deba:
a. La forma de enseñanza por parte de la profesora.
b. La falta de utilización de medios y materiales educativos.
c. La utilización de bibliografía de inadecuada.
d. Falta de interés por tu parte.
4. ¿Las docentes utilizan materiales educativos para la enseñanza de la matemática?
a. Si b. No
5. ¿Qué tipo de materiales educativos utiliza con mayor frecuencia las docentes?
a. Pizarra, plumones, reglas. c. Videos
b. Libros, separatas, laboratorios. d. Software
6. ¿Cómo te gustaría te enseñen matemática?
a. Solo con plumones y pizarra.
b. Plumones, pizarra y materiales como regla, compás.
c. Libros, fichas y diapositivas.
d. Todos los anteriores pero agregando el uso de la computadora.
7. ¿La docente utiliza el laboratorio de cómputo para el desarrollo de las sesiones de aprendizaje?
a. Si b. No
8. ¿Sabes utilizar la computadora para desarrollar actividades matemáticas?
a. Si b. No
9. ¿Crees que la computadora te ayude a aprender la matemática con mayor facilidad?
a. Si b. No
10. Marca el software educativo que conoces y te ayude a aprender matemática en la computadora
a. GeoGebra b. Derive c. Cabri - Geometre d. ~~Geo~~GEUP
11. ¿Cómo estudias matemática?
a. Repasas los ejercicios hechos en clase.
b. Resuelves fichas de reforzamiento o ejercicios planteados en el libro que faltan por resolver.
c. Te dedicas a observar y elegir qué tipo de ejercicio puede venir en un examen y sólo esos estudias.
d. Buscas libros y material adicional.

Figura 2. Cuestionario aplicado al iniciar la investigación

- *El Test.*- Tenbrink (1997) menciona que los test se caracterizan, porque “es una situación común a la que todos los sujetos responden. Son conjuntos de instrucciones que gobiernan todas las respuestas, de reglas comunes para puntuar las respuestas y son descripciones numéricas de cada realización de un sujeto” (p. 137).

Lo anterior, lleva a concluir que el test proporciona información más exacta y de manera más eficiente que cualquier otro método. Siempre y cuando, se verifique su validez y su confiabilidad antes de emplearlo, Además, los test son evaluaciones diagnósticas y finales.

En este estudio, se aplica concretamente la técnica del Test elaborado por el docente (Tenbrink, 1997), cuyos instrumentos consisten en exámenes escritos, las cuales hemos denominado pre test y post test.

- *Pre Test.*- Es el instrumento de evaluación diagnóstica (examen escrito) que se aplica con la finalidad de medir el nivel de aprendizaje y conocimiento de las estudiantes sobre las líneas notables del triángulo antes de aplicar las actividades con papel y el GeoGebra. El pre test “se refiere al conocimiento previo del estudiante y su situación de aprendizaje como punto de arranque de la actividad educativa” (Bernardo, 1997, p. 26).

El contenido de este instrumento se muestra en la Figura 3.

PRE TEST: LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Capacidad: Comunicación Matemática:

Indicador: Explica, con sus propias palabras y con ayuda de ejemplos, los conceptos básicos de la geometría

1. ¿Qué es un segmento?
2. ¿Qué característica tiene la recta?
3. ¿Qué es un ángulo?
4. ¿Cuáles son las características del triángulo?
5. ¿Qué característica tiene la bisectriz interior de un ángulo?
6. ¿En qué se diferencia la altura y la mediatriz de un triángulo?
7. ¿Cómo se llama el punto de intersección de las medianas de un triángulo?

Indicador:

Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz.

1. Traza las alturas en los siguientes triángulos.



2. Traza las mediatrices en los siguientes triángulos.



3. Traza las medianas en los siguientes triángulos.



4. Traza las bisectrices interiores en los siguientes triángulos.



Figura 3. Contenido del Pre Test

- *Post Test.*- Este instrumento de evaluación final (examen escrito) es diseñado con características similares al Pre test. Se aplica a todas las estudiantes, con el fin de obtener los resultados después de aplicar la propuesta metodológica.

POST TEST: LINEAS NOTABLES DEL TRIANGULO

CAPACIDAD: COMUNICACIÓN MATEMÁTICA

Indicador: Explica correctamente las características de las líneas notables en diferentes tipos de triángulos.

Responde:

- A. ¿En qué se diferencia la altura de la mediatriz?
- B. ¿Cómo se llama el punto de intersección de las medianas?

Escribe las características y el nombre de sus intersecciones de cada línea notable mencionadas en el siguiente cuadro:

Líneas Notables	Nombre de la intersección de las líneas notables	Características de las líneas notables de un triángulo:		
		Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Alturas				
Medianas				
Mediatrices				
Bisectrices interior				

Indicador: Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz.

Lee las siguientes indicaciones y traza las líneas notables correspondientes:

ALTURA:

1. Traza las alturas del triángulo rectángulo:

El punto de intersección de las alturas se llama: _____

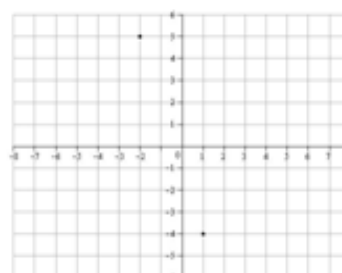
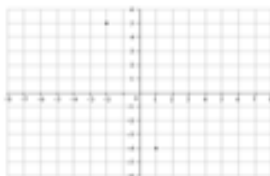


Figura 4. Contenido del Post Test (Parte 1)

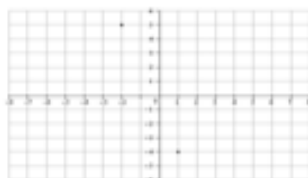
MEDIANA:

1. Traza las medianas del triángulo rectángulo:

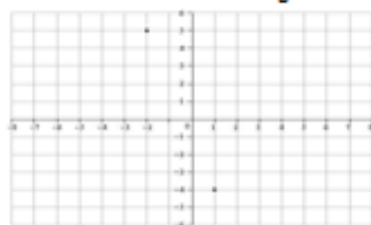
El punto de intersección
de las medianas, se
llama: _____



2. Traza las medianas del triángulo acutángulo:



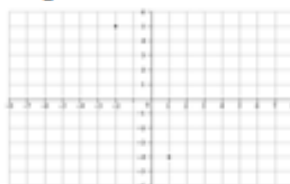
3. Traza las medianas del triángulo obtusángulo:



MEDIATRIZ:

1. Traza las mediatrices del triángulo rectángulo:

El punto de intersección
de las mediatrices, se
llama: _____



2. Traza las mediatrices del triángulo acutángulo:

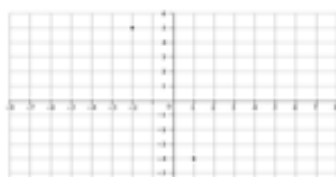
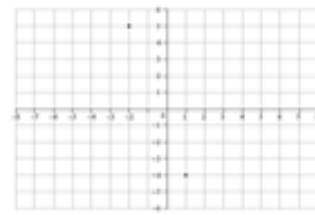


Figura 5. Contenido del Post Test (Parte 2)

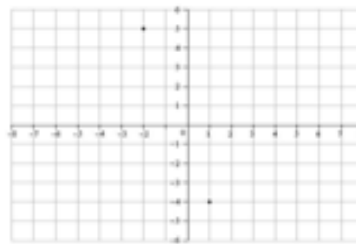
BISECTRIZ:

1. Traza las bisectrices interiores del triángulo rectángulo:

El punto de intersección
de las bisectrices
interiores, se
llama: _____



2. Traza las bisectrices interiores del triángulo acutángulo:



3. Traza las bisectrices interiores del triángulo obtusángulo:

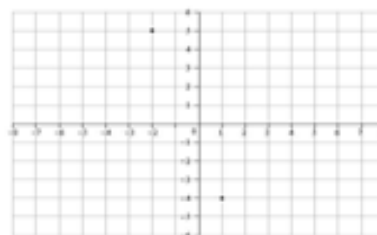


Figura 6. Contenido del Post Test (Parte 3)

- *Ficha de observación.*-Es un instrumento de evaluación que se aplica durante el desarrollo de las actividades en el aula y en el laboratorio. La ficha tiene escalas de valores para cada indicador de la variable independiente. Este instrumento es adaptable, porque obtiene información sobre el rendimiento de las estudiantes (Tenbrink, 1997, p. 139).

En las Figura 7 y Figura 8, se muestra los modelos de las fichas de observación empleada para evaluar los indicadores de la variable independiente (actividades con papel y Geogebra).

FICHA DE OBSERVACIÓN

ACTIVIDAD: “TRAZADO DE LÍNEAS NOTABLES UTILIZANDO TRIÁNGULOS DE PAPEL”

Nombre y Apellidos	INDICADORES										Observaciones
	(A)				(B)				(C)		
	A L T U R A	M E D I A N A	M E D I A N T R I Z	B I S E C T R I Z	A L T U R A	M E D I A N A	M E D I A N T R I Z	B I S E C T R I Z	SI	NO	
Estudiante 01											
Estudiante 02											
.											
.											
.											

Leyenda:

- (A) Realiza la actividad con papel de manera correcta siguiendo las indicaciones de la ficha.
- (B) Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulo hechos de papel, utilizando regla y lápiz.
- (C) Entrega la ficha desarrollada de la actividad con papel y presenta el cuaderno con los triángulos pegados y desarrollados.

Figura 7. Modelo de Ficha de Observación (actividad con papel)

FICHA DE OBSERVACIÓN

ACTIVIDAD: "APLICACIÓN DEL SOFTWARE GEOGEBRA"

INDICADORES	INDICADORES								PUNTAJE	INDICADORES				observaciones
	(A)				(B)					(C)		(D)		
Nombre y Apellidos	AL TURA	ME DIA NA	ME DIA TRINCE	BI SE CTRINCE	AL TURA	ME DIA NA	ME DIA TRINCE	BI SE CTRINCE		Si	No	Si	No	
Estudiante 01														
Estudiante 02														
.														
.														
.														

Leyenda:

(A) Ejecuta las actividades del GeoGebra de forma correcta siguiendo las orientaciones de la docente.

(B) Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulo, utilizando el GeoGebra.

(C) Maneja la ventana de herramientas del software.

(D) Guarda las actividades desarrolladas en la carpeta (geometría-3ro) con su nombre y entrega la ficha de trabajo desarrollada teniendo en cuenta lo observado en el GeoGebra.

Figura 8. Modelo de Ficha de Observación (actividad con GeoGebra)

3. 5. Análisis e interpretación de la información

De acuerdo con la metodología cuasi experimental establecida a inicios de este capítulo y con los instrumentos elaborados para la recolección de información, detallados en el apartado anterior, se realiza un análisis descriptivo de la actividad con papel porque, dicha actividad ayuda a recoger e introducir el tema de líneas notables en las estudiantes. A su vez, permite a la docente comprobar lo observado en esta actividad con los resultados del pre test. Por otro lado, se realiza una interpretación estadística de la información recogida del cuestionario, del pre test, de la actividad con el GeoGebra y del post test aplicados en las sesiones, según los indicadores definidos para cada instrumento.

3.5.1. El cuestionario

El cuestionario es el punto de partida de la investigación, porque gracias a las repuestas, se realiza una reflexión sobre la enseñanza de la matemática (Ver Figura 2). Algunos ítems presentan alternativas múltiples relacionadas con los fines de la investigación y otros ítems tienen dos alternativas (Sí o No).

3.5.2. El pre test y post test

El análisis de estos instrumentos se realiza teniendo en cuenta los indicadores que muestran ambos exámenes:

Indicadores del pre test:

Primer indicador: “*explica, con sus propias palabras y con ayuda de ejemplos, los conceptos básicos de la geometría*”. Éste se analiza, diferenciando las preguntas en dos partes, la primera correspondiente a un nivel básico de conocimiento de geometría (ítems 1-4)⁷ referido a conceptos geométricos básicos. Segunda parte: nivel superior de conocimientos de geometría (ítems 5-7)⁸.

⁷ (1) ¿Qué es un segmento? (2) ¿Qué características tiene la recta? (3) ¿Qué es un ángulo? (4) ¿Cuáles son las características del triángulo?

⁸ (5) ¿Qué características tiene la bisectriz interior de un ángulo? (6) ¿En qué se diferencia la altura y la mediatriz de un triángulo? (7) ¿Cómo se llama el punto de intersección de las medianas en un triángulo?

En el segundo indicador: *“Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz”*, se evalúa el trazado de las líneas notables de cada triángulo. El interés no se centra en el nombre de los puntos notables ya que por lo general, dichas palabras no se encuentran dentro de la terminología de las estudiantes. Esto significa que la atención está puesta en el trazado de las líneas notables, en los ángulos formados por ellas y en comprobar si las estudiantes tienen interiorizado dicho tema.

Indicadores del post test:

Primer Indicador: *“Explica correctamente las características de las líneas notables en diferentes tipos de triángulos”*. Se propone completar un cuadro comparativo de las cuatro líneas notables, describiendo con sus propias palabras las características de cada una.

Segundo indicador: *“Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz”*. Se evalúa solo el trazado de las líneas notables en los triángulos dibujados por las mismas estudiantes.

Los resultados de ambos test, se presentan a través de gráficos de barras, diferenciando los siguientes niveles de logro deficiente (entre 01 a 10), regular (entre 11 a 15) y bien (entre 16 a 20). Además, se halla las medidas de tendencia central de cada prueba con ayuda de la hoja de cálculo que presenta el GeoGebra, con el fin de verificarse el nivel de confianza y validez de ambos test.

3.5.3. Actividad con papel

La actividad se apoya en la ficha de observación (apéndice H) considerada, a la vez, un instrumento de evaluación y de recolección de datos. De los tres indicadores, la docente se enfoca en la evaluación de dos de ellos:

Primer indicador: *Realiza la actividad con papel de manera correcta siguiendo las indicaciones de la ficha.*

Segundo indicador: *Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulo hechos de papel utilizando regla y lápiz.* Este indicador constituye uno de los objetivos de la investigación (Comprobar, mediante la aplicación de las actividades con papel y GeoGebra favorecen el aprendizaje de las líneas notables del triángulo).

3.5.4. Actividad del software GeoGebra

La actividad del GeoGebra (apéndice I) aborda cuatro líneas notables: alturas, medianas, mediatrices y bisectrices interiores. Esta actividad es evaluada, de igual forma que la actividad con papel, con una ficha de observación, la cual tiene también una doble finalidad: ser un instrumento de evaluación y de recogida de información. A partir de este instrumento se realiza unos análisis descriptivos de lo observado sobre dos de los cuatro indicadores:

Primer indicador: *Ejecuta las actividades del GeoGebra de forma correcta siguiendo las orientaciones de la docente.*

Segundo indicador: *Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulo, utilizando el GeoGebra.*

A manera de resumen, presentamos la Figura 9 en la que se puede observar las decisiones metodológicas asumidas en esta investigación.

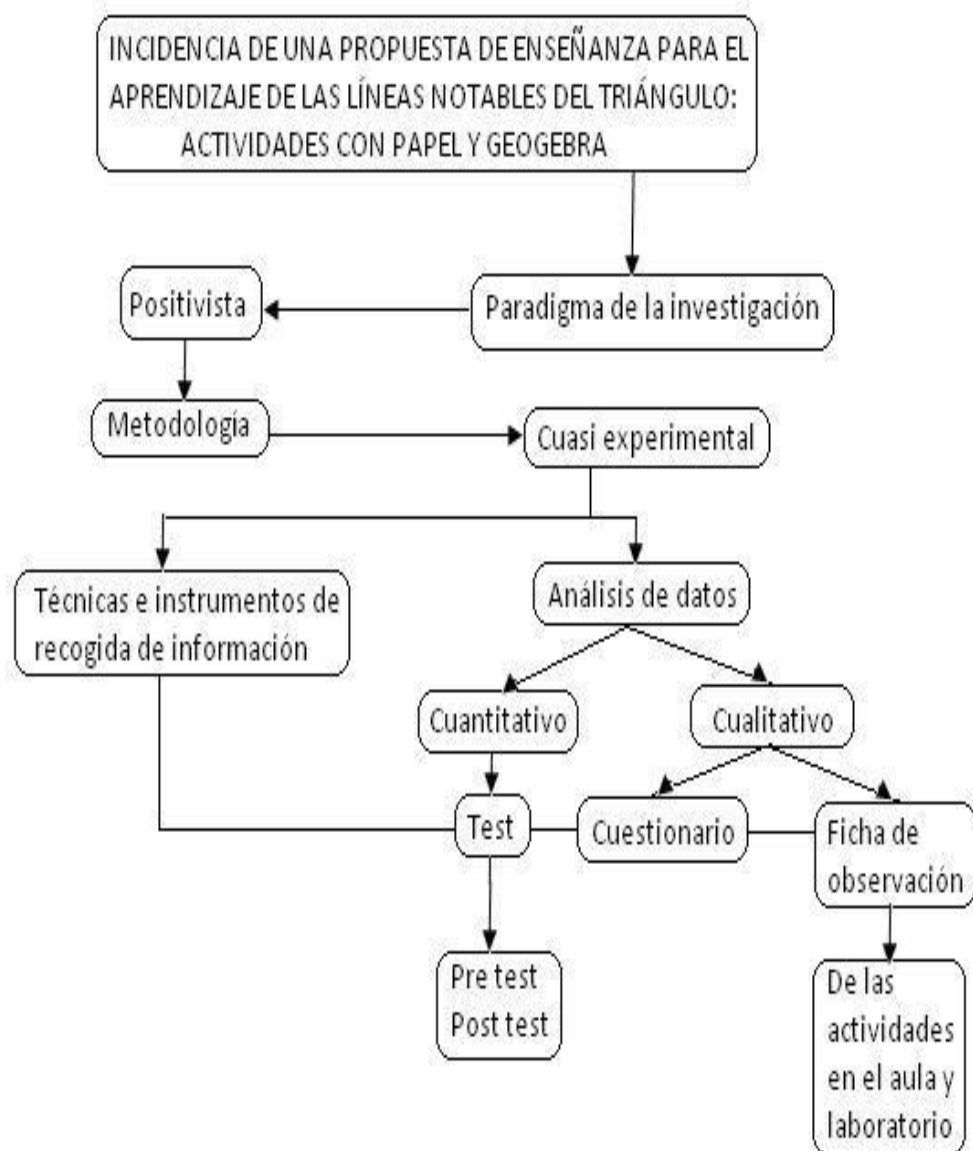


Figura 9. Esquema de Metodología de la Investigación

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Una vez explicado los instrumentos utilizados en las actividades y de describir el proceso de análisis, se da a conocer los resultados obtenidos del cuestionario, del pre test, de las actividades tanto en el aula (dobles con triángulos de papel) como en el laboratorio de cómputo (GeoGebra) y los resultados del post test con el fin de comprobar la efectividad de la aplicación de material concreto y el uso de software GeoGebra para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de líneas notables del triángulo.

4.1. Análisis del cuestionario

Después, de aplicar el cuestionario, se realiza un análisis descriptivo y estadístico de cada ítem:

Ítem N° 1: ¿Cómo es la enseñanza de la matemática en tu colegio?

El análisis del primer ítem muestra que 22 estudiantes (73,4%) opinan que la enseñanza de la matemática en el colegio es regular, mientras que solo una estudiante (3,3%) considera la enseñanza de dicha materia como muy buena. Por otro lado una estudiante (3,3%) considera la enseñanza como mala y 6 de ellas (20%) la considera como buena. Se tiene en cuenta que la pregunta tiende a obtener respuestas subjetivas, porque se enfoca en el punto de vista que tienen las estudiantes sobre la enseñanza de la matemática, sin embargo, guardan relación con sus calificaciones.

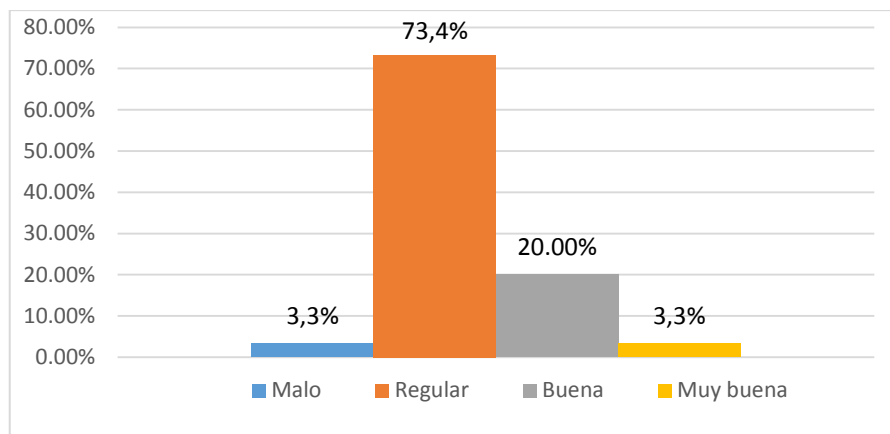


Figura 10. Resultados del ítem n°1 del cuestionario.

Ítem N° 2: ¿Tienes dificultad en el área de matemática?

Se obtiene que 17 estudiantes (56,7%) “Sí” tienen dificultad. A diferencia de 13 (43,3%) que indican un “No”. Estos resultados son coherentes con el hecho de que 19 (63,3%) de ellas ha mantenido un promedio bajo en esta área desde primero de secundaria⁹.

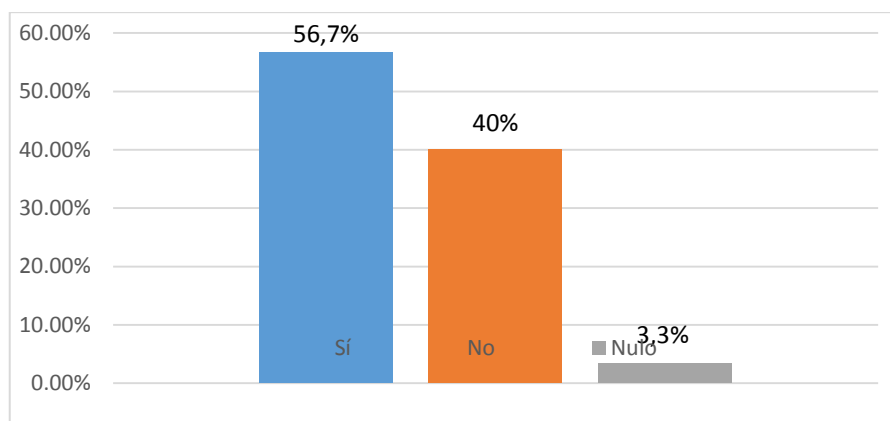


Figura 11. Resultados del ítem n°2 del cuestionario.

⁹ Referencia: comentarios de forma oral de las docentes que enseñaron matemática en los años 2011 y 2012, mencionando promedios generales del grupo de estudiantes con respecto al área.

Ítem N° 3: De la pregunta anterior, si tu respuesta es “Sí” ¿A qué crees que se deba?

Este ítem recoge las causas que origina el problema para aprender matemática. Se debe tener en cuenta que solo responden 17 (56,7%) de las 30 estudiantes y se dividen en dos grupos.

El primer grupo está conformado por 14 estudiantes (46,7%), quienes indican que el problema está en la forma de enseñanza de la docente y en no utilizar diversas estrategias para la enseñanza de la materia. El segundo grupo conformado por 3 estudiantes (10%), enfatiza la falta de medios y materiales educativos que motiven el aprendizaje de la matemática.

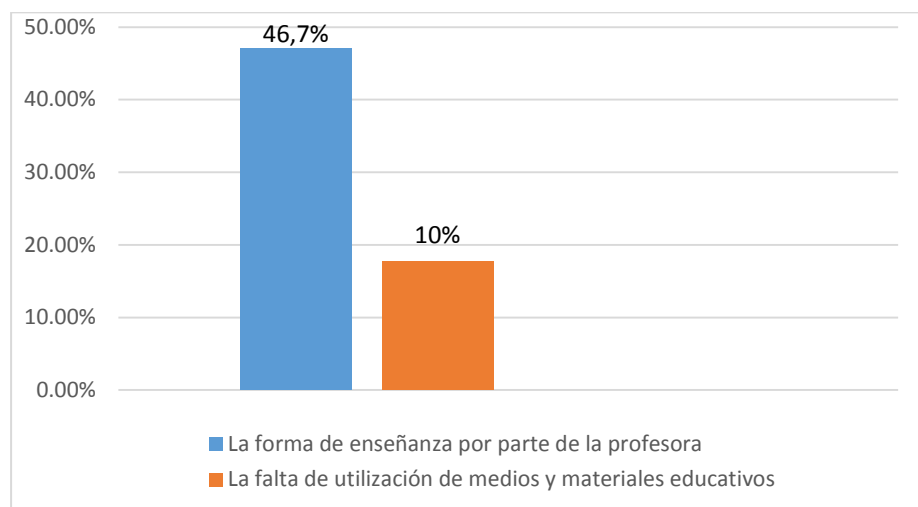


Figura 12. Resultados del ítem n°3 del cuestionario.

Ítems N° 4: ¿Las docentes utilizan materiales educativos para la enseñanza de la matemática?

Diecinueve (66,3%) estudiantes indican que las docentes no utilizan materiales educativos para la enseñanza de la matemática, en cambio, 10 (33,4%) estudiantes consideran que sí lo hacen. Este ítem pone en evidencia la falta de recursos educativos por parte de la docente.

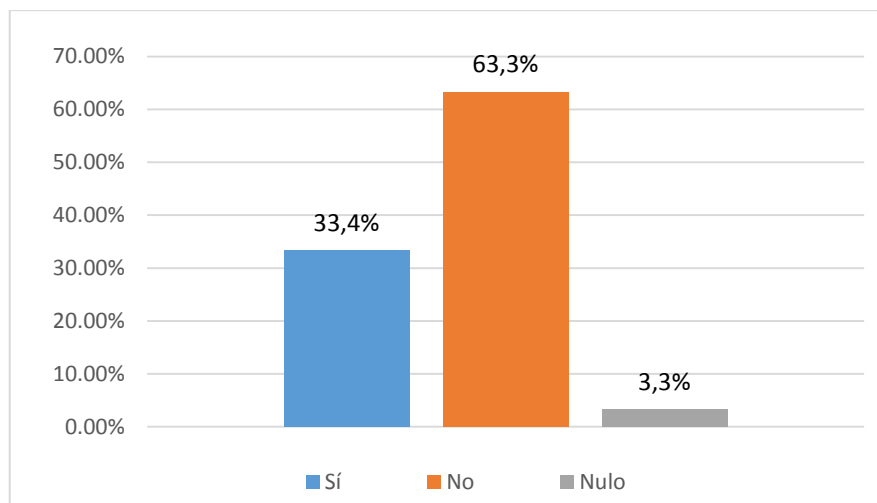


Figura 13. Resultados el ítem nº4 del cuestionario.

Ítems N° 5: ¿Qué tipo de materiales educativos utilizan con mayor frecuencia las docentes?

Con respecto a la pregunta de este ítem, 15 estudiantes (50%) señalan que la docente utiliza pizarra, plumones y regla, esto significa que las estudiantes hacen referencia a que aprenden matemática de manera monótona¹⁰, es decir, utilizan las mismas herramientas para todos los contenidos matemáticos. En cambio 3 estudiantes (10%) señalan que utilizan libros y separatas adicionales y 1 estudiante (3,3%) menciona que utilizan videos para aprender matemática. El resto de estudiantes (36,7%) no marcan ninguna alternativa.

¹⁰ La palabra monótona para las estudiantes significa rutinario. Ellas mencionan de forma verbal que las docentes utilizan siempre las mismas herramientas y no innovan.

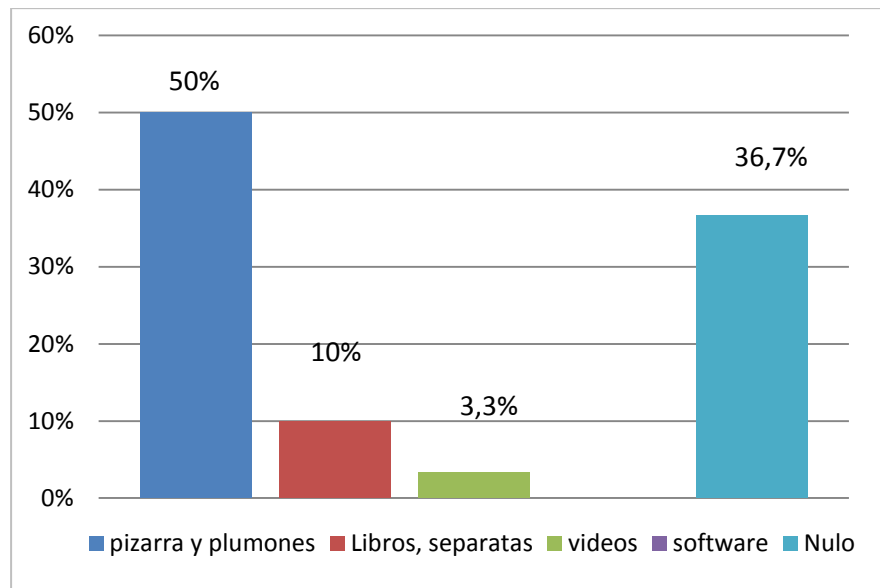


Figura 14. Resultados del ítem n°5 del cuestionario.

Ítem n°6: ¿Cómo te gustaría que te enseñen matemática?

La respuesta a este ítem tiene un carácter subjetivo pues depende de los gustos y preferencias de las estudiantes, tal vez influenciadas por sus estilos de aprendizaje o por el contexto en el que se desenvuelven. Así pues, un 83,4% de estudiantes le gustaría usar la computadora como un recurso adicional para el aprendizaje de la matemática. Estos resultados resultan significativos para los docentes en general, pues exige una renovación de la práctica pedagógica, en función de las necesidades e intereses de los estudiantes.

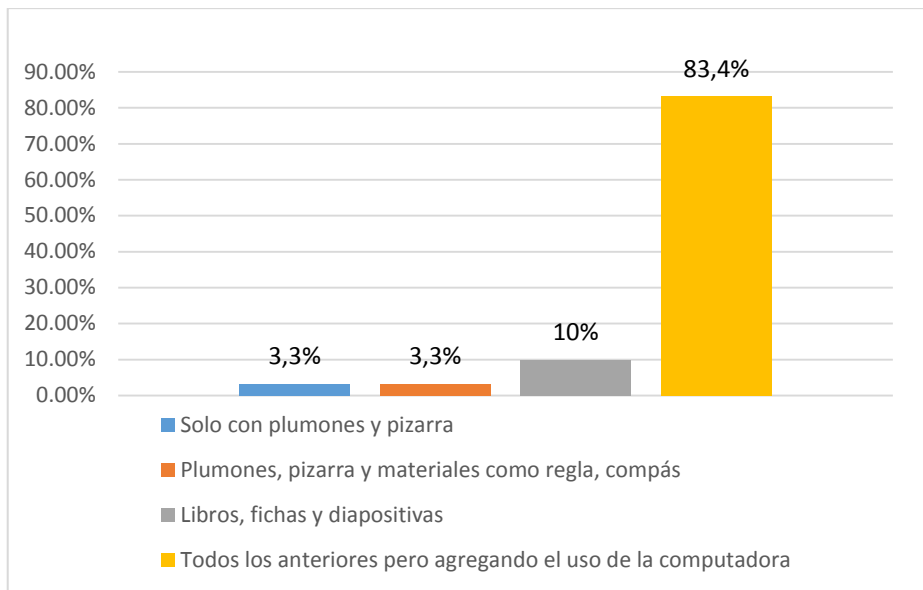


Figura 15. Resultados del ítem n°6 del cuestionario.

Ítem N° 7: ¿La docente de matemática utiliza el laboratorio de cómputo para el desarrollo de las sesiones de aprendizaje?

Se obtiene que el 100% de las estudiantes señalan que no utilizan el laboratorio para aprender temas matemáticos, lo cual hace pensar que no trabajan con programas ni aplicaciones relacionadas con la matemática. A su vez, esto hace suponer una desconexión entre la práctica pedagógica de los docentes y los intereses de las estudiantes (ver ítem anterior), así como una escasa adquisición de competencias tecnológicas, lo cual se ha observado en algunas estudiantes al trabajar con el software GeoGebra.

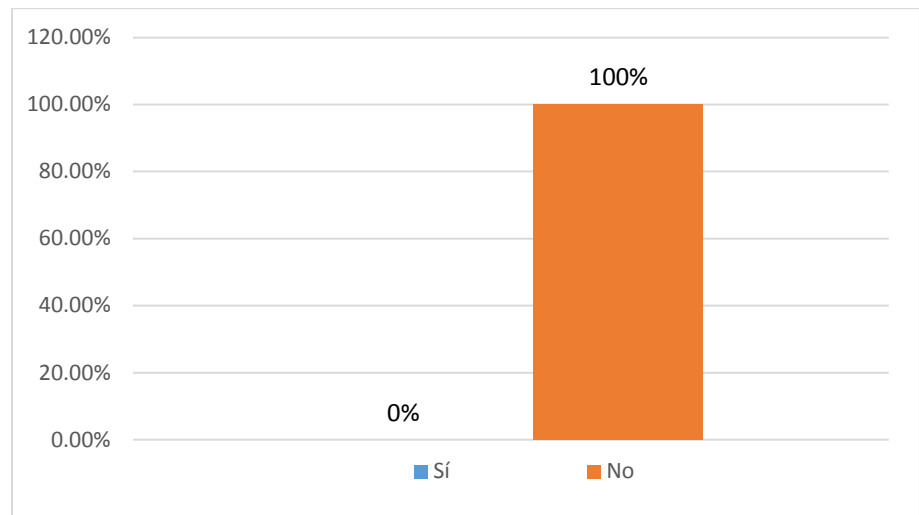


Figura 16. Resultados del ítem n°7 de cuestionario.

Nota: La barra de color naranja representa el 100%, es decir, todas las estudiantes indican que la docente no utiliza el laboratorio de cómputo.

Ítem N° 8: ¿Sabes utilizar la computadora para desarrollar actividades matemáticas?

Se indica que el 56,7%, más de la mitad de las estudiantes, no sabe utilizar la computadora para desarrollar actividades matemáticas. Sin embargo, un 43,3% indica que sí lo sabe.

Este resultado se contradice con lo obtenido en el ítem 7 (el 100% de estudiantes indican que no usan el laboratorio de cómputo para aprender matemática), aunque al dialogar con las estudiantes, se conoce que estas han instalado programas educativos en la computadora de casa o, en sus colegios de procedencia, han utilizado recursos TIC en el curso de matemática. Lo anterior, justifica la contradicción observada.

Estos porcentajes son fundamentales para iniciar la investigación sobre el uso de recursos TIC para la enseñanza de la matemática.

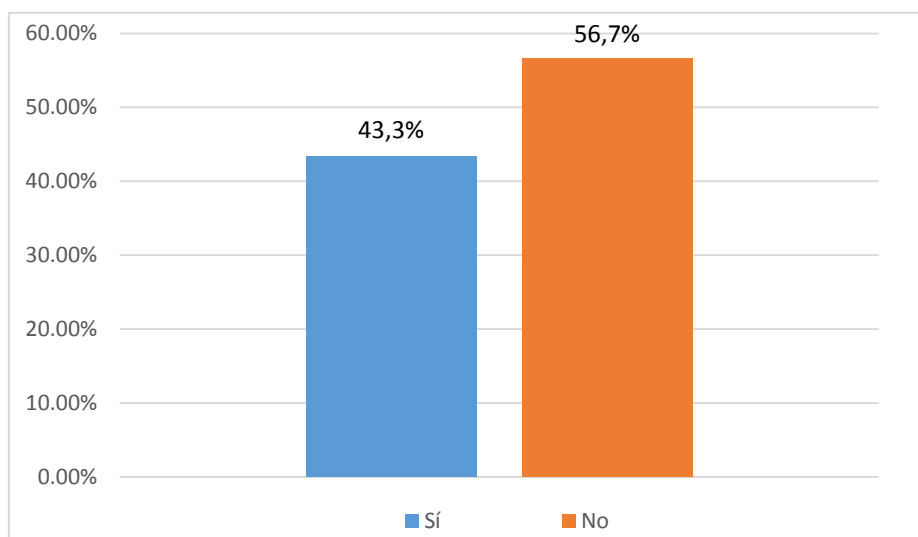


Figura 17. Resultados del ítem n°8 del cuestionario.

Ítem N° 9: ¿Crees que la computadora te ayude a aprender la matemática con mayor facilidad?

El hecho de que el 70% de las estudiantes manifiestan que la computadora les ayuda a aprender temas matemáticos, resulta contradictorio con los resultados de ítem anterior (n° 8), pues en él manifestaron que no saben utilizar la computadora para desarrollar actividades matemáticas.

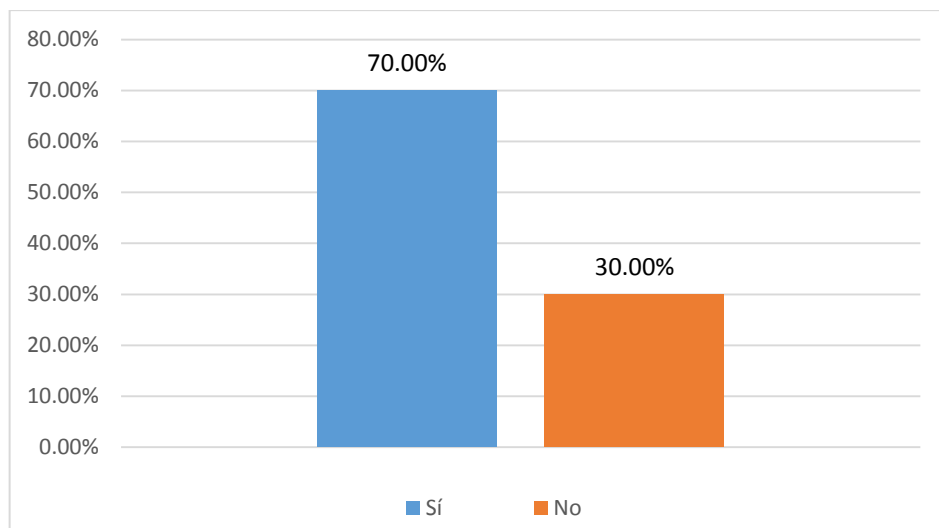


Figura 18. Resultados del ítem n° 9 del cuestionario.

Ítem N° 10: Marca el software educativo que conoces y que te ayude a aprender matemática en la computadora.

En este ítem, las estudiantes marcan el software conocido o, al menos, hayan tenido la oportunidad de manipular. Así pues, 11 estudiantes (36,7%) han trabajado con el GeoGebra, 2 (6,6%) han trabajado con Derive y 17 estudiantes (56,7%) no marcan ninguna alternativa, debido a que desconocen algún software educativo, lo cual se relaciona con los ítems anteriores sobre el manejo de la computadora para desarrollar actividades matemáticas.

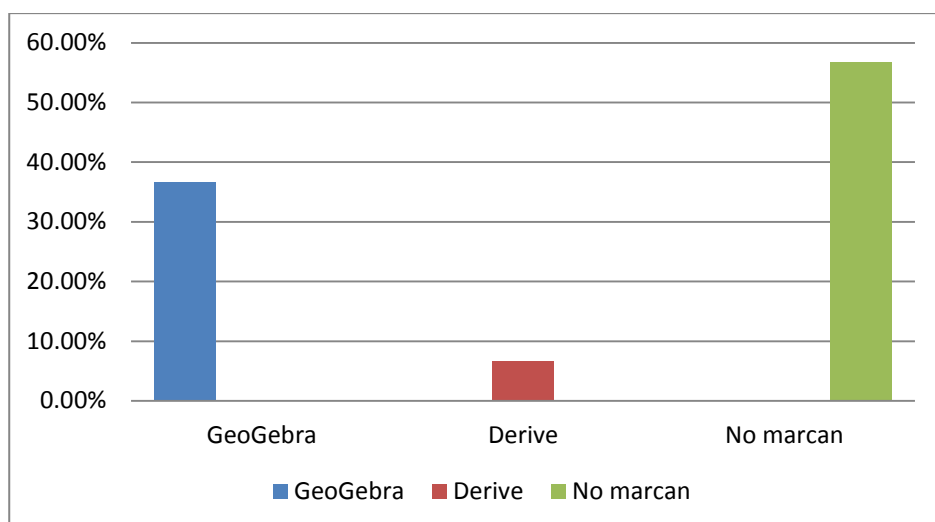


Figura 19. Resultados del ítem n°10 del cuestionario.

Ítem N° 11: ¿Cómo estudias matemática?

Se obtiene que 13 (43,3%) de las estudiantes marcan la alternativa “b” (Resuelves fichas de reforzamiento o ejercicios planteados en el libro que faltan por resolver). Ellas afirman que los ejercicios de extensión ayudan a aclarar dudas antes de un examen. Además, los ejercicios adicionales del libro permiten verificar si entendieron el tema explicado por la docente. Por su parte, 7 (23,3%) estudiantes marcaron la alternativa “a”, lo que significa que les basta repasar los ejercicios desarrollados en clase. También, 4 (13,3%) marcan las alternativas “c” o “d” y 6 estudiantes no marcan ninguna de las cuatro alternativas, debido a que consideran que la forma de estudiar depende del tema¹¹.

¹¹ La información se obtiene del diálogo con las estudiantes. Ellas afirman que hay circunstancias donde tienen que buscar material adicional para afianzar sus conocimientos y en otros casos basta repasar lo trabajado en clase o del libro de actividades.

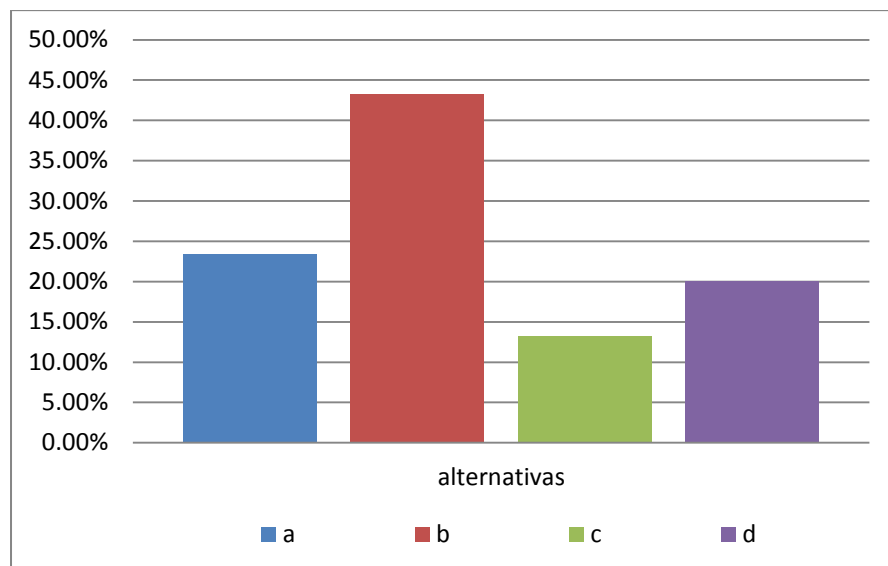


Figura 20. Resultados del ítem nº11 del cuestionario.

Nota: La alternativa “a” es: repasas los ejercicios hechos en clase. “b”: resuelves fichas de reforzamiento o ejercicios planteados en el libro que faltan por resolver. “c”: te dedicas a observar y elegir qué tipo de ejercicio puede venir en un examen y sólo esos estudias y “d” es: buscas libros y material adicional.

Después de analizar cada ítem del cuestionario, se deduce que las estudiantes aprenden matemática con materiales básicos como pizarra, plumones y libro de actividades y muy rara vez utilizan la sala de cómputo para trabajar temas relacionados con la matemática. Además, algunas estudiantes mencionan que mejorarían sus calificaciones si los materiales o estrategias de las docentes son atractivos para ellas.

4.2. Análisis de los resultados del pre test

El pre test (apéndice F) se utiliza para medir el nivel de conocimiento previo de las estudiantes con respecto al tema de líneas notables del triángulo.

Como se indicó en el capítulo III, se hace un análisis en base a dos indicadores. Estos se asocian a determinados ítems del instrumento, tal como se muestra en la Tabla 6:

Tabla 5.
Indicadores e ítems del pre test

Indicador	Ítems	
Explica, con sus propias palabras y con ayuda de ejemplos, los conceptos básicos de la geometría.	1	¿Qué es un segmento?
	2	¿Qué característica tiene la recta?
	3	¿Qué es un ángulo?
	4	¿Cuáles son las características del triángulo?
	5	¿Qué característica tiene la bisectriz interior de un ángulo?
	6	¿En qué se diferencia la altura y la mediatriz de un triángulo?
	7	¿Cómo se llama el punto de intersección de las medianas de un triángulo?
Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz.	1	Traza las alturas
	2	Traza las mediatrices
	3	Traza las medianas
	4	Traza las bisectrices interiores

Análisis de primer indicador:

“Explica, con sus propias palabras y con ayuda de ejemplos, los conceptos básicos de la geometría” (ítems 1-7)

El análisis del primer indicador consta de dos partes. La primera está conformada por los ítems n°1; n°2; n°3 y n°4 y la segunda parte conformada por los ítems n°5; n°6 y n°7.

El análisis de la primera parte muestra la dificultad de las estudiantes para explicar con sus propias palabras conceptos y características de segmento, recta, ángulo y triángulo. Esto se evidencia porque, se obtiene que 26 (86,7%) estudiantes responden regular a las preguntas, puesto que proporcionan ideas básicas muy cercanas al concepto real, apoyándose en dibujos para explicar estos, tal como se muestra en la Figura 21 y Figura 22:

Indicador 1: Explica con sus propias palabras los conceptos básicos de geometría con ayuda de ejemplos.

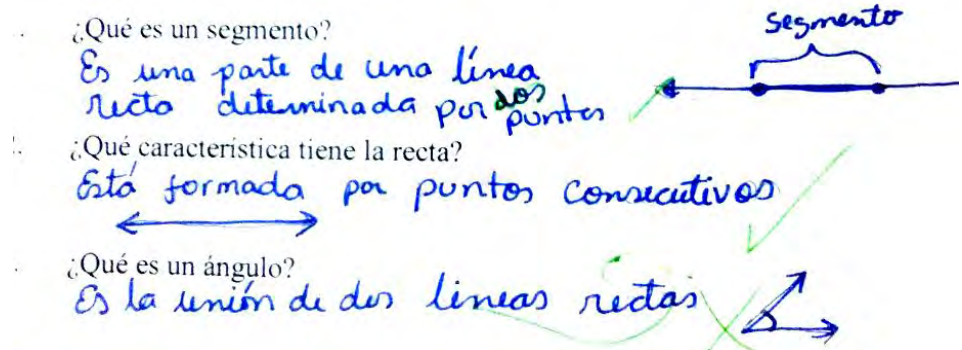


Figura 21. Respuesta de una estudiante del ítem n°1; n°2 y n°3 del pre test

En la figura anterior, la estudiante “x” explica que un segmento es una parte de la recta determinada por dos puntos y dibuja una recta señalando los dos puntos. También explica las características de la recta, indicando que está formada por puntos consecutivos y debajo grafica una recta. Finalmente define el ángulo como unión de dos líneas rectas y dibuja al costado dos rayos que parten de un mismo vértice.

¿Cuáles son las características del triángulo?

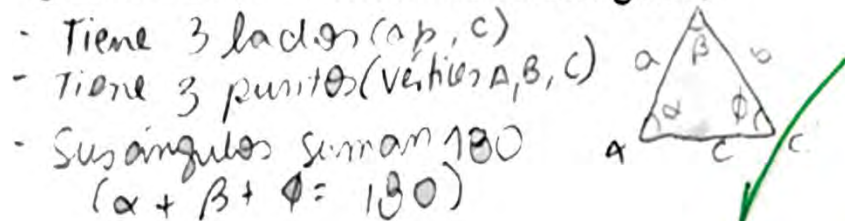


Figura 22. Respuesta de una estudiante al ítem n°4 del pre test.

En la figura anterior, la estudiante “x” explica las características del triángulo como: tiene tres lados, tres vértices y sus ángulos suman 180°, aunque le falta especificar que dichos ángulos son los interiores.

En cambio, las 4 estudiantes restantes (13,3%) no explican las características ni definen qué es un segmento o un ángulo. Solo se dedican a dibujar el segmento, la recta, el ángulo y el triángulo. Ante este resultado, se indaga, con las docentes del área de comunicación quienes sostienen que dichas estudiantes evidencian dificultades para expresarse de forma escrita, lo cual justifica el desempeño observado.

Los datos antes mencionados se reflejan a través de diagrama de barra (Figura 23):

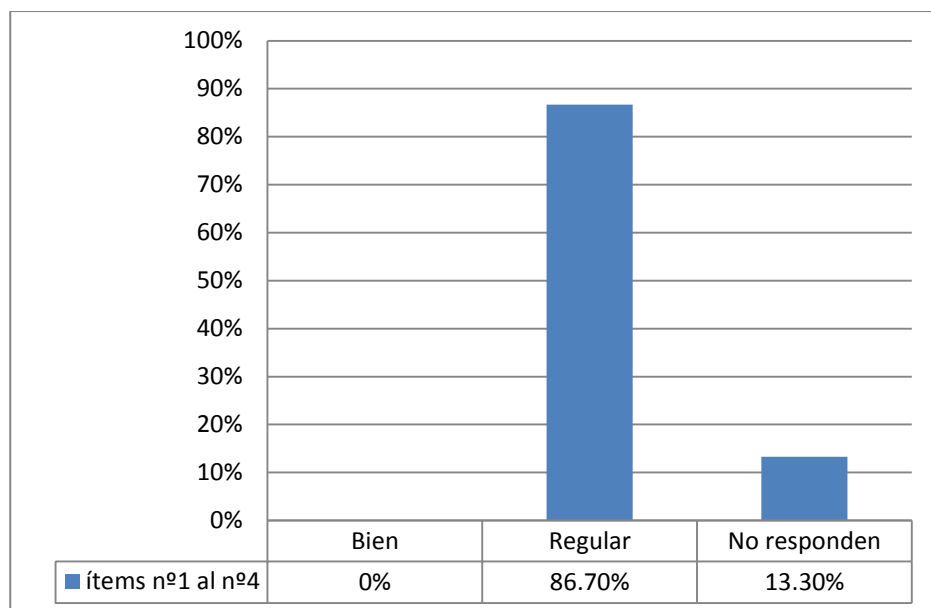


Figura 23. Frecuencia relativa de los ítems nº1 al nº4 del pre test.

Nota: Se observa que más de la mitad de las estudiantes (86,7%) puede explicar con sus propias palabras algunos conceptos y características principales del segmento, ángulo y triángulo.

En la segunda parte (ítems 5 al 7), las estudiantes tienen dificultad para explicar las características de la bisectriz interior de un ángulo, así como las diferencias entre la altura y la mediatriz. Nadie responde a la última pregunta porque no sabe el nombre del punto de intersección de las medianas trazadas en un triángulo.

En esta segunda parte se hace un análisis por cada ítem (nº5; nº6 y nº7):

Ítem Nº 5: ¿Qué característica tiene la bisectriz interior de un ángulo?

De las 30 estudiantes, 10 (33,4%) responden incorrectamente pues no dibujan la bisectriz interior de un ángulo. Este hecho se relaciona con la falta de conocimiento sobre qué es una bisectriz por ello, en su lugar, dibujan cualquier segmento y hacen una descripción del mismo. En cambio, 15 estudiantes (50%) explican de manera regular las características de una bisectriz interior apoyándose de un dibujo, en él resaltan división del ángulo inicial en dos ángulos congruentes. Por su parte, 5 estudiantes (16,6%) no responden a esta pregunta. De esto, resalta la explicación de una estudiante X sobre las características de la bisectriz interior de un ángulo. La estudiante explica que la bisectriz divide el ángulo en la mitad (ver Figura 24), es decir, el ángulo AOB y BOC son iguales, siempre y cuando B sea bisectriz del ángulo AOC. Esta característica de la bisectriz no es correcta, porque, B no es una bisectriz, sino, OB.

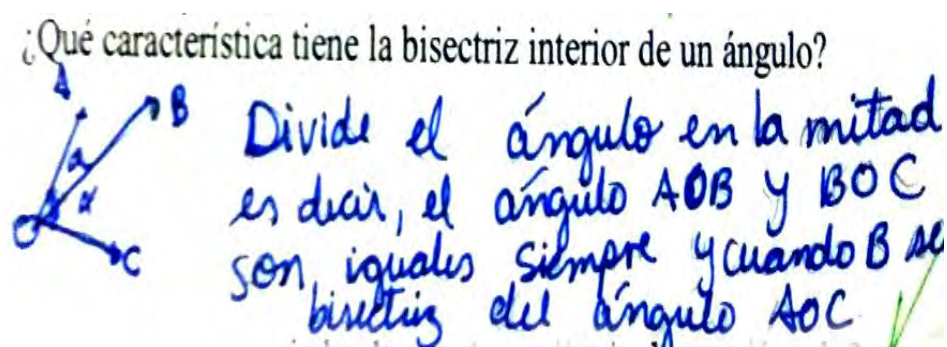


Figura 24. Explicación del ítem nº5 del pre test.

Los porcentajes mencionados anteriormente se resumen en la Figura 25:

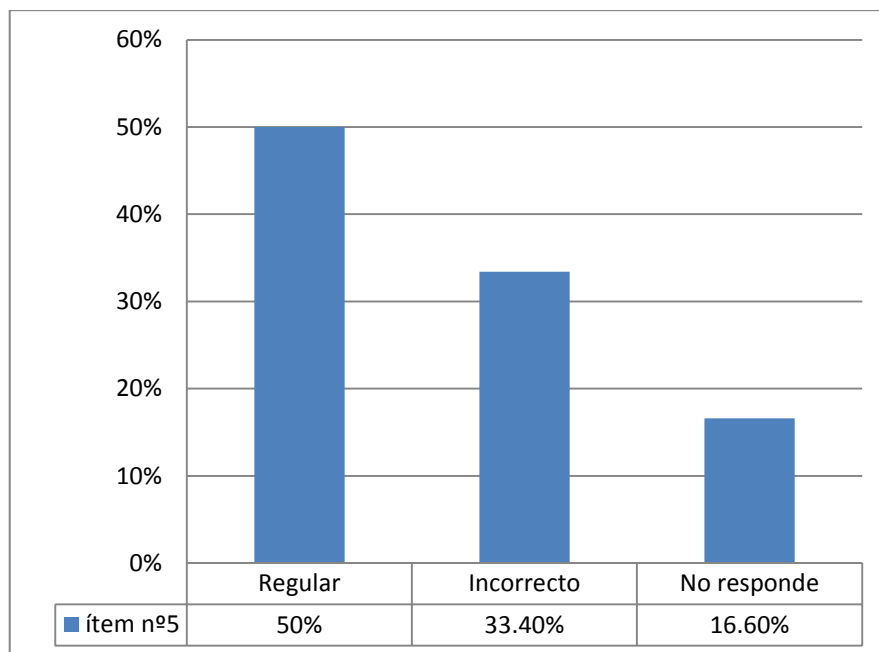


Figura 25. Frecuencia relativa con respecto al ítem n°5 del pre test.

Nota: Se observa que el 50% de las estudiantes explican las características de la bisectriz interior de un ángulo de forma regular. El resto de estudiantes no responde o explica incorrectamente.

Ítem N° 6: ¿Cuál es la diferencia entre altura y mediatriz?

De las 30 estudiantes, 26 de ellas (86,7%) responden incorrectamente a la pregunta sobre la diferencia entre la altura y la mediatriz. Las estudiantes no explican las características de la mediatriz pues, ellas indican que se confunden con la mediana. Las 26 estudiantes tienen la característica principal de la altura que al caer al lado opuesto del vértice desde el que se traza, forma un ángulo de 90° con dicho lado. Pero no indican si es un segmento, recta o rayo. Lo referido anteriormente se muestra en la explicación de una estudiante al diferenciar la altura de la mediatriz.

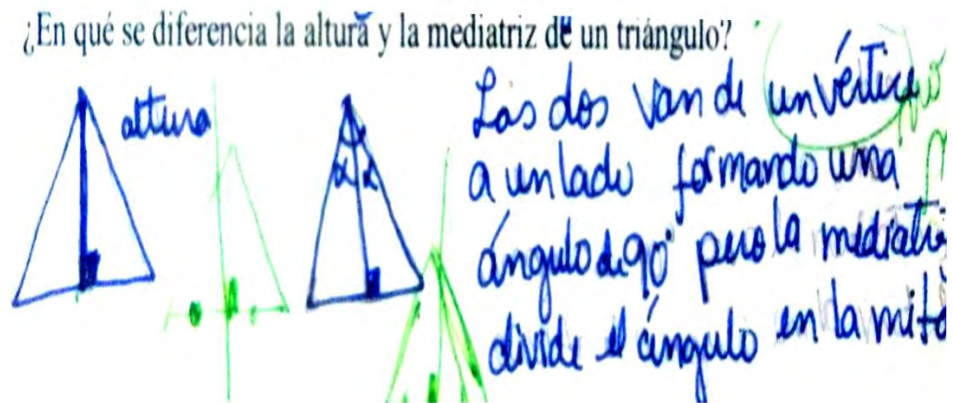


Figura 26. Explicación del ítem n°6 del pre test.

En la figura anterior, la estudiante “x” explica erróneamente las diferencias entre altura y mediatriz de un triángulo y los gráficos se perciben erróneos debido a no utilizar regla.

Los errores observados en este ítem sobre el trazado de la mediatriz se corresponden, probablemente, con el poco tiempo dedicado a su estudio el año anterior, tal como sostiene la docente responsable de aquel periodo¹². Finalmente, 4 estudiantes (13,3%) no responden a esta pregunta, ni intentan escribir alguna diferencia.

¹² La docente menciona que en la unidad programada del 2013, tiene solo una sesión de clase de 4 horas pedagógicas para la enseñanza de líneas notables (trazado y ejercicios).

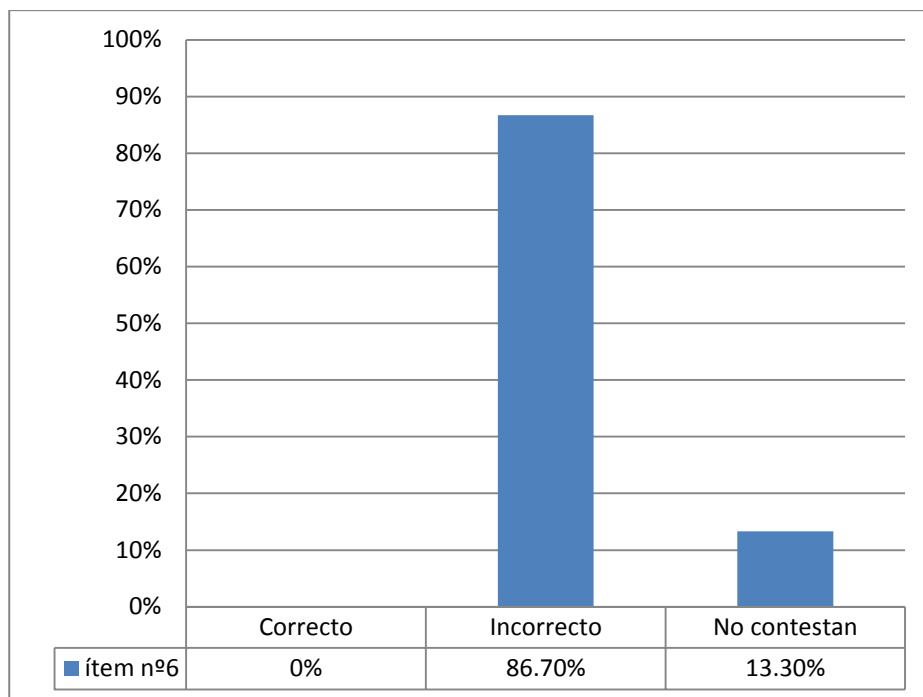


Figura 27. Frecuencia relativa del ítem nº6 de pre test.

Nota: Se observa que el 86,7% explica de manera incorrecta las diferencias entre la altura y la mediatriz a comparación de un 13,3% que no responde.

Ítem N° 7: ¿Cómo se llama el punto de intersección de las medianas de un triángulo?

17 (56,7%) estudiantes responden incorrectamente. Algunas escriben “Circunradio”, “Ortocentro” o inventan otros nombres en lugar de “baricentro”. Otras estudiantes dibujan el triángulo y trazan correctamente las medianas, pero no colocan el nombre de la intersección de ellas, probablemente, porque no lo saben. Por su parte, 13 estudiantes (43,3%) no responden a este ítem, debido a que desconocen o no recuerdan.

intersección de las medianas de un triángulo?

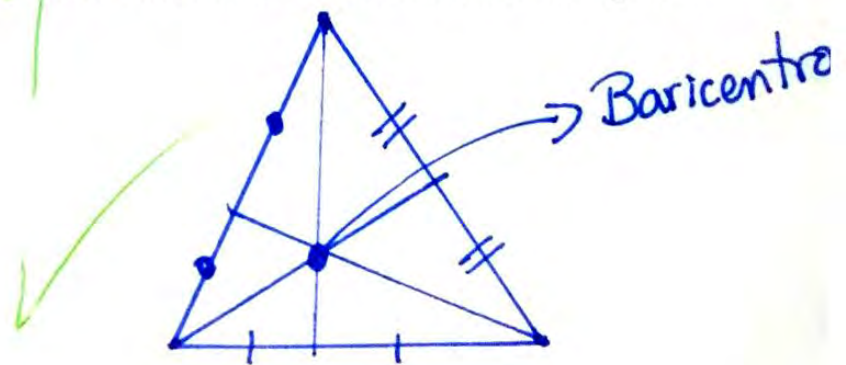


Figura 28. Respuesta del ítem nº7 del pre test.

En la figura anterior, la estudiante “x” responde de manera correcta y se ayuda de un gráfico (triángulo) señalando el punto de intersección de las medianas con una flecha.

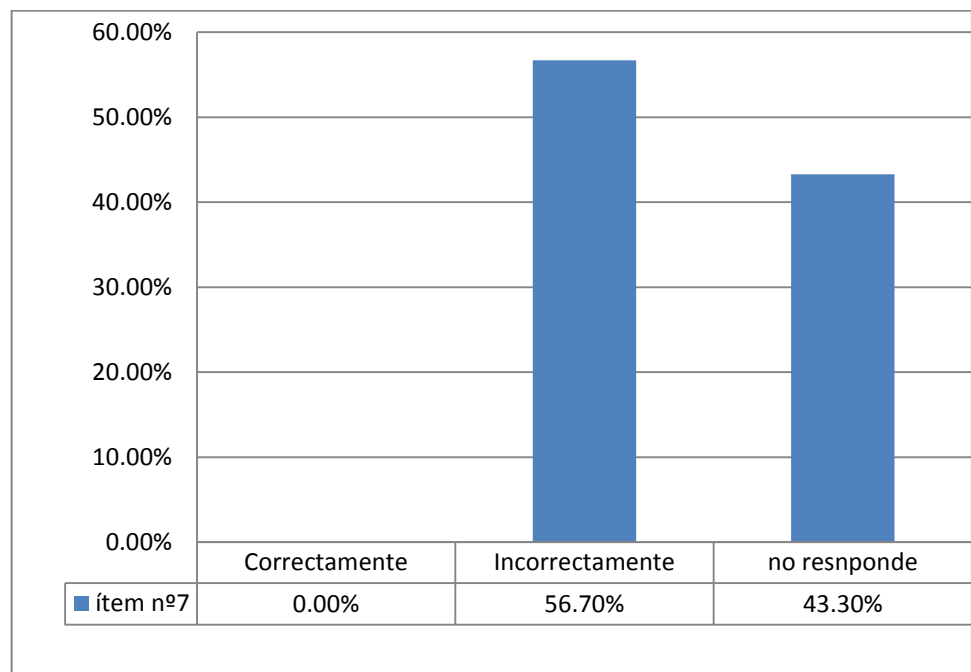


Figura 29. Frecuencia relativa del ítem nº7 de pre test.

Análisis del segundo indicador:

“Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz” (ítems 1- 4)

Ítem N° 1: Traza las alturas

Caso 1: Triángulo Acutángulo:

El 100% de estudiantes no tienen inconvenientes en trazar las alturas del triángulo acutángulo, debido a que tienen noción del trazado de alturas, aunque no todas saben explicar las características de dicha línea. A continuación se muestra el trazado de las alturas en el triángulo acutángulo hecho por una estudiante:

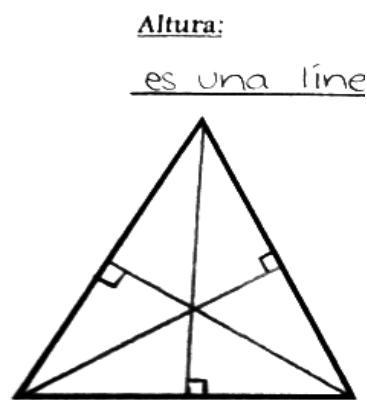


Figura 30. Trazado de alturas en el triángulo acutángulo (pre test)¹³.

Nota: La estudiante remarca el ángulo de 90° formado por la altura y el lado donde cae.

Caso 2: Triángulo rectángulo:

En el triángulo rectángulo los resultados son opuestos al del triángulo acutángulo. Se obtiene que 18 estudiantes (60%) trazan las alturas de forma incorrecta ya que proceden como si fuera un triángulo

¹³ La imagen está un poco inclinada debido a la ubicación en que se tomó la foto. Por eso no se visualiza de forma correcta los ángulos de 90° formados por las alturas y los lados del triángulo.

acutángulo (el punto de intersección de las alturas se encuentran dentro del triángulo) como se observa en las Figura 31 y Figura 32:

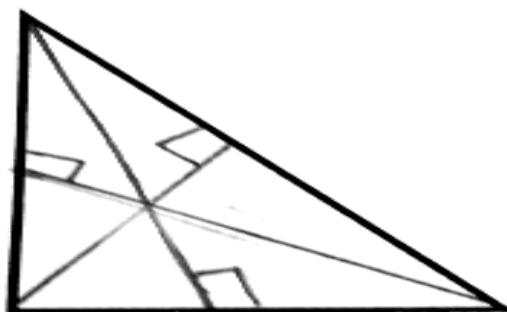


Figura 31. Trazado incorrecto de alturas en el pre test (parte 1).

En la figura anterior, la estudiante cae en la errónea idea de que el trazado de las alturas se ubica siempre dentro del triángulo y no toma en cuenta el concepto de perpendicularidad.

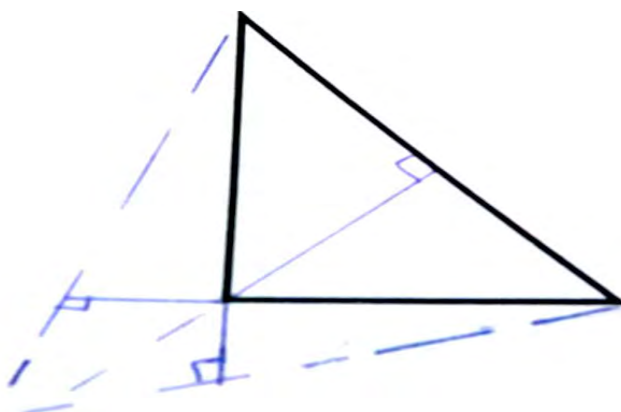


Figura 32. Trazado incorrecto de alturas en el pre test (parte 2).

En la figura anterior, la estudiante prolonga las alturas hacia afuera sin tener en cuenta el concepto de perpendicularidad, porque, dibuja el ángulo de 90° .

En cambio, 12 estudiantes (40%) trazan correctamente las alturas del triángulo rectángulo, resaltando el punto de intersección en el vértice del ángulo recto como se muestra en la Figura 33¹⁴:

¹⁴ Se tiene en cuenta que la foto se ha tomado desde un ángulo incorrecto, y se observa



Figura 33. Trazado correcto de las alturas en el pre test¹⁵.

En la figura anterior, se observa que la estudiante tiene en cuenta que el punto de intersección de las alturas siempre se ubica en el ángulo recto. Además, con ayuda del transportador se verifica la perpendicularidad del ángulo formado por la altura y el lado del triángulo.

Caso 3: Triángulo obtusángulo:

En este caso, 28 estudiantes (93,3%) trazan incorrectamente las alturas, porque lo hacen como si fuera un triángulo acutángulo o un triángulo rectángulo como se observa en la Figura 34:



Figura 34. Trazado incorrecto de alturas en triángulo obtusángulo (pre test).

En la figura anterior, se observa que la estudiante no proyecta los lados del triángulo para poder trazar las alturas. La estudiante no utiliza la regla de forma correcta para poder trazar las alturas como se observa

que el lado vertical está inclinado y no parece un triángulo rectángulo.

¹⁵ La estudiante utiliza solo lápiz para trazar las alturas.

en la parte inferior derecha de la imagen, solo indica el ángulo que mide 90° , pero realmente no tiene esa medida.

Solo 2 estudiantes (6,7%) trazan las alturas de manera correcta, guiándose del concepto de altura como línea notable de un triángulo.

En conclusión, las estudiantes tienden a confundirse en los tres tipos de triángulos, sobre todo, en el trazado de alturas en el triángulo obtusángulo. El error más común es que identifican el ángulo de 90° simbólicamente (con solo dibujar un cuadrado sombreado en un determinado vértice), sin tener en cuenta la medida. A continuación se presenta el resumen de los datos obtenidos:

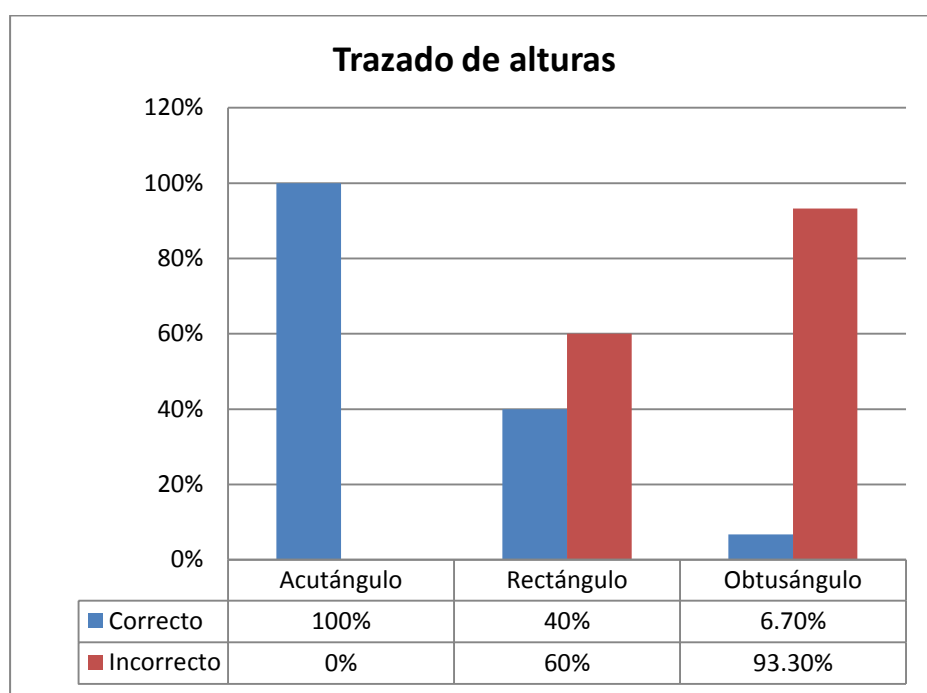


Figura 35. Frecuencia relativa del trazado de alturas en el pre test.

Según el gráfico (Figura 35) obtenemos que en el triángulo acutángulo no hay problemas al trazar las alturas, en cambio se observa que en el triángulo obtusángulo más del 90% no traza bien las alturas. Por otro lado, en el triángulo rectángulo existe un 40% de estudiantes que tiene noción del trazado de alturas en este tipo de triángulo.

Ítem N° 2: Traza las mediatrices

En este ítem, se explica de forma general, porqué todas las estudiantes trazan incorrectamente las mediatrices en los tres tipos de triángulos.

Veintiséis estudiantes (86,7%) en vez de trazar mediatrices, trazan bisectrices interiores. Así, dividen el ángulo dado en dos ángulos congruentes y al interceptarse con el lado opuesto las estudiantes dividen dicho segmento en dos segmentos congruentes como si se tratara, a la vez, del trazado de medianas. Lo anteriormente mencionado se observa en las Figuras 36 y Figura 37:

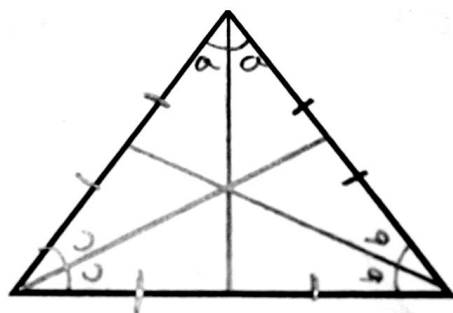


Figura 36. Trazado incorrecto de mediatrices en el pre test (parte 1).

En la Figura 36, se observa que la estudiante confunde la mediatriz por la bisectriz y observamos que en los lados dibuja segmentos pequeños para dar a conocer que la bisectriz al interceptarse con el lado del triángulo lo divide en dos lados congruentes.

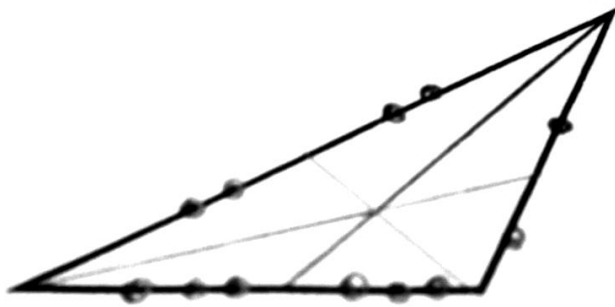


Figura 37. Trazado incorrecto de mediatrices en el pre test (parte 2).

Nota: en esta imagen, la estudiante no traza mediatrices, sino medianas, porque, dibuja puntos grandes en los lados del triángulo.

Por otro lado, 4 estudiantes (13,3%) no desarrollan el ítem, es decir, no trazan las mediatrices en los tres tipos de triángulo.

En conclusión, las estudiantes no evidencian tener interiorizado el concepto de cada línea notable y por ello, confunden la mediatriz con la bisectriz o con la mediana. Esto se corroboró con el diálogo con las estudiantes quienes sostienen que no tienen claro el concepto de mediatriz ni cuáles son sus características.

A continuación se muestra el resumen de los resultados obtenidos en los tres tipos de triángulo.

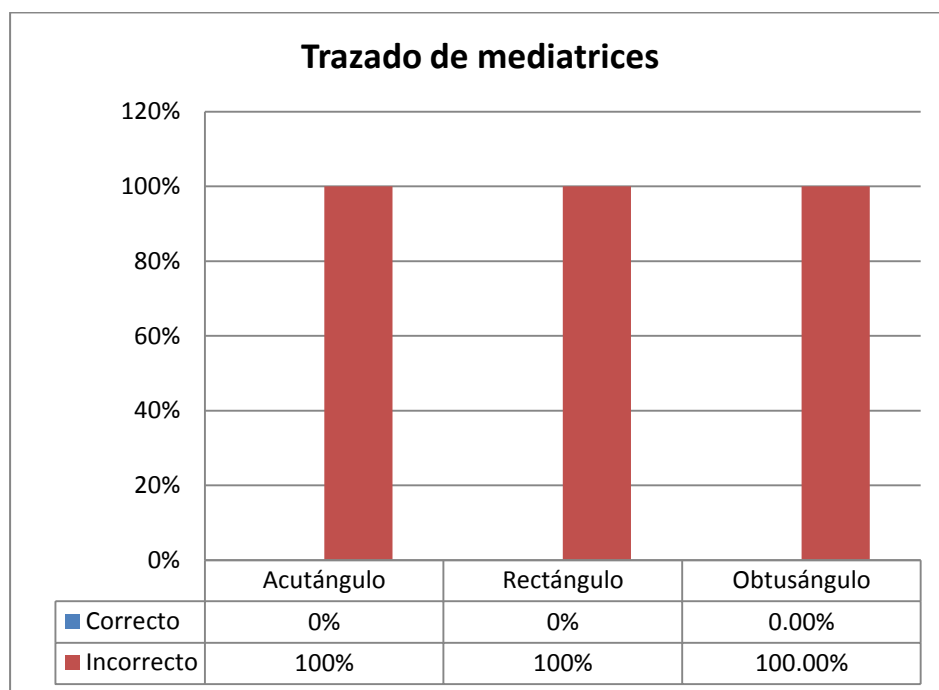


Figura 38. Frecuencia relativa del trazado de mediatrices en el pre test.

Ítem N° 3: Traza las medianas

De las 30 estudiantes, 23 de ellas (76,6%) trazan correctamente las medianas en los tres tipos de triángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo). Después del pre test, se pregunta qué línea notable es más fácil de trazar, ellas responden que es la mediana porque, relacionan el

significado de esta línea notable con el concepto de “punto medio” o “mitad”, lo cual corresponde con un razonamiento “intuitivo” que evita que cometan errores. No obstante, 7 estudiantes (23,4%) no desarrollaron el ítem debido a dudas o falta de disposición.

A continuación se muestran ejemplos del trazado de las medianas hechos por algunas estudiantes:

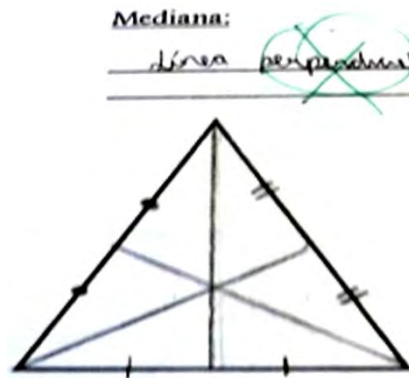


Figura 39. Trazado correcto de las medianas en el pre test (parte 1).

En la figura anterior, se observa que la estudiante dibuja líneas pequeñas y puntos para explicar que la mediana divide el lado del triángulo en dos partes congruentes.

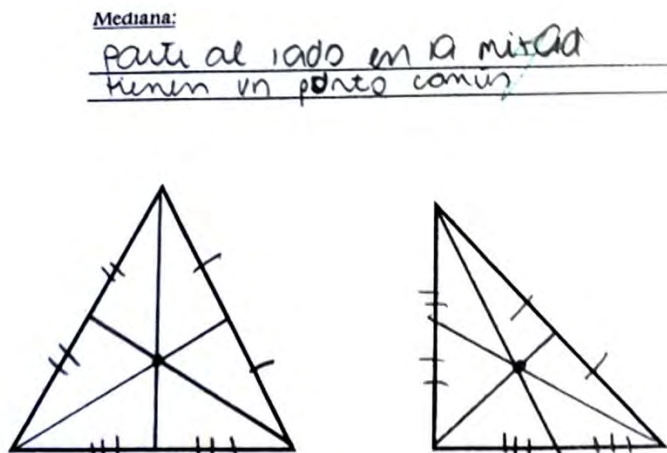


Figura 40. Trazado correcto de las medianas en el pre test (parte 2).

En la figura anterior, se observa que la estudiante “x” define la mediana como segmento que parte al lado en la mitad y tienen un punto común. Lo cual es incorrecto.

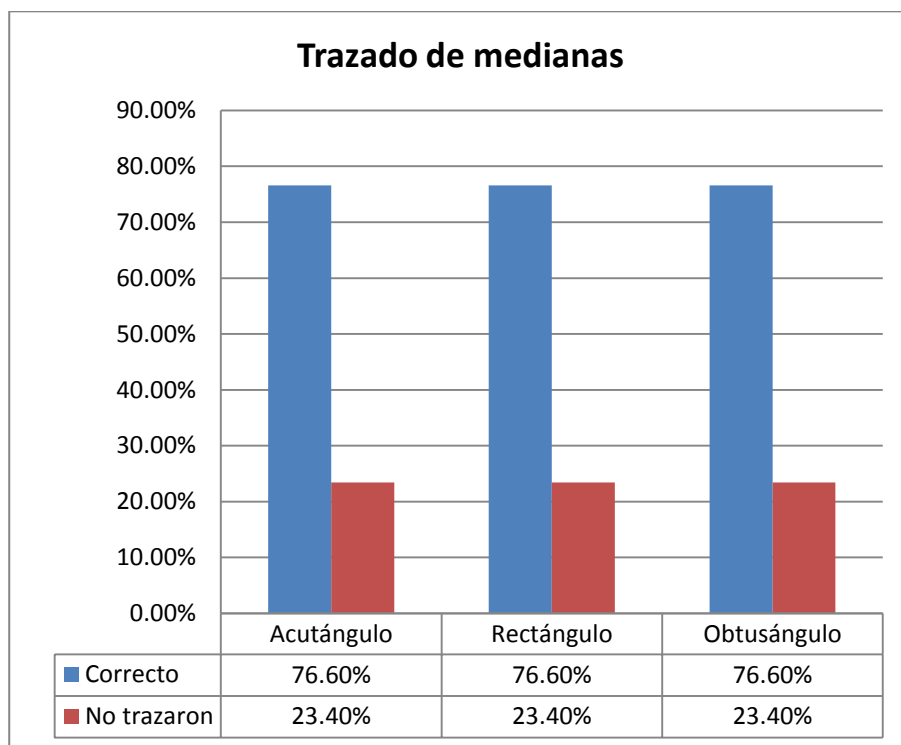


Figura 41. Frecuencia relativa del trazado de medianas en el pre test.

Ítem N° 4: Traza las bisectrices interiores

Solo se considera el trazado de bisectrices interiores en el triángulo, porque las estudiantes lo han trabajado en años anteriores.

De las 30 estudiantes, 18 (60%) trazan las bisectrices interiores en los tres tipos de triángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo) de forma correcta. Por otra parte, 6 estudiantes (20%) desarrollan incorrectamente la actividad, porque confunden la bisectriz con la mediatriz y la mediana (Figura 42a) y otras mezclaron mediana con altura (Figura 42b) en vez de trazar bisectrices.

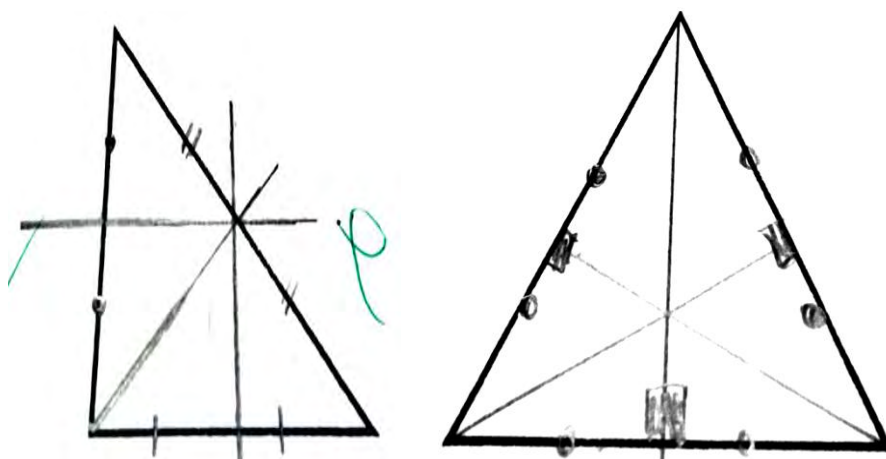


Figura 42. Trazado incorrecto de las bisectrices en el pre test.

Traza la bisectrices interiores

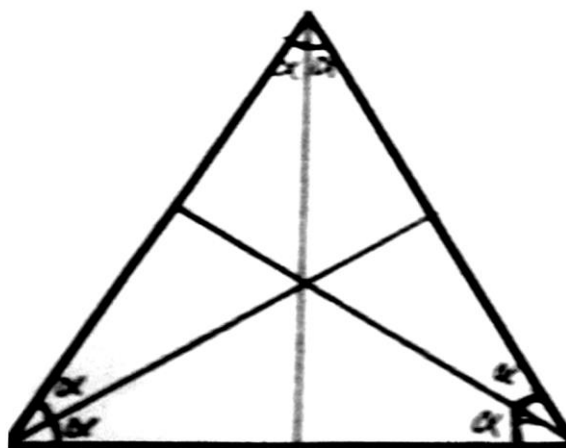


Figura 43. Trazado correcto de bisectrices interiores en el pre test.

Se recuerda que en el triángulo acutángulo 24 estudiantes (80%) trazan correctamente las bisectrices interiores en contraste con 6 estudiantes (20%) que lo hacen incorrectamente. A continuación se muestra el resumen de la información obtenida:

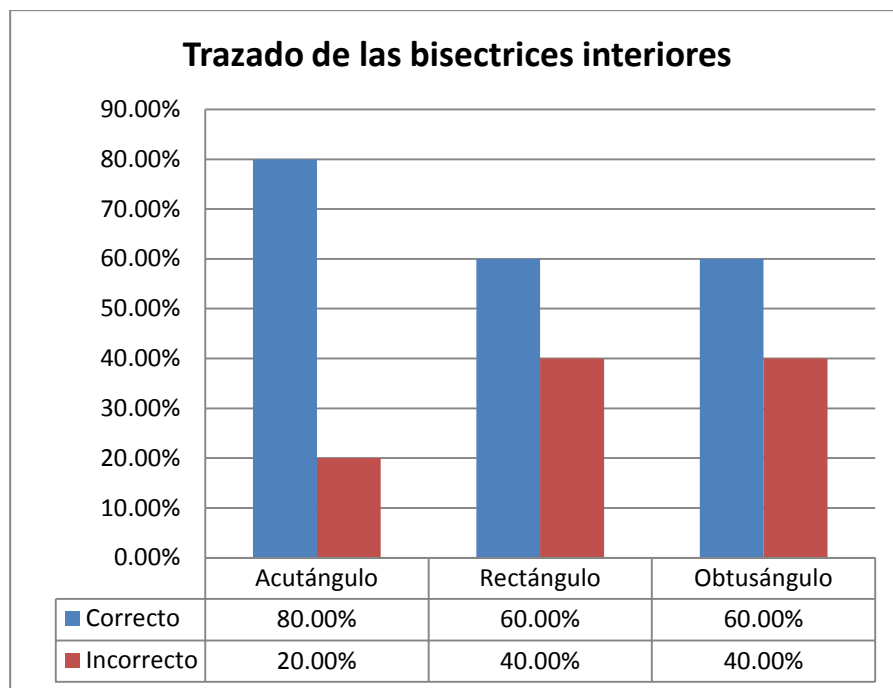


Figura 44. Frecuencia relativa del trazado de bisectrices interiores en el pre test.

Nota: El 80% de las estudiantes trazan correctamente las medianas a comparación de un 60% de ellas que trazan las medianas en el triángulo rectángulo y obtusángulo.

A modo resumen, se muestra una tabla que contiene resultados cuantitativos del desempeño de las estudiantes en el pre test. Se opta con una calificación en escala vigesimal (20 puntos) de la cual se diferencias los siguientes rendimientos:

- De 01 a 10 de nota ---- deficiente
- De 11 a 15 de nota ---- regular
- De 16 a 20 de nota --- bien

Tabla 6.
Resumen de trazado de líneas notables del pre test

Escala cuantitativa	01 - 10	11 - 15	16 - 20
	Deficiente	Regular	Bien
Nº de estudiantes	24	6	0

Fuente: examen pre – test

El cuadro resumen refleja que 24 estudiantes (80%) tienen una nota que oscila entre 01 a 10, esto significa que desaprueban el examen y 6 estudiantes (20%) obtienen una calificación entre 11 a 15. Es decir que, tienen conocimientos regulares de geometría, sobre todo del trazado de medianas y bisectrices interiores.

Se analiza los resultados en la hoja de cálculo del GeoGebra a través de un histograma (Figura 44), para obtener el promedio que es 6,87; la moda es 6 y la mediana es 6,5. Los resultados no son favorables para el grupo de estudiantes, porque, el promedio grupal no supera el 10,5 en su nota.

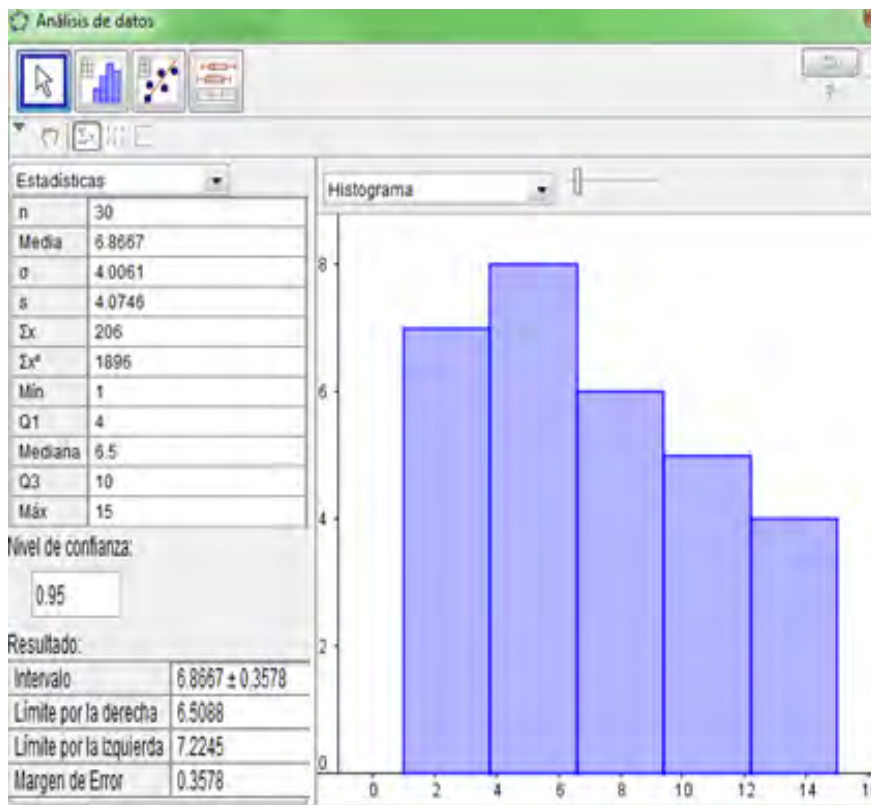


Figura 45. Histograma de los resultados del pre test.

Nota: El nivel de confianza es de 0,95 y el margen de error es 0,36. El eje de las abscisas representan las calificaciones obtenidas por las estudiantes y el eje de las ordenadas representan el número de estudiantes

4.3 Análisis de los resultados de la actividad con papel

En esta actividad se entrega 12 triángulos de papel a cada estudiante para que realicen dobleces y puedan trazar líneas notables. Las estudiantes siguen constantemente las indicaciones de la docente y de la ficha de trabajo (apéndice G).

La actividad se divide en 4 ítems que corresponden al trazado de alturas, medianas, mediatrices y bisectrices, y al finalizar la actividad, se hace un análisis descriptivo¹⁶ de los resultados de cada ítem, enfocándose en los siguientes indicadores escritos en la ficha de observación (apéndice H):

- Realiza la actividad con papel de manera correcta siguiendo las indicaciones de la ficha.
- Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulo hechos de papel utilizando regla y lápiz.
- Entrega la ficha desarrollada de la actividad con papel y presenta el cuaderno con los triángulos pegados y desarrollados.

Análisis descriptivo de cada ítem:

Ítem N° 1: Traza las alturas

En este ítem, solo 4 estudiantes (13,4%) no realizan correctamente los dobleces en los tres tipos de triángulos, a pesar de las indicaciones. El resto de estudiantes sigue las indicaciones de la ficha sin problemas.

En esta actividad, se observa que al trazar las alturas en los triángulos rectángulos y obtusángulos, 13 estudiantes (43,3%) realizan la actividad incorrectamente, porque trazan las alturas como si fuera un triángulo acutángulo porque ubican el punto de intersección de las tres alturas dentro del triángulo y no sobre la hipotenusa, en el caso del triángulo rectángulo, o fuera del triángulo, en el caso del obtusángulo.

¹⁶ Se hace un análisis descriptivo debido a que esta actividad es introductoria y orienta a la docente sobre los conocimientos que tiene las estudiantes con respecto a las líneas notables. Por otra parte, cada ítem de la actividad con papel presenta un cuadro estadístico que muestra con claridad los resultados.

Este hecho trae como consecuencia que no respondan de forma correcta a las preguntas propuestas en la ficha de actividades, por ende, no realizan el trazado de las alturas correctamente.

Por otra parte, 13 estudiantes (43,3%) trazan correctamente las alturas en los tres tipos de triángulos, lo cual hace suponer que tienen conocimiento del concepto de perpendicularidad, además de emplear correctamente la regla en la realización de las actividades. En el caso del triángulo obtusángulo tienen que utilizar una hoja adicional que sirva de base y poder prolongar las alturas.



Figura 46. Trazado correcto de alturas en actividad con papel.

Tabla 7.

Resumen del trazado de alturas de la actividad con papel

Triángulo	Trazado de alturas			
	Correctamente		Incorrectamente	
	Nº	%	Nº	%
Acutángulo, rectángulo y obtusángulo	13	43,3%	17	56,7%

Ítem N° 2: Traza las medianas

En esta actividad, 26 (86,6%) estudiantes realizan los dobleces de manera correcta, siguiendo las indicaciones de la ficha de actividades sin preguntar a la docente. Cada estudiante al finalizar el trazado, utiliza la regla para comprobar si al trazar la mediana divide el lado del triángulo en dos partes congruentes (de igual medida). En cambio, 4 (13,4%) estudiantes afrontan dificultades debido a la mala interpretación de las indicaciones, al no realizar correctamente los dobleces y al desear que la docente les haga la actividad.

Las 26 estudiantes que hacen bien los trazados, empiezan por unir los vértices de cada lado con el fin de obtener el punto medio de dicho lado. Después, realizan dobleces para trazar las medianas. Lo mencionado se observa en la Figura 47:

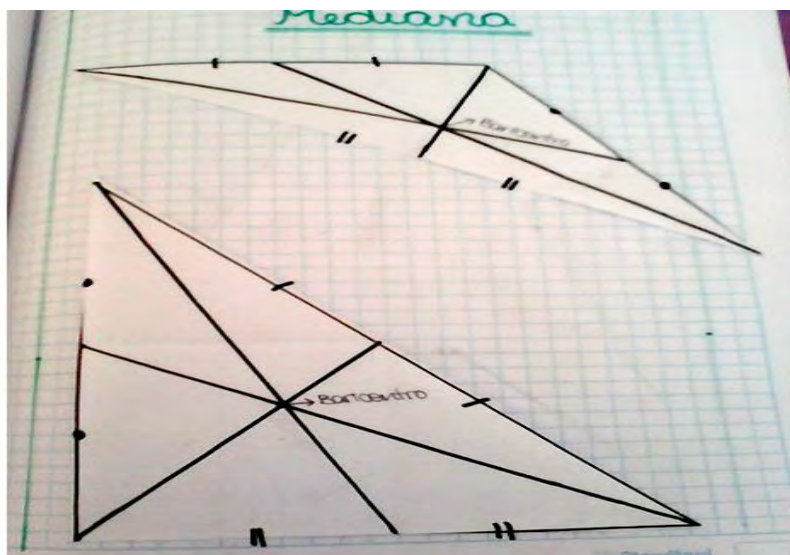


Figura 47. Trazado de las medianas en actividad con papel.

En la figura anterior, se observa que la estudiante ha recortado mal el triángulo rectángulo, pero esto no impide ubicar el punto medio de cada lado y hacer los dobleces para trazar las medianas. Además, la estudiante señala con líneas rectas pequeñas la congruencia de cada parte dividida.

Se presenta el resumen en la siguiente tabla:

Tabla 8.
Resumen del trazado de medianas de la actividad con papel

Triángulo	Trazado de medianas			
	Correctamente		Incorrectamente	
	Nº	%	Nº	%
Acutángulo, rectángulo y obtusángulo	26	86,6%	4	13,4%

Ítem N° 3: Traza las mediatrices

En esta actividad, las estudiantes utilizan una hoja adicional que sirve de base, de tal forma que al trazar las mediatrices puedan prolongarlas hasta interceptarse en un punto (circuncentro) que, para el caso del triángulo obtusángulo, se ubica fuera de éste. En la actividad no se solicita dibujar una circunferencia circunscrita, por lo tanto, las estudiantes solo se limitan a trazar mediatrices siguiendo las indicaciones de la ficha de actividades y obteniéndose los siguientes resultados:

Doce estudiantes (40%) trazan las mediatrices como si fueran segmentos (parte de una recta limitada por dos puntos) y no como rectas (las rectas son ilimitadas en ambos extremos). Lo mencionado se observa en la Figura 48:

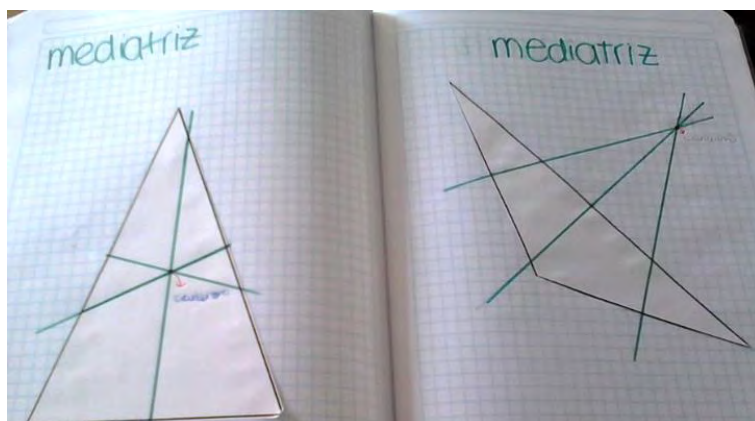


Figura 48. Trazado incorrecto de mediatrices en actividad con papel.

Lo anterior es una práctica usual por parte de las estudiantes, porque no dibujan flechas o puntos consecutivos para indicar que las líneas trazadas son rectas. Se resalta, que las estudiantes dan sus opiniones sobre la actividad y concluyen que el punto de intersección de las mediatrices no siempre está dentro del triángulo (acutángulo), sino fuera (triángulo obtusángulo) o sobre la hipotenusa como en el caso del triángulo rectángulo (Figura 49).

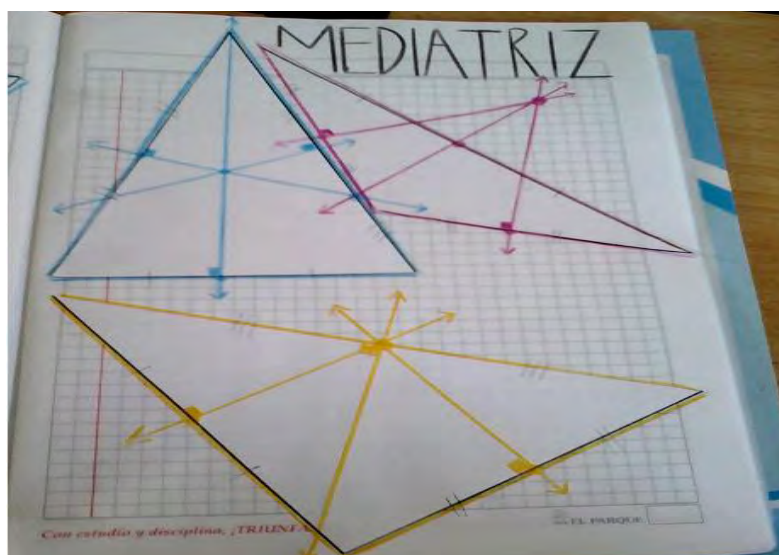


Figura 49. Trazado correcto de mediatrices en actividad con papel.

Se presenta el resumen en la siguiente tabla:

Tabla 9.
Resumen del trazado de mediatrices de la actividad con papel

Triángulo	Trazado de mediatrices			
	Correctamente		Incorrectamente	
	Nº	%	Nº	%
Acutángulo, rectángulo y obtusángulo	18	60%	12	40%

Ítem N° 4: Traza las bisectrices interiores

Durante el desarrollo de este ítem, el 100% de estudiantes traza sin dificultad las bisectrices interiores de un triángulo. Ellas se guían de las características de la bisectriz de un ángulo y relacionan en los triángulos. Por eso, al realizar la actividad utilizan el transportador con el fin de comprobar que la línea trazada por el doblado divide el vértice en dos ángulos congruentes. Por lo tanto, las 30 estudiantes explican correctamente, a través de los triángulos, qué es la bisectriz y colocan símbolos (del alfabeto griego) para diferenciar los ángulos congruentes como se observa en la Figura 50:

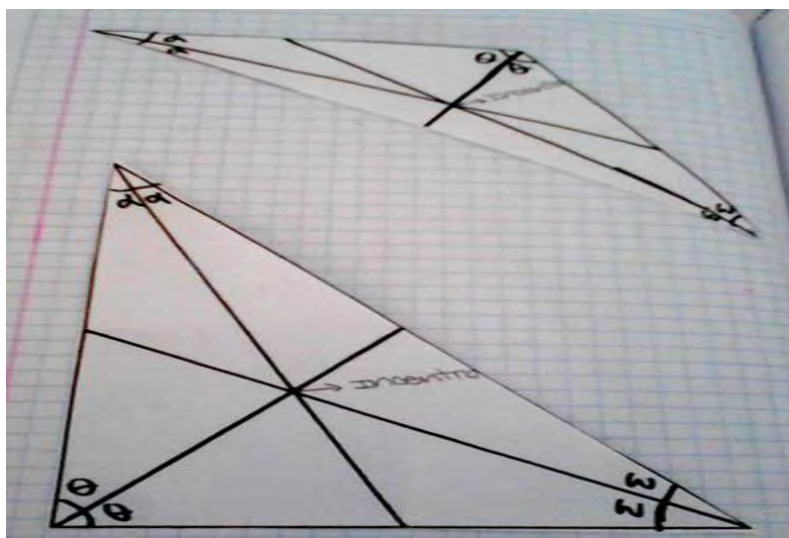


Figura 50. Trazado de las bisectrices interiores en actividad con papel.

En la figura anterior, se aprecia el trazado de bisectrices interiores en el triángulo rectángulo (se recuerda que fue tomada desde un ángulo inadecuado) y de un obtusángulo. Ambos triángulos presenta interiormente el punto de intersección de las bisectrices llamado incentro.

Se presenta el resumen en la siguiente tabla:

Tabla 10.
Resumen del trazado de bisectrices interiores de la actividad con papel

Triángulo	Trazado de bisectrices			
	Correctamente		Incorrectamente	
	Nº	%	Nº	%
Acutángulo, rectángulo y obtusángulo	30	100%	0	0%

Al finalizar la actividad con papel, se concluye que las estudiantes tienen dificultad al trazar alturas y mediatrices, específicamente en el triángulo rectángulo y el obtusángulo. Esto se comprueba al revisar el trazado de las líneas notables en los 12 triángulos (3 acutángulos, 3 rectángulos y 3 obtusángulos) pegados en el cuaderno de cada una. Esta dificultad se debe a que no interiorizan bien la definición de altura y mayormente han trabajado con triángulos cuyas bases son paralelas a la recta horizontal y triángulos acutángulos. Además, tienen dificultad para explicar el concepto de perpendicularidad entre dos rectas o segmentos, pues en muchos casos no utilizan correctamente las reglas, ni el transportador para comprobar la medida de los ángulos.

Mostramos el gráfico estadístico de frecuencia relativa sobre los resultados obtenidos en los 4 ítems de la actividad:

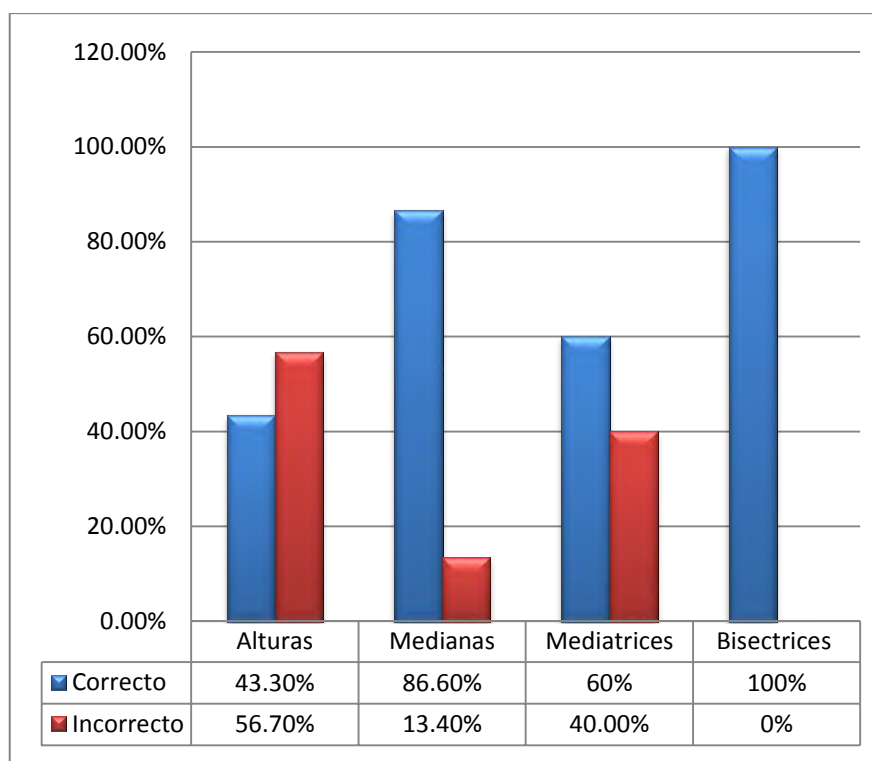


Figura 51. Frecuencia relativa de la actividad con papel.

Según el gráfico anterior, las estudiantes no tienen problemas al seguir indicaciones y trazar correctamente las bisectrices y medianas, porque en el caso de las bisectrices refleja que el 100% lo hicieron correcto y en el caso de las medianas un 86,6% de estudiantes traza correctamente. En cambio, en las alturas y mediatrices existe un bajo porcentaje de estudiantes que no traza correctamente debido a no entender las indicaciones o no tener claro los conceptos de perpendicularidad, recta, segmento o prolongación.

4.4. Análisis de los resultados de la aplicación del GeoGebra

El propósito de la actividad es que las estudiantes, a través de la construcción de triángulos, identifiquen las propiedades de las líneas notables, para lo cual se desarrolla 3 sesiones en las cuales, el trabajo de las estudiantes se realiza de forma individual¹⁷. Además, dentro de la programación de unidad, se incorpora el uso del software GeoGebra, generando un ambiente en el que las estudiantes tienen la oportunidad de interactuar con un recurso TIC.

La actividad del GeoGebra se divide en tres sesiones, correspondiendo realizar una sesión por día. La actividad se divide en 4 ítems (nº1 corresponde al trazado de alturas, el nº2 al trazado de medianas, el nº 3 al trazado de mediatrices y el nº4 al trazado de bisectrices interiores). La estructura de la actividad se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 11.
Estructura del desarrollo de la actividad “GeoGebra”

Nº sesión	Ítem	Actividad desarrollada
1 Fecha: 14/10/13	Nº1	Trazado de alturas
	Nº2	Trazado de medianas
2 Fecha 21/10/13	Nº2	Finalizar el trazado medianas
	Nº3	Trazado de mediatrices
3 Fecha: 28/10/13	Nº3	Finalizar el trazado mediatrices
	Nº4	Trazado de bisectrices interiores

En el desarrollo de las sesiones se tiene en cuentas las siguientes consideraciones:

- Al iniciar la sesión de clase en el laboratorio, se menciona los indicadores de logro que se encuentran en la ficha de observación (apéndice J).

¹⁷ Las estudiantes trabajan de forma individual en cada computadora.

- Se explica la ficha de trabajo (apéndice I).
- Luego, se utiliza el proyector y se indica los pasos a seguir en cada ítem.
- Después, se guarda los gráficos de los triángulos con sus respectivas líneas notables trabajadas en una carpeta y son enviados al correo institucional de la docente.
- Al finalizar las actividades en el laboratorio, se explica los conceptos de línea notables, sus características y sus diferencias a través de una ficha resumen (apéndice K).

Antes de hacer el análisis de cada ítem, se describe a continuación las tres sesiones de la actividad GeoGebra:

En la primera sesión se hace una breve introducción a la utilización y manejo del software Geogebra, desarrollándose el ítem n°1 y n°2 (trazado de alturas y medianas respectivamente). Antes, se explica paso a paso el manejo de la barra de menú (Figura 52) que presenta el software para evitar dudas durante su utilización. El objetivo de la primera sesión es finalizar el ítem n°1 (trazado de alturas) en los tres tipos de triángulo e iniciar con el ítem n°2 (trazado de medianas) pero, solo se trabaja con el triángulo acutángulo.



Figura 52. Barra de herramientas del software GeoGebra.

Nota: Esta barra contiene 11 íconos con los que pueden trabajar las estudiantes durante las tres sesiones.

En la segunda sesión, la docente continúa con el trazado de las medianas (ítem 2), en este caso, con los triángulos rectángulo y obtusángulo. Una vez, finalizado el desarrollo del ítem n°2, las estudiantes desarrollan el ítem n°3 (trazado de mediatrices). Ellas siguen las indicaciones de la docente y seleccionan el cuarto ícono (Figura 53), eligiendo la opción mediatriz. Según lo programado en la segunda sesión para el trazado de mediatrices solo se trabaja con los triángulos acutángulos y rectángulos respectivamente, dejando para la siguiente sesión el desarrollo del triángulo obtusángulo.

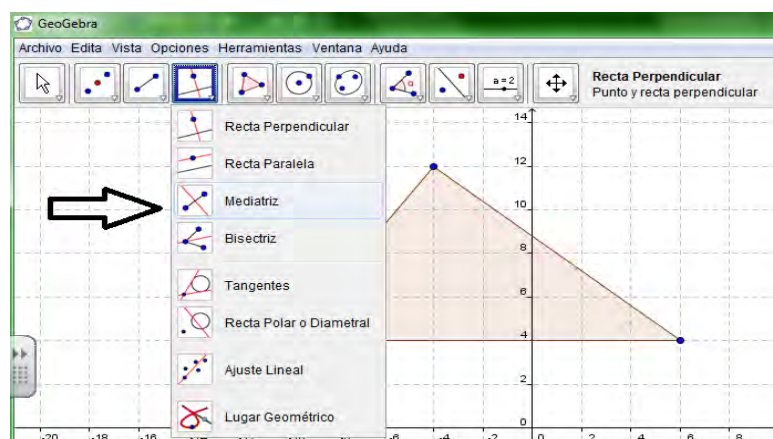


Figura 53. Ícono de la mediatriz del GeoGebra.

Nota: Este ícono ayuda a trazar las mediatrices en el triángulo sin ningún problema, es decir, sin preocuparnos en la perpendicularidad que forma con el punto medio del lado del triángulo por donde pasa.

Además, las estudiantes dibujan la circunferencia circunscrita eligiendo el sexto ícono, cuyo centro sea el punto de intersección de las mediatrices y que pase por un vértice cualquiera del triángulo. El objetivo es que las estudiantes verifiquen si el punto de intersección de las mediatrices es el centro de la circunferencia, como se aprecia en el siguiente trazado hecho por una estudiante (Figura 54):

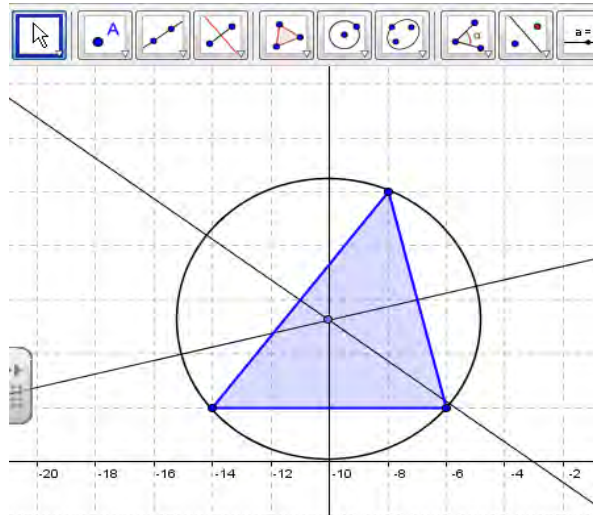
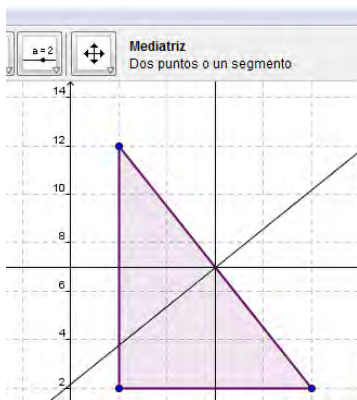
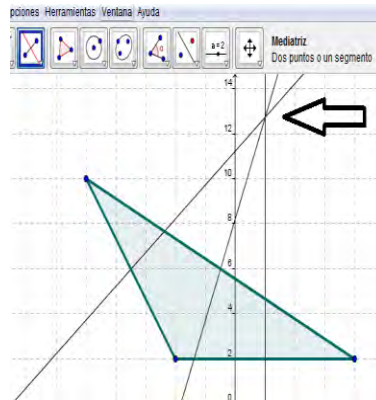


Figura 54. Circunferencia circunscrita en un triángulo acutángulo.

En la tercera sesión, las estudiantes finalizan el ítem n°3, que es trazar mediatrices en el triángulo obtusángulo y se desarrolla el ítem n°4 (trazado de bisectrices interiores). Cabe destacar, que la docente resalta las diferencias del trazado de mediatrices en los triángulos rectángulos y obtusángulos, es decir, trabaja los dos (Figura 55a, Figura 55b) a la vez para diferenciar la ubicación del punto de intersección de las mediatrices y así puedan entender mejor las características de esta línea notable.



(a)



(b)

Figura 55. Comparación del trazado de mediatrices en el triángulo rectángulo y obtusángulo.

Se observa en la figura 55, que el punto de intercepción de las mediatrices en el triángulo rectángulo se ubica en la hipotenusa y el del obtusángulo se ubica afuera del triángulo.

Finalmente, se desarrolla el ítem n°4, que es el trazado de bisectrices interiores, en los diferentes tipos de triángulos. En este caso, se indica a las estudiantes que dibujen el triángulo acutángulo, después, ir a la barra de herramientas y elegir el cuarto ícono (Figura 56) con el objetivo de buscar la bisectriz y así poder representarla.

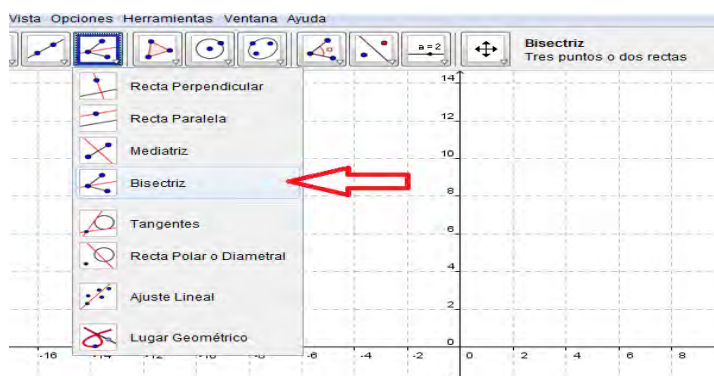


Figura 56. Ícono de bisectriz.

Después, seleccionan el quinto ícono para graficar la circunferencia inscrita, la cual se dibuja dado su centro y uno de sus puntos, en este caso, el centro es la intercepción de las bisectrices.

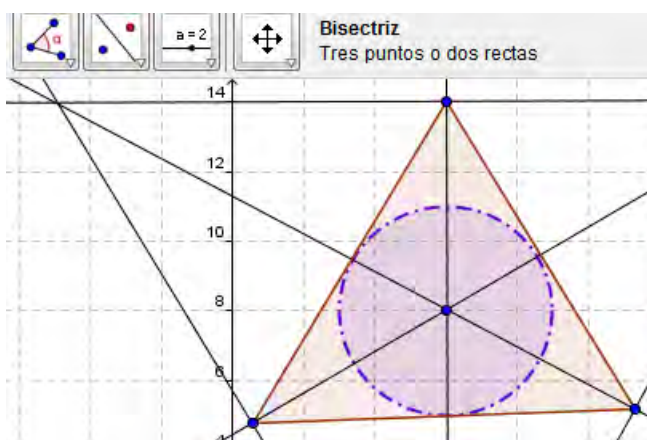


Figura 57. Punto de intersección de bisectrices en triángulo acutángulo.

Nota: En esta imagen se ha graficado la circunferencia inscrita, teniendo como referencia el punto de intersección de las bisectrices.

Se considera relevante comentar que las estudiantes verifican si realmente la bisectriz interior divide el ángulo en dos partes congruentes con ayuda del ícono “ángulo” (Figura 58). Al seleccionar dicho ícono, las estudiantes seleccionan un vértice para hallar la medida de los ángulos (Figura 59).

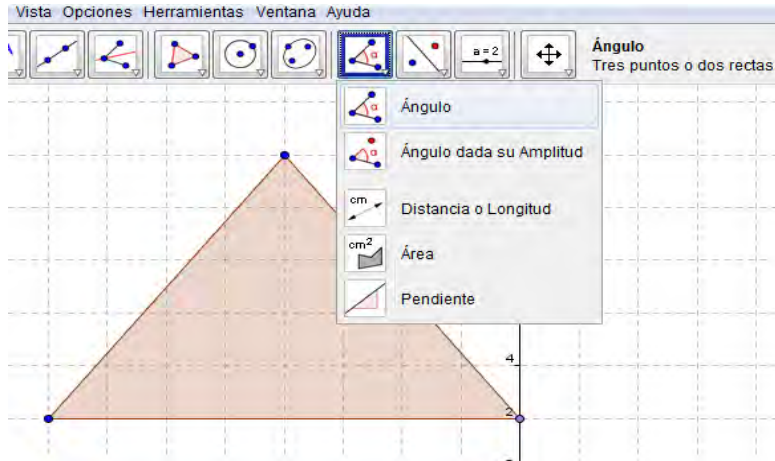


Figura 58. Ícono de ángulo del GeoGebra.

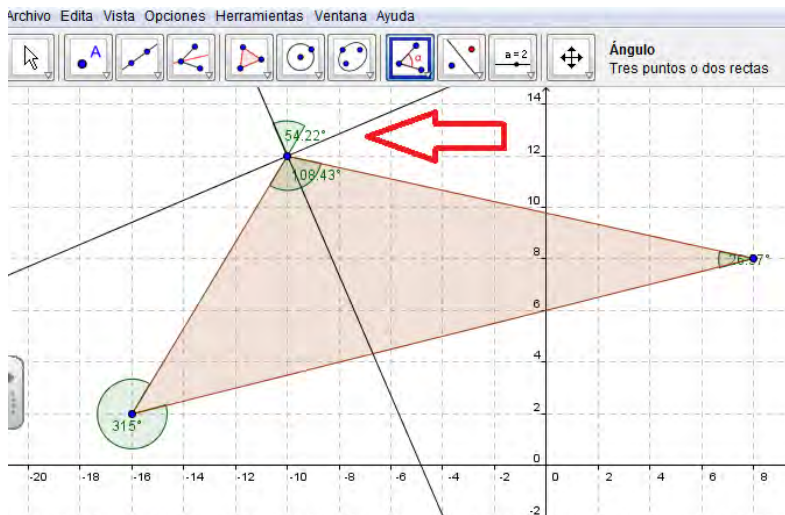


Figura 59. Medida de ángulos de los vértices del triángulo.

Nota: En esta imagen el ángulo del vértice superior mide 108° , 43° y la bisectriz trazada lo divide en dos ángulos congruentes de 54 , $215^\circ \cong 54$, 22° .

Durante el desarrollo de las tres sesiones, las estudiantes acumulan puntos por cada sesión, los cuales constituyen la calificación del trabajo final. Además, con el propósito de que las estudiantes consoliden un conocimiento correcto del tema abordado, al final de la actividad se entrega una ficha resumen (apéndice K) que contiene dibujos de cada triángulo y sus respectivas líneas notables.

Es necesario indicar que el análisis descriptivo de cada sesión del GeoGebra se realiza teniendo en cuenta los siguientes indicadores:

- Ejecuta las actividades del GeoGebra de forma correcta siguiendo las orientaciones de la docente.
- Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulo, utilizando el GeoGebra.
- Maneja la ventana de herramientas del software.
- Guarda las actividades desarrolladas en la carpeta (geometría-3ro) con su nombre y entrega la ficha de trabajo (apéndice I) desarrollada teniendo en cuenta lo observado en el GeoGebra.

La docente tiene escrito los indicadores antes mencionados en la ficha de observación cuya escala de evaluación es: muy bien=2,5; bueno=2; regular=1,5; deficiente=1,5 y no trabaja=0 puntos). Dichos resultados se muestra en la Figura 60.

FICHA DE OBSERVACIÓN

ACTIVIDAD: "APLICACION DEL SOFTWARE GEOGEBRA"

INDICADORES	Ejecuta las actividades del GeoGebra de forma correcta siguiendo las orientaciones de la docente.				Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulo, utilizando el GeoGebra.				PUNTAJE
	AL TURA	ME DIA NA	ME DIA TANTO	BI SE CTRIZ	AL TURA	ME DIA NA	ME DIA TANTO	BI SE CTRIZ	
Estudiante 01	1,5	2	1,5	2	1	2	1	2	13
Estudiante 02	2	2,5	2,5	2,5	2	2,5	2,5	2,5	19
Estudiante 03	2	2	2	2	2	2	2	2	16
Estudiante 04	1,5	2	1,5	2	1	2	1	2	13
Estudiante 05	1	2	1,5	2	1	2	2	2	13
Estudiante 06	2	2,5	2	2,5	2	2,5	2	2,5	18
Estudiante 07	1	2	1,5	2	1	2	1	2	13
Estudiante 08	1	2	1	2	1	2	1	2	12
Estudiante 09	1,5	2	1,5	2	1	2	1	2	13
Estudiante 10	1	1	1	1,5	1	1	1	1	09
Estudiante 11	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	20
Estudiante 12	2	2	2	2,5	2	2	2	2,5	17
Estudiante 13	2	2,5	2,5	2,5	2	2,5	2,5	2,5	19
Estudiante 14	1	2	1	1	1	2	1	1	10
Estudiante 15	1	2	1	1	1	2	1	1	10
Estudiante 16	2	2,5	2	2,5	2	2,5	2	2,5	18
Estudiante 17	2	2,5	2	2,5	2	2,5	2	2,5	18
Estudiante 18	1,5	2	2	2	1,5	2	2	2	15
Estudiante 19	1	2	2	2	1,5	2	2	2	15
Estudiante 20	2	2,5	2,5	2,5	2	2,5	2,5	2,5	19
Estudiante 21	2	2,5	2,5	2,5	2	2,5	2,5	2,5	19
Estudiante 22	2	2	2	2	2	2	2	2	16
Estudiante 23	1	2	1	2	1	2	1	2	12
Estudiante 24	2	2,5	2,5	2,5	2	2,5	2,5	2,5	19
Estudiante 25	1	2	1	2	1	2	1	2	12
Estudiante 26	1,5	2	2	2	1,5	2	2	2	15
Estudiante 27	1	2	2	2	1,5	2	2	2	15
Estudiante 28	2	2	2	2	2	2	2	2	16
Estudiante 29	1	2	1	2	1	2	1	2	12
Estudiante 30	2	2	2	2	2	2	2	2	16

Figura 60. Resultados de la actividad del GeoGebra.

Nota: Se observa que tres estudiantes (resaltado con color rojo) obtienen nota desaprobada en el proceso (actividad del GeoGebra).

Se analiza los resulta

dos en la hoja de cálculo del GeoGebra a través de un histograma (Figura 61), para obtener la media que es 15, la moda es 13 y la mediana es 15. Por lo tanto, existe 18 estudiantes (60%) obtienen una nota mayor o igual a la mediana y 14 estudiantes (46,7%) superan el promedio. Estos resultados comparados con los del pre test, muestran una mejora en las estudiantes, aunque en la Figura 60 existen tres estudiantes (estudiante nº10, nº14 y nº15) que no logran los indicadores propuestos en el proceso, debido al poco dominio del software o a la falta de atención hacia la docente cuando explica.

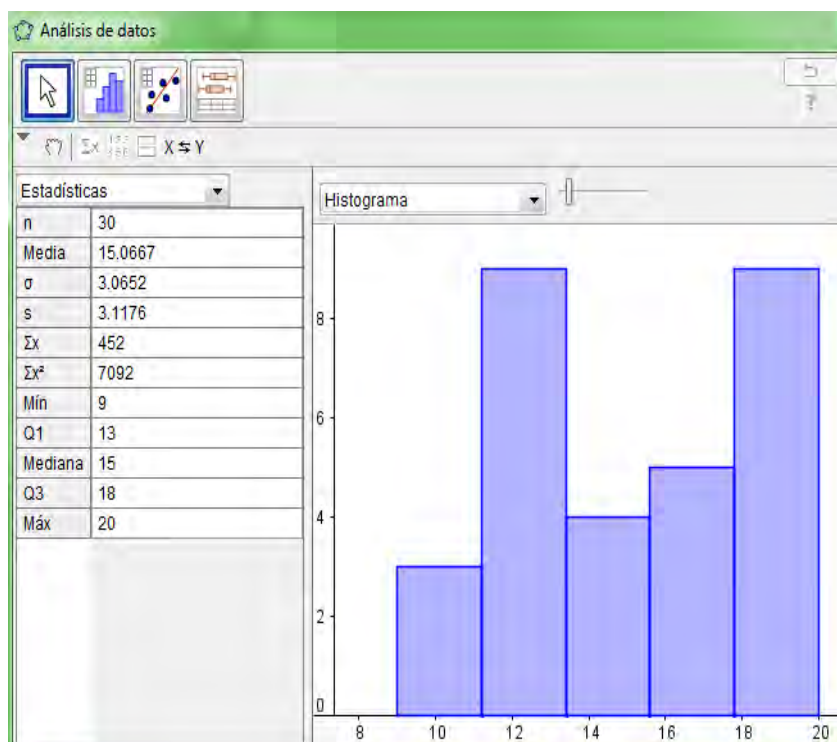


Figura 61. Histograma del proceso “actividad del GeoGebra”.

A continuación, se hace un análisis descriptivo de los ítems trabajados durante las tres sesiones:

Ítem N° 1: Traza las alturas

Las estudiantes dibujan un triángulo acutángulo, con la ayuda de los íconos que presenta el GeoGebra, trazan rectas perpendiculares utilizando el cuarto ícono de la barra de herramientas mostrada anteriormente y partiendo de cada uno de los vértices del triángulo.

Durante el desarrollo de la actividad, se comenta que el GeoGebra considera a las alturas como rectas, debido a que se trabaja con el Ortocentro (nombre del punto de intersección de las alturas). Sin embargo, en el libro de texto de las estudiantes, se considera la altura como segmento, puesto que se asocia al área del triángulo. Hecha esta diferenciación, detallamos los resultados.

Se observa que 19 estudiantes (63,3%) no tienen dificultad para seguir las indicaciones del primer ítem. En cambio, el resto de estudiantes (36,7%) tienen inconvenientes en el desarrollo de la actividad debido a que:

- Juegan con algunos íconos y no seleccionan los indicados por la docente.
- No escuchan atentamente las indicaciones de la docente, sino que interrumpen continuamente y muestran disgusto al no entender el proceso de la actividad (problemas en el manejo de la computadora).
- Dedican mucho tiempo para escoger el color de fondo del triángulo o diseño de cada tipo de triángulo.

Al final del desarrollo del ítem n°1, la docente junto con las estudiantes describen las características de la altura como línea notable de manera oral, finalmente se hace un resumen de las ideas y lo escriben en la ficha de trabajo.

A continuación se muestra algunos casos específicos del trazado de alturas, usando el GeoGebra, en los tres tipos de triángulo:

Caso 1: Triángulo acutángulo

El 100% de las estudiantes dibujan el triángulo acutángulo con base paralela al eje “x” del plano cartesiano, es decir, ninguna dibuja un triángulo inclinado, mucho menos triángulos con base paralela al eje “y”. Solo se observa variación en el tamaño del triángulo, color de fondo y de líneas como se muestra en la siguiente (Figura 62):

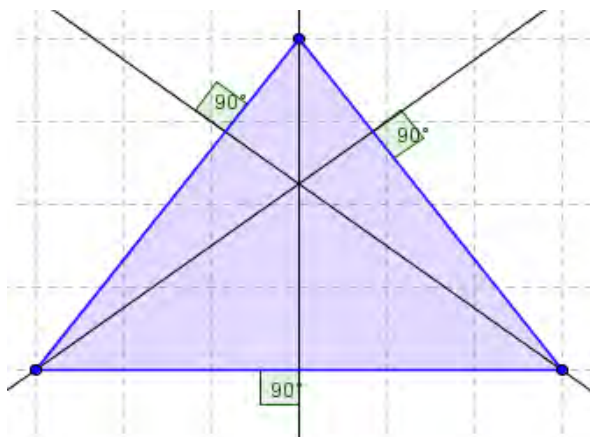


Figura 62. Trazado de alturas con el GeoGebra (parte 1).

Nota: Se recuerda que el GeoGebra considera las alturas como rectas y no como segmentos.

Caso 2: Triángulo rectángulo

19 estudiantes (63,3%) grafican el triángulo rectángulo con los catetos paralelos a los ejes de coordenadas (Figura 63), pues, se ubican mejor si el triángulo es dibujado con base paralela al eje de las abscisas. El resto de las estudiantes ubican la hipotenusa como base del triángulo rectángulo. Al finalizar el trazado, las estudiantes observan que la intercepción de las alturas coincide en el ángulo recto del triángulo y dos de sus alturas son paralelas a los catetos.



Figura 63. Trazado de alturas con el GeoGebra (parte 2).

Nota: Se observa el gráfico de un triángulo cuya base es paralela al eje “x”.

Caso 3: Triángulo obtusángulo

Cuatro estudiantes (13,3%) dibujan el triángulo obtusángulo con base inclinada. El resto de estudiantes (86,7%) dibuja el triángulo obtusángulo, con base paralela al eje de las abscisas (ver Figura 64). En esta actividad las estudiantes observan que el punto de intercepción de las alturas se ubica afuera del triángulo.

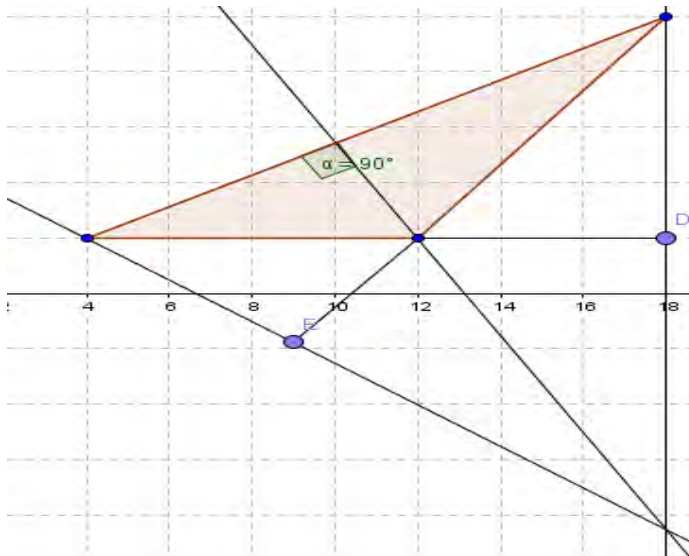


Figura 64. Trazado de las alturas con el GeoGebra (parte 3).

De lo anterior, el 100% de las estudiantes especifican que el punto de intersección en un triángulo acutángulo se encuentra dentro del triángulo (acutángulo), sobre la hipotenusa (triángulo rectángulo) y afuera del triángulo (obtusángulo). Al finalizar, las estudiantes escriben en la ficha las conclusiones sobre lo observado, sobre todo mencionan las características de las alturas como segmento y si trabajamos con el Ortocentro (punto de intersección) se considera a las alturas como rectas. Sin embargo, a pesar de que trazan alturas, se observa que prolongan los lados para formar ángulos rectos con la altura como en la Figura 64.

Se presenta el resumen en la siguiente tabla:

Tabla 12.
Resumen del trazado de alturas de la actividad GeoGebra

Triángulo	Trazado de alturas			
	Sin complicaciones		Con complicaciones	
	Nº	%	Nº	%
Acutángulo, rectángulo y obtusángulo	19	63,3%	11	36,7%

Ítem N° 2: Traza las medianas

Durante el desarrollo de este ítem, 26 (86,7%) estudiantes no tienen dificultad en desarrollar las actividades, porque manejan con mayor facilidad el software, a diferencia de la primera actividad (trazado de la altura). Esto se evidencia porque trazan con mayor precisión, sin necesidad de ayuda.

Las estudiantes dibujan el triángulo con ayuda del ícono “polígonos” de la barra de herramientas y trazan las medianas (segmentos) desde el vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Solo 4 estudiantes (13,3%) evidencian dificultades para realizar correctamente las indicaciones de la docente, debido a no atender la explicación.

A continuación se muestra en las Figura 65 y Figura 66 de los trabajos realizados por algunas estudiantes:

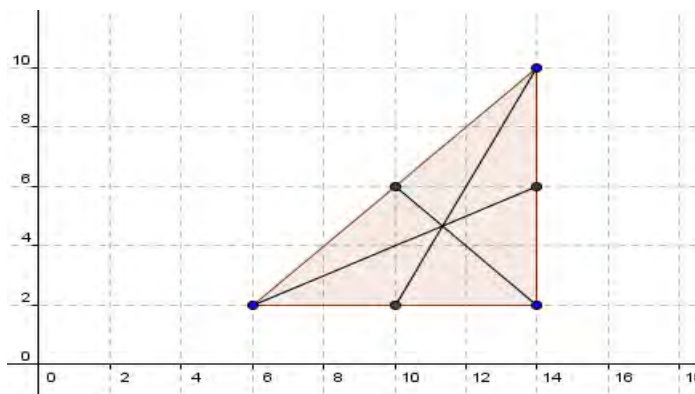


Figura 65. Trazado de las medianas con el GeoGebra (parte 1).

Nota: Todas las estudiantes grafican el triángulo rectángulo con catetos paralelos al eje “x” y al eje “y”.

Además, 21 (70%) estudiantes dibujan el triángulo obtusángulo como en la Figura 66, mientras que el resto de estudiantes lo dibuja con base paralela al eje de las abscisas “x”. Se insiste en verificar si los lados por donde intercepta la mediana son congruentes. Por eso, se sugiere a las estudiantes ubicar primero el punto medio de los lados del triángulo y luego trazar segmentos que unan dichos puntos con los vértices opuestos.

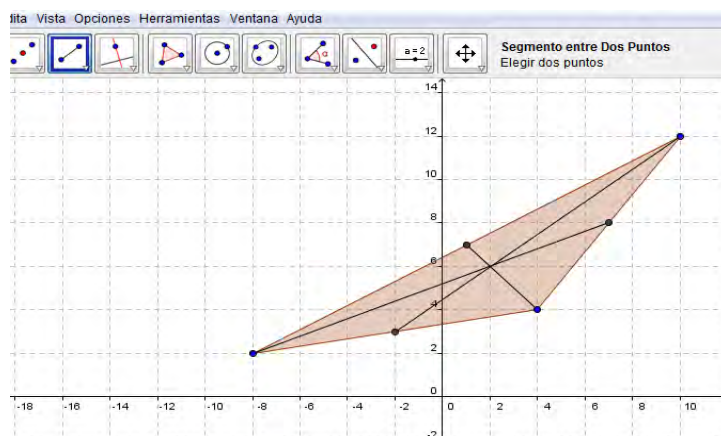


Figura 66. Trazado de las medianas con el GeoGebra (parte 2).

Se presenta el resumen en la siguiente tabla:

Tabla 13.
Resumen del trazado de medianas de la actividad GeoGebra

Triángulo	Trazado de medianas			
	Sin complicaciones		Con complicaciones	
	Nº	%	Nº	%
Acutángulo, rectángulo y obtusángulo	26	86,7%	4	13,3%

Ítem N° 3: Traza las mediatrices

Se obtiene que 22 (73,3%) estudiantes desarrollan la actividad sin ayuda de la docente, es decir, ya no se da instrucciones como se hizo al inicio. Aunque 8 (26,7%) estudiantes piden ayuda para trazar las mediatrices en el triángulo acutángulo, porque tienen dificultad en el dominio del software o por estar distraídas durante la explicación.

Se recuerda que, en los resultados del pre test, se indica que el 100% de estudiantes no traza las mediatrices de forma correcta. Por lo tanto, la docente se enfoca en este ítem, y observa que más del 50% de estudiantes recién entienden las características de las mediatrices como rectas.

Las estudiantes verifican si las mediatrices están correctamente trazadas a través de la circunferencia circunscrita en el triángulo, es decir, el punto de intersección de las mediatrices debe ser el centro de la circunferencia.

A continuación se muestra casos específicos del trazado de mediatrices, usando el software, en los tres tipos de triángulos.

Caso 1: Triángulo acutángulo:

Veintidós (73,3%) estudiantes dibujan el triángulo acutángulo con base paralela al eje “x” (Figura 67), grafican la circunferencia circunscrita, resaltando el punto de intersección. A las estudiantes se les hace más fácil trabajar con el triángulo acutángulo porque están familiarizadas con éste.

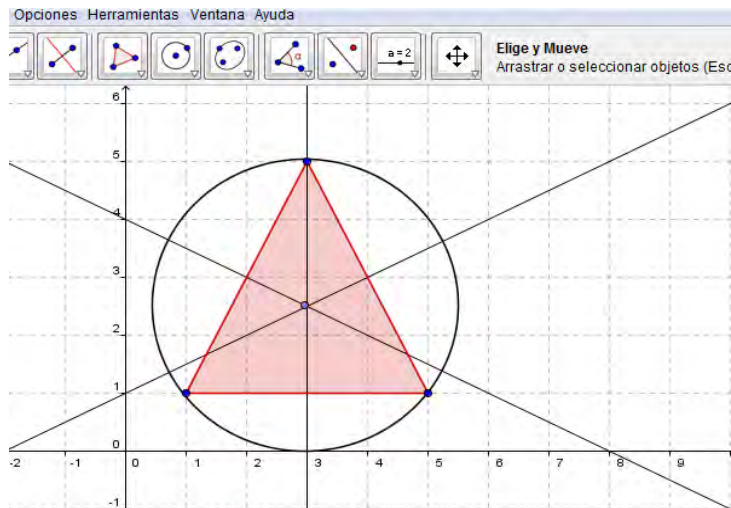


Figura 67. Trazado de mediatrices con el GeoGebra (parte 1).

Caso 2: Triángulo rectángulo:

Diecisiete (56,7%) estudiantes dibujan el triángulo rectángulo como en la Figura 68, cuyos catetos son paralelos a los ejes de coordenadas, tal como ocurrió para el trazado de las alturas.

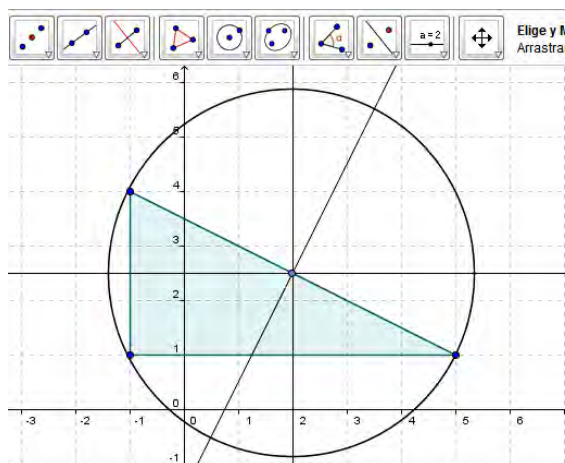


Figura 68. Trazado de mediatrices con el GeoGebra (parte 2)

Por su parte, 13 estudiantes (43,3%) dibujan el triángulo rectángulo con bases no paralelas a los ejes de coordenadas (Figura 69). A pesar de tener dificultad para dibujarlos.

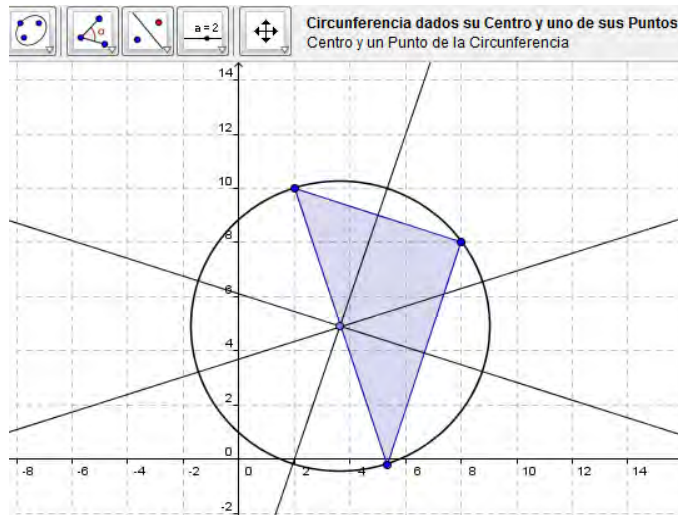


Figura 69. Trazado de las mediatrices con el GeoGebra (parte 3).

Posteriormente, la docente propone a las 17 estudiantes antes mencionadas que dibujen un triángulo cuyos catetos no coincidan con los ejes de coordenadas del plano cartesiano. Bajo estas condiciones las estudiantes muestran dificultad para realizar la actividad. Así pues, 9 de ellas (30%) piden ayuda para verificar si el triángulo dibujado es rectángulo, mientras que 8 estudiantes (26,7%) no tienen problemas para graficar el triángulo rectángulo de forma inclinada. De las estudiantes antes mencionadas se muestra dos casos específicos (Figura 70a y 70b).

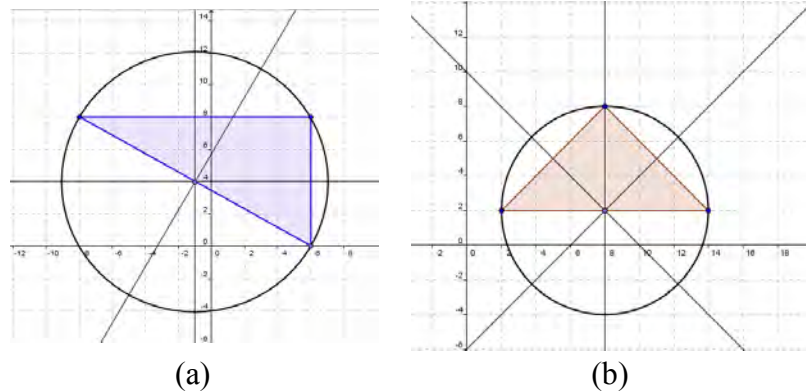


Figura 70. Trazado de las mediatrices con el GeoGebra (parte 4).

Nota: En el gráfico, el triángulo “a” tiene los catetos paralelos a los ejes de coordenadas y el triángulo “b” tiene la hipotenusa paralela al eje “x”.

Caso 3: Triángulo obtusángulo:

Veintitrés estudiantes (76,7%) dibujan el triángulo obtusángulo con base paralela al eje “x” como en la Figura 71 y dibujan la circunferencia circunscrita cuyo centro es el punto de intersección de las mediatrices y se encuentra fuera del triángulo. Las estudiantes dibujan el triángulo como les han enseñado los docentes desde el nivel primario, es decir, mayormente con base paralela al eje “x”.

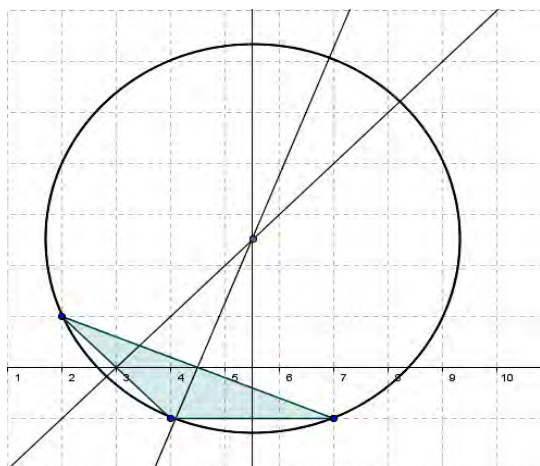


Figura 71. Trazado de las mediatrices con el GeoGebra (parte 5).

Nota: Se observa que el punto de intersección de las medianas en el triángulo obtusángulo se encuentra fuera del triángulo.

En cambio, 7 estudiantes (23,3%) dibujan el triángulo como en la Figura 72. Igualmente, se observa que el punto de intersección de las mediatrices se encuentra fuera del triángulo.

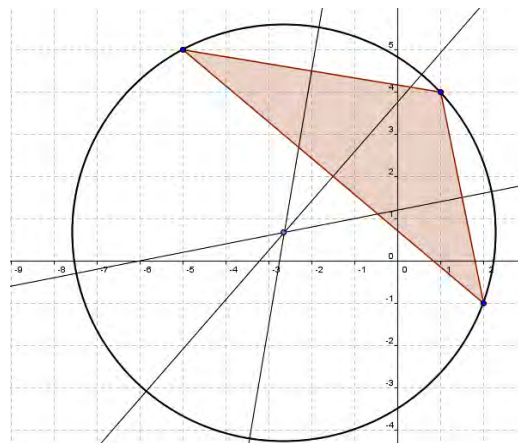


Figura 72. Trazado de las mediatrices con el GeoGebra (parte 6).

Finalizado el trazado de las mediatrices, se menciona las características primordiales de las línea notable y cada estudiante escribe en la ficha de actividades (apéndice I) con los gráficos observados (en la computadora). Aunque, aún confunden la mediatriz con la altura, las estudiantes manifiestan que con ayuda del GeoGebra afianzan sus conocimientos para trazar las líneas notables.

Tabla 14.
Resumen del trazado de mediatrices de la actividad GeoGebra

Triángulo	Trazado de mediatrices			
	Sin complicaciones		Con complicaciones	
	Nº	%	Nº	%
Acutángulo, rectángulo y obtusángulo	22	73,3%	8	26,7%

Ítem N° 4: Traza las bisectrices interiores

El 100% de las estudiantes no tiene dificultad para dibujar los tres tipos de triángulos según la medida de sus ángulos, ni problemas en trazar las bisectrices interiores.

En este caso, se verifica si son bisectrices interiores del triángulo con ayuda del ícono “ángulos”, con este ícono comprueban si la bisectriz divide dicho ángulo en dos ángulos congruentes.

A continuación se muestra casos específicos del trabajo de las estudiantes al trazar las bisectrices interiores en cada tipo de triángulos con ayuda del GeoGebra: triángulo acutángulo (Figura 73a), triángulo rectángulo (Figura 73b) y el triángulo obtusángulo (Figura 73c):

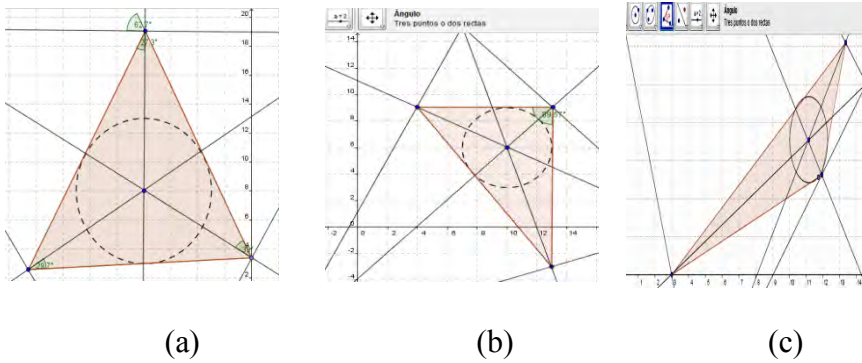


Figura 73. Trazado de las bisectrices con el GeoGebra.
 Nota: Los triángulos son acutángulo, rectángulo y obtusángulo (el orden va de izquierda a derecha).

Se tiene en cuenta que, el GeoGebra considera rectas a las bisectrices, porque trabaja con el punto de intersección que es el incentro. Pero, el objetivo es solo el trazado de líneas notables, por lo tanto, en la ficha de actividades, se trazan las bisectrices como rayos.

Tabla 15.
Resumen del trazado de bisectrices de la actividad GeoGebra

Triángulo	Trazado de bisectrices			
	Sin complicaciones		Con complicaciones	
	Nº	%	Nº	%
Acutángulo, rectángulo y obtusángulo	30	100%	0	0%

En forma de resumen de toda la actividad, mostramos el gráfico estadístico de frecuencia relativa sobre los resultados obtenidos en los 4 ítems:

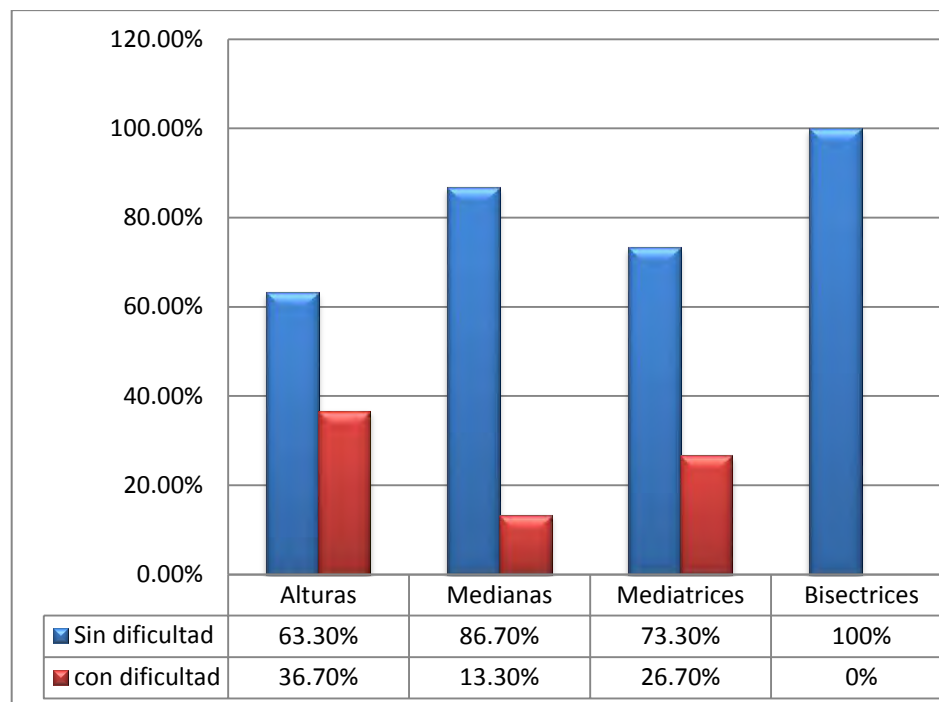


Figura 74. Frecuencia relativa de la actividad GeoGebra.

Según el gráfico anterior, las estudiantes mostraron problemas al trazar las líneas notables. Sobre todo, en el trazado de alturas y mediatrices. En cambio, en las bisectrices refleja que el 100% trazan correctamente y 86,7% traza correctamente las medianas. Se concluye que en las alturas tuvieron más problemas porque era la primera actividad y recién se estaban familiarizando con el GeoGebra.

4.5. Análisis de los resultados del post test

El post test (apéndice L) se aplica a todas las estudiantes, después de haber utilizado el Software GeoGebra en el marco del programa desarrollado. El análisis de este instrumento se realiza según los indicadores propuestos, tal como se presenta en la Tabla 16:

Tabla 16.
Indicadores e Ítems del post test

Indicador	Ítems
Explica correctamente las características de las líneas notables en diferentes tipos de triángulos.	1
	2
	3
Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz	1
	2
	3
	4

Fuente: Examen post test

Análisis de primer indicador:

“Explica correctamente las características de las líneas notables en diferentes tipos de triángulos” (ítems 1-3).

Ítem N° 1: ¿En qué se diferencia la altura de la mediatriz?

Algunas estudiantes tienen dificultad, en diferenciar alturas con mediatrices de un triángulo. Según lo trabajado en las sesiones de clase y en el laboratorio, las estudiantes están en la capacidad de explicar y demostrar, con ayuda de gráficos, las diferencias entre ambas líneas notables (altura y mediatriz). De las 30 estudiantes, 8 de ellas (26,6%) tienen dificultad en la primera pregunta, porque confunden ambas líneas, es decir, explican características de la altura en lugar de la mediatriz. En cambio, 22 de ellas (73,4%) mencionan las características de forma correcta a través de un cuadro comparativo y con ayuda de gráficos.

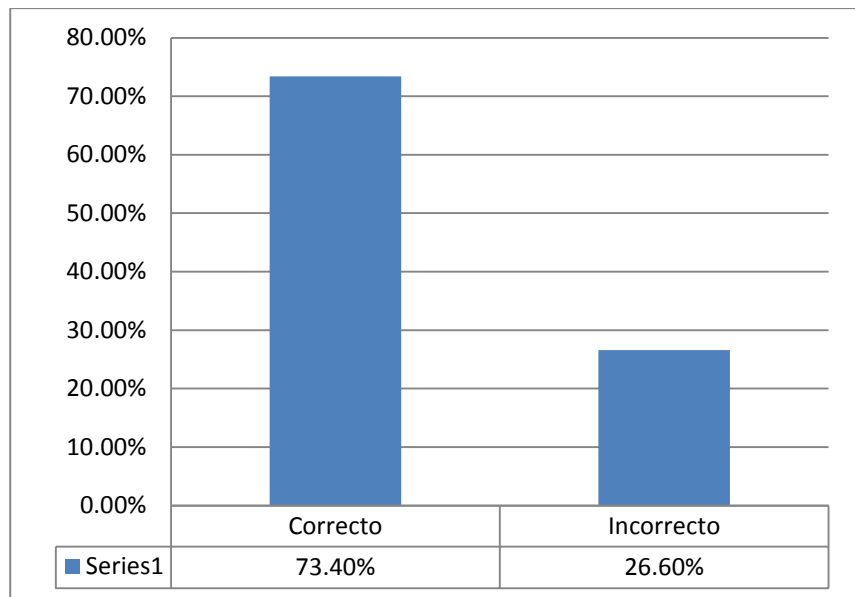


Figura 75. Respuesta del ítem n°1 del primer indicador del pos test.

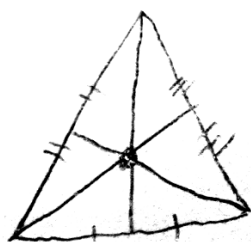
Nota: Se destaca que el 73,4% responde correctamente a la pregunta.

Ítem n°2: ¿Cómo se llama el punto de intersección de las medianas?

El 100% escribe “Baricentro”. Este resultado, comparado con el del pre test, resulta opuesto, pues, en el pre test ninguna responde correctamente.

En este ítem, 28 estudiantes (93,3%) dibujan un triángulo para ubicar el punto de intersección de las medianas y escribir el nombre correcto. Este hecho es consecuencia de las diferentes actividades sobre la ubicación del punto de intersección de las medianas. Lo mencionado anteriormente se presenta en la Figura 76:

¿Cómo se llama el punto de intersección?



Baricentro

Figura 76. Respuesta del ítem n°2 del primer indicador del post test.

En la figura anterior, se muestra que la estudiante se apoya de gráficos para representar las medianas y ubicar su punto de intersección llamado Baricentro.

Ítem n°3: Escribe las características y el nombre de sus intersecciones de cada línea notable mencionadas en el siguiente cuadro

Las estudiantes completan un cuadro de doble entrada (apéndice L). Ellas describen las características más resaltantes de cada línea notable en los tres tipos de triángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo) para tener diferenciarlas en cada caso. Además, escriben el nombre de las intersecciones de cada línea notable. El objetivo de este indicador es comprobar la interiorización de la teoría explicada en las sesiones.

De las 30 estudiantes, 18 de ellas (60%) completan el cuadro teniendo en cuenta todos los conocimientos adquiridos en las diferentes actividades, tanto en el aula como en el laboratorio. Así pues, se toma en cuenta la descripción de las líneas notables en cada tipo de triángulo con el nombre de las intersecciones de dichas líneas.

Sin embargo, 7 estudiantes (23,4%) tienen dificultades para redactar las características, pero sí mencionan correctamente el nombre de sus intersecciones y 5 de ellas (16,6%) no completan el cuadro (no describen las características de las líneas notables, ni escriben el nombre de sus intersecciones).

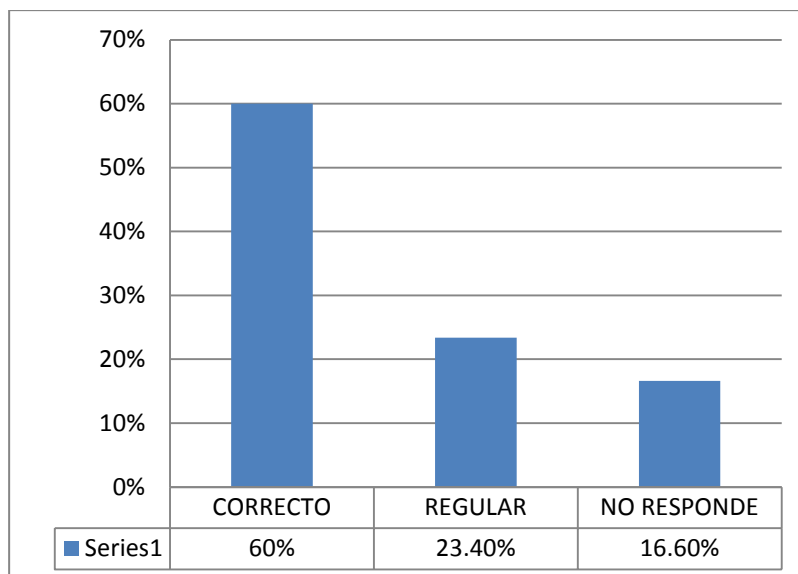


Figura 77. Resultado del ítem n°3 del primer indicador del post test.

Segundo Indicador:

“Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz” (ítems 1-4)

Ítem N° 1: Traza las alturas

Todas las estudiantes trazan correctamente las alturas en el triángulo acutángulo sin ningún problema, considerando las alturas como segmentos y en el triángulo obtusángulo se prolonga dichas alturas para ubicar el Ortocentro. En el caso del triángulo rectángulo, 20 estudiantes (66,6%) trazan muy bien las alturas (Figura 78), teniendo en cuenta que son rectas perpendiculares. Pero, 10 de ellas (33,4%) no trazan las alturas de los catetos del triángulo, solo la altura que intercepta con la hipotenusa. En cambio, 25 estudiantes (83,4%) trazan correctamente las alturas en el triángulo obtusángulo, y solo 5 de ellas (16,6%) se confunden al hacerlo, debido a la posición (no estándar) del triángulo en el plano cartesiano.

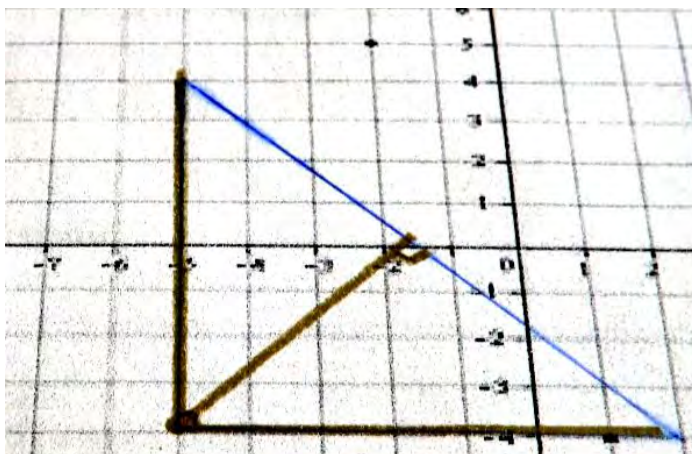


Figura 78. Trazado correcto de las alturas en el post test.

Nota: Las alturas están trazadas con color marrón y considerado como segmentos.

A continuación, se muestra los datos estadísticos obtenidos de este ítem:

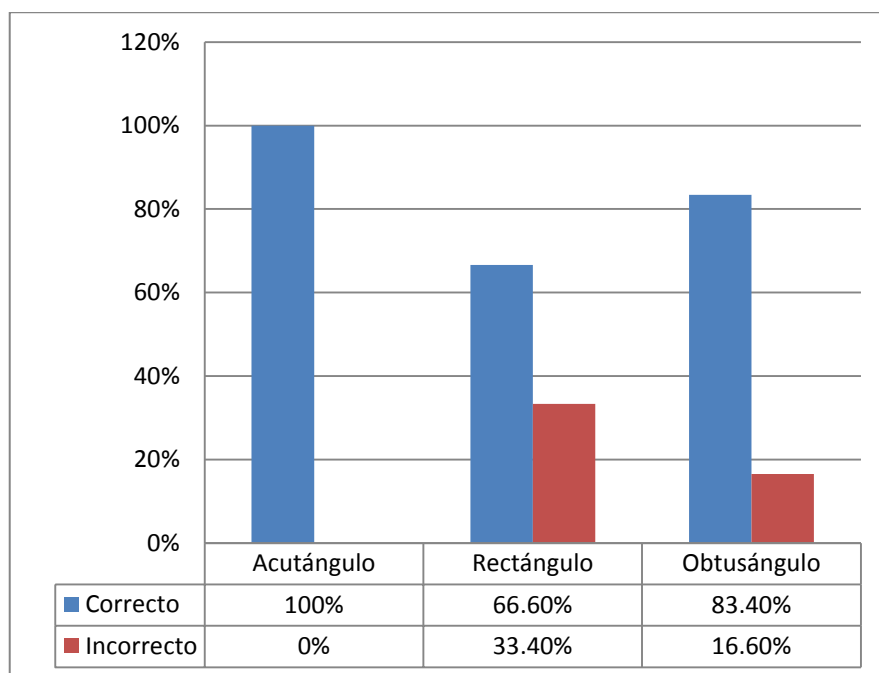


Figura 79. Frecuencia relativa sobre el trazado de alturas en el pos test.

En el gráfico anterior, se observa que el 100% de las estudiantes realizan el trazado sin complicaciones en el triángulo acutángulo y el 33,4% tiene dificultad aún en el triángulo rectángulo.

Ítem N° 2: Traza las medianas

De las 30 estudiantes, 26 de ellas (86,7%) trazan las medianas correctamente en los tres tipos de triángulos utilizando regla para ubicar los puntos medios de cada lado de los triángulos (Figura 80). Por otro lado, 4 estudiantes (13,3%) trazan incorrectamente las medianas en los tres tipos de triángulos. De este último grupo de estudiantes se identifica que dos de ellas trazan incorrectamente todas las líneas notables en todos los triángulos.

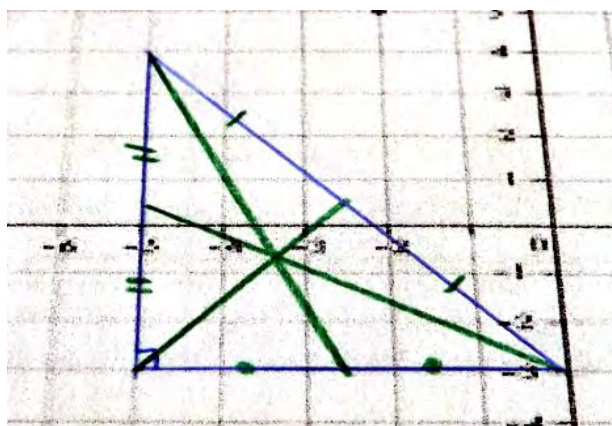


Figura 80. Trazado correcto de medianas en el del post test.

Nota: En la figura las medianas están trazadas con color verde.

A continuación se observa un caso específico (Figura 81): una estudiante traza incorrectamente las medianas en un triángulo acutángulo, donde resalta los lados congruentes, pero no tiene en cuenta las medidas de cada lado. Además traza segmentos que parten de un vértice y caen en un punto fuera del triángulo, en vez de trazar medianas (recordar que las medianas son segmentos que parte de un vértice y cae al lado opuesto del vértice dividiéndolo en dos segmentos congruentes).

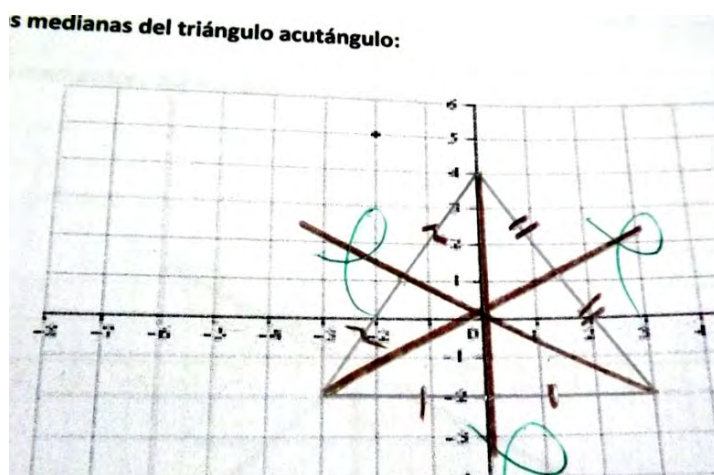


Figura 81. Trazado incorrecto de las medianas en el post test.

Nota: Se observa que la estudiante en vez de trazar segmentos traza rayos.

Finalmente, se presenta los datos obtenidos al 100%:

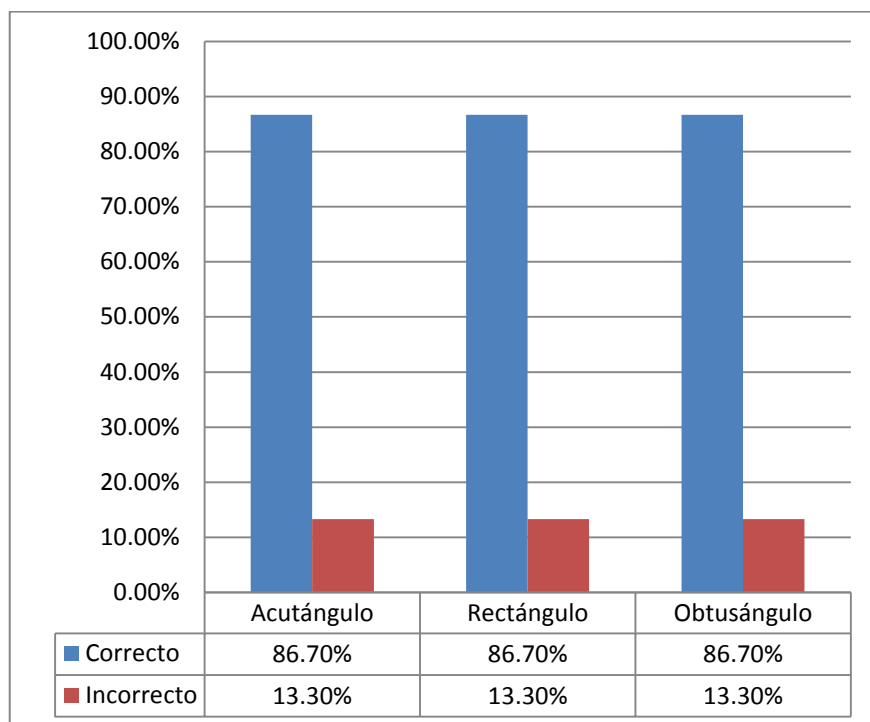


Figura 82. Frecuencia relativa del trazado de medianas en el post test

Ítem n° 3: Traza las mediatrices

Durante el desarrollo de la actividad las estudiantes ubican el punto medio con ayuda de la regla y midiendo los lados. Cabe comentar que no dibujan las flechas, que por convenio corresponde a una recta, debido a que en el GeoGebra, no se observa las flechas de las mediatrices.

En el triángulo acutángulo, 25 estudiantes (83,3%) trazan correctamente las mediatrices, ubicando el punto medio de los lados y formando el ángulo recto. Solo 5 de ellas (16,7%) tienen complicaciones porque no resaltan las características de las mediatrices en el triángulo.

En el caso del triángulo rectángulo, 24 (80%) trazan las mediatrices correctamente. En cambio, 6 (20%) al trazar las mediatrices no ubican las flechas en ambos extremos de la recta.

MEDIATRIZ:

1. Traza las mediatrices del triángulo rectángulo:

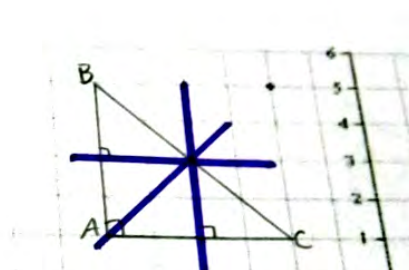


Figura 83. Trazado incorrecto de las mediatrices en el post test (parte 1).

Nota: En esta figura, las estudiantes no colocan las flechas a los extremos de las mediatrices con el fin de representar rectas.

Finalmente, en el triángulo obtusángulo, 20 estudiantes (66,7%) trazan correctamente las mediatrices, 8 (26,7%) se equivocan, porque 6 de ellas grafican incorrectamente el triángulo obtusángulo y 2 estudiantes (6,6%) no colocan el ángulo recto que caracteriza a la mediatriz cuando intercepta con un lado del triángulo (Figura 84):

3. Traza las mediatrices del triángulo obtusángulo:



Figura 84. Trazado incorrecto de mediatrices en el post test (parte 2).

En la figura anterior, la estudiante traza incorrectamente las mediatrices debido a que no pasa por el punto medio de cada lado del triángulo.

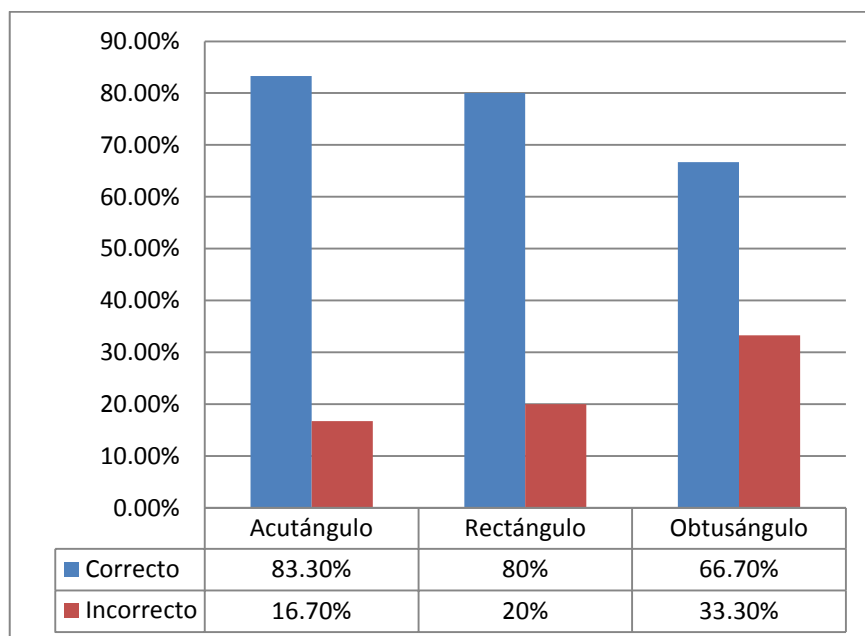


Figura 85. Frecuencia relativa del trazado de las alturas en el post test.

En el gráfico anterior, el 83,3% de estudiantes trazan correctamente las mediatrices en el triángulo acutángulo y se observa que tienen mayor dificultad en el triángulo obtusángulo.

Ítem n° 4: Traza las bisectrices interiores

Veintiocho (93,3%) estudiantes trazan correctamente las bisectrices interiores en los tres tipos de triángulos. Las estudiantes utilizan transportador para medir los ángulos y dividen los vértices del triángulo en dos ángulos congruentes (Figura 86):

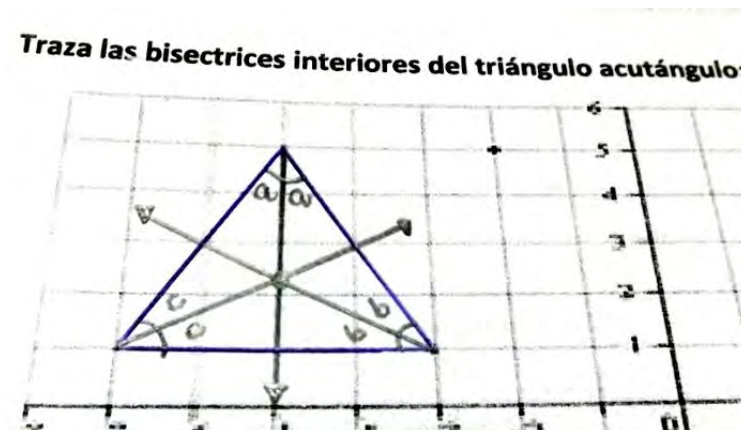


Figura 86. Trazado correcto de bisectrices en el post test.

Nota: En esta figura la estudiante no coloca la medida de los ángulos, solo escribe letras para explicar la congruencia de los ángulos.

Por otro lado, 2 estudiantes (6,7%) no resaltan las características de la bisectriz interior en los tres tipos de triángulos que es dividir el vértice en dos ángulos congruentes.

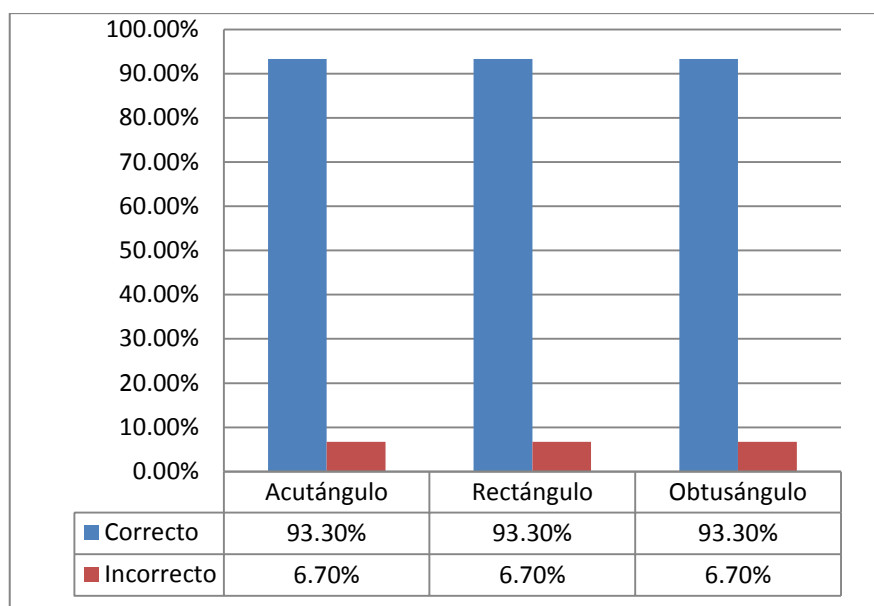


Figura 87. Frecuencia relativa del trazado de bisectrices en el post test.

A modo de resumen, se presenta las calificaciones obtenidas por las estudiantes en el post test. Para ello se considera la siguiente escala:

De 01 a 10 de nota ---- deficiente

De 11 a 15 de nota ---- regular

De 16 a 20 de nota --- bien

Tabla 17.
Tabla de resumen del post test

Escala cuantitativa	01 - 10	11 - 15	16 - 20
	Deficiente	Regular	Bien
Nº de estudiantes	6	8	16

Fuente: examen post test

En la tabla resumen del post test se refleja que 6 estudiantes (20%) tienen una nota desaprobada que oscila entre 01 a 10. Mientras que 8 estudiantes (26,6%) tiene una calificación entre 11 a 15 que se considera un desempeño regular y 16 de ellas (53,3%) desarrollan el examen bien (entre 16 y 20). En resumen, 24 estudiantes (80%) tienen una nota aprobatoria.

Se finaliza con el análisis de los resultados en la hoja de cálculo del GeoGebra a través de un histograma (Figura 88) para obtener la media que es 14,77; la moda es 19 y la mediana es 16,5. Por lo tanto, 17 estudiantes (56,7%) tienen una nota mayor o igual al promedio y 14 (46,7%) superan la mediana. Estos resultados indican que las estudiantes mejoran sus puntajes con respecto al pre test.

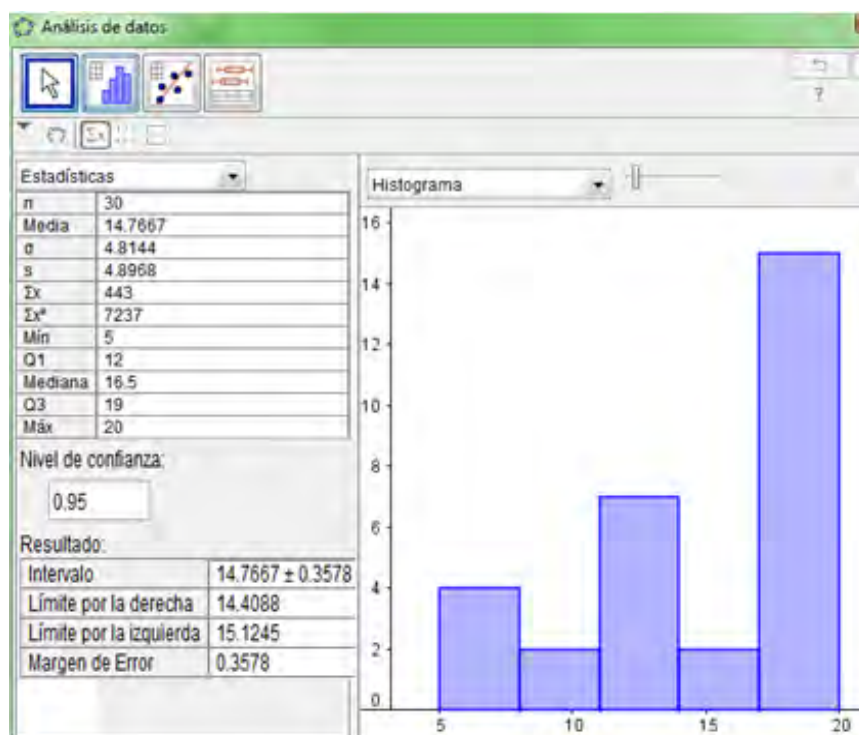


Figura 88. Histograma de los resultados del post test.

Nota: El nivel de confianza es de 0,95 y el margen de error es 0,36.

Al comparar los resultados obtenidos en el pre test y el post test se observa que todas las estudiantes mejoran su desempeño en este último instrumento. Aún cuando 6 estudiantes no consiguen aprobar, su calificación obtenida en el post test es superior a la del pre test.

Tabla 18.
Comparación entre pre test y post test¹⁸

Estudiantes	Puntaje obtenido en el Pre test	Puntaje obtenido en el Post test
Estudiante n° 01	05	07
Estudiante n° 02	04	17
Estudiante n° 03	10	20
Estudiante n° 04	01	09
Estudiante n° 05	06	12
Estudiante n° 06	07	19
Estudiante n° 07	06	12
Estudiante n° 08	01	07
Estudiante n° 09	13	17
Estudiante n° 10	06	12
Estudiante n° 11	13	20
Estudiante n° 12	10	19
Estudiante n° 13	13	18
Estudiante n° 14	04	06
Estudiante n° 15	01	05
Estudiante n° 16	06	20
Estudiante n° 17	09	16
Estudiante n° 18	07	15
Estudiante n° 19	07	13
Estudiante n° 20	03	20
Estudiante n° 21	11	19
Estudiante n° 22	07	20
Estudiante n° 23	02	08
Estudiante n° 24	15	19
Estudiante n° 25	01	11
Estudiante n° 26	10	13
Estudiante n° 27	12	18
Estudiante n° 28	08	19
Estudiante n° 29	06	13
Estudiante n° 30	02	19

¹⁸ Las estudiantes n°01; n° 04; n°08; n°14; n°15 y n° 23 no logran desarrollar los indicadores propuestos.

Las estudiantes que obtienen 19 y 20 de nota en el post test, en su mayoría, no aprueban el examen pre test. No obstante, con ayuda de las actividades desarrolladas en el aula y sala de cómputo (papel y GeoGebra) y con el estudio constante, se demuestra que existe un aprendizaje significativo por recepción, tal como se evidencia en los resultados.

Es de interés validar los resultados obtenidos del post test comparándolos con los del pre test. Por tal motivo, se realiza un test de medias con el fin de comprobar estadísticamente que ha habido una mejora en el aprendizaje de las estudiantes luego de haber desarrollado la propuesta metodológica. Para ello se propone las siguientes hipótesis:

H_0 : El promedio en el pre test es igual al promedio del post test

H_1 : El promedio en el pre test es diferente al promedio del post test.

La comprobación de estas arroja que los resultados de las dos evaluaciones indican que en el pre test la media es 6,87 y en el post test la media es 14,77 (Tabla 19).

Tabla 19.
Estadísticas de muestras emparejadas

	Media	N	Desviación estándar	Media de error estándar
Pre test	6,87	30	4,075	0,744
Post test	14,77	30	4,897	0,894

Posteriormente, al realizar el examen de muestras emparejadas resulta que la significancia bilateral es 0.000 (Tabla 20). Es decir, a cualquier nivel de significancia se rechaza H_0 , luego el promedio de pre test es significativamente diferente al promedio del post test. Por otro lado, los límites del intervalo de confianza de la diferencia de medias al 95% de confianza tienen signo negativo. En consecuencia, el promedio del pre test es inferior al promedio del post test. Así, el desarrollo de la actividad académica ha impactado positivamente en el rendimiento académico de los estudiantes, esto se puede evidenciar en los promedios obtenidos en el post test.

Tabla 20.
Prueba de muestras emparejadas

Diferencias emparejadas					t	gl	Sig. (bilateral)
Media	Desviación estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia				
			Inferior	Superior			
-7,900	4,012	0,732	-9,398	-6,402	-10,786	29	0,000

Nota: el análisis cuenta con un nivel de confianza de 95%

A modo de síntesis, se presenta la comparación de los resultados del pre test y post test (Tabla 21) siguiendo la escala de calificación ya empleada en apartados anteriores.

Tabla 21.
Resumen de los resultados del pre y post test

Escala cuantitativa	Notas de las estudiantes		
	01 - 10	11 - 15	16 - 20
	Deficiente	Regular	Bien
Pre Test	24	6	0
Post Test	6	8	16

Fuente: Examen pre test y post test

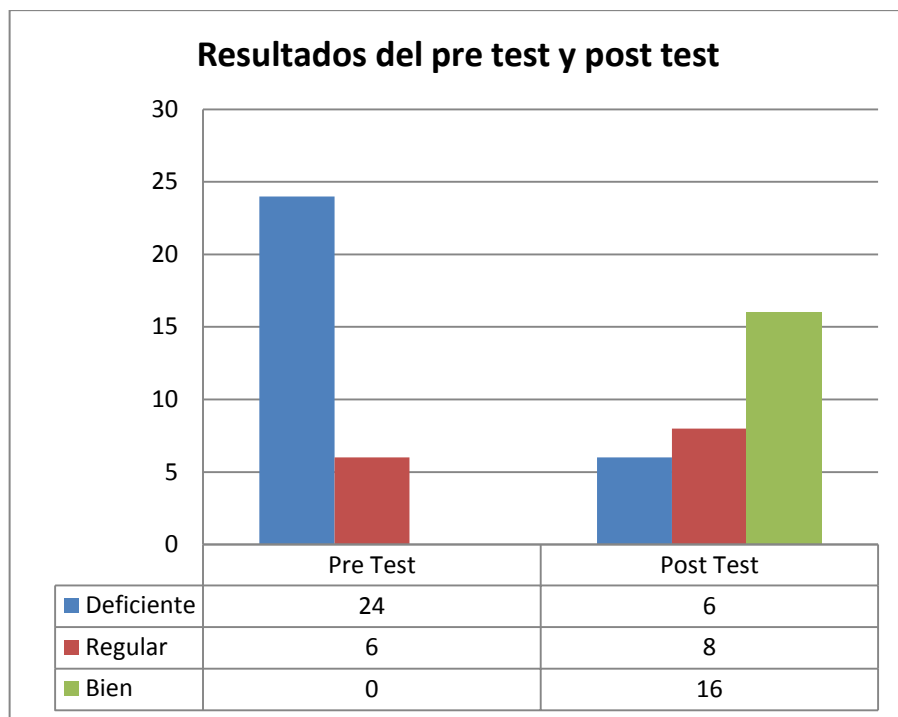


Figura 89. Resultados obtenidos en el pre y post test

Finalizando, se hace una breve descripción de cada nivel de desempeño de las estudiantes tanto en el pre test como el post test.

Nivel de desempeño *deficiente*:

En el pre test, 24 estudiantes resuelve el examen erróneamente sin embargo y en el post test 6 de ellas (20%) obtienen una calificación deficiente sobre el conocimiento de los triángulos. Esta mejora se fundamenta en el trabajo variado desarrollado durante un mes.

La mayoría de estudiantes en el pre test, solo responden lo que recuerdan, evidenciando confusión en algunos términos como mediatrices, perpendicularidad, prolongación y congruencia. En cambio en el examen post test, solo 6 obtienen nota desaprobatoria (ver tabla 21), porque o bien no estudian para el examen o bien confunden la descripción de características de las líneas notables.

Al investigar sobre las seis estudiantes que a pesar de participar en las dos actividades no aprueban el examen post test, se obtiene que dos de ellas (estudiante nº14 y nº15) tienen problemas de aprendizaje no solo en matemática sino también en los demás cursos debido a una inmadurez intelectual. Las otras cuatro estudiantes muestran una nota aprobatoria en el proceso (nota oscila entre 12 y 13), por lo tanto, no estudiaron para el examen post test.

Nivel de desempeño *regular*:

Existe poca diferencia en las calificaciones del pre y post test en este nivel de desempeño. Así pues, de las 30 estudiantes, 6 de ellas (20%) responden de forma regular en el pre test mientras que 8 (26,6%) lo hacen en el post test. La diferencia en este nivel no es mucha debido a que resalta más los niveles deficiente y bien.

En el pre test, las estudiantes nº5; nº7; nº10; nº18; nº19; nº25; nº26 y nº29 obtuvieron notas desaprobatorias (deficiente) que oscilan entre 01 a 10. Después de realizar las actividades tanto con papel y con el GeoGebra. Rindieron el post test obteniendo un nivel regular con notas que oscilan entre 11 a 15. En conclusión, las estudiantes mejoraron sus resultados, mencionando que las actividades trabajadas en cada sesión y la ficha resumen influyen sus resultados.

Nivel de desempeño *bien*:

Teniendo en cuenta el gráfico anterior (Figura 89), ninguna responde correctamente el pre test, ya que la mayoría obtiene nota deficiente. En cambio, 16 estudiantes (53,3%) responden bien en el post test, inclusive 11 de ellas (36,7%) obtienen una calificación entre 19 y 20. Esto último evidencia un rendimiento elevado después de haber desarrollado las actividades. Además, algunas sostienen que: “dichas actividades ayudan a mejorar el aprendizaje de líneas notables, pues visualizan mejor el trazado correcto de la altura, mediatriz, mediana e inclusive de la bisectriz”. No obstante, se menciona que las 11 estudiantes destacadas mencionan que descargaron el software con la finalidad de practicar en casa. Esto último no ha sido previsto y se puede considerar como parte de la variable interviniente, puesto que puede ejercer una influencia en los resultados del post test.

En el pre test, las estudiantes nº 9; nº11; nº13; nº21 y nº27 obtuvieron notas entre 11 a 15 (nivel regular) y en el examen de post test obtuvieron una mayor calificación, mostrando un desempeño superior al resto de estudiantes con notas que oscilan entre 17 a 20. En este grupo se encuentran las estudiantes que obtienen alto rendimiento académico.

CONCLUSIONES

La investigación se ha realizado con la finalidad de evaluar la incidencia de la propuesta de enseñanza para el aprendizaje de las líneas notables del triángulo. Ésta considera la integración del software Geogebra y actividades con triángulos de papel, tomando en cuenta los aportes de Ausubel; específicamente el aprendizaje receptivo significativo.

Al culminar el presente estudio, concluimos que:

- La propuesta permite el desarrollo de las sesiones de enseñanza – aprendizaje en el tiempo previsto, de acuerdo a la programación. Además, hay mayor precisión en la construcción de los gráficos, mejor trazado de las líneas notables y una transmisión adecuada y correcta de la información. En coherencia con lo anterior, el uso del GeoGebra y de actividades con triángulos de papel (dobles) permite que las estudiantes interioricen los conceptos dados (mediana, altura, mediatriz y bisectriz) por la docente de una manera rápida, significativa y usando la tecnología.
- La potencialidad de usar recursos, como papel y el software GeoGebra, se evidencia en los resultados, porque 24 estudiantes (80%) consiguen aprobar el post test, logrando los indicadores esperados (trazan correctamente las líneas notables). Con la aplicación del post test se puede afirmar que el promedio después de aplicar las dos actividades (con papel y GeoGebra) aumenta con respecto al obtenido en el pre test, puesto que la media en el primero es 14,7 mientras que la media obtenida en el pre test es 6,87. Esto indica que se logra el primer objetivo específico

propuesto en la investigación. Por lo tanto, la aplicación de ambas actividades, pueden considerarse una buena alternativa para promover el aprendizaje significativo del trazado de líneas notables del triángulo.

- El trabajo con GeoGebra y actividades con triángulos de papel, permite a las estudiante explorar, observar, manipular (en los triángulos de papel a través de dobleces y en el GeoGebra se da en la manipulación correcta del software) los gráficos, demostrando el desarrollo de capacidades matemáticas en el estudio de las líneas notables del triángulo.
- Las estudiantes, al trabajar con el software visualizan de manera interactiva el correcto trazado de las líneas notables, lo que ayuda a la adquisición del conocimiento pretendido, sin necesidad de aprender fórmulas avanzadas. Por lo tanto, estas dos actividades trabajadas ayudan al desarrollo de la autonomía para experimentar, colocando a cada estudiante como actor principal de su propio aprendizaje y comprobando de esta manera si las estudiantes tienen nociones básicas de geometría como: punto medio, perpendicularidad, recta, segmento, etc. Lo mencionado se sustenta en que a medida que las estudiantes van trazando las líneas notables utilizando el GeoGebra y realizando dobleces con triángulos de papel, logran interpretar lo observado y poder construir con sus propias palabras la definición de cada línea notable.
- Se propone la integración de la tecnología y el uso de material concreto porque resultan ser objetos de motivación para las estudiantes, tanto para el desarrollo de las actividades planteadas como para la buena disposición de aprender contenidos geométricos. Si bien en esta investigación no existe una encuesta que recoja información al respecto, las estudiantes manifestaron de forma oral su satisfacción al trabajar en la computadora y al realizar los dobleces en los triángulos entregados.
- El desarrollo de las actividades evidencia un escaso vocabulario matemático en las estudiantes que, desafortunadamente, no fue previsto en la elaboración de la propuesta. Esto supone una limitación dado que las actividades que integran dicha propuesta

están, sobre todo, centradas en el trazado de líneas notables, más no en la adquisición de terminología matemática específica. Por tal motivo, no se logra un 100% de eficacia, debido a que 6 estudiantes aún no tienen claro los conceptos geométricos básicos como: vértice, lado opuesto, punto medio o perpendicularidad.

- La utilización de una metodología cuantitativa – analítica e interpretativa, permite analizar los resultados obtenidos en el pre test y post test, a través de porcentajes y gráficos de barras, posibilitando la identificación y visualización de mejoras en el aprendizaje de las líneas notables del triángulo. Esto permite comparar de forma precisa los resultados en ambos instrumentos (24 estudiantes obtienen nota deficiente y 6 nota regular en el pre test, mientras que en el post test son 6 estudiantes obtienen nota deficiente, 8 con nota regular y 16 obtienen un nivel de bien).

COMENTARIOS FINALES Y CUESTIONES ABIERTAS

- Los docentes de matemática son conscientes que actualmente el software educativo se utiliza con mayor frecuencia como una herramienta didáctica, por ende se deben preparar y actualizar su conocimiento para mejorar la enseñanza de la matemática.
- Después de realizar la investigación, según el diseño metodológico establecido, se nota la necesidad de otros instrumentos, distintos del post test (por ejemplo un cuestionario o entrevista), que permitan validar las mejoras de aprendizaje observadas durante las sesiones de enseñanza-aprendizaje y a la vez, permitan conocer la opinión de las estudiantes frente a estas con el fin de tener validez y confiabilidad en los resultados
- Consideramos necesario agregar nuevas situaciones y problemas, con los recursos empleados, de tal manera que se promueva el desarrollo de otras capacidades matemáticas, y no solo la comunicación matemática. Además, consideramos que el software GeoGebra y las actividades con papel no son la única opción, sino solo alternativas que el docente puede utilizar en la enseñanza de temas geométricos.

REFERENCIAS

- Alcántara, M. (2009): Nuevas Tecnología. Importancia de las TIC para la Educación. Recuperado de http://www.csi-csif.es/andalucia/modulos/mod_ense/revista/pdf/Numero_15/MARIA%20DOLORES_ALCANTARA_1.pdf
- Alcas, F. (2013): *Uso del proyecto Descartes en la enseñanza de la Derivada en la asignatura de matemática 2 del a Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Piura*. Tesis de Máster en Educación con Mención en Teorías y Práctica Educativa, Piura: Universidad de Piura.
- Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. (1991): *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. (1997): *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Arancibia, C. (2000): *Psicología de la Educación*. Ediciones Alfaomega. México D.F.
- Arnal, Justo. (1996): *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Editorial GR92
- Artículos (2014): TIC, Enseñanza y Aprendizaje. Recuperado de: <http://www.educando.edu.do/articulos/docente/importancia-de-las-tic-en-el-proceso-de-enseanza-aprendizaje/>

- Artículos (2014): Aprendizaje Significativo por descubrimiento. Recuperado de: <http://www.educando.edu.do/articulos/docente/aprendizaje-significativo-y-por-descubrimiento/>
- Artículos (2014): Portal de educación dominicana para docentes sobre aprendizaje significativo. Recuperado de <http://www.educando.edu.do/articulos/docente/aprendizaje-significativo-y-por-descubrimiento/>
- Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1990): *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas
- Bernardo, J. (1997): *Hacia una enseñanza eficaz*. Madrid: Ediciones RIALP.
- Bernardo, J. (2004): *Técnicas y Recursos para motivar a los alumnos*. Madrid: Ediciones RIALP.
- Cabero, A. (1997): El papel de la computadora en el proceso enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, revista electrónica de tecnología. Chiclayo. Universidad Santo Toribio de Mogrovejo.
- Caños, L. (1993): *La matemática, creación y descubrimiento*. Madrid: Biblos Industria Gráfica S.L
- Carrasco, J. (2002): *Aplicación del software Cabri – Geometre para mejorar significativamente el aprendizaje en el contenido de triángulos del componente de geometría en los alumnos del cuarto año de educación secundaria del CESMA – Federico Villareal*. Tesis de licenciatura no publicada, Chiclayo: Universidad Santo Toribio de Mogrovejo.
- Castro, V., Castro, N., Domínguez, D., Quintero, J., Quintero, N., y Huertas, G. (2014): *Dificultades en el aprendizaje de la matemática*. Universidad especializada de las Américas. Recuperado de <http://es.slideshare.net/JorgeQuintero18/dificultades-en-el-aprendizaje-de-la-geometra>

- Coscollola, D., y Fuentes, A. (2010). *Innovación Educativa: Experimentar con las TIC y reflexionar*. Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación (3).
- Danvila, I. (2010). *Las nuevas tecnologías como herramientas que facilitan la educación formativa*. Recuperado de <http://www.seeci.net/cuiciid2013/PDFs/UNIDO%20MESA%202%20DOCENCIA.pdf>
- Domingo, C. y Fuentes, A. (2010): *Innovación Educativa: Experimentar con las Tic y reflexionar*. Pixel-Bit, Revista de Medios y Educación. Lima.
- DCN. (2009). *Diseños Curricular Nacional Básico Regular*. Lima – Perú
- Godino, Y. D., y Batanero, C. (2002): *Geometría y su Didáctica para Maestros*. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- Godino, Y. D., y Batanero, C. (2004): *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Recuperado de <http://www.redes-cepalcala.org/inspector/DOCUMENTOS%20Y%20LIBROS/MATEMATICAS/DIDACTICA%20DE%20LAS%20MATEMATICAS%20PARA%20MAESTROS.pdf>
- Hernández, R., Fernández, C. (1998): *Metodología de la investigación*. México: Editorial McGraw-Hill.
- Hohenwarter, M. (2009): *Documento de ayuda de GeoGebra*. Manual oficial de la versión 3.2. Recuperado de <https://app.geogebra.org/help/docues.pdf>
- Iranzo, N., y Fortuny, J. (2009): *La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado*. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado de <http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/142075/332857>

- Lastra, S. (2005): *Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas crítica*. Universidad de Chile. Recuperado de http://www.tesis.uchile.cl/tesis/uchile/2005/lastra_s/sources/lastra_s.pdf
- Martínez, A., y Rivay, F. (1989): *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Editorial Síntesis S.A
- Menéndez, J. (2012): *Uso de recursos TIC, como simulaciones y/o applets en la enseñanza de funciones lineales*. Universidad de Piura. Facultad de Ciencias de la Educación. Piura. Trabajo de grado no publicado.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2010): *Observatorio Tecnológico*. Gobierno de España. Recuperado de <http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/fr/equipamiento-tecnologico/didactica-de-la-tecnologia/806-monografico-matematicas-y-las-tic?start=2>.
- Pérez, P. (1995): *Psicología educativa*. Piura: Universidad de Piura.
- Pérez, P. (2006): *Apuntes de Psicología*. Piura. Universidad de Piura
- Puicón, L., y Catillo, M. (2008): *Influencia de la aplicación del software educativo Jclic en el aprendizaje de polinomios orientado al desarrollo de capacidades del área de matemática en los alumnos del segundo grado de educación secundaria en la institución educativa "Mater Admirabilis"*. Tesis de licenciatura no publicada, Chiclayo: Universidad Santo Toribio de Mogrovejo.
- Sánchez, A. (2003): *Elementos conceptuales básicos del proceso de enseñanza-aprendizaje*. Recuperado de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1024-94352003000600018
- Tenbrink, Terry D. (1997): *Evaluación guía práctica para profesores*. Madrid. Editorial Narcea, S.A. Cuarta edición.
- Trahtemberg, L. (2013): *La Educación siglo 19 con tecnología siglo 21*. Recuperado de <http://www.trahtemberg.com/articulos/2112-educacion-siglo-19-con-tecnologia-siglo-21.html>.

Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa. (2005): *TIC'S en Educación. Tecnología de la Información y Comunicación en Educación*. Organización UNSA- Perú

Valer, L. (2005): *Corrientes Pedagógicas Contemporáneas*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Educación. Lima.

Zapata, M. (2004): *Aplicación de una nueva metodología en el área de matemática, usando la tecnología del software Cabri Geometre II. Utilizados como recursos didácticos para lograr la experiencia cognitiva necesaria que facilite un aprendizaje significativo de la geometría en los alumnos de educación secundaria*. Tesis de Máster en mención Matemática publicada, Piura: Universidad de Piura.

APÉNDICES

APÉNDICE A

CONCEPTOS PRIMITIVOS DE LA GEOMETRÍA

Geometría

Según Goñi (1999): la geometría estudia las propiedades y relaciones de las figuras geométricas. Se sustenta en una sistematización rigurosa y lógica de principios y definiciones. “Etimológicamente proviene de dos voces griegas: “geo” =tierra y “metron”=medida. Por consiguiente etimológicamente significa medición de la tierra” (p. 1).

El punto

El punto es un ente abstracto que se materializa en una representación gráfica. El punto es adimensional, es decir, no tiene dimensión, no tiene longitud, área, volumen. Sólo designa un lugar sobre el espacio. Por ejemplo, la señal que deja sobre el papel la punta bien afilada del lápiz o un granito muy pequeño de arena (Goñi, 1999). Se recuerda que el punto se nombra con una letra mayúscula.

La recta

“La recta es sucesión ilimitada de puntos colineales (alineada en una misma dirección), o sea, no posee principio ni fin” (Goñi, 1999, p. 4).

Tipos de rectas:

Rectas paralelas: Dos rectas son paralelas cuando no tienen ningún punto de intersección y equidistan en toda su longitud.

Rectas perpendiculares: Dos rectas son perpendiculares dentro de un plano cuando al cortarse forman un ángulo de 90 grados.

El ángulo

Según Godino (2002) “el ángulo es la unión de dos rayos que se interceptan en un punto llamado vértice, y forman una abertura” (p. 560).

El triángulo

“Es un polígono de tres lados limitado por tres rectas que se cortan dos a dos” (Godino, 2002, p. 25).

Clasificación del triángulo

Los triángulos se clasifican según sus lados y según sus ángulos.

Por la longitud de sus lados se clasifican en:

Triángulo isósceles: Tienen dos lados de la misma longitud. Los ángulos que se oponen a estos lados tienen la misma medida.

Triángulo equilátero: Tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos internos tienen la misma medida.

Triángulo escaleno: Todos sus lados tienen longitudes diferentes.

Por la amplitud de sus ángulos:

Triángulo rectángulo: Tiene un ángulo interior recto (90°). A los dos lados que conforman el ángulo recto se les denomina catetos y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.

Triángulo oblicuángulo: cuando no tiene un ángulo interior recto (90°) y puede ser a su vez de dos tipos:

- *Triángulo obtusángulo:* Uno de sus ángulos es obtuso (mayor de 90°) y los otros dos son agudos (menor de 90°) y al sumar los tres ángulos debe dar 180° .
- *Triángulo acutángulo:* Cuando sus tres ángulos son menores a 90° , pero sus lados pueden tener diferentes longitudes.

Líneas notables de un triángulo

La mediana

Según Godino (2002), la mediana es un segmento de recta que partiendo de un vértice cae sobre su lado opuesto dividiéndolo en dos partes iguales. El punto de intersección de las medianas se llama Baricentro y es el centro de gravedad del triángulo.

La bisectriz

Es un rayo que parte de un vértice del triángulo, dividiéndolo en dos ángulos congruentes y pasando por el lado opuesto al vértice. El punto de intersección de las bisectrices de un triángulo se llama Incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita (Godino, 2002).

La mediatriz

Es la recta perpendicular a uno de los lados del triángulo que pasa por su punto medio. Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un

punto llamado Circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita (Godino, 2002).

La altura

Es el segmento que parte de un vértice y cae perpendicularmente sobre su lado opuesto o prolongación. El punto de intersección de las alturas se llama Ortocentro (Godino, 2002). Si se trabaja con las propiedades del Ortocentro, se considera a la altura como recta.

Puntos notables de un triángulo

Baricentro

Es el punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo.

Incentro

Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores de un triángulo. El incentro coincide con el centro del círculo inscrito al triángulo.

Circuncentro

Es el punto de concurrencia de las tres mediatrices de un triángulo. El circuncentro coincide con el centro de la circunferencia circunscrita; por lo tanto, equidista de los vértices del triángulo.

Ortocentro

Es el punto de concurrencia de las tres alturas de un triángulo.

- El Ortocentro de un triángulo rectángulo: es el vértice correspondiente al ángulo recto.
- El Ortocentro de un triángulo acutángulo: está en el interior del triángulo.
- El Ortocentro de un triángulo obtusángulo: está en el exterior del triángulo.

APÉNDICE B
CUESTIONARIO A LAS ESTUDIANTES

**EL USO DE ESTRATEGIAS EN RELACIÓN A LA ENSEÑANZA
DE LA MATEMÁTICA**

Estimada estudiante:

Esta encuesta tiene como finalidad obtener información relacionada con la utilización de recursos en las sesiones de enseñanza-aprendizaje de matemática. Dicha información será considerada en el desarrollo de una investigación educativa que actualmente se está realizando.

Te pido ser muy sincera y responsable en tus respuestas. Muchas gracias.

- 1. ¿Cómo es la enseñanza de la matemática en tu colegio?**
 - a. Mala
 - b. Regular
 - c. Buena
 - d. Muy buena

- 2. ¿Tienes dificultad en el área de matemática?**
 - a. Sí
 - b. No

- 3. De la pregunta anterior, si tu respuesta es “Sí” a qué crees que se deba:**
 - a. La forma de enseñanza por parte de la profesora.
 - b. La falta de utilización de medios y materiales educativos.
 - c. La utilización de bibliografía inadecuada.
 - d. Falta de interés por tu parte.

- 4. ¿Las docentes utilizan materiales educativos para la enseñanza de la matemática?**
 - a. Sí
 - b. No

- 5. ¿Qué tipo de materiales educativos utilizan con mayor frecuencia las docentes?**
 - a. Pizarra, plumones, reglas.
 - b. Libros, separatas, laboratorios.
 - c. Videos
 - d. Software

APÉNDICE C
PROGRAMACIÓN ANUAL 2013

- 1. AREA** : Matemática.
- 2. GRADO** : Tercer año.
- 3. N° DE HORAS** : 08 horas semanales.
- 4. PROFESORA** : Karina Chumacero Martínez

5. PRESENTACIÓN:

La Institución Educativa concibe a la matemática como un área del saber que tiene un carácter científico - formativo, que se orienta a la formación integral de las estudiantes debido a que no solo prevé de nuevos conocimientos y experiencias, sino que fomenta el desarrollo de las capacidades intelectuales de aprender a pensar, descubrir, razonar, comprender, analizar, reflexionar, conjeturar, entre otras.

La matemática permite que la estudiante se enfrente a situaciones problemáticas, vinculadas o no a un contexto real, con una actitud crítica. Se debe priorizar en la estudiante un interés permanente por desarrollar sus capacidades vinculadas al pensamiento lógico-matemático que sea de utilidad para su vida actual y futura. Es decir, se debe enseñar a usar la matemática; esta afirmación es cierta por las características que presenta la labor matemática en donde la lógica y la rigurosidad permiten desarrollar un pensamiento crítico.

Estudiar nociones o conceptos matemáticos debe ser equivalente a pensar en la solución de alguna situación problemática. Existe la necesidad de propiciar en la estudiante la capacidad de aprender por sí misma, ya que una vez que la estudiante ha culminado sus estudios, va a tener que seguir aprendiendo por su cuenta muchas cosas más.

6. COMPETENCIAS:

CAPACIDAD FUNDAMENTAL	CAPACIDAD DE ÁREA	COMPETENCIA
Pensamiento Crítico Pensamiento creativo Solución de Problemas Toma de decisiones Excelencia Personal Vida Cristiana	Razonamiento y demostración.	▪ Formula y analiza conjeturas, utilizando operaciones combinadas en el conjunto de los números reales. Verifica resultados. ▪ Plantea, elabora y analiza relaciones entre lados y ángulos de diferentes figuras geométricas, así como realiza abstracciones a través del descubrimiento de regularidades numéricas y geométricas en el plano.
	Comunicación matemática.	▪ Elabora e interpreta diagramas de barras, polígonos de frecuencia y pictogramas a partir de la información recopilada en su entorno escolar y familiar. Comprende al azar y su medida. ▪ Modela representaciones gráficas de objetos tridimensionales en el plano; así como identifica y grafica figuras en el plano, áreas superficiales y sólidos de revolución.

	Resolución de problemas.	▪ Interpreta el resultado obtenido al medir una situación problemática de la vida real. ▪ Resuelve situaciones problemáticas de la vida cotidiana, cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos, algoritmos de las operaciones de números reales. Aborda con perseverancia y confianza en sí mismo, situaciones problemáticas de la vida cotidiana. ▪ Formula y analiza conjeturas, utilizando operaciones combinadas en el conjunto de los números reales. Verifica sus resultados.
--	--------------------------	--

7. N° DE UNIDADES Y CRONOGRAMA:

BI M	SUB ÁREA	UNIDADES	CONTENIDOS	N° DE HORAS
I	Aritmética	“Principios de la lógica proposicional”	• Enunciado y proposición. • Conectivos lógicos. • Tablas de verdad. • Cuadros y esquemas de organización de relaciones lógicas.	08 h
		“Estudiamos sistemas numéricos”	• Intervalos: operaciones • Números complejos • Cuatro operaciones • Sistemas de numeración • Otros sistemas de numeración	08 h

	Álgebra	“Entremos al mundo del álgebra”	• Teoría de exponentes • Polinomios	12 h
		“Aprendamos productos y cocientes notables”	• División de polinomios • Productos y cocientes notables.	12 h
	Geometría y trigonometría	“Iniciación a la geometría plana”	• Punto, segmento, semirecta, rayo, recta, plano y semiplano. • Problemas con segmentos • Ángulos: Congruencia.	08 h
		“Resolvamos problemas con ángulos”	• Paralelismo y perpendicularidad. • Triángulos: propiedades. • Cuadriláteros	08 h
	Razonamiento Matemático	“Desarrollamos nuestro razonamiento lógico”	• Planteo de ecuaciones. • Problemas de razonamiento lógico.	04 h
		“Desarrollamos nuestro razonamiento numérico”	• Psicotécnico. • Criptoaritmética.	04 h
II	Aritmética	“Aprendamos sistemas numéricos”	• Conteo de números • Divisibilidad • Números primos • MCD y MCD	08 h
		“Aplicamos razones y proporciones ”	• Razones y proporciones • Promedios • Magnitudes proporcionales • Reparto proporcional.	08 h
	Álgebra	“Diferencia los casos de factorización”	• Factorización: métodos	12 h

III		“Aprendamos fracciones algebraicas”	• Fracciones algebraicas.	12 h
	Geometría y trigonometría	“Aprendamos más sobre triángulos”	• Congruencia y semejanza de triángulos. • Relación entre los ángulos formados por dos rectas paralelas y una tercera que las corta. • Ángulos formados por las bisectrices de un triángulo.	08 h
		“Aprendamos circunferencia y áreas”	• Circunferencia. • Área de regiones poligonales y relación entre el área y el perímetro de figuras planas.	08 h
	Razonamiento Matemático	“Razonamiento numérico”	• Analogías y distribuciones numéricas. • Sucesiones y series • Operadores matemáticos	04 h
		“Aprendamos a inducir y deducir casos”	• Inducción y deducción. • Cronometría.	04 h
	Aritmética	“Analizamos problemas sobre sistemas numéricos”	• Fracciones • Teoría de conjuntos • Tanto por ciento • Interés • Descuento	08 h
		“Estudiamos radicales”	• Operaciones con radicales • Radicación con números reales.	08 h
	Álgebra	“Aprendamos ecuaciones de segundo grado”	• Ecuaciones e inecuaciones cuadráticas. • Sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas.	12 h

		“Aprendamos inecuaciones de segundo grado”	Ecuaciones e inecuaciones • Ecuaciones con valor absoluto. • Matrices y determinantes.	12 h
	Geometría y trigonometría	“Desarrollamos relaciones métricas y aplicamos el teorema de Pitágoras”	Geometría plana. • Relaciones métricas en el triángulo oblicuángulo. • Relaciones métricas en el triángulo rectángulo. • Teorema de Pitágoras. • Líneas notables del triángulo.	08 h
		“Aprendamos geometría del espacio”	Geometría del espacio • Recta y planos perpendiculares. • Ángulos poliedros.	08 h
	Razonamiento Matemático	“Aplicamos regla de tres en problemas matemáticos”	• Regla de tres simple y compuesta. • Problemas con fracciones y decimales.	04 h
		“Analizamos información y contamos figuras”	• Orden de la información: vertical, horizontal y circular. • Conteo de figuras.	04 h
IV	Aritmética	“Desarrollamos problemas con radicales”	Radicales: • Racionalización. • Números complejos.	08 h

		“Iniciación de la estadística”	Estadística • Variables estadísticas • Población y muestra • Frecuencia relativa y acumulada • Representación gráfica de distribuciones. • Medidas de tendencia central: media, moda, mediana	08 h
	Álgebra	“Aprendamos relaciones”	• Relaciones. • Propiedades	12 h
		“Aprendamos funciones”	Relaciones y Funciones • Dominio y rango de funciones cuadráticas. • Gráfica de funciones cuadráticas. • Modelación de fenómenos del mundo real con funciones. • Dominio y rango de las funciones, valor absoluto y raíz cuadrada. • Gráfica de las funciones, valor absoluto, cuadrática y raíz cuadrada.	12 h
	Geometría y trigonometría	“Líneas notables del triángulo”	• Triángulos: líneas notables del triángulo	08 h

		“Introducción a la trigonometría”	• Razones trigonométricas de ángulos complementarios, de ángulos notables y en un triángulo rectángulo. • Identidades trigonométricas elementales.	08 h
	Razonamiento Matemático	“Desarrollamos áreas”	Razonamiento geométrico. • Áreas de regiones poligonales y del círculo. Razonamiento espacial.	04 h
		“Estadística y probabilidad”	• Probabilidad y frecuencia.	04 h

APÉNDICE D
DESARROLLO CURRICULAR 2013

1. Datos:

Área : Matemática - Geometría y Trigonometría
Grado : Tercero de secundaria
Unidad 07 : “Líneas notables del triángulo”
Fecha : Del 12 de octubre al 06 de noviembre
Número de sesiones : 06 sesiones
Docente : Karina Chumacero Martínez.

2. Aprendizaje esperado

Capacidad de Área	Contenido	Capacidades específicas / Indicador de Evaluación	Instrumento de evaluación
Comunicación Matemática	Triángulos: • Líneas notables del triángulo. • Clasificación	• Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz.	• Prácticas calificadas, • Evaluaciones escritas • Evaluaciones orales.
Razonamiento y demostración		• Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulos utilizando el GeoGebra. • Explica correctamente las características de las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos. • Realiza la actividad con	• Aplicación de actividades geométrica: - actividad con papel y actividad con el GeoGebra.

		papel de manera correcta siguiendo las indicaciones de la ficha. • Ejecuta las actividades de GeoGebra de forma correcta siguiendo las orientaciones de la docente.	
--	--	--	--

3. Situaciones de aprendizaje :

- Guía de la estudiante.
- Guía de aprendizaje autónomo.
- Programa de habilidades intelectuales:
 - Razonamiento lógico y deductivo
 - Representación mental y gráfica del problema.

4. Actitud ante el área:

ORDEN	TRABAJO	RESPONSABILIDAD	GENEROSIDAD
• Cumple puntualmente las tareas y trabajos de modo correcto. (4)	• Manifiesta actitudes positivas frente a la solución de problemas.(4)	• Argumenta la solución de un problema utilizando correctamente el lenguaje matemático.(4) • Plantea estrategias de solución a situaciones problemáticas.(4)	• Comparte y explica sus ideas matemáticas en clase.(4)

5. Metodología:

MÉTODO	TÉCNICA	ESTRATEGIAS	MEDIOS Y MATERIALES
Método deductivo, Método inductivo, Método Analógico o Comparativo.	Trabajo personal, trabajo grupal, Observación, técnica expositiva.	Guía de trabajo autónomo, guía de aprendizaje autónomo, Programa de habilidades y destrezas.	Práctica dirigidas, libro texto, software educativo GeoGebra y fichas de actividad en clase.

6. Fuentes de información:

A. BIBLIOGRAFÍA¹⁹

- Aburto, C. (2009). *Lógicamente 3*. Perú: Grupo Editorial Norma S.A.C.
- Rojas, A. (2005). *Matemática 3*. Perú: Colección Scanner.
- De Los Heros, R. (2004). *Claves.com 3*. Perú: Santillana S.A.
- Intelectum. (2013): *Aritmética 3º*. Secundaria. Editorial: San Marcos
- Intelectum. (2013): *Álgebra 3º*. Secundaria. Editorial: San Marcos

¹⁹ El formato de esta bibliografía es tal como lo pide el colegio en las presentaciones de sesiones.

APÉNDICE E
PROGRAMA QUE INTEGRA LA PROPUESTA
METODOLÓGICA (ACTIVIDADES CON PAPEL Y
APLICACIÓN DEL GEOGEBRA) EN EL APRENDIZAJE DE
LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Datos informativos:

- Investigadora Responsable : Karina Chumacero Martínez
- Lugar de Aplicación : Institución Educativa de Chiclayo

Fundamentación:

En la actualidad, la tecnología está invadiendo en todos los campos del quehacer humano. La educación en todas sus áreas, mira a esta poderosa herramienta, como uno de los recursos didácticos más importantes para el desarrollo de las capacidades del estudiante.

Las teorías constructivistas de Ausubel, Bruner, Piaget y Gagné nos muestran que es posible utilizar diversas estrategias metodológicas como materiales con papel en clase o uso de recursos TICs para la consecución de aprendizajes significativos.

El presente programa busca lograr aprendizajes significativos sobre líneas notables del triángulo en los estudiantes de educación secundaria mediante actividades con papel y el uso del software GeoGebra. En tal sentido, pretende constituirse en una experiencia interactiva que permita desarrollar en las estudiantes una disposición mental hacia el logro de aprendizajes significativos.

En el programa se desarrollarán actividades relacionadas con el software GeoGebra en el contenido de líneas notables del triángulo. Una de las características más importantes de este Software es de licencia libre, es decir, cualquier persona o institución educativa lo puede utilizar de forma gratuita e instalarlo en su computadora.

Objetivos:

- Promover en las estudiantes un aprendizaje significativo en el contenido de líneas notables del triángulo relacionado con el software GeoGebra y material con papel.
- Evaluar la influencia de una propuesta metodológica que implica el uso de material con papel y la aplicación del software GeoGebra en el aprendizaje de líneas notables del triángulo.
- Motivar a los docentes a la integración de la tecnología, como herramienta didáctica.

Capacidades a desarrollar:

- Razonamiento y demostración: se da a través de la manipulación de las estudiantes en la computadora haciendo uso del GeoGebra, respondiendo a las interrogantes que se formulen y que les permita razonar matemáticamente. Además, se evalúa el trazado correcto de las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos a través de dobleces con papel.
- Comunicación matemática: se da a través del trazado de las líneas notables y la explicación de sus características.

Contenidos:

- Ejecución de actividades con papel y uso del software GeoGebra.
- Líneas notables del triángulo: trazado de líneas notables del triángulo y desarrollo de problemas con diferentes tipos de triángulos en el libro de actividades.

Actividades de aprendizaje:

Las actividades de aprendizaje permiten propiciar en los estudiantes un aprendizaje significativo en el contenido de líneas notables del triángulo, que se ve en 04 sesiones (una es la aplicación de la actividad con papel y las tres restantes aplicación del software GeoGebra) desarrolladas durante 02 horas semanales, describiéndose de forma detallada las estrategias didácticas y materiales a emplear, teniendo en cuenta la participación activa y oportuna de las estudiantes durante el desarrollo de cada una de estas sesiones de aprendizaje.

Medios y materiales:

Los medios y materiales que se utilizaron fueron los siguientes:

- Triángulos de papel
- Computadora
- Software GeoGebra
- Proyector
- Ficha de actividades

Evaluación:

La evaluación se dio en tres procesos:

- Evaluación de entrada

Se aplica a las estudiantes un pre –test.

- Evaluación de proceso
 - Se entrega una ficha de actividad “Líneas notables utilizando triángulos de papel” se realiza en una sesión de clase de 02 horas pedagógicas. Se evalúa a través de una ficha de observación y las estudiantes entregan la ficha de actividad desarrollada.
 - Se entrega una ficha de actividad de “aplicando el software GeoGebra para el aprendizaje de Líneas notables del triángulo” (actividad de laboratorio). Se realiza en tres sesiones de 02 horas pedagógicas y se evalúa a través de una ficha de observación el trazado de líneas notables en diferentes tipos de triángulos. Además las estudiantes entregan la ficha desarrollada para ser evaluadas.
 - Se toma en cuenta saberes previos y participación constante por parte de las estudiantes.
 - Se entrega una ficha resumen del tema y se muestra una serie de ejercicios para que desarrollen en clase y en casa.
 - Evaluación de Salida
- Se aplica a las estudiantes un post – test.

APÉNDICE F
PRE TEST

TEMA: LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Nombre y Apellidos: _____

Fecha: 19/07/2013

Capacidad: Comunicación Matemática:

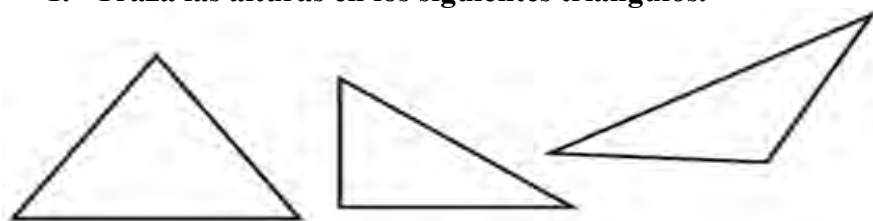
Indicador: Explica, con sus propias palabras y con ayuda de ejemplos, los conceptos básicos de la geometría

1. ¿Qué es un segmento?
2. ¿Qué característica tiene la recta?
3. ¿Qué es un ángulo?
4. ¿Cuáles son las características del triángulo?
5. ¿Qué característica tiene la bisectriz interior de un ángulo?
6. ¿En qué se diferencia la altura y la mediatriz de un triángulo?
7. ¿Cómo se llama el punto de intersección de las medianas de un triángulo?

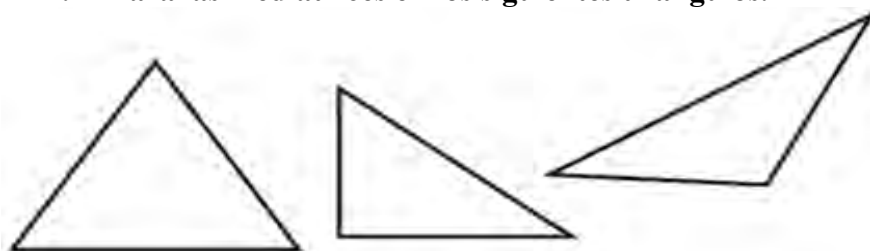
Indicador:

Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz.

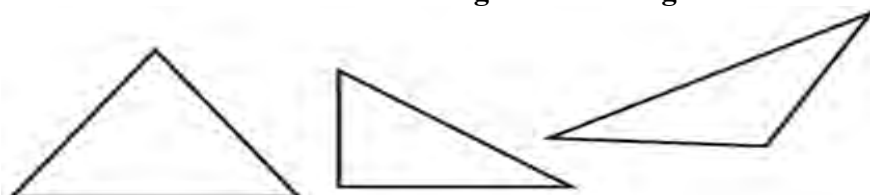
1. Traza las alturas en los siguientes triángulos.



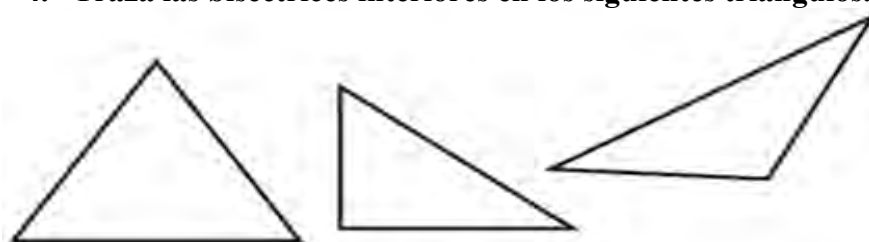
2. Traza las mediatrices en los siguientes triángulos.



3. Traza las medianas en los siguientes triángulos.



4. Traza las bisectrices interiores en los siguientes triángulos.



APÉNDICE G
ACTIVIDAD: “TRAZADO DE LÍNEAS NOTABLES
UTILIZANDO TRIÁNGULOS DE PAPEL”
LÍNEAS NOTABLES - ALTURAS

MATERIALES: 3 triángulos
(1 acutángulo, 1 rectángulo y 1 obtusángulo)

PROCEDIMIENTO:

- Elige un vértice y con dobleces marca una perpendicular que coincida con el lado opuesto.
- Hacer lo mismo con cualquier otro vértice y dicha línea que se forma debe pasar por el lado opuesto (ayúdate de prolongaciones).
- Ubica los puntos donde se cortan los dobleces y llámalo ORTOCENTRO (O).
- Compara con tu compañera si las perpendiculares se cortan por fuera o por dentro en los 3 tipos de triángulo.

RESPONDE:

¿Todos los puntos de intersección de los dobleces siempre están dentro del triángulo? ¿Por qué?

LÍNEAS NOTABLES – MEDIANAS

MATERIALES: 3 triángulos
(1 acutángulo, 1 rectángulo y 1 obtusángulo)

PROCEDIMIENTO:

- Toma un lado y halla su punto medio con un dobléz. Marca ese punto.
- Elabora un dobléz que pase por ese punto medio y por el vértice opuesto. Remarca ese dobléz con un color.
- Repite este proceso con los otros dos lados, colorea estas líneas y marca el punto donde se cortan y llámalo BARICENTRO (B).

RESPONDE:

Mida la distancia del punto de intersección de dichas líneas a cada uno de los lados del triángulo y a cada uno de los vértices. ¿A qué conclusión llegaste?

LÍNEAS NOTABLES - MEDIATRICES

MATERIALES: 3 triángulos
(1 acutángulo, 1 rectángulo y 1 obtusángulo)

PROCEDIMIENTO:

- Escoge cada lado y ubica su punto medio con un dobléz.
- Traza rectas perpendiculares que pasen por el punto medio de cada lado.
- Ubica el punto de intersección de las rectas perpendiculares (si no se encuentran dentro del triángulo ayúdate con una hoja adicional como base del triángulo)
- Marca el punto donde se cortan y llámalo CIRCUNCENTRO (C).

LÍNEAS NOTABLES – BISECTRICES INTERIORES

MATERIALES: 3 triángulos
(1 acutángulo, 1 rectángulo y 1 obtusángulo)

PROCEDIMIENTO:

- Elige un ángulo y utiliza dobleces que dividan al ángulo en dos partes iguales.
- Verifica que estos ángulos sean iguales, ayúdate con el transportador.
- Resalta dichas líneas hasta caer al lado opuesto del vértice.
- Ubica el punto de intersección de dichas líneas y llámalo INCENTRO (I).

RESPONDE:

¿Qué es la bisectriz? Define con tus propias palabras.

APÉNDICE H
FICHA DE OBSERVACIÓN
ACTIVIDAD: “TRAZADO DE LÍNEAS NOTABLES
UTILIZANDO TRIÁNGULOS DE PAPEL”

Fecha: / 10/2013

Indicadores	Realiza la actividad con papel de manera correcta siguiendo las indicaciones de la ficha.				Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulo hechos de papel, utilizando regla y lápiz.				Entrega la ficha desarrollada de la actividad con papel y presenta el cuaderno con los triángulos pegados y desarrollados		Observaciones
	A L T U R A	M E D I A N A	M E D I A N T R I Z	B I S E C T R I Z	A L T U R A	M E D I A N A	M E D I A N T R I Z	B I S E C T R I Z	SÍ	NO	
Estudiante 01											
Estudiante 02											
Estudiante 03											
Estudiante 04											
Estudiante 05											
Estudiante 06											
Estudiante 07											
Estudiante 08											
Estudiante 09											
Estudiante 10											
Estudiante 11											
Estudiante 12											
Estudiante 13											

Estudiante 14										
Estudiante 15										
Estudiante 16										
Estudiante 17										
Estudiante 18										
Estudiante 19										
Estudiante 20										
Estudiante 21										
Estudiante 22										
Estudiante 23										
Estudiante 24										
Estudiante 25										
Estudiante 26										
Estudiante 27										
Estudiante 28										
Estudiante 29										
Estudiante 30										

Valoración:
SÍ: ✓ No: ✕

APÉNDICE I
ACTIVIDAD: APLICACIÓN DEL GEOGEBRA PARA TRAZAR
LÍNEAS NOTABLES EN LOS TRIÁNGULOS



GEOMETRÍA

Tema: LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Nombre y Apellidos:

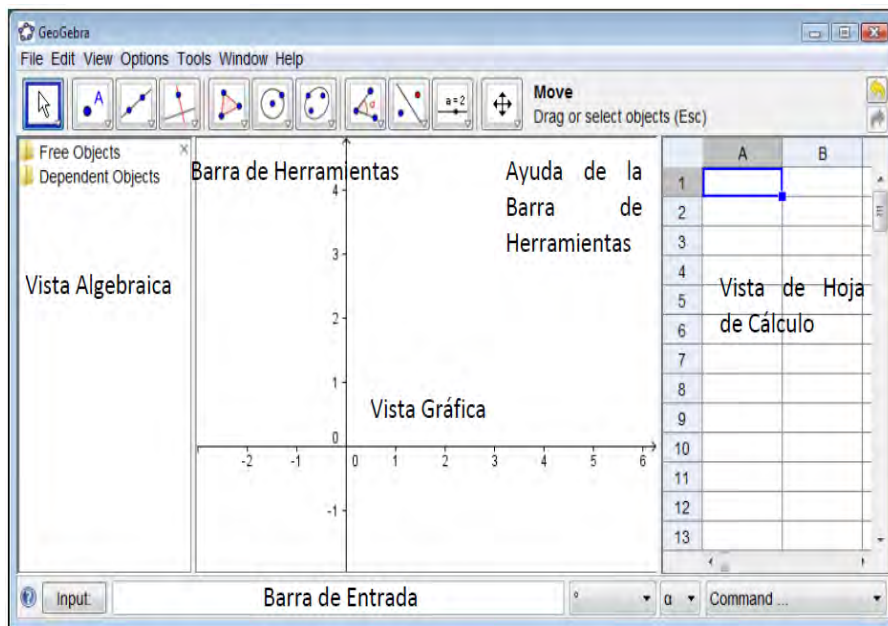
GEOGEBRA

Es un software dinámico que permite dibujar figuras geométricas. Está diseñado para interactuar dinámicamente en un ámbito en que se reúnen la geometría, el álgebra o el cálculo. Es muy útil para construir figuras, desplazarlas, ampliarlas o animarlas.

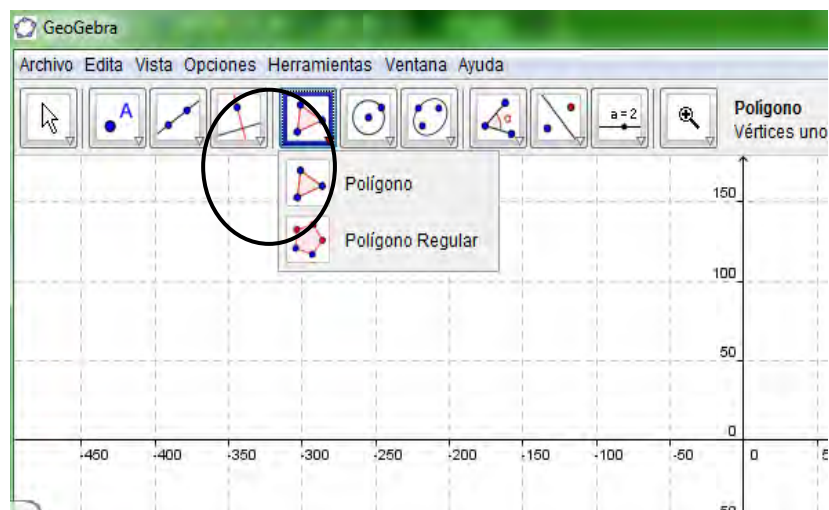
Su creador es Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad de Atlantic Florida.

El GeoGebra es un software de libre distribución y se puede bajar de internet desde: <http://www.geogebra.org/IGI/>

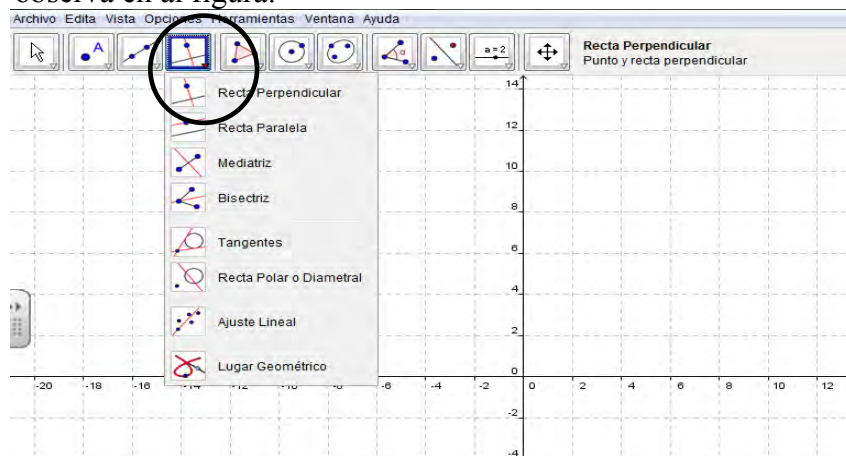
La mejor manera de aprender a manejar el GeoGebra es usándolo. Es sencillo y se necesita un corto tiempo para familiarizarnos con el programa.



Abrimos el GeoGebra y aparece la pantalla anterior con los programas y el eje de coordenadas. Para construir un triángulo observamos los íconos de la barra de herramientas y elegimos el ícono “polígonos” seleccionado el triángulo como se muestra en la siguiente figura:



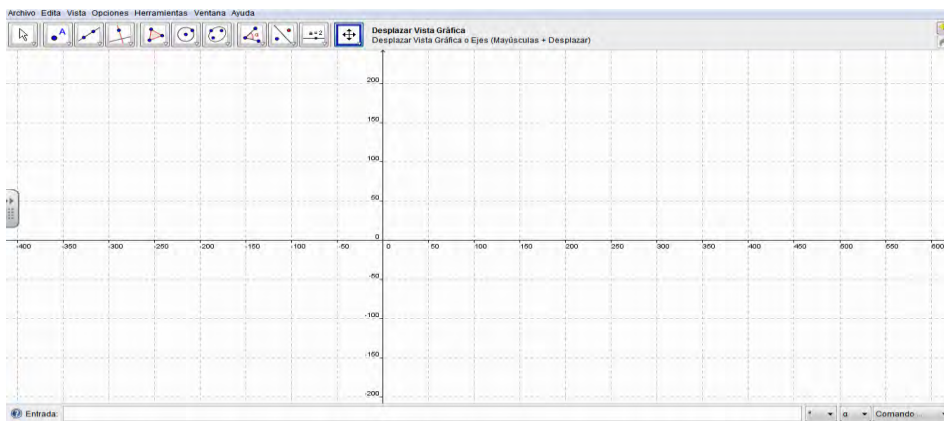
Y para trazar segmentos o rectas ubicamos el ícono que se observa en la figura:



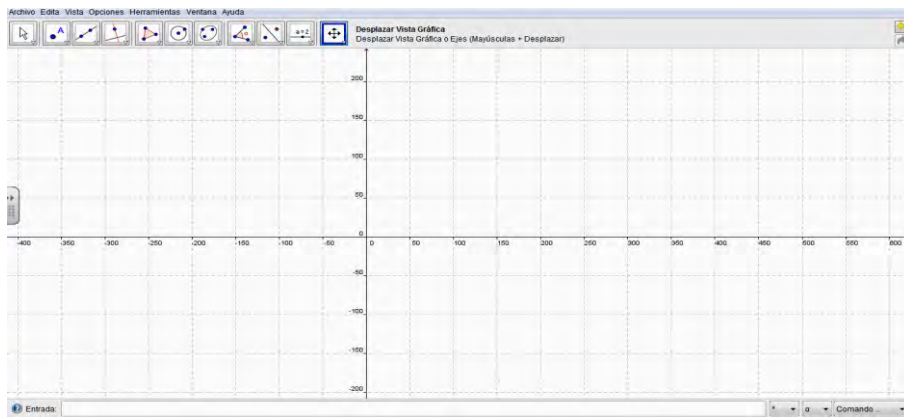
Actividad:

Sigue las instrucciones de la docente y aplícalo en el software. Luego, traza las líneas en triángulos de diferentes medidas según lo que indica la docente. Observa las líneas notables en los tres tipos de triángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo) y dibújalos en la ficha de trabajo. No olvidar guardar tu actividad en la computadora (carpeta – geometría 3ro)

LAS ALTURAS

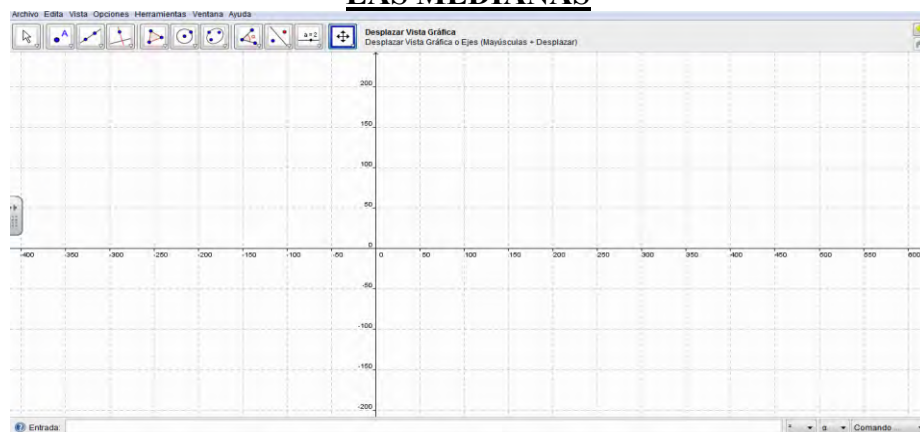


Observaciones:



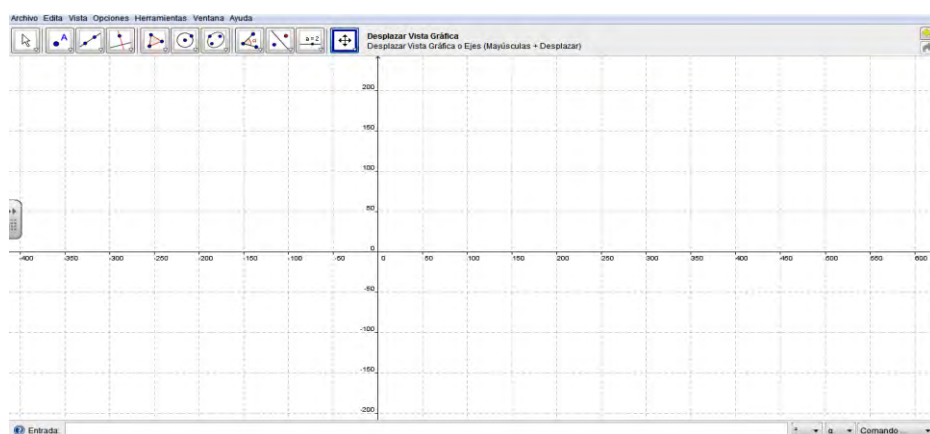
Observaciones:

LAS MEDIANAS



Observaciones:

LAS BISECTRICES INTERIORES



Observaciones:

APÉNDICE J
FICHA DE OBSERVACIÓN
ACTIVIDAD: “APLICACIÓN DEL SOFTWARE GEOGEBRA”

I N D I C A D O R E S	Ejecuta las actividades del GeoGebra de forma correcta siguiendo las orientaciones de la docente.				Traza correctamente las líneas notables en diferentes tipos de triángulo, utilizando el GeoGebra.				P U N T A J E	Maneja la ventana de herramientas del software.		Guarda las actividades desarrolladas en la carpeta (geometría-3ro) con su nombre y entrega la ficha de trabajo desarrollada teniendo en cuenta lo observado en el GeoGebra		OBSERVACIONES
	N o m b r e y A p e l l i d o s	A L T U R A	M E D I A N A	M E D I A T R I Z	B I S E C T R I Z	A L T U R A	M E D I A N A	M E D I A T R I Z	B I S E C T R I Z	S i	N o	S i	N o	
Estudiante 01														
Estudiante 02														
Estudiante 03														
Estudiante 04														
Estudiante 05														
Estudiante 06														
Estudiante 07														
Estudiante 08														
Estudiante 09														
Estudiante 10														
Estudiante 11														
Estudiante 12														
Estudiante 13														
Estudiante 14														

Estudiante 15														
Estudiante 16														
Estudiante 17														
Estudiante 18														
Estudiante 19														
Estudiante 20														
Estudiante 21														
Estudiante 22														
Estudiante 23														
Estudiante 24														
Estudiante 25														
Estudiante 26														
Estudiante 27														
Estudiante 28														
Estudiante 29														
Estudiante 30														

Valoración:

Muy bien = 2,5; Bueno= 2; Regular= 1,5; Deficiente= 1; No trabaja=0

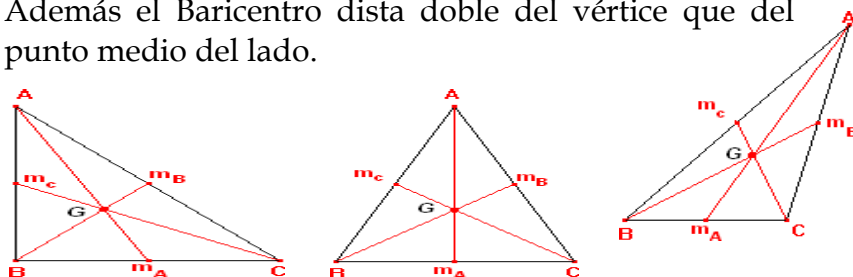
APÉNDICE K
FICHA RESUMEN DE LÍNEAS NOTABLES

LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO:

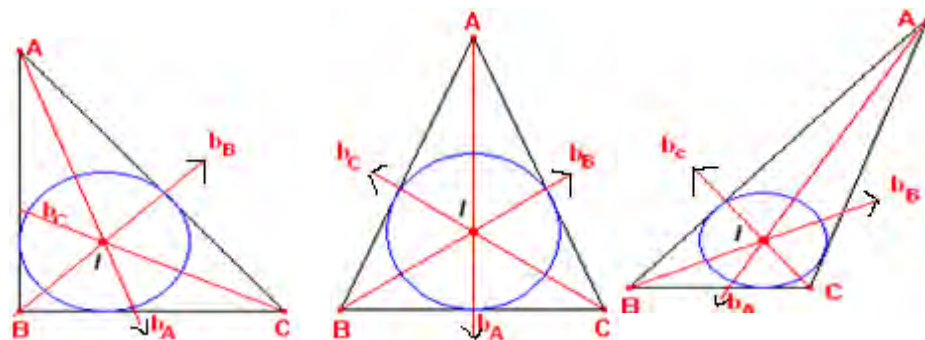
• **Las medianas**

Es un segmento que une un vértice con la mitad del lado opuesto. En un triángulo ABC, las tres medianas se cruzan en un punto G llamado Baricentro que es el centro de gravedad del triángulo. Cada mediana divide al triángulo en dos triángulos de igual área. Además el Baricentro dista doble del vértice que del punto medio del lado.



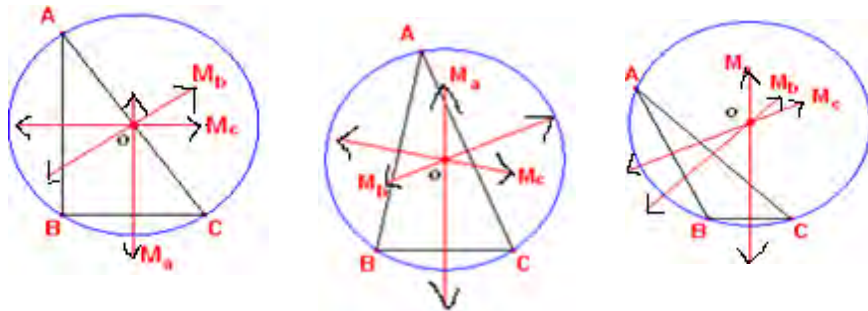
• **Las bisectrices interiores**

Es un rayo que divide el ángulo de un vértice del triángulo en dos ángulos congruentes, pasando por el lado opuesto a dicho vértice. El punto de intersección de las bisectrices de un triángulo se llama _____, que es el centro de la circunferencia inscrita



- **Las mediatrices**

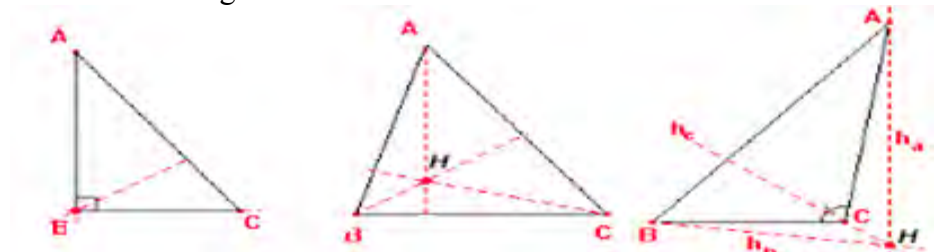
Es la recta perpendicular a que pasa por el punto medio de uno de los lados del triángulo. Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado Circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita.



- **Las alturas**

Es un segmento que parte de un vértice y cae forma perpendicular sobre su lado opuesto. El punto de intersección de las alturas se llama Ortocentro. **Si trabajamos con las propiedades del Ortocentro, se considera la altura como recta.**

- ✓ El punto de intersección de las alturas de un triángulo rectángulo: es el vértice correspondiente al ángulo recto.
- ✓ El punto de intersección de un triángulo acutángulo: está en el interior del triángulo.
- ✓ El punto de intersección de un triángulo obtusángulo: está en el exterior del triángulo.



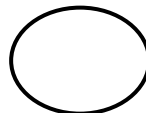
APÉNDICE L
POST TEST

TEMA: LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Nombre y Apellidos: _____

Fecha: ____/11/2013

CAPACIDAD: COMUNICACIÓN MATEMÁTICA



Indicador: Explica correctamente las características de las líneas notables en diferentes tipos de triángulos.

Responde:

A. ¿En qué se diferencia la altura de la mediatriz?

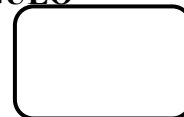
B. ¿Cómo se llama el punto de intersección de las medianas?

Escribe las características y el nombre de sus intersecciones de cada línea notable mencionadas en el siguiente cuadro:

Líneas Notables	Nombre de la intersección de las líneas notables	Características de las líneas notables de un triángulo:		
		Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Alturas				
Medianas				
Mediatrices				
Bisectrices interior				

TEMA: LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

CAPACIDAD: COMUNICACIÓN MATEMÁTICA



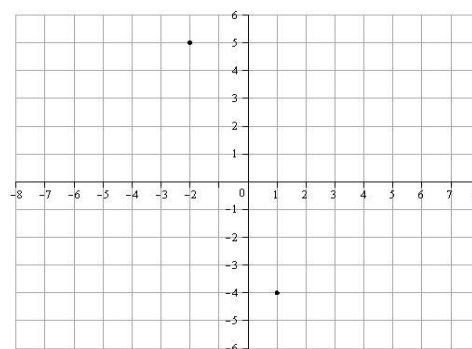
Indicador: Traza correctamente las líneas notables en los diferentes tipos de triángulos utilizando regla y lápiz.

Lee las siguientes indicaciones y traza las líneas notables correspondientes:

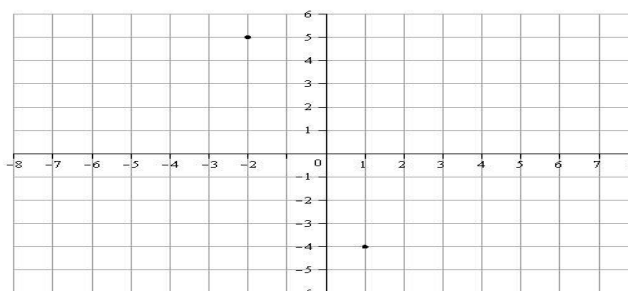
ALTURA:

1. Traza las alturas del triángulo rectángulo:

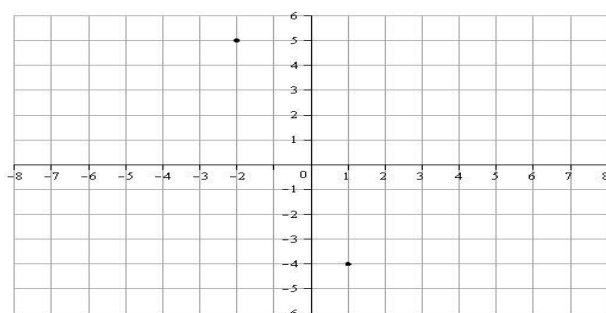
El punto de intersección de las alturas se llama: _____



2. Traza las alturas del triángulo acutángulo:



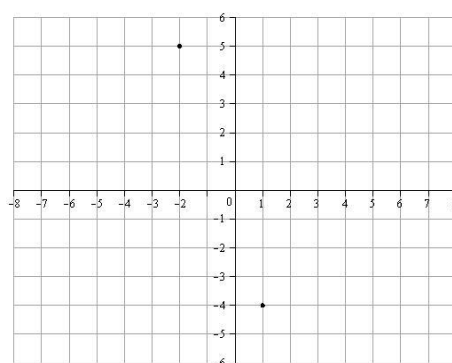
3. Traza las alturas del triángulo obtusángulo:



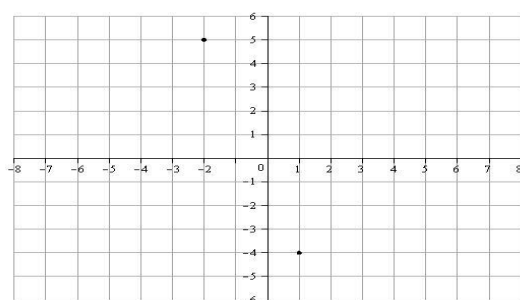
MEDIANA:

1. Traza las medianas del triángulo rectángulo:

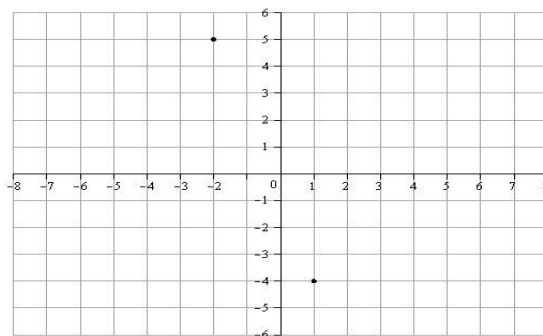
El punto de intersección
de las medianas, se
llama: _____



2. Traza las medianas del triángulo acutángulo:



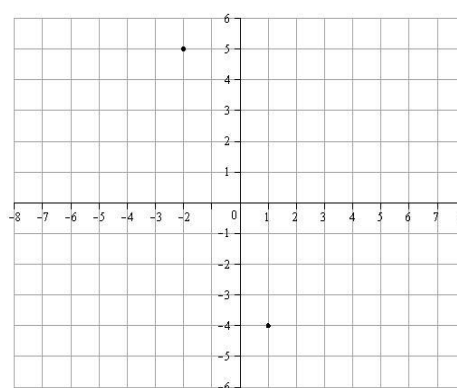
3. Traza las medianas del triángulo obtusángulo:



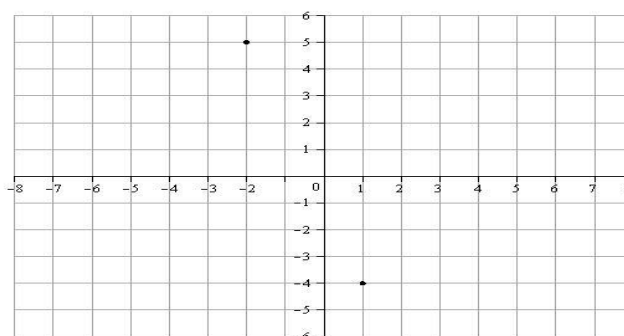
MEDIATRIZ:

1. Traza las mediatrices del triángulo rectángulo:

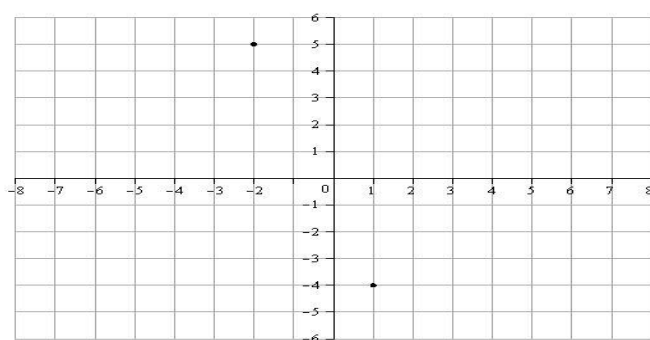
El punto de intersección
de las mediatrices, se
llama: _____



2. Traza las mediatrices del triángulo acutángulo:



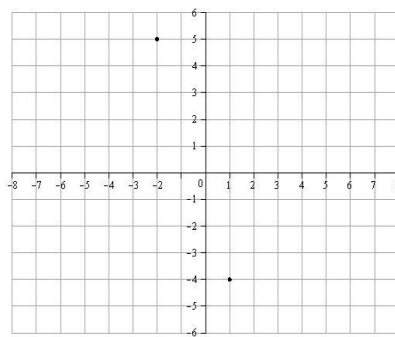
3. Traza las mediatrices del triángulo obtusángulo:



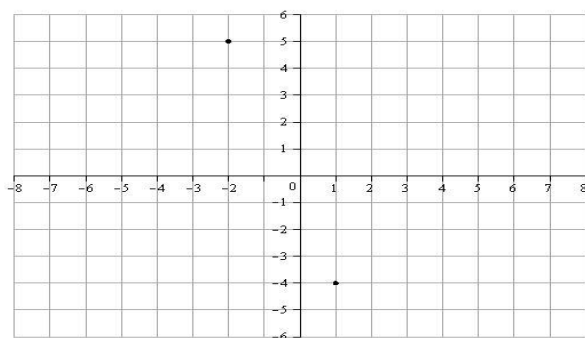
BISECTRIZ:

1. Traza las bisectrices interiores del triángulo rectángulo:

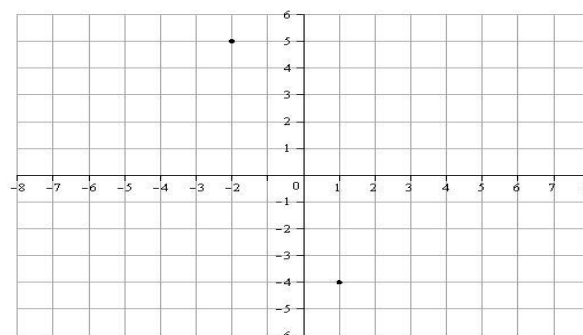
El punto de intersección de las bisectrices interiores, se llama: _____



2. Traza las bisectrices interiores del triángulo acutángulo:



3. Traza las bisectrices interiores del triángulo obtusángulo:



APÉNDICE M

EXAMEN POST TEST DESARROLLADO

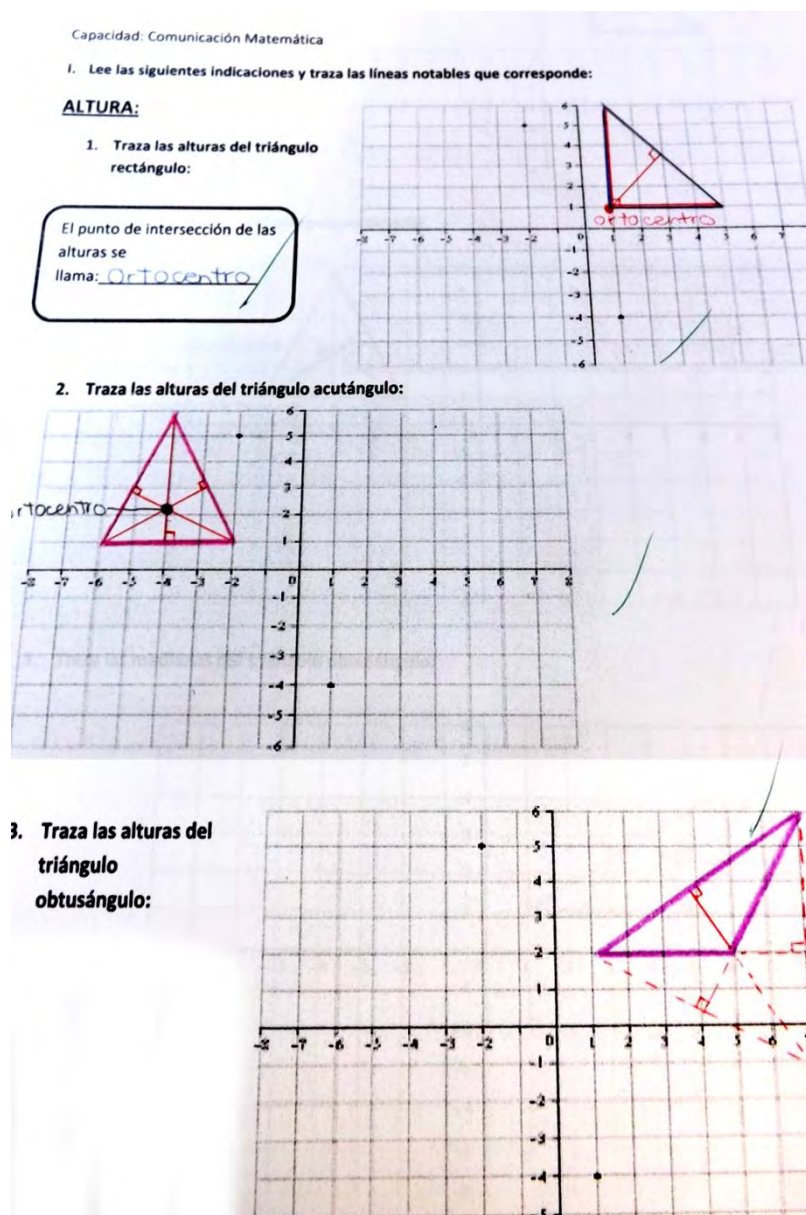
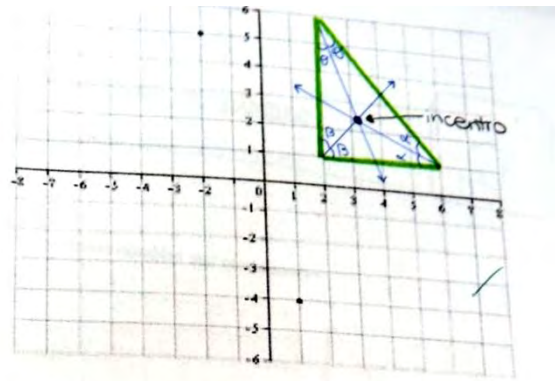


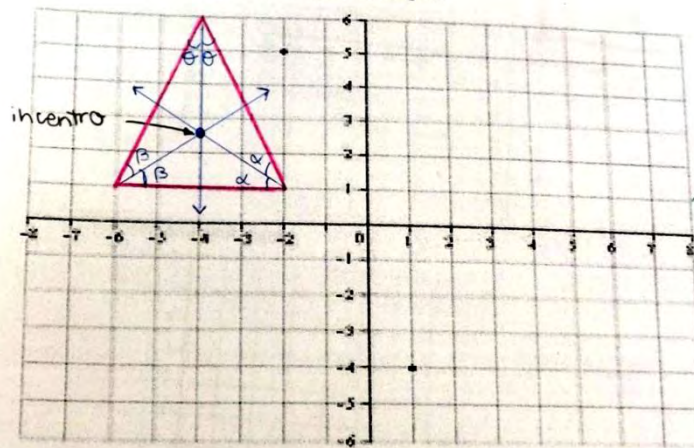
Figura 90. Examen desarrollado del post test (Parte 1)

- INTERIOR:**
1. Traza las bisectrices interiores del triángulo rectángulo:

o de intersección de
ctrices interiores se
incentro



2. Traza las bisectrices interiores del triángulo acutángulo:



Traza las bisectrices interiores del triángulo obtusángulo:

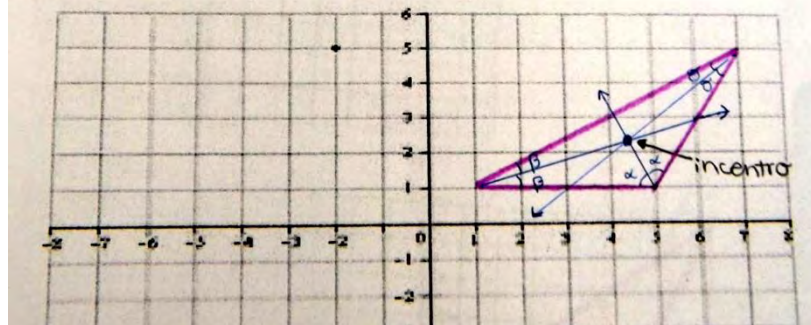


Figura 91. Examen desarrollado del post test (Parte 2)

APÉNDICE N

ESTUDIANTES TRABAJANDO



Figura 92. Estudiantes trabajando

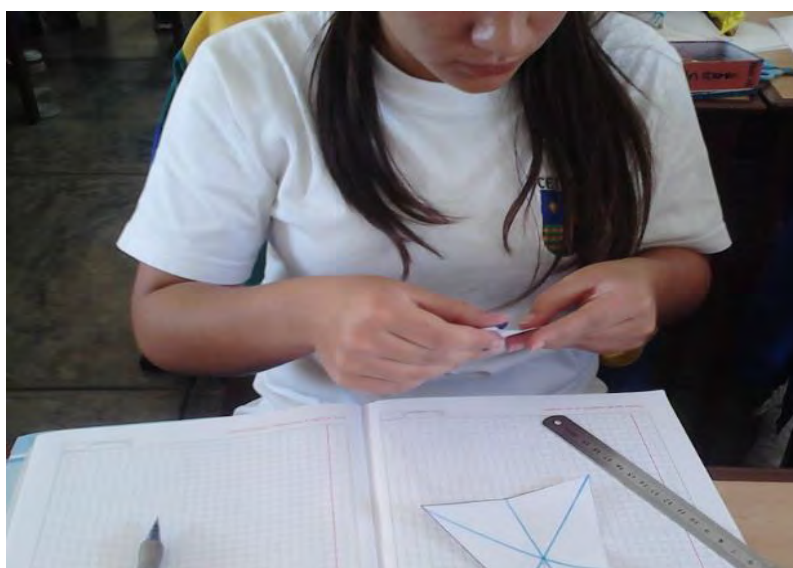


Figura 93. Estudiante haciendo dobleces