



UNIVERSIDAD
DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL
PIRHUA

TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE LA DERIVADA - LA APLICACIÓN DEL PROGRAMA DERIVE

Diana Judith Quintana Sánchez

Piura, 19 de Abril de 2010

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Maestría en Educación

Abril 2010



Esta obra está bajo una [licencia](#)
[Creative Commons Atribución-](#)
[NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú](#)

Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura

DIANA JUDITH QUINTANA SÁNCHEZ

**TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE LA DERIVADA
– LA APLICACIÓN DEL PROGRAMA DERIVE**



**UNIVERSIDAD DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRIA EN EDUCACIÓN
MENCIÓN EN MATEMÁTICA
2010**

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis, si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación por parte de la autora y su asesor de tesis, no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que a continuación citaré.

Primero y antes que nada, dar gracias a **Dios**, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo este tiempo.

A mis padres Alejandro y Carmen por estar siempre a mi lado, por el apoyo que siempre me han brindado.

A Luis mi buen esposo, porque en su compañía las cosas malas se convierten en buenas, por su amor, paciencia y comprensión.

A mis hijos Luis Sebastián, Esteban Hipólito y Renzo Alejandro por ser el regalo más grande de Dios y ser el estímulo para seguir adelante.

ÍNDICE

	PÁGINA
Introducción	1
Capítulo I	
Problematización	2
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.1.1. Antecedentes	2
1.1.2. Formulación del Problema	8
1.1.3. Justificación	9
1.1.4. Hipótesis	10
1.1.5. Variables	10
1.1.6. Población	11
1.2. Objetivos de la Investigación	11
1.2.1. Objetivo General	11
1.2.2. Objetivos Específicos	11
Capítulo II	12
Fundamento Teórico	12
2.1. Diseño Curricular de la Asignatura de matemática I	12
2.1.1. Sílabo de la Asignatura de Matemática I	12
2.2. Didáctica de la Matemática	13
2.2.1. Registros de Representación Semiótica. Raymod Duval.	14
2.2.2. Taxonomía de Bloom y los niveles en que Se pueden clasificar los objetivos de	

Aprendizaje.	15
2.3. Desarrollo de la parte conceptual de la Derivada	19
2.4. La informática como recurso.	92
2.4.1. El Software Educativo en el proceso de enseñanza Aprendizaje.	94
2.4.2. La introducción del software de Matemática en la educación Matemática	94
2.4.3. El programa Derive	96
2.4.4. Capacidades del programa Derive.	96
2.4.5. Laboratorios para el aprendizaje del Cálculo diferencial empleando Derive.	97
Capítulo III	99
Metodología de la Investigación	99
3.1. Paradigma de Investigación	99
3.2. Tipo de Investigación	100
3.3. Población	100
3.4. Hipótesis Estadísticas	100
3.5. Variables	100
3.6. Diseño de Investigación	100
3.7. Técnicas e instrumentos de recolección de datos	101
3.8. Técnica de Procesamiento de Datos	102
3.9. Proceso de Investigación.	103
3.9.1. Dificultades en el aprendizaje del Calculo Diferencial	103
3.9.2. Rendimiento Académico	104
3.9.3. Propuesta Didáctica	104
Capítulo IV	115
Análisis e Interpretación de Resultados	115
4.1. Análisis Estadístico	
4.1.1. Resultados del rendimiento académico Los grupos experimental y de control.	115
4.2. Análisis Inferencial	118
4.2.1. Comparación de Medias	118
4.2.2. Tablas de frecuencia del Pre-Test y Post-Test.	119

4.2.3. Resultados del Pre-Test y Post-Test	
Considerando la comparación de medias y la	
Prueba t-student.	121
4.2.4. Aceptación o rechazo de la hipótesis nula o	
Alternativa.	124
4.3. Discusión de los resultados.	125
Conclusiones	128
Recomendaciones	130
Bibliografía	132

ÍNDICE DE TABLAS

	PÁGINA
1. Tabla N°1: Precio de artículo por meses.	23
2. Tabla N°2: Razón de cambio en el 2do, 3er y 4to mes	27
3. Tabla N°3: Temperatura de un paciente según transcurren las horas.	29
4. Tabla N°4: Relación de Temperatura, Gráfica y Razón de Cambio.	29
5. Tabla N°5: Derivadas de orden superior	78
6. Tabla N°6: Calificaciones de la Segunda Unidad - Grupo Experimental	117
7. Tabla N°7: Calificaciones de la Segunda Unidad - Grupo de Control	118
8. Tabla N°8: Resultados Pre Test y Post Test - Grupo Experimental	120
9. Tabla N°9: Resultados Pre Test y Post Test - Grupo de Control	122
10. Tabla N°10: Resumen estadístico de pruebas Pre Test de los grupos experimental y de control.	124
11. Tabla N°11: Resumen estadístico de pruebas Post Test de los grupos experimental y de control.	125

ÍNDICE DE GRÁFICOS

	PÁGINA
1. Figura 1: Gráfica del precio dado en soles en el primer y tercer mes.	24
2. Figura 2: Grafica del Supuesto crecimiento lineal de precio entre el primer y tercer mes.	24
3. Figura 3: Gráfica del descuento del 30% en el precio	24
4. Figura 4: Comportamiento no lineal entre tiempo y precio.	26
5. Figura 5: Comportamiento no lineal entre tiempo y precio.	26
6. Figura 6: Grafico del peso promedio de un bebé desde su nacimiento Hasta los dos años.	30
7. Figura 7: Gráfico del valor de madera producida en función del tiempo	31
8. Figura 8: Gráfico del porcentaje de habitante en Estados Unidos que ven televisión durante las 24 horas del día.	32
9. Figura 9: Gráfica de las rectas secante y tangentes a una curva desde El punto Q hasta el punto P.	33
10. Figura 10: Gráfico de las posiciones de una recta secante a una curva en los puntos P y Q y su aproximación a la recta tangente.	34
11. Figura 11: Gráfica de la distancia recorrida por el objeto en función del tiempo.	36
12. Figura 12: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y su recta	

tangente en el Punto $(2, 1/2)$	39
13. Figura 13: Gráfica de la función $f(x)$ en los puntos c y $c+h$, empleando la primera forma de derivar.	45
14. Figura 14: Gráfica de la función $f(x)$ en los puntos c y $c+h$, empleando la primera forma de derivar.	45
15. Figura 15: Gráfico de la función valor absoluto para estudiar la derivada en cero.	48
16. Figura 16: Gráfico de la derivada de la función valor absoluto.	49
17. Figura 17: Gráfico de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$ para Estudar la derivada en cero.	50
18. Figura 18: Gráfico de la función $f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ 2x & ; x < 0 \end{cases}$	50
19. Figura 19: Gráfico de posibles situaciones de función Diferenciable en un punto.	51
20. Figura 20: Gráfico de la función $f(x) = x^2 - 9 $	53
21. Figura 21: Gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$	53
22. Figura 22: Gráfico de la función $f(x) = \frac{-3}{x+1}$	59

ÍNDICE DE ANEXOS

CONTENIDO	PÁGINA
1. ANEXO 1: Sílabo de la Asignatura.	135
2. ANEXO 2: Registro de Evaluaciones.	144
3. ANEXO 3: Guías Metodológicas Aplicando El Software DERIVE.	145
4. ANEXO 4: Planes de Clase	171
5. ANEXO 5: Tabla de Especificaciones.	177
6. ANEXO 6: Instrumentos de Evaluación	186
7. ANEXO 7: Laboratorios en DERIVE	195

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se ha realizado en la asignatura Matemática I del segundo ciclo en las Escuelas de Ingeniería Industrial e Ingeniería de Sistemas y fue motivado por la necesidad de mejorar mi práctica docente y brindar a los alumnos herramientas para mejorar el aprendizaje de esta asignatura.

Lo abstracto de las matemáticas no permite que los alumnos puedan ver y manipular entes matemáticos, generándose confusiones y problemas para interpretar la información que un determinado elemento pueda proporcionar. Siendo así, con mayor dificultad podrán emplear los resultados obtenidos para predecir alguna situación.

Pensando en esta problemática es que pensé en incorporar al trabajo en clase el uso de Software DERIVE, para desarrollar el capítulo de derivadas. Elegí este software por su fácil manejo de esta forma los alumnos no demorarían en aprenderlo y podrían usarlo sin complicaciones.

Para esta investigación se elaboró un módulo dando un tratamiento didáctico a las definiciones, teoremas, propiedades de la derivada, apoyándonos en la teoría de Registros Semióticos, además de guías de laboratorio y prácticas calificadas, apoyándonos para su elaboración en la Taxonomía de Bloom. Los grupos con los que se trabajó la investigación fueron dos uno experimental y otro de Control.

Así, iniciamos un estudio en que planteamos la posibilidad de que los estudiantes alcancen un aprendizaje del Cálculo Diferencial más efectivo empleando DERIVE que permita mejorar el resultado del rendimiento de la asignatura de Matemática I y por ende mejorar su calidad educativa.

CAPÍTULO I

PROBLEMATIZACIÓN

1.1.PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1. ANTECEDENTES

Algunos de los trabajos encontrados con ayuda del buscador REDEMAT son los que presento a continuación, estos trabajos de investigación se han realizado empleando software educativos y desarrollando temas como Funciones, Matrices, Geometría en los niveles de secundaria, bachillerato y universidad.

1. TITULO: DERIVE: UNA HERRAMIENTA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

**AUTOR: FRANCISCO CABO GARCIA
BONIFACIO LLAMAZARES RODRÍGUEZ**

**MARIA TERESA PEÑA GARCIA
LUGAR: DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA
(MATEMÁTICA)
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

Los autores muestran en este trabajo su experiencia docente con el programa DERIVE en la asignatura Matemática de las Licenciaturas en Economía y en Administración y Dirección de Empresas.

El objetivo es complementar el curso con una herramienta que les permita a los alumnos visualizar situaciones matemáticas difíciles o muy laboriosas de trabajar manualmente pero que tiene mucha interpretación en la Economía.

Este equipo de docentes ha elaborado una guía dividida en tres capítulos. El primero describe los menús y los botones de cada una de las ventanas del programa los dos siguientes se dedican al estudio del Álgebra y Cálculo así como a programar algunas funciones para facilitar la resolución de ejercicios.

La conclusión de esta investigación es que el uso de recursos informáticos permite un mayor acercamiento del alumno a las asignaturas que, como matemáticas, no gozan de mucha simpatía entre los estudiantes. Además de desarrollar en el alumno una mayor destreza en las prácticas informáticas ya que este curso corresponde a los primeros ciclos.

2. TÍTULO: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA DE INTRODUCCIÓN TEMPRANA DEL CONCEPTO DE APROXIMACIÓN LOCAL EN SU MANIFESTACIÓN DE RECTA TANGENTE VÍA EL ASISTENTE MATEMÁTICO

**AUTOR: PEDRO VICENTE ESTABAN DUARTE
PEDRO PEREZ CARRERA**

**LUGAR: UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA,
ESPAÑA**

Los mapas conceptuales tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones, facilitando el análisis del lenguaje empleado en su construcción y poniendo de manifiesto la integración que los aprendices tienen entre los conceptos empleados para su elaboración. En el modelo educativo de Van Hiele, es considerado el lenguaje como una de sus características fundamentales en el proceso de aprendizaje de un concepto geométrico o matemático y es una de los indicadores del nivel de razonamiento en el cual un alumno se encuentra. El modelo de Van Hiele está compuesto por cinco niveles de razonamiento, cinco fases del aprendizaje y el insight o definido también como comprensión. A partir del análisis del lenguaje se pueden diseñar experiencias de aprendizaje

significativas para potenciar el progreso de un alumno a través de los niveles de razonamiento postulados por dicho modelo.

El propósito de esta investigación es exponer una metodología basada en el Modelo Educativo de Van Hiele para enseñar el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto, a partir de la visualización que se obtiene del haz de secantes, entendiéndolo como conjunto de rectas que pasan todas por un punto fijo de la curva y por otros sobre la curva dada cada vez más cercanos al punto dado. Dicha visualización que se propone, se obtiene con la ayuda del asistente matemático DERIVE y no requiere de manipulaciones algebraicas que entorpezcan el razonamiento que los alumnos deben desarrollar y exhibir a lo largo del proceso.

Se elabora un material diseñado para ser cubierto en una clase, en la cual el profesor sirva de orientador, formulando preguntas y respondiendo inquietudes en el momento oportuno.

Como conclusiones de esta investigación se tiene que para la asimilación efectiva de un concepto matemático se deben tener en cuenta dos fases, una primera de proporcionar una visualización adecuada del concepto a estudiar, en la que los alumnos tienen un primer acercamiento al concepto sin manipulaciones algebraicas. La segunda es la formalización del concepto, en la cual la docencia tradicional centra todos sus esfuerzos. La enseñanza centrada en esta segunda fase hace más difícil que los alumnos progresen en su razonamiento y logren integrar y desarrollar relaciones con los demás conceptos estudiados. Su propuesta metodológica esta dirigida a la primera fase, es decir a la construcción de un concepto – definición cuando se disponga de la madurez algebraica y lógico deductivo necesarias.

Su experiencia educativa siguiendo el modelo de Van Hiele aplicado al concepto de aproximación local, del cual esta propuesta metodológica es su fruto, les permite asegurar que el 90% de los alumnos sometidos al proceso descrito pueden verbalizar una definición correcta de recta tangente a una curva en uno de sus puntos partiendo del haz de secantes, y solo el 5% de los alumnos que siguen el curso de análisis con

una metodología tradicional dan una definición de tangente a una curva en un punto a partir del concepto de derivada.

3. TITULO: ALGUNAS CONSECUENCIAS DEL USO HABITUAL DEL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

AUTOR: JCARIAS

LUGAR: SIMPOSIO- MADRID 11 DE DICIEMBRE DE 2003

En esta ponencia se hace una reflexión acerca del uso del programa DERIVE 6 en la enseñanza de las matemáticas. Se inicia con una breve incidencia en las nuevas posibilidades del programa respecto a su predecesor DERIVE 5.

Se propone el uso cotidiano, incorporado a todas las fases del proceso de enseñanza aprendizaje, la idea de que *“Los métodos con los que los estudiantes han de ser introducidos para resolver los problemas han de tener en cuenta lo que las nuevas tecnologías son capaces de hacer”*, le lleva a concluir que no se pueden cambiar los programas curriculares pero que se pueden aprovechar todas las potencialidades que ofrece DERIVE para hacer de él una herramienta capaz de contribuir en la formación de conocimiento en el alumno.

Respecto a la evaluación explica que no se trata de poner exámenes especiales para evaluar unas prácticas con ordenador más o menos ocasionales. Menos todavía de modificar los contenidos de las asignaturas para adaptarlos a las posibilidades del software, al contrario en esta experiencia se plantea valorar las consecuencias de permitir el uso del ordenador en los exámenes, entendidos estos como los exámenes de siempre, los mismos que se hubiesen propuestos si no se contase con el ordenador.

Como conclusión se menciona la elaboración de exámenes donde el alumno plantea el problema pero las cuentas las hace el programa, por tanto hay una subida de nivel por que nos centramos más en los problemas (frente a los ejercicios) y por que la economía de tiempo permite abarcar más materias en el examen.

Como primera consecuencia los resultados académicos mejoran pues hay mayor motivación en el estudiante como

consecuencia de la introducción de la tecnología y como consecuencia del mismo planteamiento de la iniciativa, que lleva a restar importancia a habilidades algebraicas mal adquiridas. La llamada falta de base se ciñe demasiadas veces a una mera deficiencia en esas habilidades que no necesariamente llevan unida una deficiencia en la capacidad de razonar matemáticamente.

Como segunda consecuencia se tiene que el uso del ordenador implica cambios en los contenidos no con ello perdiendo el rigor que las matemáticas requieren. Pero si permitiendo dejar de ser esclavos de las limitaciones del cálculo y trabajando ejemplos realistas que solo con ayuda de un ordenador podrían visualizarse en el menor tiempo posible permitiendo de esta manera el invertir el tiempo disponible en el análisis y comprensión de conceptos.

4. TITULO:CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL POR COMPUTADORA

AUTOR: JOSE HUMBERTO GIRALDO

**LUGAR: DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS-
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES-BOGOTA-
COLOMBIA.
SEMINARIO I**

En este seminario se expone el proyecto piloto de enseñanza de cálculo diferencial con computadoras que se esta desarrollando en la Universidad de los Andes. En la primera fase del proyecto participan cuatro profesores del departamento, estos profesores enseñan aproximadamente en cuatro secciones diferentes de aproximadamente 130 estudiantes cada una. Al principio del semestre cada estudiante recibe un CD que contiene la información del curso y que incluye todas las guías que se usaran durante el semestre. Estas guías tiene un formato especial; después de discutir un determinado concepto, el estudiante esta obligado a resolver determinados problemas relacionados con el tema que se ha explorado.

Además se trabaja para que el estudiante aprenda a encontrar conexión entre la parte algebraica y la parte grafica geométrica.

La evaluación continua del estudiante también se contempla como un componente de la estructura del curso. El estudiante tiene un quiz semanal que se publica en la web. El objetivo es tener al estudiante trabajando todo el tiempo en los conceptos y darle información al profesor sobre como se están asimilando dichos conceptos.

El profesor Giraldo, no obstante, expreso que las computadoras no van a reemplazar a los profesores porque los estudiantes siempre van a querer salir de sus casas para socializarse, alejarse de sus familias e ir a la universidad.

Finalmente algunas reflexiones son:

1. A pesar de lo atractivo y novedosos que resultan estas metodologías, no se puede perder de vista lo que es esencial en un curso de matemáticas, a saber, hacer que el estudiante adquiera una forma de pensar precisa, coherente y exhaustiva, enseñarle de una manera clara los conceptos y los argumentos lógico que los sustentan, darle herramientas metodológicas para solucionar problemas, transmitirle una pasión por el mundo de las matemáticas, hacerle apreciar su elegancia y su utilidad.

2. No cabe duda de que las computadoras con sus cálculos agilísimos y sus estupendas animaciones y sus gráficas, pueden ayudar a cumplir los objetivos mencionados anteriormente, pues permite explicar con mucha claridad y entender con gran facilidad las nociones matemáticas más intrínsecas.

5. TÍTULO: MATEMÁTICAS CON DERIVE EN EL SALÓN DE CLASES

AUTOR: HECTOR AEGUETA VILLAMAR

MARIA JUANA LINARES ALTAMIRANO

**LUGAR: DIRECCIÓN GENERAL DE SERVICIOS DE
CÓMPUTO ACADÉMICO. UNIVERSIDAD
NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO.**

El objetivo de este trabajo es mostrar diversas aplicaciones del programa Derive para PC, en el proceso de enseñanza de las matemáticas, en los niveles de secundaria y medio superior.

Derive es un asistente matemático que permite realizar cálculos numéricos y cálculos simbólicos. El programa puede trabajar con distintos tipos de precisión para los cálculos 3.1416..., 1.41..., 2.71..., etc., entonces puede utilizar la precisión exacta.

Con Derive es posible trabajar una amplia gama de temas matemáticos, como Aritmética de números reales y complejos, Álgebra, Sistemas de Ecuaciones, Funciones, Cálculo Diferencial e Integral, Vectores y Matrices, Graficación en dos y tres dimensiones, en coordenadas cartesianas y polares, etc.

Derive cuenta además con algunas posibilidades de programación con las que el usuario puede definir sus propias funciones, puede trabajar con operadores booleanos y con el operador condicional If, también puede crear funciones recursivas y de iteración, entre otras.

Esto último permite al usuario crear sus propias aplicaciones para resolver una diversidad de problemas. El programa incluye algunos archivos llamados de aplicación de gran utilidad para resolver Ecuaciones Diferenciales, Transformada de Laplace, Integrales Elípticas y para Graficar Curvas y Superficies Paramétricas en tres dimensiones, etc.

Además de su contenido matemático, la gran virtud de Derive es que corre prácticamente en cualquier computadora e inclusive puede correr desde el diskette que lo contenga.

Además DERIVE presenta como anexos ilustraciones de algunos de los documentos que trabajaron en el Taller.

1.1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Durante el tiempo que he enseñado la asignatura de Matemática I he notado algunas dificultades comunes en los alumnos con respecto al tema del cálculo diferencial. Este suceso me ha permitido fijar la atención y reflexionar sobre la idea de trabajar

con algún recurso que me lleve a mejorar mi práctica docente. Así planteo el siguiente problema:

¿En qué medida la aplicación del programa DERIVE contribuye a mejorar el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los alumnos de la asignatura de Matemática I de la Escuela de Ingeniería Industrial y de Sistemas de la Universidad César Vallejo 2006?

1.1.3. JUSTIFICACIÓN

En el desarrollo de nuestra labor como docentes del área de matemática, nos encontramos con grupos de estudiantes que presentan dificultades en su rendimiento académico. El número de desaprobados en la asignatura incrementa conforme el curso se desarrolla y su retiro de la asignatura es una consecuencia que no tarda en aparecer.

Esta situación se debe a diversas causas entre ellas podemos mencionar el empleo de estrategias instruccionales inadecuadas, el desconocimiento por parte de los docentes de los conocimientos previos que tienen los alumnos y un conjunto de factores como lo son lo relacionado con el currículo, el docente, el estudiante, las tareas académicas, el contexto socio cultural y las estrategias tanto instruccionales como de aprendizaje.

Por otro lado la tecnología ha afectado a nuestras vidas de muchas maneras. Es imposible que ella no afecte la educación, ya que después de todo uno de los objetivos de la educación es el de preparar al individuo para que se desenvuelva en la sociedad y la sociedad está imbuida de tecnología.

La complejidad de esta problemática lleva a la necesidad de plantear alternativas que contribuyan a mejorar los procesos de la enseñanza- aprendizaje en tal sentido consideraré el uso de un programa matemático DERIVE.

Así, siendo profesora de la asignatura de Matemática I, inicio un estudio en que planteo la posibilidad de que los estudiantes alcancen un aprendizaje del Cálculo Diferencial más efectivo empleando DERIVE que permita mejorar el resultado del rendimiento de la asignatura de Matemática I y por ende mejorar su calidad educativa.

Normalmente este trabajo de investigación no debe detenerse en la mera descripción de los problemas sino que, como resultado del análisis de su origen, debe desembocar en propuestas, tal como la que planteo, que contribuyan a superarlos o al menos que la mayoría de estudiantes los superen.

1.1.4. HIPÓTESIS

Hipótesis de la Investigación

H_1 : Los estudiantes de la asignatura de Matemática I Sección A aula 412 del semestre 2006 II de Ingeniería Industrial que usan el software DERIVE obtienen un mejor rendimiento académico que los alumnos de la asignatura de Matemática I Sección B aula 413 del semestre 2006 II de Ingeniería de Sistemas que no utilizan esta herramienta informática.

Hipótesis Nula

H_0 : Los estudiantes de la asignatura de Matemática I Sección A aula 412 del semestre 2006 II que usan el software DERIVE de Ingeniería Industrial no obtienen un mejor rendimiento académico que los alumnos de la asignatura de Matemática I Sección B aula 413 del semestre 2006 II de Ingeniería de Sistemas que no utilizan esta herramienta informática.

1.1.5. VARIABLES

Variable Independiente: Uso del programa DERIVE

Variable Dependiente: Rendimiento académico de los alumnos.

Variables Intervinientes: Asistencia a clases, horarios, tipo de contenidos, grado de motivación de los alumnos.

1.1.6. POBLACIÓN

Los alumnos de la asignatura de Matemática I de la Escuela de Ingeniería Industrial y de Sistemas de la Universidad César Vallejo durante el segundo semestre 2006. Son en total 51 alumnos.

Se tomará en cuenta el promedio final al terminar cada ciclo: Semestre 2006 – II.

1.2.OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.

1.2.1. OBJETIVO GENERAL.

Evaluar la eficacia del programa DERIVE como recurso didáctico en el proceso de enseñanza – aprendizaje del Cálculo Diferencial en los alumnos de la asignatura de Matemática I de la Escuela de Ingeniería Industrial y de Sistemas de la Universidad César Vallejo.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

1. Diseñar la propuesta de enseñanza en sus aspectos conceptuales y prácticos.
2. Fomentar en los alumnos las capacidades de observar, discernir, analizar e interpretar.
3. Proponer guías y actividades de aprendizaje que conlleven al alumno al aprendizaje significativo

CAPÍTULO II

FUNDAMENTO TEÓRICO

INTRODUCCIÓN

Iniciamos este capítulo refiriéndonos a sílabo de Matemática I, a continuación abordaremos los contenidos matemáticos necesarios para la investigación, además de la propuesta de trabajar con el programa DERIVE.

2.1 DISEÑO CURRICULAR DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICA I

2.1.1. SÍLABO DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICA I

La asignatura que enseñó en la Universidad Cesar Vallejo, en las Escuelas de Ingeniería de Sistemas e Ingeniería Industrial, es Matemática I.

El sílabo se ha elaborado en base a los temas que indica el plan de estudios enviado por la Facultad de Ingeniería de la Universidad Cesar Vallejo de Trujillo, y es el mismo para ambas escuelas, señalo además que en ambas escuelas tiene como pre-requisito la asignatura de lógico matemática, curso donde se desarrollan temas como Lógica Matemática, Fundamentos de Álgebra, Matrices y Determinantes y Geometría Analítica.

El sílabo de esta asignatura se presenta en Anexo 1, pero a continuación describiré sus contenidos empezando por mencionar que se deben trabajar tres capítulos los cuales son:

1. Funciones
2. Límites y Continuidad
3. Cálculo Diferencial.

El Desarrollo de esta asignatura está orientado a lograr potenciar en el estudiante capacidades propias del área de Matemática como el razonamiento y demostración, la interpretación de gráficos y expresiones simbólicas y la resolución de problemas.

Así como presentar los medios necesarios para la adquisición de ciertas destrezas como: análisis, interpretación y aplicación de fundamentos teóricos.

Finalmente el logro de los objetivos de esta asignatura se verá reflejado, y podrá ser evaluado en la eficiencia que demuestren los alumnos al resolver situaciones reales.

2.2 DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Sabemos que la didáctica de las matemáticas es la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio – o procesos didácticos – de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos que estudian matemáticas¹.

Didáctica de las Matemáticas no es un recetario didáctico, ni un modelo para la enseñanza, sino un intento de transmitir algunas reflexiones, producto de la experiencia y de la lectura de especialistas en el tema.

Tal vez lo que se pretenda lograr es estimular “la sorpresa matemática” en el vínculo con nuestros alumnos.

Esta sorpresa se basa en provocar conceptos, demostraciones elementales, con interés, reflexión, intriga o admiración.

Es responsabilidad del docente proponer una situación adecuada mediante una pregunta que motive las distintas situaciones de

¹ BROUSSEAU, GUY. “Los Diferentes roles del maestro”. Paidós. 1994.

aprendizaje, con conocimientos anteriores; que el alumno deberá acomodar y adecuar a las nuevas situaciones.

Luego modificar el conocimiento como respuesta al medio y no como deseo del maestro, es una necesidad que se convierte en una obligación, es nuestra tarea.

No se pretende en este trabajo abordar toda la problemática (referido en este caso al cálculo diferencial) con la que el profesor se enfrenta en su quehacer diario, ya que ésta es muy compleja y tiene varias aristas, que el docente debe conocer, como: conocimientos y teorías epistemológicas.

Al respecto conocemos que se han desarrollado diferentes teorías como: Registros de representación semiótica de Raymond Duval, teoría de Situaciones Didáctica de Guy Brousseau, Teoría Socio epistemológica y el enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Y para este trabajo de investigación se ha considerado tomar como referencia la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la Taxonomía de Raymond Duval para la parte de la evaluación.

2.2.1 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA. RAYMOND DUVAL

Raymond Duval se ha interesado por los problemas de manipulación de representantes dentro de un sistema matemático de signos y sobre los problemas de conversión de representaciones entre dos o más sistemas de un mismo objeto matemático, generando una nueva noción que es la de ***Registro de representación***.

Un registro: es un signo en el sentido más amplio de la palabra: trazos, íconos, símbolos, etc.

Los registros son medios de expresión y de representación caracterizados precisamente por sus respectivos sistemas semióticos.

El aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de las actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de

expresión y de representación distinta a los del lenguaje natural o de las imágenes.

Bajo estas ideas se puede considerar el hecho de que no puede haber comprensión matemática si no se distingue un objeto de su representación y es que no podemos confundir los objetos matemáticos como lo son, por ejemplo, los números, las funciones, las rectas con sus representaciones es decir las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazos de las figuras. Pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy distintas y debemos tener claro como docentes que toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida en la comprensión.

En esta teoría se señala, primer lugar, que cuando hablamos de representaciones es necesario considerar los siguientes aspectos:

1. El sistema por el cual se produce la representación.- Cualquier representación se produce a través de un sistema en particular. El contenido de la representación de un objeto cambia de acuerdo con el sistema de representación que se utiliza para su producción. El pensamiento humano requiere la movilización de varios sistemas de representación de producción y su coordinación.
2. La relación entre la representación y el objeto representado.
3. La posibilidad de un acceso al objeto representado, aparte de la representación semiótica.
4. La razón por la que el uso de la representación es necesaria.

El tema de derivadas se puede aplicar como un ejemplo de esta teoría por cuanto los alumnos tienen siempre problemas para pasar de una forma de representación a otra.

2.2.2 TAXONOMIA DE BLOOM Y LOS NIVELES EN QUE SE PUEDEN CLASIFICAR LOS OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

En el propósito de mejorar la calidad y eficiencias de la educación debemos buscar que los alumnos, elementos esenciales de nuestra tarea, logren los más altos niveles de aprendizaje. Así con ayuda de la taxonomía de Bloom especificaré objetivos, seleccionaré los contenidos y diseñaré los instrumentos de evaluación.

En el dominio cognoscitivo en lugar de contentarnos con la memorización de conocimientos, primer escalón, debemos hacer que logren el nivel más alto. Dichos niveles son los siguientes:

1. CONOCIMIENTO

Se refiere a la capacidad de recordar hechos específicos y universales, métodos y procesos, esquemas, estructuras o marcos de referencia sin elaboración de ninguna especie, puesto que cualquier cambio ya implica un proceso de nivel superior.

Requiere que el alumno repita algún dato, teoría o principio en su forma original.

- Terminología (palabras, términos técnicos, etc.)
- Hechos específicos (fechas, partes de algo, acontecimientos, etc.)
- Convencionalismos (formas de tratar ideas dentro de un campo de estudio, fórmulas)
- Corrientes y sucesiones (tendencias y secuencias)
- Clasificaciones y categorías (clases, grupos, divisiones, etc.) criterios (para juzgar o comprobar hechos, principios, opiniones y tipos de conducta)
- Metodología (métodos de investigación, técnicas y procedimientos).
- Principios y generalizaciones (abstracciones particulares para explicar, describir, predecir o determinar acciones)
- Teorías y estructuras (evocación de teorías, interrelaciones de los principios y generalizaciones)

Verbos que se usan con frecuencia para redactar objetivos de este nivel:

Definir - Señalar – Describir - Nombrar – Identificar – Narrar – Indicar – Mencionar.

2. COMPRENSIÓN

Se refiere a la capacidad de comprender o aprehender; en donde el estudiante sabe qué se le está comunicando y hace uso de los materiales o ideas que se le presentan, sin tener que relacionarlos con otros materiales o percibir la totalidad de sus implicaciones. El material requiere de un proceso de transferencia y

generalización, lo que demanda una mayor capacidad de pensamiento abstracto.

Requiere que el alumno explique las relaciones entre los datos o los principios que rigen las clasificaciones, dimensiones o arreglos en una determinada materia, conocimiento de los criterios fundamentales que rigen la evaluación de hechos o principios, y conocimientos de la metodología, principios y generalizaciones.

- Traducción (parafrasear; habilidad para comprender afirmaciones no literales como simbolismos, metáforas, traducir material matemático, simbólico, etc.)
- Interpretación (explicación o resumen; implica reordenamiento o nuevos arreglos de puntos de vista)
- Extrapolación (implicaciones, consecuencias, corolarios, efectos, predicción, etc.)

Verbos que se usan con frecuencia para redactar objetivos de este nivel:

Traducir – Resumir – Expresar – Parafrasear – Discutir.

3. APLICACIÓN

Se guía por los mismos principios de la comprensión y la única diferencia perceptible es la cantidad de elementos novedosos en la tarea por realizar. Requiere el uso de abstracciones en situaciones particulares y concretas. Pueden presentarse en forma de ideas generales, reglas de procedimiento o métodos generalizados y pueden ser también principios, ideas y teorías que deben recordarse de memoria y aplicarse.

- Solución de problemas en situaciones particulares y concretas (utilización de abstracciones en tipos de conducta y tipos de problemas)

Verbos que se usan con frecuencia para redactar objetivos de este nivel:

Demostrar- Practicar – Emplear – Solucionar – Aplicar – Operar – Usar

4. ANÁLISIS

Consiste en descomponer un problema dado en sus partes y descubrir las relaciones existentes entre ellas. En general, la eventual solución se desprende de las relaciones que se descubren

entre los elementos constituyentes. Implica el fraccionamiento de una comunicación en sus elementos constitutivos de tal modo, que aparezca claramente la jerarquía relativa de las ideas y se exprese explícitamente la relación existente entre éstas.

- Análisis de elementos (reconocer supuestos no expresados, distinguir entre hechos e hipótesis)
- Identificación de relaciones entre los elementos (conexiones e interacciones entre elementos, comprobación de la consistencia de las hipótesis con informaciones y suposiciones dadas)
- Reconocimiento de los principios de organización de la situación problemática (estructura explícita e implícita; reconocimiento de formas y modelos, técnicas generales utilizadas, etc.)
- Identificación de conclusiones y fundamentación de enunciados.

Verbos que se usan con frecuencia para redactar objetivos de este nivel:

Diferenciar- Distinguir- Discriminar- Contrastar- Criticar- Analizar- Inferir.

5. SÍNTESIS

Es el proceso de trabajar con fragmentos, partes, elementos, organizarlos, ordenarlos y combinarlos para formar un todo, un esquema o estructura que antes no estaba presente de manera clara. Requiere la reunión de los elementos y las partes para formar un todo.

- Elaboración de un plan o conjunto de actos planeados (habilidad para proponer formas de comprobar las hipótesis)
- Desarrollo de conjuntos de relaciones para clasificar o explicar datos
- Deducción de proposiciones y relaciones (de un grupo de proposiciones básicas o de representaciones simbólicas)
- Construcción de un modelo o estructura
- Reordenación de las partes en una secuencia lógica

Verbos que se usan con frecuencia para redactar objetivos de este nivel:

Organizar- Reconstruir- Proponer- Reordenar.

6. EVALUACIÓN

Se refiere a la capacidad para evaluar; se mide a través de los procesos de análisis y síntesis. Requiere formular juicios sobre el valor de materiales y métodos, de acuerdo con determinados propósitos. Incluye los juicios cuantitativos y cualitativos de acuerdo a los criterios que se sugieran (los cuales son asignados).

- Juicios en función de evidencia interna (de exactitud lógica, consistencia o criterio interno)
- Juicios en función de criterios externos (criterios seleccionados; comparación de teorías, comparación de un trabajo con respeto a normas, etc.)

Verbos que se usan con frecuencia para redactar objetivos de este nivel:

Juzgar- Evaluar- Apreciar – Revisar- Corregir- Seleccionar – Justificar- Valoriza.

2.3 DESARROLLO DE LA PARTE CONCEPTUAL DE LA DERIVADA

En este apartado desarrollaremos los contenidos matemáticos que se presentan en el silabo de Matemática I y que son parte de la investigación, para lo cual hemos revisado bibliografía de autores nacionales y extranjeros especialistas en el tema del cálculo diferencial.

1. LA IDEA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si observamos a nuestro alrededor podremos ver que nuestro mundo se caracteriza por cambios continuos de allí la inquietud de desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar estos cambios. Para Wenzelburger (1993) es justamente este el propósito del Cálculo Diferencial y presenta el concepto de razón de cambio como fundamental.

Veamos a continuación dos definiciones del término Razón de Cambio media o Promedio:

DEFINICIÓN 1:

Razón Promedio de Cambio. Sean $x_o = x(t_o)$ y $y_o = y(t_o)$; x_o y y_o son valores de las magnitudes físicas en algún instante t_o . Supongamos que x_o cambia en la cantidad Δx . El cambio correspondiente Δy en y_o es:

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$$

Y la razón promedio de cambio de y con respecto a x es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

(Hasser, 1976, 401)

DEFINICIÓN 2:

Razón de Cambio Media. Suponga que y es una función de x , $y = f(x)$, correspondiendo a un cambio de x a $x + \Delta x$, la variable y cambia en una cantidad $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Así, el cociente de diferencias:

$$\frac{\text{Cambio de } x}{\text{Cambio de } y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Representa la razón de cambio de y con respecto a x .

(Hoffmann, 1985, 82)

Ambas definiciones muestran la misma idea pero la definición que presenta Hasser (1976) es muy cuidadosa al determinar las variables que intervienen en ella, así da lugar a pensar en ejemplos inmediatos de aplicación como por ejemplo la relación entre la cantidad demandada de un bien Q_d y su precio unitario, por período de tiempo a través de la función $Q_d = f(p)$.

Respecto a la segunda definición es más directa, no menciona que x, y, t sean magnitudes físicas y analiza directamente los cambios o variaciones.

Wenzelburger (1993, 4) nos dice: *“Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar estos procesos. Siempre que dos magnitudes (variables) están conectadas mediante una relación funcional (función), se puede estudiar el cambio relativo de una de las magnitudes con respecto a la otra”*.

Como ejemplos de lo anterior podemos citar a la velocidad que es la razón (el cociente) entre una distancia y un tiempo, y describe el cambio en la posición de un cuerpo con respecto al tiempo transcurrido.

Ciertas razones de cambio tienen nombres especiales, por ejemplo:

- La velocidad es solo uno de las muchas razones de cambio que serán importantes en este capítulo, es la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo.
- Densidad de un alambre es igual a la razón de cambio de la masa respecto la distancia.
- Ingreso Marginal es igual a la razón de cambio del ingreso respecto número de artículo producidos.
- Corriente es igual a la razón de cambio de la Carga eléctrica respecto al tiempo.

Así mismo Wenzelburger (1993) menciona dos aspectos importantes al estudiar el Cálculo Diferencial los cuales son:

- 1.- La continuidad, que significa que la relación es completa no tiene saltos bruscos ni interrupciones y que gráficamente se expresa como segmentos de líneas o curvas y no como una colección de puntos aislados.
- 2.- La determinación de la pendiente.

Todos tenemos nociones intuitivas acerca de pendientes y cómo comparar las inclinaciones de varias pendientes. Por ejemplo sabemos que cuesta más trabajo subir una montaña más empinada (pendiente grande) o que el agua de un río corre más rápido si este tiene mucha pendiente. Lo que hay que explorar entre otras cosas es la manera en la cual la medida de una pendiente de una curva está relacionada con el concepto de razón de cambio.

2. LA RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES DE CAMBIO Y PENDIENTES DE RECTAS

DEFINICIÓN 3:

La pendiente de una recta en un sistema de coordenadas (x, y) es una medida de la razón de cambio de la variable y con respecto al cambio de la variable x .
(Wenzelburger, 1993, 9)

Los dos ejemplos que estudiaremos a continuación tiene por objetivo reforzar la definición dada así como dar el primer paso en el intento por comprobar si los alumnos pueden comprender un tipo de registro semiótico como lo es el lenguaje escrito y luego trabajar lo concerniente a pasar de un registro a otro como lo sería el paso de lo enunciado a la grafica.

Ejemplo 1:

“Suponga que sabemos que el precio de un artículo en un primer mes era de 600 soles y en el tercer mes subió a 1200 soles.

<i>MES</i>	<i>PRECIO</i>
<i>1</i>	<i>600 Soles</i>
<i>3</i>	<i>1200 Soles</i>

Tabla N° 1

Podemos graficar estos datos Fig.1 y suponer que el incremento del precio ocurrió como en la Fig.2

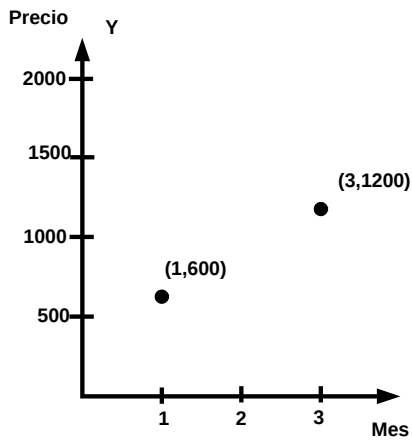


Fig.1

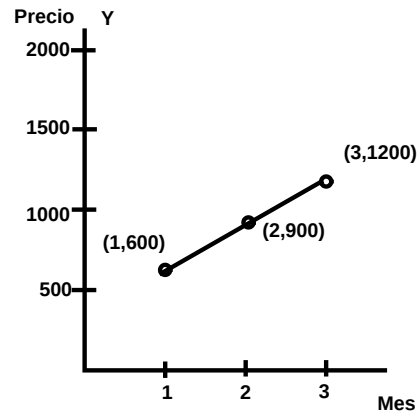


Fig.2

Gráfica del precio dado en
soles en el primer y tercer
mes.

Gráfica del supuesto crecimiento
lineal de precio entre el primer y
tercer mes.

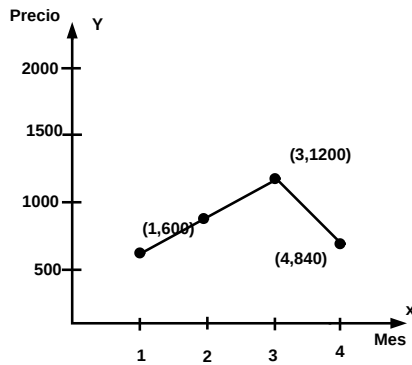


Fig.3

Gráfico de la situación anterior con un descuento del 30% en
el precio.

La razón de cambio del precio se define de la siguiente manera: se calcula el cambio en dirección vertical y se divide por el cambio en dirección horizontal. Así la razón de cambio para los meses uno y tres es:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{600}{2} = 300 \left[\frac{\text{soles}}{\text{mes}} \right] \quad \dots (1)$$

Este valor numérico caracteriza el incremento del precio. En el cuarto mes se ofreció el producto con un 30% de descuento como promoción (Fig.3). La razón de cambio en este mes es:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{840 - 1200}{1} = -360 \left[\frac{\text{soles}}{\text{mes}} \right] \quad \dots (2)$$

Ahora consideremos un valor intermedio

$$\text{Razón de cambio} = \frac{900 - 600}{2 - 1} = \frac{300}{1} = 300 \left[\frac{\text{soles}}{\text{mes}} \right] \quad \dots (3)$$

Resumimos lo observado en (1), (2) y (3):

Una razón de cambio característica para una gráfica en forma de segmentos de línea recta sólo cambia si hay variación en la pendiente de ésta. Si crece la gráfica la razón de cambio y la pendiente son positivas. Si decrece la gráfica, la razón de cambio y la pendiente son negativas. Para calcular la razón de cambio entre dos puntos de una gráfica se sigue el trazo de la curva y se ven los valores, primero el punto de la abscisa (valor en el eje horizontal) más grande y después el punto en la abscisa más pequeña. Después se forma el cociente entre la diferencia vertical y la horizontal.”

3. RAZONES DE CAMBIO ENTRE DOS PUNTOS DE UNA CURVA

La diferencia entre una relación lineal de una no lineal radica en que la razón de cambio para una relación no lineal varía a lo largo de la curva mientras que en una relación lineal es constante para todos los puntos de la función.

Sobre el ejemplo anterior, Wenzelburger (1993) nos dice: “es factible que los precios no subieran siguiendo una relación lineal; por ejemplo ver las figuras 4 y 5

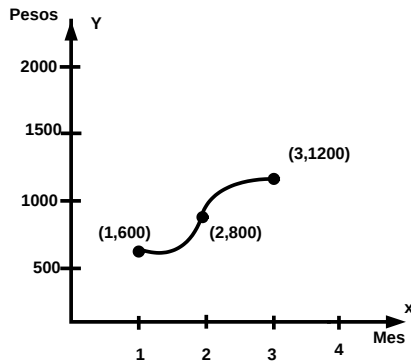


Fig.4

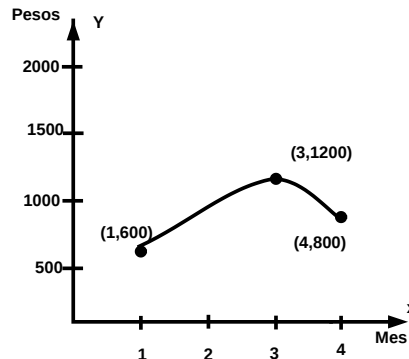


Fig.5

Las figuras 4 y 5 corresponden al ejemplo1 donde se supone un comportamiento no lineal entre el tiempo y el precio.

De acuerdo a la figura 4 el precio al principio del segundo mes parece ser de 800 soles.

Como la razón de cambio entre el precio al final del primer mes y del segundo mes (de 600 soles a 800 soles) tenemos

$$\text{Razón de cambio} = \frac{800 - 600}{1} = 200 \left[\frac{\text{soles}}{\text{mes}} \right] \quad \dots (1)$$

Ahora calculamos la razón de cambio para el tercer mes:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{1200 - 800}{3 - 2} = 400 \left[\frac{\text{soles}}{\text{mes}} \right] \quad \dots (2)$$

El valor de la razón de cambio en 1 y 2 es diferente. Si repetimos el procedimiento para otros pares de puntos, vamos a obtener muchos valores diferentes.

La diferencia entre una curva y una línea recta es la variación continua de la razón de cambio a lo largo de la curva.

Si suponemos ahora que los precios cambiaron de acuerdo a la figura 5, podemos observar en la tabla las razones de cambio calculadas para intervalos de 1 mes.

	2do Mes	3er Mes	4to Mes
Razón de cambio en $\left[\frac{\text{pesos}}{\text{mes}} \right]$	$\frac{100 - 600}{1}$ 400	$\frac{1200 - 1000}{1}$ 200	$\frac{840 - 1200}{1}$ -360

Tabla N° 2

Estos valores describen a grandes rasgos el comportamiento de la curva **precio en función del tiempo**: En el segundo mes el precio sube más rápido que en el tercer mes. Si calculamos la razón de cambio total del segundo al cuarto mes:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{840 - 600}{3} = \frac{240}{3} = 80 \left[\frac{\text{soles}}{\text{mes}} \right] \quad \dots (3)$$

Obtenemos una información equivocada, un valor positivo pequeño que no refleja la variación real del precio. Por eso concluimos que es necesario calcular razones de cambio para intervalos pequeños debido a que intervalos grandes no dan valores representativos para la descripción del cambio de una función a lo largo de la curva”.

Observaciones sobre la definición:

- La letra griega delta (Δ) representa la diferencia o el cambio.
- El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ también se llama razón de cambio promedio y representa gráficamente la pendiente de una recta.
- El adjetivo promedio es nombre popular pero inexacto, porque en este contexto promedio significa aproximado.
- La razón de cambio es suficiente para describir funciones lineales mas no para gráficas curvas.

4. LA TRANSFORMACIÓN DE LA RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO A LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA

Al calcular razones promedio de cambio, cada una de ellas no representa la razón de cambio al principio o al final de un intervalo Δx , sino es un valor promedio que se toma por constante en todo el intervalo.

Siendo así es necesario desarrollar un método que permita calcular la razón de cambio de la función original prácticamente en cada instante; es decir, para cada valor de x queremos conocer la razón de cambio $f'(x)$. A esta razón de cambio se llama la razón de **cambio instantánea**. Es importante mencionar que una razón de cambio instantánea es mayormente conocida con **tasa de cambio**. Wenzelburger (1993) nos dice:

Para: “la forma de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Podría proponerse que los puntos x_2 y x_1 coincidan; lo cual implicaría tomar $x_2 - x_1 = 0$. Entonces la razón de cambio sería instantánea puesto que se trataría de un punto.

Es obvio que este intento de solución fracasa: Ya que para $\Delta x = 0$ no está definida la razón de cambio. Por lo cual aceptaremos el siguiente principio fundamental para la razón de cambio instantánea:

El valor de $x_2 - x_1$, será siempre un número que pueda hacerse más pequeño que un número muy pequeño, arbitrario pero fijo. Debido a que un número de esta naturaleza no es igual a cero, no estamos considerando un intervalo de longitud cero sino que Δx se hace cada vez más pequeño. Esto se expresa como $\Delta x \rightarrow 0$.

El valor numérico al cual se aproxima $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ es la razón de cambio instantánea”.

Los problemas del 1 al 4, propuestos a continuación tienen por finalidad reforzar el conocimiento del alumno sobre razón de cambio promedio e instantánea, pendiente además interiorizar la relación que existe entre ambos conceptos, así mismo poner en práctica el trabajo de cambio de registros semióticos pues se presentan problemas que

hacen uso de los tres tipos de registro y deberán ser convertidos de uno a otro registro para mejorar su comprensión y llegar a una solución.

Trabajo Práctico N°1: Razón de cambio Promedio e Instantánea

Problema 1²:

Una enfermera controla la temperatura a un paciente y registra los resultados:

Horas	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00	20:00	21:00	22:00	23:00
Temp.	36	37	37.2	37.8	37.9	40	40	40	37.5

Tabla N°3

Tareas y Preguntas

- ¿Cuál es el cambio de temperatura entre las 16:00 y las 17:00 horas, las 19:00 y las 22:00 y las 22:00 horas y las 23:00?
- Trazar la curva de fiebre del paciente.
- Calcular la razón de cambio entre las 15:00 y las 23:00 horas para intervalos de una hora.
- Graficar los valores obtenidos en c.
- Completar la tabla siguiente:

Temperatura	Gráfica	Razón de Cambio
Sube	Sube	positiva
Queda igual		
Baja		

Tabla N° 4

² El problema 1 se ha tomado del libro de Wenzelburger, Didáctica del Cálculo Diferencial, 1993, 36

Problema 2³:

Peso Promedio de un bebé.- La siguiente gráfica muestra el peso de un bebé promedio desde el instante del nacimiento ($t = 0$) hasta la edad de dos años ($t = 24$). Calcule las pendientes de las rectas tangentes respectivas para estimar la razón promedio de cambio del peso del bebé promedio cuando $t = 3$ y cuando $t = 18$. ¿Cuál es la razón promedio de cambio en el peso de un bebé promedio durante el primer año de vida?

Gráfico del peso promedio de un bebé desde su nacimiento hasta los dos años.

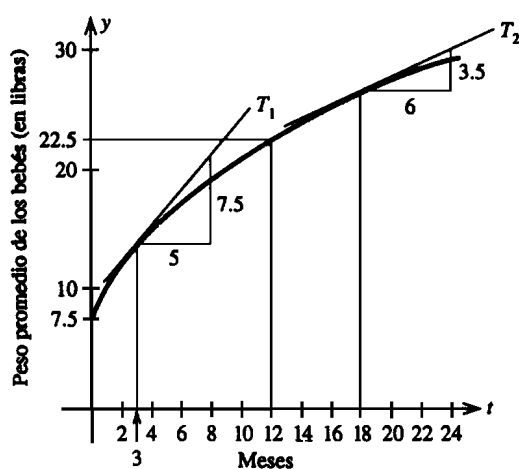


Fig.6

Fuente: Tomado de Thomson, Matemáticas para Administración y Economía, 1998, 515

Problema 3⁴:

Selvicultura.- La siguiente gráfica muestra el volumen de madera producida en un bosque con una única especie. En este caso, $f(t)$ se

³ El problema 2 se ha tomado del libro de Thomson, Matemáticas para Administración y Economía, 1998, Pág. 515.

⁴ El problema 3 se ha tomado del libro de Thomson, Matemáticas para Administración y Economía, 1998, Pág. 515.

mide en metros cúbicos por hectáreas y t en años. Calcule las pendientes de las rectas tangentes respectivas y estime la razón con que el incremento de madera está cambiando al inicio del décimo año y al inicio del año 30.

Gráfico del valor de la madera producida en m^3 en función del tiempo.

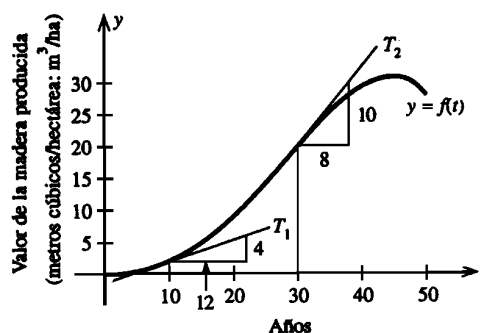


Fig. 7

Fuente: Tomado de Thomson, Matemáticas para Administración y Economía, 1998, 515

Problema 4⁵:

Patrones de observación de la televisión.- La siguiente gráfica, basada en datos de la compañía A.C. Nielsen, muestra el porcentaje de habitantes de Estados Unidos que ven televisión durante un período de 24 horas en un día hábil ($t = 0$ corresponde a las 6 a.m.). Calcule las pendientes de las rectas tangentes respectivas y estime la razón de cambio del porcentaje de habitantes que ven televisión entre las 4p.m. y las 11p.m.

⁵ El problema 4 se ha tomado del libro de Thomson, Matemáticas para Administración y Economía, 1998, Pág. 516.

Gráfico del porcentaje de habitantes en Estados Unidos que ven televisión durante las 24 horas de un día.

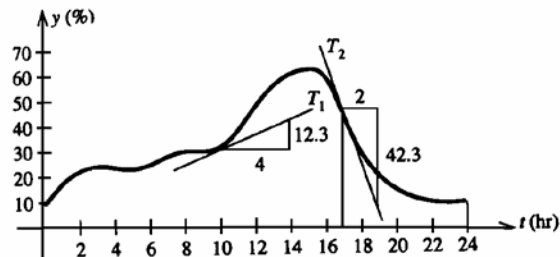


Fig.8

Fuente: Tomado de Thompson, Matemáticas para Administración y Economía, 1998, 516

5. ALGO SOBRE HISTORIA DE LA DERIVADA

Hasta este momento hemos hablado sobre razones de cambio y como aproximamos una razón de cambio promedio a una razón de cambio instantánea. Ahora conoceremos como dos problemas trabajados en épocas de la historia diferentes nos llevaron a la misma solución: **La derivada**. En esta parte hablaremos de razones de cambio e introduciré las nociones de límites para su resolución.

5.1 DOS PROBLEMA CON UN MISMO TEMA

Los problemas que trataremos a continuación corresponden a épocas diferentes, el primer problema es muy antiguo, se remota a la época del gran científico griego Arquímedes (287-212 a.C.). Se trata del problema de la pendiente de la recta tangente.

El segundo problema es más reciente. Creció con los intentos de Kepler, Galileo, Newton y otros para describir la velocidad de un cuerpo en movimiento. Es el problema de la velocidad instantánea.

Los dos problemas, uno geométrico y el otro mecánico, parecen no estar muy relacionados. En este caso las apariencias engañan. Los dos problemas son gemelos idénticos.

A. LA RECTA TANGENTE

La descripción de este problema ha sido tomada de Purcell (2003, 99): “Sea P un punto de la curva y sea Q un punto móvil cercano a P en esa curva. Considere la recta que pasa por P y Q , llamada recta secante. La recta tangente en P es la posición límite (si esta existe) de la recta secante cuando Q se mueve hacia P a lo largo de la curva.

Gráfica de las rectas secantes y tangentes a una curva desde el punto Q hasta el punto P

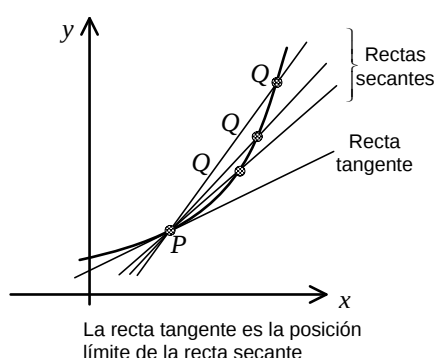


Fig.9

Suponga que la curva es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Entonces P tiene coordenadas $(c, f(c))$, un punto cercano a Q tiene coordenadas $(c + h, f(c + h))$ y la recta secante de P a Q tiene pendiente m_{sec} dada por:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Como el objetivo es hallar la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto P , entonces intentaremos aproximar el punto Q a P para ello utilizaremos el concepto de límite con el fin de determinar la pendiente de la recta tangente”:

Gráfico de las posiciones de una recta secante a una curva en los puntos P y Q y su aproximación a la recta tangente en P

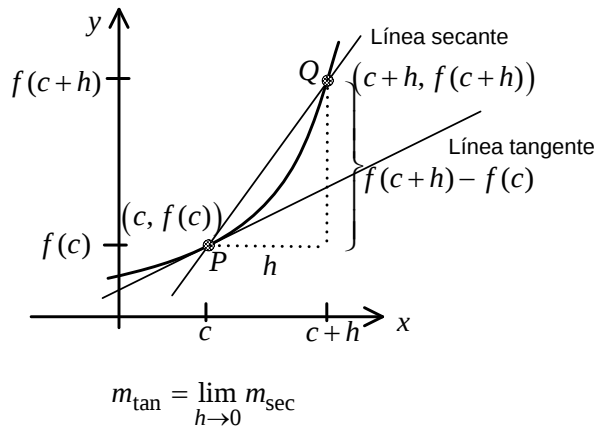


Fig.10

DEFINICIÓN 4:

Recta Tangente

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$ es aquella recta que pasa por P con pendiente:

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

(Purcell, 2003, 101)

A continuación veremos un ejemplo que tiene por objetivo que el alumno se familiarice con la definición, la aplique y compruebe que es funcional.

Ejemplo2:

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = (x + 3)^2 - 1$ en el punto $(2, 24)$.

Solución

Encontraremos primero la pendiente de la recta tangente a la curva, la cual estará

Dada por:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(c+h+3)^2 - 1 - ((c+3)^2 - 1)}{h}$$

$$\frac{(c+3)^2 + 2(c+3)h + h^2 - 1 - (c+3)^2 + 1}{h}$$

$$\frac{2(c+3)h + h^2}{h}$$

$$2(c+3) + h$$

Luego aplicando límites tendremos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2(c+3) + h = 2(c+3)$$

En el punto 2 la pendiente es $m = 10$ finalmente la ecuación de la recta en $(2, 24)$ es $y = 10(x - 2) + 24$ ó $y = 10x + 4$

B. VELOCIDAD PROMEDIO Y VELOCIDAD INSTANTÁNEA

En un contexto referido a la física, se propone la siguiente situación, con la finalidad de trabajar una solución y de comprobar que ella tiene mucho en común la solución del problema de la recta tangente:

Si viajamos de una ciudad a otra que está a 80 km. En 2 horas, nuestra velocidad promedio es de 40 Km por hora.

Determinamos una velocidad promedio como la distancia de la primera posición a la segunda posición dividida entre el tiempo empleado.

Pero durante el viaje la lectura del velocímetro con frecuencia fue diferente de 40. Al principio registró 0; a veces hasta 57, al final regresó a 0 otra vez. ¿Qué es lo que mide el velocímetro? Ciertamente no indica la velocidad promedio.

Purcell (2003, 101-103) “*Considere el ejemplo más preciso de un objeto P que cae en el vacío.*

El experimento muestra que si inició desde el reposo, P cae $16t^2$ pies en t segundos. Por tanto cae 16 pies en el primer segundo, 64 pies en el 2do segundo. Observemos el diagrama del tiempo empleado y la gráfica de la relación tiempo/espacio recorrido.

Gráfica de la Distancia recorrida por el objeto en función del tiempo.

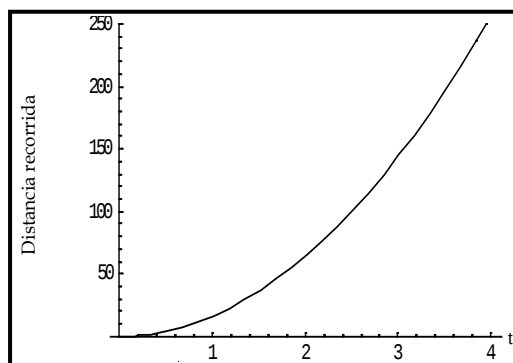


Fig.11

Ahora analicemos la velocidad promedio en algunos intervalos:

$$\begin{aligned}
t = 0 \rightarrow t = 1 & \quad v_{prom} = \frac{16 - 0}{1 - 0} = 16 p/s \\
t = 1 \rightarrow t = 2 & \quad v_{prom} = \frac{64 - 16}{2 - 1} = 48 p/s \\
t = 1 \rightarrow t = 1.5 & \quad v_{prom} = \frac{16(1.5)^2 - 16}{1.5 - 1} = 40 p/s \\
t = 1 \rightarrow t = 1.1 & \quad v_{prom} = \frac{16(1.1)^2 - 16}{1.1 - 1} = 33.6 p/s \\
t = 1 \rightarrow t = 1.01 & \quad v_{prom} = \frac{16(1.01)^2 - 16}{1.01 - 1} = 32.16 p/s
\end{aligned}$$

Lo que hemos hecho es calcular la velocidad promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños, cada uno iniciando en $t = 1$. Entre más breve es el intervalo de tiempo, mejor aproximamos la velocidad instantánea en $t = 1$.

Seamos más precisos. Suponga que un objeto P se mueve a lo largo de un eje coordenado de modo que su posición en el instante t está dado por $S = f(t)$.

En el instante c el objeto está en $f(c)$, en el instante cercano $c + h$, está en $f(c + h)$. Así la velocidad promedio en este intervalo es:

$$v_{prom} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Ahora podemos definir la velocidad instantánea.

DEFINICIÓN 5:

Velocidad Instantánea.-Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición $S = f(t)$ entonces su velocidad instantánea en el instante c es:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} v_{prom} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Siempre que el límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

(Edwin Purcell.2003)

En el caso donde $f(t) = 16t^2$ pies, la velocidad instantánea en $t = 1$ es:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} v_{prom} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16(1+h)^2 - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 32 + 16h = 32$$

“Ahora podemos ver porqué llamamos a la pendiente de la recta tangente y a la velocidad instantánea gemelos idénticos”.

Este ejemplo tiene por objetivo que el alumno vaya haciendo, al mismo tiempo que resuelve los apartados de esta pregunta, una verificación de la teoría; por cuando al ir hallando la velocidad promedio en un intervalo considerablemente grande como lo es de 2 a 3 y luego pase a calcular una velocidad promedio en un intervalo lo suficientemente pequeño como lo es de 2 a 2.003 y finalmente calcule la velocidad instantánea en 2, notarán como se aproxima una variación una otra hasta llegar a la variación en un punto.

Ejemplo 3:

Un objeto viaja a lo largo de una recta de modo que su posición S es $S = t^2 + 1$ metros después de t segundos.

- ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 3$?
- ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 2.003$?
- ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 2 + h$?
- Encuentre la velocidad instantánea en $t = 2$.

Solución:

La velocidad promedio estará dada por: $v_{prom} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

- a) La velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 3$ será

$$v_{prom} = \frac{(3^2 + 1) - (2^2 + 1)}{3 - 2} = \frac{10 - 5}{1} = 5 \text{ m/s}$$

- b) La velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 2.003$ será

$$v_{prom} = \frac{(2.003^2 + 1) - (2^2 + 1)}{2.003 - 2} = \frac{5.012009 - 5}{0.003} = 4.003 \text{ m/s}$$

c) La velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 2 + h$ será

$$v_{prom} = \frac{\left((2+h)^2 + 1\right) - (2^2 + 1)}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h \text{ m/s}$$

d) La velocidad instantánea en $t = 2$ será

$$v_{prom} = \frac{\left((2+h)^2 + 1\right) - (2^2 + 1)}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h \text{ m/s} \quad \text{luego en } t = 2 \text{ es } 6,$$

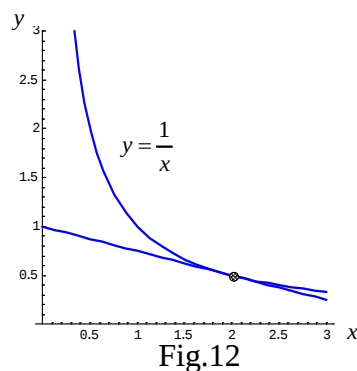
Los problemas propuestos en este apartado tienen un objetivo similar al planteado en el ejemplo anterior, es decir contrastar en la práctica lo que en la teoría se describe, a la vez potenciar su habilidad para el cambio de registros, ya que como se puede apreciar en los enunciados se piden encontrar ecuaciones dadas algunas gráficas y datos, elaborar gráficas dadas algunas fórmulas, interpretar información presentada en ecuaciones, gráficas referidos a casos de aplicación en áreas como física y biología.

Trabajo Práctico N°2: Recta Tangente y Velocidad Instantánea⁶

Ejercicio 1:

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto $(2, 1/2)$.

Gráfico de la función: $f(x) = \frac{1}{x}$ y su recta tangente en el punto $(2, 1/2)$



⁶ Los ejercicios se han tomado del libro de Purcell, Cálculo Diferencial, 2003

Ejercicio 2:

Considere $y = x^3 - 1$

- a) Haga un bosquejo de su gráfica tan detallado como sea posible.
- b) Dibuje la recta tangente en (2,7)
- c) Calcule la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos (2,7) y $(2.01, (2.01)^3 - 1)$
- d) Utilizando el proceso de límite encuentre la pendiente de la recta tangente en (2,7).

Ejercicio 3:

Encuentre las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 1$ en los puntos de abscisas -2, -1, 0, 1, 2.

Ejercicio 4:

Haga un bosquejo de la gráfica de $y = \frac{1}{x+1}$ luego encuentre la ecuación de la recta tangente en (1, 1/2).

Ejercicio 5:

Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{1}{x-1}$ en (0,-1).

Ejercicio 6:

Un experimento sugiere que un cuerpo que cae descenderá aproximadamente $16t^2$ metros en t segundos.

- a) ¿Cuánto caerá entre $t = 0$ y $t = 1$?
- b) ¿Cuánto caerá entre $t = 1$ y $t = 2$?
- c) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 3$?
- d) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo $3 \leq t \leq 3.01$?
- e) Encuentre la velocidad instantánea en $t = 3$.

Ejercicio 7:

Un objeto viaja a lo largo de un eje coordenado de modo que su distancia dirigida, medida desde el origen, después de t segundos es $\sqrt{2t+1}$ metros

- a) Encuentre la velocidad instantánea en $t = 2$.

b) ¿Cuándo alcanzará una velocidad de 1/2 pies por segundo?

Ejercicio 8:

Si una partícula se mueve a lo largo de un eje coordenado de modo que su distancia dirigida, medida desde el origen, después de t segundos es $(-t^2 + 4t)$ metros ¿Cuándo la partícula está momentáneamente detenida? Es decir en ¿qué momento su velocidad es cero?

Ejercicio 9:

Cierto cultivo de bacterias crece de modo que tiene una masa de $\left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)$ gramos después de t horas.

- a) ¿Cuánto crecerá durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$?
- b) ¿Cuál será la tasa promedio de crecimiento durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$?
- c) ¿Cuál fue la tasa instantánea de crecimiento en $t = 2$?

6. LA DERIVADA

Revisemos ahora algunas definiciones según los siguientes autores:

DEFINICIÓN 6:

Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto $x = x_0$, es decir, si existe el

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se dice que para el valor dado $x = x_0$, la función es derivable o, lo que es lo mismo, tiene derivada en dicho punto.

Si la función tiene derivada en cada punto de un intervalo (a, b) , se dice que es derivable en dicho intervalo.

(N. Piskunov, 1973, 68)

DEFINICIÓN 7:

La función f es derivable en a si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ Existe.}$$

En este caso el límite se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre de **derivada de f en a** . (Decimos también que f es **derivable** si f es derivable en a para todo a del dominio de f .)

(Spivak, 1967, 201)

DEFINICIÓN 8:

La derivada de una función f es otra función f' (léase “f prima”) cuyo valor en cualquier número c es

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Siempre que este límite exista y no sea ∞ o $-\infty$

(Purcell, 2003, 107)

Como podemos observar la definición 6 trabaja con la notación delta a la cual los alumnos se encuentran familiarizados desde el concepto de razón de cambio, mientras que en las otras dos definiciones se trabaja con una letra h la cual reemplaza al Δx . La definición 8 así como la 7 muestran la idea de designar con el término de **derivable en un punto** a la función cuando esta tenga derivada en dicho punto y de **derivable** cuando la derivada exista en cada punto de su dominio. En cuanto a la definición 8 presenta a la derivada como una función f' a la que lee como “f prima”.

Uniendo las tres definiciones anteriores podemos presentar la siguiente:

Derivada de f :

La derivada de una función f en un punto c es otra función a la que llamaremos “ f prima” y denotaremos por f' siempre que se cumpla:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ Existe.}$$

En este caso el límite se designa por $f'(c)$ y recibe el nombre de **derivada de f en c** .

Decimos también que f es **derivable** si f es derivable en c para todo c del dominio de f .

Veamos los siguientes ejemplos, los cuales pretenden familiarizar a los alumnos con la definición de derivada y a manera de repaso recordar los algoritmos empleados en el cálculo de límites, como por ejemplo el proceso de racionalización.

Ejemplo 4:

Sea $f(x) = 12x - 3$. Encuentre $f'(4)$

Solución:

Empleando la definición de derivada tenemos:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[12(4+h) - 3] - [12(4) - 3]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 12 = 12 \end{aligned}$$

Ejemplo 5:

Sea $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$. Encuentre $f'(x)$

Solución:

Empleando la definición de derivada tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

7. FORMAS EQUIVALENTES DE LA DERIVADA:

Purcell (2003) hace mención a dos formas equivalentes de la derivada de $f(x)$ en el punto c así la primera forma es:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Gráficamente podemos ver:

Gráfico de la función $f(x)$ en los puntos c y $c+h$, empleado para la primera forma de definir la derivada.

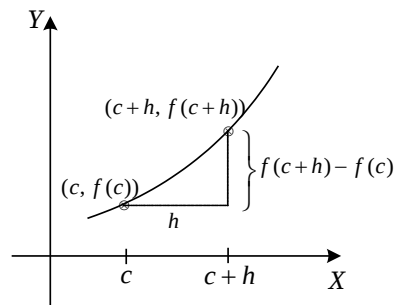


Fig.13

Para la segunda forma x toma el lugar de $c+h$ y por lo tanto reemplazando h tenemos:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Gráficamente podemos ver:

Gráfico de la función $f(x)$ en los puntos c y x , empleado para la segunda forma de definir la derivada.

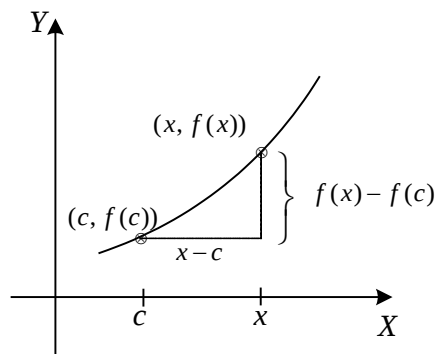


Fig.14

Como podemos apreciar las dos formas de expresar la definición de la derivada son equivalente, aun cuando la notación empleada no es la misma, ya que como hemos podido apreciar en una el límite esta explícitamente en términos del incremento h , luego en el límite h tiende a cero. En la otra no aparece h pero cuando el límite indica que x tiende a c implícitamente está indicando que el incremento (h) tiende a cero.

En el ejemplo siguiente se intenta que los alumnos utilicen la segunda forma de la definición de la derivada a fin de practicarla, pero que establezcan las diferencias en la notación y significado en relación a la definición primera.

Ejemplo 6:

Utilice la segunda forma de representa la derivada para determinar

$$g'(c), \text{ si } g(x) = \frac{-1}{x+4}$$

Solución:

$$\begin{aligned} g'(c) &= \frac{\frac{-1}{x+4} - \frac{-1}{c+4}}{x-c} \\ g'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{-c-4+x+4}{(x+4)(c+4)}}{x-c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{-c+x}{(x+4)(c+4)}}{x-c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{(x-c)}{(x+4)(c+4)}}{x-c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x+4)(c+4)} \\ \therefore g'(c) &= \frac{1}{(c+4)^2} \end{aligned}$$

TEOREMA 1

Sea f una función y $x_0 \in D_f$, si f es diferenciable en x_0 entonces f es continua en x_0

(Espinoza, 2002, 456)

Demostración.-

Espinoza, (2002, 456) demuestra este teorema de la siguiente manera:

“Por hipótesis se tiene que f es diferenciable en x_0 , esto quiere decir que $\exists f'(x_0)$, y

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

$\therefore f$ es continua en x_0 ”.

“Es muy importante recordar el teorema 1, e igualmente importante recordar que el recíproco no se cumple. Una función derivable es continua, pero una función continua no es necesariamente derivable”. Spivak (1992, 213)

Con los siguientes ejemplos se pretende analizar diferenciabilidad en un punto estudiando el comportamiento de la derivada a ambos lados del punto seleccionado.

Ejemplo 7:

Estudiar si la función $f(x) = |x|$ es diferenciable en $x = 0$

Solución:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Así,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Según Spivak (1992, 210): “Estos dos límites son llamados a veces *derivada por la derecha* y *derivada por la izquierda*”, en nuestro caso son diferentes,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

No existe. Por tanto, $f'(0)$ no existe.

Gráficamente podemos ver la función $f(x) = |x|$

Gráfico de la función valor absoluto. $f(x) = |x|$ Para estudiar la derivada en $x=0$

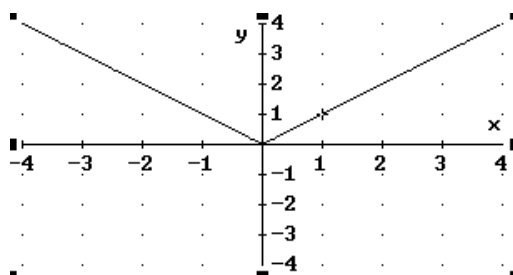


Fig. 15

Ahora veamos la gráfica de su derivada:

Gráfico de la derivada de la función valor absoluto. $f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$

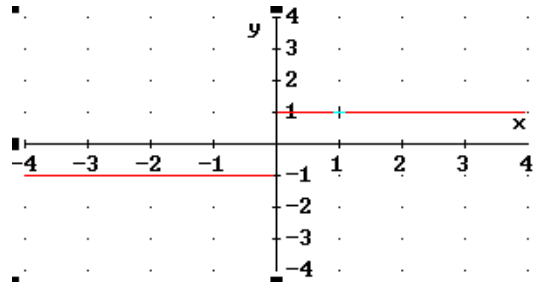


Fig. 16

Ejemplo 8:

Analizar la derivada de la función en el punto $x = 0$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \frac{h^2}{h} = h, & h < 0 \\ \frac{h}{h} = 1, & h > 0 \end{cases}$$

Así,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$$

Podemos concluir entonces que $f'(0)$ no existe; f no es derivable en 0.

Sin embargo la derivada existe para $x \neq 0$, calculemosla:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{(c+h)^2 - c^2}{h} = \frac{2ch + h^2}{h} = 2c + h$$

Aplicando límite

cuando $h \rightarrow 0^-$ tenemos $f'(c) = 2c$ de una forma similar calculamos el límite cuando $h \rightarrow 0^+$ y obtenemos $f'(c) = 1$.

Gráficamente podemos ver:

Gráfico de la función valor absoluto. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ Para estudiar la derivada en $x=0$.

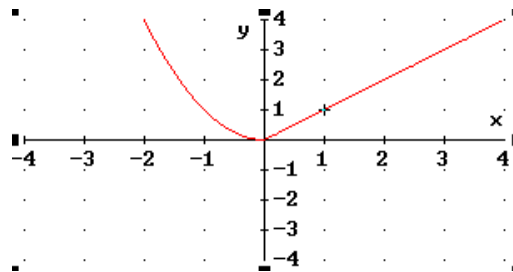


Fig.17

Gráfico de la derivada de la función. $f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ 2x & ; x < 0 \end{cases}$

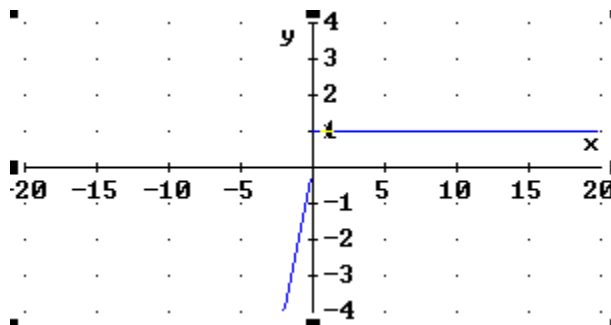


Fig. 18

Purcell (2003) demuestra gráficamente, cualquier punto donde la gráfica de una función continua tenga una esquina o un vértice la función no es diferenciable. Y esto lo podemos constatar de nuestros ejemplos anteriores.

Así mismo este autor nos muestra una gráfica donde se pueden apreciar algunas situaciones para que una función no sea diferenciable en un punto.

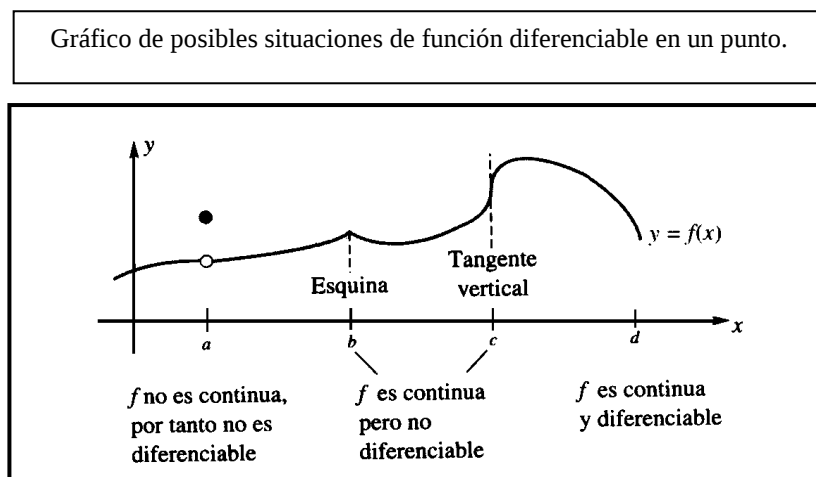


Fig. 19

Fuente: Tomado del libro de Purcell, 2003, 111

En esta gráfica afirmamos que la derivada en c no existe por que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \infty$$

Esto corresponde al hecho de que la pendiente vertical no está definida.

El trabajo práctico dado a continuación, pretender que el alumno se familiarice con las dos formas empleadas para definir la derivada. Otro objetivo es el estudiar la diferenciabilidad de funciones en algunos puntos en particular.

Trabajo Práctico N° 3: Derivada⁷

Ejercicio 1

Utilice la definición de Derivada $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para determinar la derivada en x de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $g(x) = \frac{2x-1}{x-4}$ c) $h(x) = x^4 + x^2$

Ejercicio 2

Empleando la segunda forma para definir la derivada $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ determine las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x+3}{x}$ b) $f(x) = x^3 + 5x$

Ejercicio 3

A continuación te presento cuatro límites los cuales corresponden a las derivadas de algunas funciones. ¿Podrías ayudarnos a determinar a qué funciones se refieren?

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(5+h)^3 - 2(5)^3}{h}$
b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 + 2(3+h) - 15}{h}$
c) $\lim_{x \rightarrow y} \frac{\text{sen}x - \text{sen}y}{x - y}$
d) $\lim_{x \rightarrow t} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{t}}{x - t}$

⁷ Los ejercicios han sido tomados del texto de Calculo Diferencial de Purcell (2003, 111-112) y Espinoza (2002, 514 -515)

Ejercicio 4

Describe los valores x para los que f es derivable.

A.

Gráfico de la función: $f(x) = |x^2 - 9|$

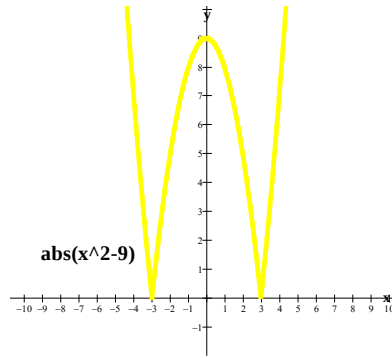


Fig. 20

B.

Gráfico de la función: $f(x) = \frac{1}{x+1}$

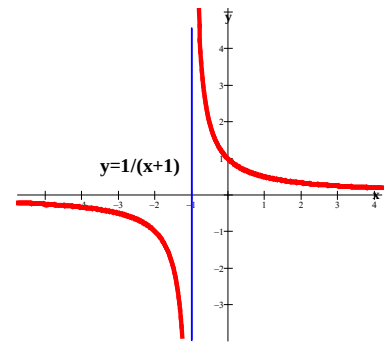


Fig. 21

Ejercicio 5

Determinar, cuales de las funciones siguientes son derivables en los números dados por x_0 .

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \leq 4 \\ 2(x-8) & , x > 4 \end{cases} ; \quad x_0 = 4$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} |x+2| & , x < 0 \\ 2-2x^2 & , 0 \leq x < 2 \\ x^2-4x+2 & , x \geq 2 \end{cases} ; \quad x_0 = 0 \text{ y } x_0 = 2$$

Ejercicio 6

Calcular los valores de a, b , y c para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{|x|} & \text{si } |x| \geq 2 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } |x| < 2 \end{cases} \quad \text{sea continua en } x=-2 \text{ y diferenciable en } x=2$$

Ejercicio 7

Hallar los valores de a y b , de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & , \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} & , \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{sea derivable en todo su dominio.}$$

8. REGLAS DE DERIVACIÓN

Para Spivak (1992), el proceso de derivación es generalmente laborioso y que si no recordamos la definición de derivada estaríamos expuestos a no poder calcularla. Sin embargo, nos dice, que existen algunos teoremas que nos permitiría de una forma un tanto mecánica derivar una clase de funciones muy amplia.

Así veremos algunas reglas de derivación que Espinoza (2002) presenta además de su demostración empleando la definición la notación de Leibniz⁸.

1) La derivada de una constante es cero.-

$$\text{si } y = f(x) = C \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

Demostración:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

⁸ La notación $\frac{dy}{dx}$ corresponde a Leibniz.

2) **La derivada de la función identidad.-**

$$\text{si } y = f(x) = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

Demostración:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \therefore \frac{dy}{dx} = 1$$

3) **La derivada de la función potencia simple.-**

$$\text{si } y = f(x) = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}, \text{ para } n \in \mathbb{R}^+ \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (x+h-x) \left[\frac{(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1} \\ &\therefore \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

4) **La derivada del producto de una función por un escalar.-**

$$\text{si } y = kf(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = kf'(x)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = kf'(x) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = kf'(x) \end{aligned}$$

5) **La derivada de la suma o diferencia de dos funciones.-**

$$\text{si } y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \pm g)(x+h) - (f \pm g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \pm g(x+h) - (f(x) \pm g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \pm (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \pm \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= f'(x) + g'(x) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

6) La derivada del producto de dos funciones.-

$$\text{si } y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Demostración:

$$\frac{d}{dx} y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Ahora sumamos y restamos $f(x+h)g(x)$ en el numerador:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} y &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x+h)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x))}{h} + g(x) \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x))}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[g(x) \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \right] \\
&= f(x)g'(x) + g(x) \cdot f'(x) \\
\therefore \frac{dy}{dx} &= f(x)g'(x) + g(x) \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

7) **La derivada del cociente de dos funciones.-**

$$\text{si } y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{d y}{d x} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{d y}{d x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)/g(x+h) - f(x)/g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h g(x)g(x+h)} \end{aligned}$$

Ahora sumando y restando $f(x) \cdot g(x)$ en el numerador se tiene:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{h g(x)g(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)(f(x+h) - f(x))}{h} - \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}}{g(x)g(x+h)} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)g(x+0)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ \therefore \frac{d y}{d x} &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Resumiendo:

- 1) si $y = f(x) = C \Rightarrow \frac{d y}{d x} = 0$
- 2) si $y = f(x) = x \Rightarrow \frac{d y}{d x} = 1$
- 3) si $y = f(x) = x^n \Rightarrow \frac{d y}{d x} = nx^{n-1}$
- 4) si $y = kf(x) \Rightarrow \frac{d y}{d x} = kf'(x)$

$$\begin{aligned}
5) \quad & \text{si } y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x) \\
6) \quad & \text{si } y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \\
7) \quad & \text{si } y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

El primer grupo de ejercicios de este trabajo intenta que el alumno fortalezca una habilidad para el cálculo de derivadas empleando reglas de derivación, el apartado B es para recordar la aplicación de la recta tangente a una curva y el apartado C es para trabajar con problemas de aplicación a diversas áreas.

Trabajo Práctico N° 4: Reglas de Derivación⁹

A. Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
1) \quad & f(x) = 365 \\
2) \quad & f(x) = 4x^4 - 3x^{3/2} + 7 \\
3) \quad & f(x) = \frac{9}{x^5} - \frac{3}{x^{1/5}} \\
4) \quad & f(x) = 2x^{3/4} - \frac{1}{6}x^6 + x^3 - 8x + 1 \\
5) \quad & f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 7}{x^4 + x^3 + x} \\
6) \quad & f(x) = \frac{x - 2x^2}{4x^2 + 1} \\
7) \quad & f(x) = (5\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1) \\
8) \quad & f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 3}
\end{aligned}$$

⁹ Ejercicios tomados de S.T.Tan (1998, 528-529-530-543-544)

- 9) $f(x) = 9x^{1/3}$
- 10) $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x}$
- 11) $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^{1/3}}$
- 12) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x^3}$
- 13) $f(x) = (x^3 + 2x + 1) \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)$
- 14) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$
- 15) $f(x) = \frac{x + \sqrt{3x}}{3x - 1}$
- 16) $f(x) = \frac{1 + 2x^{1/2}}{1 + x^{3/2}}$
- 17) $f(x) = (1 + \sqrt{x})(2x^2 + 3)$
- 18) $f(x) = \frac{(x+1)(x^2 + 1)}{x - 2}$

C. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva graficada a continuación, en el punto indicado. Punto: $Q(-2, 3)$

Gráfico de la función: $f(x) = \frac{-3}{x+1}$

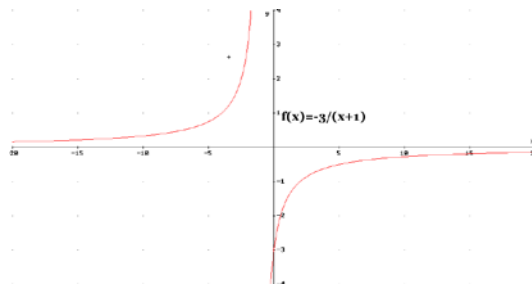


Fig. 22

D. Resolver los siguientes problemas:

1. **Crecimiento de un tumor canceroso.** El volumen de un tumor canceroso esférico está dado por la función

$$v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ donde } r \text{ es el radio del tumor en centímetros.}$$

Indique la razón de cambio en el volumen del tumor cuando:

a) $r = \frac{2}{3} \text{ cm}$ b) $r = \frac{5}{4} \text{ cm}$

2. **Eficiencia de un obrero.** Un estudio de eficiencia realizado por la compañía de aparatos electrónicos Electra mostró que el número de walkie-talkies “Comando espacial” ensamblados por un obrero promedio t horas después del inicio de labores a las 8 a.m. está dado por $N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$.

- a) Encuentre la razón con que el obrero promedio ensambla los dispositivos t horas después de iniciar su trabajo.
b) ¿Con qué razón los estará ensamblando a las 10 a.m. y a las 11 a.m.?
c) ¿Cuántos ensamblará entre las 10 y las 11 a.m.?

3. **Crecimiento de poblaciones.** Un estudio preparado por la cámara de comercio de cierta comunidad ha proyectado que la población de dicha comunidad crecerá durante los próximos tres años conforme a la regla $P(t) = 50000 + 30t^{3/2} + 20t$, donde $P(t)$ denota la población dentro de t meses. ¿Con qué rapidez crecerá la población dentro de nueve y 16 meses?

4. **Conservación de especies.** Una especie de tortuga está en peligro de extinción debido a que ciertas personas recogen grandes cantidades de huevos para venderlos como afrodisíacos. Después de implantar severas medidas de conservación, se espera que la población de tortugas crezca de acuerdo con la regla $N(t) = 2t^3 + 3t^2 - 4t + 1000$, $0 \leq t \leq 10$, donde $N(t)$ denota la población al final de año t . Encuentre la tasa de crecimiento de población de tortugas cuando $t = 2$ y

$t = 8$. ¿Cuál será la población diez años después de la implantación de las medidas de conservación?

Continuaremos trabajando las reglas de derivación, y ahora estudiaremos las derivadas de las funciones trigonométricas, sus inversas, la función logarítmica y exponencial tomando como referencia las demostraciones presentadas en Smith (2000) y a Piskunov (1973), incluimos también algunos ejemplos de aplicación directa de las reglas de derivación.

8) La derivada de la función seno.-

$$\text{si } y = f(x) = \text{sen} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x \cdot \cosh + \text{sen} h \cdot \cos x - \text{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x \cdot \cosh - \text{sen} x}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen} h \cdot \cos x}{h} \\ &= \text{sen} x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh - 1)}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen} h}{h} \\ &= \text{sen} x \cdot (0) + \cos x \cdot (1) \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \cos x \end{aligned}$$

9) La derivada de la función coseno.-

$$\text{si } y = f(x) = \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\text{sen} x$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio.

10) La derivada de la función tangente.-

$$\text{si } y = f(x) = \tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

Demostración:

Para $f(x) = \tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$, por regla de cociente se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\text{sen}x)' \cdot (\cos x) - \text{sen}x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x) \cdot (\cos x) + \text{sen}x \cdot (\text{sen}x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

Las demostraciones de las derivadas de las funciones trigonométricas restantes se dejan como ejercicio.

Resumiendo:

$$8) \text{ si } y = \text{sen}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$9) \text{ si } y = \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\text{sen}x$$

$$10) \text{ si } y = \tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$11) \text{ si } y = \text{ctgx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\text{cosec}^2 x$$

$$12) \text{ si } y = \sec x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x$$

$$13) \text{ si } y = \text{cosec} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\text{cosec} x \cdot \text{ctgx}$$

Ejemplo 9:

Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = 4x^2 - 3 \tan x$$

$$b) f(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$$

Solución:

a) trabajamos con la derivada de una diferencia de funciones:

$$\frac{dy}{dx} = 4(2)x - 3\sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 3\sec^2 x$$

b) Aplicando la derivada de un cociente tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot x - \operatorname{sen} x \cdot (x)'}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot (x)' - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

14) La derivada de la función logaritmo.-

$\text{si } y = f(x) = \log_a x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$

Demostración:

Utilizando la definición de derivada tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a (x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{(x+h)}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{(x+h)}{x}}{h}$$

haciendo $t = \frac{h}{x}$ cuando $h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a (1+t)}{tx}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a (1+t)}{t}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a (1+t)^t$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^t \right]$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e; \text{ donde: } e = \text{base de los logaritmos neperianos}$$

$$\text{si } a = e \Rightarrow \ln e = 1$$

$$\text{En particular: } y = f(x) = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\therefore \text{ si } y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

15) La derivada de la función logaritmo neperiano.-

$$\boxed{\text{si } y = f(x) = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

16) La derivada de la función exponencial.-

$$\boxed{\text{si } y = f(x) = a^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \log a}$$

Demostración:

Tomando logaritmos en la igualdad $y = a^x$, se tiene: $\ln y = x \ln a$
 derivando la igualdad obtenida y considerando y en función de x tenemos:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a = a^x \ln a$$

En particular si la base es $a = e \rightarrow \ln e = 1$ y obtenemos:

$$f(x) = e^x \rightarrow \frac{df}{dx} = e^x$$

17) La derivada de la función exponencial con base e.-

$$\text{si } y = f(x) = e^x \rightarrow \frac{df}{dx} = e^x$$

Ejemplo 10:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = 3x^2 \ln x + e^x$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = (6x) \ln x + 3x^2 \left(\frac{1}{x} \right) + e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (6x) \ln x + 3x + e^x$$

Resumiendo:

$$14) \quad \text{si } y = f(x) = \log_a x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$15) \quad \text{si } y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$16) \quad \text{si } y = f(x) = a^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \log a$$

$$17) \quad \text{si } f(x) = e^x \Rightarrow \frac{df}{dx} = e^x$$

Tomando como referencia a Piskunov (1973), estudiaremos ahora un segundo teorema, el cual nos dará acceso a la demostración de la derivada de las funciones trigonométricas inversas. Note además que en algunos casos usaremos la notación y' .

Teorema 3.

Si para la función

$$y = f(x) \dots (1)$$

Existe una función inversa,

$$x = \varphi(y) \dots (2)$$

Tal que en un punto y dado tenga una derivada $\varphi'(y)$, distinta de cero, entonces la función $y = f(x)$, tiene en el punto correspondiente, x , una derivada, $f'(x)$, igual a $\frac{1}{\varphi'(y)}$, es decir, se verifica la fórmula:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Así pues, la derivada de una de las funciones recíprocamente inversas es igual a la inversa de la derivada de la otra función, para los correspondientes valores de x e y

(Piskunov, 1973, 92)

Demostración:

Dando a y un incremento Δy , de la igualdad (2) deducimos

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$$

Como $\varphi(y)$ es una función monótona, se tiene $\Delta x \neq 0$. Escribamos la identidad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

Por ser continua la función $\varphi(y)$, $\Delta x \rightarrow 0$ cuando $\Delta y \rightarrow 0$.

Tomando límites cuando $\Delta y \rightarrow 0$ en ambos miembros de la última identidad, obtenemos:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

(Piskunov, 1973, 93)

18) La derivada de la función arco seno.-

$$\text{si } y = f(x) = \arcsen x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demostración:

Si $y = \arcsen x$, se tiene $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Según la igualdad (1) tenemos: $x'_y = \cos y$, y conforme a la regla para derivar la función inversa, se tendrá:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

Pero $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, luego $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

La raíz se toma con el signo positivo, porque la función $y = \arcsen x$ se define en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ y, por consiguiente, $y \geq 0$.

(Piskunov, 1973, 95)

Ejemplo 11:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \arcsen\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x+1)^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2 - (x+1)^2}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2 - (x^2 + 2x + 1)}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}}\end{aligned}$$

19) La derivada de la función arco coseno.-

$$\text{si } y = f(x) = \arccos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demostración: La demostración se deja como trabajo.

20) La derivada de la función arco tangente.-

$$\text{si } y = f(x) = \arctan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Demostración:

Si $y = \arctan x$, se tiene $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, si consideramos que $x = \tan y$ tenemos:

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Por tanto, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y$,

Pero, $\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$;

Y puesto que $\operatorname{tgy} = x$, tenemos en definitiva: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

Ejemplo 12:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = (1+x^2) \cdot \operatorname{arctg}(x)$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= (1+x^2)' \cdot \operatorname{arctg}(x) + (1+x^2) \cdot (\operatorname{arctg}(x))' \\ &= (2x) \operatorname{arctg}(x) + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ \therefore \frac{df}{dx} &= (2x) \operatorname{arctg}(x) + 1\end{aligned}$$

21) La derivada de la función arco cotangente.-

$$\text{si } y = f(x) = \operatorname{arccot} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

La demostración se deja como trabajo así como las demostraciones de las funciones inversas restantes.

22) La derivada de la función arco secante.-

$$\text{si } y = f(x) = \operatorname{arcsec} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

23) La derivada de la función arco cosecante.-

$$\text{si } y = f(x) = \operatorname{arccosec} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Resumiendo:

$$18) \quad \text{si } y = f(x) = \arcsen x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$19) \quad \text{si } y = f(x) = \arccos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$20) \quad \text{si } y = f(x) = \arctan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$21) \quad \text{si } y = f(x) = \operatorname{arccot} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$22) \quad \text{si } y = f(x) = \operatorname{arcsec} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$23) \quad \text{si } y = f(x) = \operatorname{arccosec} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

9. REGLA DE LA CADENA

Veamos a continuación como Smith (2000) presenta y demuestra el teorema de la regla de la cadena, un teorema para el cálculo de derivadas, su utilidad radica en el hecho de que nos permitirá derivar funciones compuestas, las mismas que se encuentran presentes en la mayoría de modelos matemáticos.

Teorema 3.

Regla de la Cadena.- Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces:

$$\frac{d[f(g(x))]}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(Smith, 2000, 228)

Demostración:

El teorema es cierto incluso si $g'(x) = 0$, pero la demostración requiere $g'(x) \neq 0$. Sea $F(x) = f(g(x))$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d[f(g(x))]}{dx} &= F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{g(x+h) \rightarrow g(x)} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Ahora presentamos la regla de la cadena en términos de la notación de Leibniz. “Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces $y = f(g(x))$; la regla de la cadena expresa que $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ” Smith (2000, 228)

Ejemplo 13:

Calcular la derivada de la siguiente función:

- a) $f(x) = (x^3 + x - 1)^3$
- b) $f(x) = e^{-x/6}$
- c) $f(x) = \cos \sqrt{x^2 + 1}$

Solución:

- a) Siendo $f(x) = (x^3 + x - 1)^3$ podemos hacer el siguiente cambio:
 $u = x^3 + x - 1$ así $f(u) = u^3$ y $u = (x^3 + x - 1)$. Luego la derivada es:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{d(u^3)}{du} \cdot \frac{d(x^3 + x - 1)}{dx} \\
&= 3u^2 (3x^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3(x^3 + x - 1)(3x^2 + 1) \\
&= 9x^5 + 12x^3 - 9x^2 + 3x - 3 \\
\therefore \frac{df}{dx} &= 3(3x^5 + 4x^3 - 3x^2 + x - 1)
\end{aligned}$$

b) si $f(x) = e^{-x/6}$ entonces $u = \frac{-x}{6}$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{d(e^u)}{du} \cdot \frac{d(-x/6)}{dx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^u \cdot -\frac{1}{6} \\
\therefore \frac{df}{dx} &= -\frac{1}{6} e^{-x/6}
\end{aligned}$$

c) Sea $u = x^2 + 1$ se tiene en la función lo siguiente:

$f(u) = \cos u$ donde $u = \sqrt{v}$ y $v = x^2 + 1$, luego la derivada será:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\
&= \frac{d(\cos u)}{du} \cdot \frac{d(\sqrt{v})}{dv} \cdot \frac{d(x^2 + 1)}{dx} \\
&= -\operatorname{sen} u \cdot \frac{1}{2}(v)^{-1/2} \cdot (2x) \\
&= -\operatorname{sen} \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot (2x) \\
\therefore \frac{df}{dx} &= -x(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot \operatorname{sen} \sqrt{x^2 + 1}
\end{aligned}$$

Los ejercicios propuestos en este trabajo tienen por finalidad que alumno conozca y aplique las reglas de derivación, así como trabajar reforzar su habilidad para factorizar expresiones algebraicas.

Trabajo Práctico N° 5: Reglas de Derivación y Regla de la Cadena¹⁰

1. Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

$$1. \quad f(x) = (a+x)\sqrt{a-x}$$

$$2. \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$3. \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$$

$$4. \quad f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$5. \quad f(x) = 2\operatorname{sen} x + 3\cos 3x$$

$$6. \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{a + \cos x}$$

$$7. \quad f(x) = \ln \left(\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} \right)$$

$$8. \quad f(x) = \operatorname{sen}(a+x) \cdot \cos(x+a)$$

$$9. \quad f(x) = (x \cdot \operatorname{ctg} x)^2$$

$$10. \quad f(x) = \log_3(x^2 - \operatorname{sen} x)$$

$$11. \quad f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$$

$$12. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$$

$$13. \quad f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$$

$$14. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{(e^x - e^{-x})}{2}$$

$$15. \quad f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{4\operatorname{sen} x}{3+5\cos x} \right)$$

$$16. \quad f(x) = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{2x+x^2}}{1 - \sqrt{2x+x^2}} \right) + 2\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2x}}{1-x^2} \right)$$

¹⁰ Ejercicios tomados de N. Piskunov (1973, 136-137)

17. $f(x) = (7x+4)\sqrt{49x^2+56x+7} - 9\ln(7x+4+\sqrt{49x^2+56x+7})$
18. $f(x) = (x+1)\left[(x-1)\ln(1-x)^2 - (x+1)\right]$
19. $f(x) = (5-6x)\sqrt{60x-36x^2-21} + 4\arcsen\left(\frac{5-6x}{2}\right)$
20. $f(x) = \sqrt{2}x\operatorname{arcsec}\sqrt{2x} + (8x^2-1)\operatorname{arcsen}2x$
21. $f(x) = -\sqrt{6x-x^2} + 3\arccos\left(1-\frac{x}{3}\right)$
22. $f(x) = e^{3x}(3\operatorname{sen}2x - 2\cos 2x)$
23. $f(x) = (5-3x)\operatorname{arcsec}(5-3x) - \ln\left(5-3x+\sqrt{9x^2-30x+24}\right)$

10. FUNCIONES IMPLICITAS

El siguiente punto que vamos a estudiar corresponde a la derivación de funciones implícitas. Lázaro (2000) define una función implícita como:

DEFINICIÓN 9:

Función Implícita

Si tenemos una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, con $y = f(x)$; en el cual la variable dependiente y no está “despejada” en términos de x , entonces y se llama función implícita de x
(Lázaro, 2000, 53)

Así podemos citar como ejemplos:

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 - 4y \quad \text{b) } f(x, y) = x^2 - x\sqrt{xy} - 2y^2 + 6$$

El autor nos presenta dos métodos para derivar una función implícita, ambos métodos serán presentados a continuación:

1er Método

Aplicando en ambos miembros de la ecuación $f(x,y)=0$, el operador $\frac{d}{dx}$ (derivada con respecto a x) y usando todas las reglas de derivación para finalmente despejar y'

2do Método

Usando derivadas parciales en la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Donde:

$\frac{\partial f}{\partial x}$: es la “DERIVADA PARCIAL DE f CON RESPECTO A x ” en este caso, consideramos **sólo a x** como variable y el resto de letras se consideran como constantes.

$\frac{\partial f}{\partial y}$: es la “DERIVADA PARCIAL DE f CON RESPECTO A y ” en este caso, consideramos **sólo a y** como variable y el resto de letras se consideran como constantes.

(Lázaro, 2000, 53)

Ahora apliquemos los dos métodos revisados y reflexionemos acerca de las ventajas de emplearlos.

Ejemplo 14:

En la ecuación $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, donde $y = f(x)$; hallar $\frac{dy}{dx}$

Solución:

Empleando el primer método:

Derivando ambos miembros de la ecuación tenemos:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3 - 3axy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(3axy) = 0$$

$$3x^2 \frac{dx}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3a \left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right) = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3ax \frac{dy}{dx} - 3ay = 0$$

$$\text{despejando } \frac{dy}{dx}:$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

Empleando el segundo método:

Como $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 0 - 3ay \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 0 - 3ax$$

$$\begin{aligned} \text{luego: } \frac{dy}{dx} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \\ &= - \frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} \end{aligned}$$

Ejemplo 15:

En la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $y = f(x)$, a es constante,

hallar $\frac{dy}{dx}$

Solución:

Empleando el primer método:

$$\frac{d}{dx}(x^{2/3} + y^{2/3}) = \frac{d}{dx}(a^{2/3})$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + y^{-1/3} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

Empleando el segundo método:

$$\text{De } f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3}$$

obtenemos :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3}x^{-1/3} + 0 - 0 = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{2}{3}y^{-1/3} - 0 = \frac{2}{3}y^{-1/3}$$

$$\text{Así } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{2}{3}y^{-1/3}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

11. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Lázaro (2000) nos muestra a partir de una notación, la definición de las derivadas de orden superior.

<u>NOTACIÓN</u>	<u>SE LEE:</u>
$\frac{dy}{dx} = y'$	La 1ª derivada de y con respecto a x

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$	La 2ª derivada de y con respecto a x
$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$	La 3ª derivada de y con respecto a x
$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)}$	La 4ª derivada de y con respecto a x
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$	La n-ésima derivada de y con respecto a x

(Lázaro 2000, 73)

Tabla N° 5

La intención de estos dos ejemplos es de ejercitar la capacidad del alumno para aplicar derivación sucesiva y simplificación algebraica.

Ejemplo 16:

Si $y = e^{-kx}$. Hallar y^n

Solución:

$$y' = -ke^{-kx}, \quad y'' = k^2e^{-kx}, \quad y''' = -k^3e^{-kx}, \quad \text{etc hasta la n-ésima derivada}$$

$$\text{Luego } y^{(n)} = (-1)^n k^n e^{-kx}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

Ejemplo 17:

Hallar $f^{(n)}(0)$ si $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$

Solución:

$$f(x) = \ln \frac{1}{1-x} = \ln(1) - \ln(1-x)$$

$$f(x) = -\ln(1-x)$$

derivando :

$$f'(x) = -\frac{-1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$f''(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2}$$

$$f'''(x) = -2(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2.3(1-x)^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = 2.3.(-4)(1-x)^{-5}(-1) = 2.3.4.(1-x)^{-5}$$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!(1-x)^{-n}$$

luego

Pero $f^{(n)}(0) = (n-1)!$

**12. REGLA DE L'HOSPITAL PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES
INDETERMINADOS DE LAS FORMAS $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$**

Teorema 4.

Regla de L'Hospital.-

Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y supongamos

también que existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Lázaro, 2000, 48)

Observaciones:

La regla de L'Hospital se puede aplicar también para las siguientes formas indeterminadas:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

iii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, \text{ entonces } \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty \\ = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

iv) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, además

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$; entonces se hace la transformación

siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right] \quad \text{pero si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1,$$

$$\text{entonces se hace } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

v) Los límites indeterminados $1^\infty, 0^0, \infty^0$ se determinan buscando previamente sus logaritmos y hallando el límite del logaritmo de la expresión: $[f(x)]^{g(x)}$

Los ejemplos resueltos a continuación intentan mostrar al alumno algunos casos en los que el límite se puede calcular empleando regla de L'Hospital.

Ejemplo 18:

Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\cot g \frac{\pi x}{2}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{0}{0}$, entonces derivando numerador y denominador tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \operatorname{sen} x)'}{(x^3)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \operatorname{sen} x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\operatorname{sen} x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\cot g \frac{\pi x}{2}} = \frac{\infty}{\infty}$ entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{x \cot g \frac{\pi x}{2}} &= \frac{\pi}{0 \cdot \infty} = \frac{\pi}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}} = \frac{\pi}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\pi}{2} \sec^2 \frac{\pi x}{2}}} = \frac{\pi}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}, \text{ luego:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec x \sec x \tan x + \sin x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x + \sin x}{\sin x} = \frac{0}{0},$$

derivando otra vez:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[2 \sec^2 x \tan x + \sec^4 x] + \cos x}{\cos x} = 3$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0$

Hagamos: $y = x^x$

Tomemos logaritmos: $\ln y = x \ln x$,

Ahora apliquemos límites: $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln y] = \lim_{x \rightarrow 0} [x \ln x]$.

Pero $\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} y \right] = 0 \cdot \infty$ entonces expresemos la función como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}, \text{ por L'Hospital: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

O

sea:

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} y \right] = 0, \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$

$$\text{Hacer: } y = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1 + x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x^2)$$

$$= \infty \cdot 0$$

$$\text{Pero: } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = 0 \quad \text{luego} \quad \ln(\lim_{x \rightarrow 0} y) = 0 \quad \text{finalmente} \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = 1$$

El siguiente grupo de ejercicios pretende que el alumno afiance sus habilidades para el manejo de reglas de derivación además mejore el manejo de expresiones algebraicas.

Trabajo Práctico N° 6: Derivación Implícita- Derivada de Orden Superior¹¹

Ejercicio 1

Halle las derivadas de las siguientes funciones implícitas:

$$1. \sqrt{x} - \ln(xy) - \frac{1}{y} = 0$$

$$2. 5x^3 - 3x^2y^3 - \ln y = 0$$

$$3. e^y + xy = e$$

$$4. \frac{x}{y} - x + \ln y = 0$$

$$5. \sqrt{5xy} + 2y = y^2 + xy^3$$

$$6. xy + \operatorname{sen}(xy) = 1$$

¹¹ Ejercicios tomados de N. Piskunov (1973, 136-137)

7. $x\sqrt{y+1} = xy + 1$
8. $\cos(xy^2) = y^2 + x$
9. $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$
10. $x^{2/3} - y^{2/3} = 5$

Ejercicio 2

Encuentra la derivada del orden indicado en cada caso:

1. $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. Hallar y''
2. $y = \sqrt[5]{x^3}$. Hallar y'''
3. $y = x^6$. Hallar $y^{(6)}$
4. $y = \frac{c}{x^n}$. Hallar y''
5. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Hallar y''
6. $y = 2\sqrt{x}$. Hallar y''
7. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}} \right)$. Hallar y''

Ejercicio 3

Empleando regla de la cadena derivar las siguientes funciones:

1. $y = \frac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln \sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arctg} x$
2. $y = \ln \frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + 2\operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$
3. $y = \arccos \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$
4. $y = \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{sen} x}{3 + 5\cos x}$

$$5. \quad y = \arcsen \sqrt{\sen x}$$

$$6. \quad y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a}$$

13. MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCIÓN

Para determinar los máximos y mínimos de una función es necesario conocer algunas características de ella, como por ejemplo cuando es creciente o decreciente. Basándonos en la bibliografía de Lázaro Carrión (2000, 108) podemos observar las definiciones siguientes:

DEFINICIÓN 10:

Una función $f(x)$ es creciente sobre un intervalo I , cuando se cumple que:

$$\text{si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2); \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

(Lázaro, 2000, 108)

DEFINICIÓN 11:

Una función $f(x)$ es decreciente sobre un intervalo I , cuando se cumple que:

$$\text{si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2); \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

(Lázaro, 2000, 108)

13.1. CRITERIOS PARA EXTREMOS RELATIVOS

Lázaro (200, 113-114) nos muestra los criterios de la primera y segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos de una función.

1. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea c un punto crítico de $f(x)$, donde $f'(x) = 0$ ó $f'(c)$ no existe. Si existe una vecindad de c , $V_\delta(c) = \langle c - \delta, c + \delta \rangle$ donde $f(x)$ es continua en $V_\delta(c)$ y derivable en $V_\delta(c)$, excepto tal vez, en c .

1. Si $f'(x) > 0, \forall x \in \langle c - \delta, c \rangle \wedge f'(x) < 0, \forall x \in \langle c, c + \delta \rangle \Rightarrow f(c)$ es un máximo relativo de f .

2. Si $f'(x) < 0, \forall x \in \langle c - \delta, c \rangle \wedge f'(x) > 0, \forall x \in \langle c, c + \delta \rangle \Rightarrow f(c)$ es un mínimo relativo de f .

3. si $\{f'(x) > 0, \forall x \in \langle c - \delta, c \rangle \wedge f'(x) > 0, \forall x \in \langle c, c + \delta \rangle\} \vee \{f'(x) < 0, \forall x \in \langle c - \delta, c \rangle \wedge f'(x) < 0, \forall x \in \langle c, c + \delta \rangle\} \Rightarrow f(c)$

no es máximo ni mínimo relativo de f .

Veamos algunos ejemplos que son de aplicación del criterio dado.

Ejemplo 19:

Sea la función:
$$f(x) = \begin{cases} -3x^5 + 5x^3 + 54 & , x < 2 \\ -2|x - 4| + 2 & , 2 \leq x < 5 \\ (5 - x)e^{5-x} & , x \geq 5 \end{cases}$$

Hallar los máximos y mínimos de esta función.

Solución:

$Dom(f) = \mathbb{R}$, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, definiendo el valor absoluto en f tenemos lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^5 + 5x^3 + 54 & , x < 2 \\ 2(x-4) + 2 & , 2 \leq x < 4 \\ -2(x-4) + 2 & , 4 \leq x < 5 \\ (5-x)e^{5-x} & , x \geq 5 \end{cases}$$

ahora encontramos la derivada de

la función $f(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -15x^2(x-1)(x+1) & , x < 2 \\ 2 & , 2 \leq x < 4 \\ -2 & , 4 \leq x < 5 \\ (x-6)e^{5-x} & , x \geq 5 \end{cases}$$

Encontrando los puntos críticos tenemos: $\{0, -1, 1, 2, 4, 5, 6\}$

Luego de evaluar algunos puntos en los intervalos generados con los puntos críticos de la función tenemos que:

$f(-1) = 52$ es mínimo relativo $f(x)$.

$f(0) = 54$ no es máximo ni mínimo de $f(x)$.

$f(1) = 56$ es un máximo relativo de $f(x)$.

$f(2) = -2$ es mínimo relativo $f(x)$.

$f(4) = 2$ es un máximo relativo de $f(x)$.

$f(5) = 0$ no es máximo ni mínimo de $f(x)$.

$f(6) = \frac{1}{e}$ es mínimo relativo $f(x)$.

2. CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea $f(x)$ una función derivable en un entorno de c . Si $f'(c) = 0 \wedge$ si $f''(c)$ existe, entonces:

1) Si $f''(c) < 0 \rightarrow f(c)$ es un máximo relativo de f .

2) Si $f''(c) > 0 \rightarrow f(c)$ es un mínimo relativo de f .

El siguiente ejemplo muestra la funcionalidad del criterio y se espera que el alumno reflexione acerca de las diferencias entre la aplicación de ambos.

Ejemplo 20:

Sea la función: $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$, encontrar los máximos y mínimos de la función.

Solución:

Derivando la función se tiene:

$f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x = -2\sin x(1 - 2\cos x)$ luego los puntos singulares (críticos) son:

De $f'(x) = 0$ se tiene $-2\sin x(1 - 2\cos x) = 0$ resolviendo la ecuación tenemos que si $\sin x = 0 \rightarrow x = n\pi + (-1)^n 0 = n\pi$ además

$$\text{si } (1 - 2\cos x) = 0 \rightarrow x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{siendo } x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \vee x = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$$

Luego los puntos críticos son: $\left\{n\pi, \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi\right\}$.

La segunda derivada es: $f''(x) = 2\{4\cos^2 x - \cos x - 2\}$.

Se cumplen:

a) $f''(n\pi) > 0 \rightarrow f$ tiene mínimos relativos en $x = n\pi$

b) $f''(\frac{\pi}{3} + 2n\pi) < 0 \rightarrow f$ tiene máximos relativos en $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$

c) $f''(\frac{5\pi}{3} + 2n\pi) < 0 \rightarrow f$ tiene máximos relativos en $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$

El trabajo de aplicaciones que se deja a continuación tiene la finalidad de aplicar los criterios para hallar máximos y mínimos pero es necesario indicar, sin restarle mayor importancia a lo anterior, que es una buena oportunidad para que el alumno ponga en práctica el trabajo de cambio de registros.

Trabajo Práctico N° 7: Aplicaciones de las derivadas a los Máximos y Mínimos de una función

Ejercicio 1

Costo Mínimo.- Una plataforma petrolífera está 2 Km mar adentro y la refinería 4 Km costa abajo. Si el costo del metro del oleoducto es doble en el mar que en la tierra firme, ¿Qué trayecto debe tener el oleoducto para minimizar el costo?

Ejercicio 2

Beneficio Máximo.- El beneficio de cierta empresa es $P = 230 + 20s - \frac{1}{2}s^2$ donde s es la cantidad (en cientos de dólares) gastada en publicidad. ¿Qué valor de s hace máximo el beneficio?

Ejercicio 3

Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar y pasar a papel 15.5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo de forma que el número de fotografías por minuto será función de la antigüedad de la máquina de acuerdo a la siguiente expresión ($f(x)$ representa el número de fotografías por minuto cuando la máquina tiene x años):

$$f(x) = \begin{cases} 15.5x - 1.1x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5x + 45}{x + 2} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de la función $f(x)$.

- b) Comprobar que el número de fotografías por minuto decrece con la antigüedad de la máquina. Justificar que si tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.
- c) Justificar que por muy vieja que sea la máquina no revelará menos de 5 fotografías por minuto.

Ejercicio 4

Se ha construido una presa de almacenamiento de agua cuyos costes de mantenimiento diarios son una función de la cantidad de agua que la misma tiene almacenada. Tales costes (en dólares.) vienen dados por la siguiente expresión ($C(x)$ representa el coste si el volumen de agua, en millones de metros cúbicos, es x):

$$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73$$

- a) encontrar el volumen diario de agua óptimo que debe mantenerse para minimizar costes.
- b) calcular el coste mínimo diario que supone el mantenimiento de la instalación. Si un día la presa tiene almacenados 3 millones de metros cúbicos de agua, ¿cuánto se ha gastado de más respecto del coste mínimo?

Ejercicio 5

Un taller artesanal está especializado en la producción de cierto tipo de juguetes. Los costos de fabricación $C(x)$ en soles, están relacionados con el número de juguetes fabricados, x , a través de la siguiente expresión: $c(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$

El precio de venta de 8000 soles.

- a) Plantear la función de ingreso que obtiene el taller con la venta de los juguetes producidos.
- b) Plantear la función de beneficio, entendidos como diferencia entre ingresos y costos de fabricación.
- c) ¿Cuántos juguetes debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

Ejercicio 6

Se ha investigado el tiempo (T , en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x , en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x+30} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 & x > 30 \end{cases}$$

- Justificar que la función T es continua en todo su dominio.
- ¿Se puede afirmar que cuánto más se entrene un deportista menor será el tiempo en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?
- Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

Ejercicio 7

Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles) viene dado por la siguiente expresión (x en años):

$$f(x) = (x-2)^2(1-2x) + 252x + 116 \quad \text{si } 0 \leq x \leq 10$$

- Determinar los intervalos de tiempo en que la cartera creció y aquellos en que decreció.
- El individuo retira sus ingresos transcurridos 10 años. ¿Cuál hubiera sido el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

Ejercicio 8

El rendimiento (medido de 0 a 10) de cierto producto en función del tiempo de uso (x en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2} \quad x \geq 0$$

- ¿Hay intervalos de tiempo en los que el rendimiento crece? ¿Y en qué decrece? ¿Cuáles son?
- ¿En qué punto se alcanza el rendimiento máximo? ¿Cuánto vale?
- Por mucho que pase el tiempo, ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al que el producto tenía cuando era nuevo?

Ejercicio 9

El peso que una plancha de cierto material es capaz de soportar depende de la edad de la misma según la siguiente función (el peso P en toneladas; t representa la edad en años de la plancha):

$$P(t) = \begin{cases} 50 - t^2 & 0 \leq t \leq 3 \\ 56 - \frac{20t}{t+1} & t > 3 \end{cases}$$

- ¿Es el peso una función continua con la edad? Según vaya pasando el tiempo ¿la plancha cada vez aguantará menos peso?
- Dicen que por mucho tiempo que transcurra, la plancha siempre aguantará más de 40 toneladas. ¿Estás de acuerdo?
- Esboza un dibujo de la gráfica de $P(t)$ cuidando la concavidad y convexidad de la función.

Ejercicio 10

El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora la siguiente función indicará en cada momento (t , en meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

$$p(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{38t - 100}{0.4t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

- ¿A partir de qué momento crecerá este porcentaje? Por mucho tiempo que pase ¿a qué porcentaje no se llegará nunca?
- Haz un esbozo de la gráfica de la función P a lo largo del tiempo.

2.4. LA INFORMÁTICA COMO RECURSO

La informática vista como recurso y no como fin contribuye en la enseñanza de la Matemática a una reconceptualización de los planes y programas de estudio para pasar de un modelo masivo, unidireccional centrado en el profesor a un modelo mas individualizado centrado en el estudiante.

Esto facilita el desarrollo del pensamiento creador de los estudiantes ya que:

- Las operaciones automáticas los ayudan a realizar tareas conceptuales más importantes.
- No tienen que ser necesariamente buenos algebraicamente para dominar el pensamiento abstracto.

- Se le desarrollan gran cantidad de habilidades a través de la ejercitación.
- Se le facilita el trabajo independiente.
- Pueden dar respuestas más rápidas, precisas y veraces a los problemas de la especialidad que se le presenten en el transcurso de sus estudios.
- Tienen la posibilidad de dedicar más tiempo a la modelación matemática y al análisis de la solución de los diversos problemas a resolver.

El grupo experimental es de la Escuela de Ingeniería Industrial, y podemos decir que para ellos la computación no es una herramienta fundamental de trabajo para resolver problemas matemáticos. Aquí los estudiantes realizarán acciones con la computadora que les reporten beneficios en ahorro de tiempo, confiabilidad en los resultados matemáticos, ahorro de esfuerzo, productividad, etc.

En la competencia del sílabo se puede leer:

Interpreta, formula y resuelve problemas de contexto real, utilizando definiciones, técnicas y aplicaciones del cálculo Diferencial desarrollando comunicación, investigación, razonamiento y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia.

De aquí se desprende la idea de utilizar programas en esta carrera, específicamente “DERIVE”. Utilizando este paquete el estudiante puede resolver problemas de aplicación con mayor precisión y rapidez, obteniendo respuestas óptimas y así influir positivamente en la toma de decisiones.

Por esta razón es necesario un replanteamiento en la enseñanza de la matemática, donde lo primordial será:

1. Asimilación de conceptos y definiciones por parte de los estudiantes para aplicarlos a la modelación de problemas.
2. Reducción sensible de los cálculos manuales en elementos del calculo diferencial lo que posibilita impartir mayor cantidad de conocimientos en menor tiempo.
3. Elaboración de pruebas parciales y finales donde el estudiante modele problemas y luego los resuelva usando empleando DERIVE.

Esto no significa de ninguna manera que el estudiante no tenga que resolver ejercicios donde aplique los conocimientos adquiridos sin

usar la computación. Pues si lo hará, y un grado de complejidad donde no sea necesario el uso de los medios de computo.

En la vida práctica el ingeniero se encuentra con situaciones problema inherente a su campo de acción algunas de las cuales pueden ser modeladas con ayuda de un software matemático.

Dado un problema se debe:

1. Analizarlo profundamente con la finalidad de recoger la mayor cantidad de información posible.
2. Hacer el planteamiento del problema en cuestión teniendo en cuenta el punto 1.
3. Modelarla usando un modelo que se ajuste a la situación.
4. Solucionarla. Para ello se puede usar:
 - Tablas matemáticas.
 - Calculadoras de mano.
 - Computadoras.
5. Interpretar los resultados.
6. Tomar una decisión.

Como se puede observar fácilmente los puntos del 1 al 6, con excepción del 4 responden al pensamiento creador y el 4 corresponde al uso del computador. De todas formas esto no resta importancia al creciente uso de la computación en la matemática. Ambos aspectos están muy vinculados. La computación como herramienta ahorra el tiempo que el estudiante puede utilizar sin límites para desarrollar el pensamiento creador.

En general se han realizado varias actividades con el uso del "Derive" que han fortalecido el proceso de enseñanza-aprendizaje en la especialidad entre las cuales se pueden mencionar:

1. Clases prácticas en el laboratorio de la Escuela donde la profesora guía el proceso.
2. Clases prácticas donde sólo se modela el problema y el estudiante lo resuelve en tiempo extra con la ayuda de la máquina.
3. Tareas donde el estudiante se ve precisado a utilizar la máquina para obtener respuestas rápidas y eficientes.
4. Tareas sistemáticas de problemas de cierta complejidad los cuales se les haría muy difícil resolverlos manualmente.
5. Pruebas integradoras de Matemática y Computación donde la matemática ofrece el modelo para resolverla y la computación ofrece el paquete para encontrar una solución óptima.

6. Talleres donde la solución de los problemas es con ayuda de la computadora. En estos talleres se puede observar que el estudiante tiene la necesidad de aplicar conceptos estudiados en clases para modelar e interpretar los problemas que se le presentan, que en ocasiones son de carácter integrador pues tienen que aplicar conceptos matemáticos como Límite, Derivada, entre otros para modelar uno sólo de ellos, por lo tanto el uso del Derive en este caso fue esencial y muy provechoso.

2.4.1. EL SOFTWARE EDUCATIVO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

El efecto del uso de software educativos en el proceso de enseñanza aprendizaje, se manifiesta en un cambio de paradigma pedagógico, centrado en el aprendizaje más que en la enseñanza donde el trabajo del docente prioriza la organización y disposición de los contenidos de aprendizaje así como la organización del aprendizaje de los alumnos mediante tareas individuales y en grupo, con un permanente seguimiento por parte del docente.

Es un modelo de formación centrado en problemas en el que los alumnos no son receptores pasivos de información, sino que deben resolver problemas utilizando, para ello, los contenidos adquiridos.

El uso del software educativo, hará de la clase un lugar privilegiado de enseñanza ya que se convertirá en un conjunto múltiple de entornos en aprendizajes en los que el alumnado pueda desarrollar y adquirir el conjunto de habilidades, saberes y actitudes necesarias para vivir en sociedad. Este hecho conlleva la necesidad de generar nuevos saberes pedagógicos en relación con la planificación y el seguimiento del aprendizaje del alumnado en situaciones diversas.

2.4.2. LA INTRODUCCION DE SOFTWARE DE MATEMATICA EN LA EDUCACION MATEMATICA

Uno de los propósitos de la educación matemática es formar al estudiante para que adquiera fluidez representacional,

entendida esta, como la representación verbal, gráfica, geométrica, tabular, icónica, algebraica, pictórica; mediante la que exprese conceptos y procedimientos matemáticos. El aprendizaje significativo se da través de la solución de situaciones problema, donde el estudiante aprende, cuando domina diferentes sistemas de representación. Hoy en día, las nuevas tecnologías han cambiado profundamente el mundo de las matemáticas y el de las ciencias, ya que no sólo han afectado las preocupaciones propias de su campo y la perspectiva como éste se ve, sino también, el modo en que las ciencias y las matemáticas se hacen, se enseñan y se transmiten.

Como señala Zabalza (2003) “La incorporación de las nuevas tecnologías a la didáctica universitaria sitúa a los docentes ante el enorme desafío de las nuevas modalidades de enseñanza”.

Introducir la tecnología en el campo de la educación definitivamente aumenta las posibilidades de mejorar el rendimiento académico, en particular; en la educación matemática se incrementa la manera de representar los conceptos matemáticos, pero es necesario considerar que ello podría incrementar el riesgo de los problemas de comunicación, pues los alumnos podrían estar expuestos a tomar la notación del software que emplean como notación algebraica formal, a pesar que se les pida que consideraran que cada software tienen diferentes maneras de expresar los conceptos matemáticos, parece que ayudaría que las notaciones que usa la tecnología se fueran ajustando más a las usadas en el álgebra. Esto es un riesgo que vale la pena tomar en cuenta al momento de hacer nuestras programaciones y que no debe hacernos desistir de emplear este recurso para lograr los objetivos propuestos.

El Derive es una potente herramienta computacional, para el desarrollo del pensamiento variacional; pensamiento que está relacionado, con los demás pensamientos matemáticos, permite al estudiante concentrar esfuerzos en el razonar, solucionar y formular problemas, así como en verificar teoremas y propiedades matemáticas y geométricas.

2.4.3. EL PROGRAMA CIENTÍFICO DERIVE

DERIVE es un programa de matemáticas capaz de procesar variables, expresiones, ecuaciones, funciones, vectores y matrices. Al igual que una calculadora científica, sirve para trabajar con números. Puede realizar cálculos numéricos y simbólicos, con álgebra, trigonometría y análisis, además de representaciones gráficas en dos y tres dimensiones. El aspecto más sobresaliente de Derive, es su trabajo simbólico unido a sus capacidades gráficas. Es una herramienta excelente para hacer y aplicar matemáticas, y para aprender y enseñar matemáticas. Esto lo convierte en un paquete matemático idóneo para los primeros cursos de la carrera.

DERIVE es uno de esos programas de cálculo simbólico, quizá el más difundido y popular porque en su modalidad más sencilla funcionaba en cualquier PC, sin necesidad de que tuviera disco duro y ocupaba sólo un diskette. Hoy, Derive sigue siendo un "pequeño" programa, que ocupa poco más de 3 Mb., y que sigue siendo muy accesible e intuitivo.

2.4.4. CAPACIDADES DEL PROGRAMA DERIVE.

Conocer las capacidades del programa nos servirá para pensar en sus aplicaciones docentes. Cuanto mejor se conozca el programa, incluyendo sus novedades, tanto mejor se puede incorporar a diversos aspectos de la enseñanza.

Derive como una herramienta computacional permite:

- La construcción, exploración, manipulación directa y dinámica de objetos en pantalla, que conducen en un nivel bajo, a la elaboración de conjeturas, en un nivel medio, a la argumentación y un nivel superior, a la realización de demostraciones.
- Las representaciones cuantitativas geométricas, tabulares, algebraicas y gráficas, en forma dinámica, es decir, que al variar un elemento o argumento en la expresión original, se produce una variación de dependencia entre las variables, posibilitando así el análisis y la generalización de conceptos.

- La representación gráfica en dos y tres dimensiones, dando la posibilidad de realizar transformaciones y de asociar figuras con objetos físicos, para pasar a un nivel de conceptualización, más elevado.
- Problematicar lo visual, de tal forma que surja la necesidad de examinar, conjeturar, predecir y verificar, es decir, da al estudiante la posibilidad de pensar y de preguntar sobre el porque de determinados hechos, llevándolo a la exploración de otras situaciones.
- La correlación de lo geométrico con lo algebraico.

En el plan de Estudios de las asignaturas de Lógico Matemática, Matemática I y Matemática II de la Universidad Cesar Vallejo, se desarrollan temas en los cuales el uso de derive seria de mucha ayuda, desde este punto puedo mencionar que derive permite trabajar:

- Operaciones con vectores, matrices y determinantes.
- Resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones.
- Calculo de Límites, derivadas, integrales (definidas e indefinidas), series, límites, polinomios de Taylor.
- Representación gráfica de funciones en forma explícita, implícita, paramétrica y en coordenadas polares. Así como la representación de funciones de dos variable.
- Operaciones con polinomios y fracciones algebraicas... y muchas otras.
- Además es posible programar funciones que usen las distintas capacidades del programa, de modo que aumenta así sensiblemente el espectro de sus aplicaciones. **DERIVE** se suministra con varios ficheros de funciones para propósitos diversos como resolver ecuaciones diferenciales, trabajar en Álgebra Lineal, etc.

2.4.5. LABORATORIOS PARA EL APRENDIZAJE DEL CALCULO DIFERENCIAL EMPLEANDO DERIVE

El contenido de las prácticas de laboratorio es “autosuficiente” en el sentido que no son precisos conocimientos previos de informática por parte del alumno.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 PARADIGMA DE INVESTIGACIÓN.

El paradigma de esta investigación es de tipo positivista también denominado (Arnal, 1996) paradigma cuantitativo, empírico-analítico, racionalista.

Basado en la escuela filosófica del positivismo (Arnal, 1996) y que presenta Arnal (1996,41) citando a Koetting (1994, 296) las siguientes características:

1. Su interés es explicar, controlar y predecir.
2. La naturaleza de su realidad es dada, tangible, fragmentada, convergente.
3. La relación sujeto/objeto es independiente, neutral, libre de valores.
4. Su propósito es la generalización libre de contexto, con explicaciones centradas en deducciones y centradas sobre semejanzas.
5. la explicación de la causalidad refiera a causas reales.

Arnal (1996, 41) nos dice: *“Este paradigma lleva asociado el peligro de reduccionismo al aplicarse al ámbito educativo. Si bien permite satisfacer ciertos criterios de rigor metodológico, sacrifica el estudio de otras dimensiones sustantivas del hecho educativo como realidad humana, sociocultural e incluso política e ideológica”*

3.2 TIPO DE INVESTIGACIÓN.

Positivista – experimental.

3.3 POBLACIÓN

Población: Los alumnos de la asignatura de Matemática I de la Universidad César Vallejo durante el segundo semestre 2006. Son en total 46 alumnos.

Se tomará en cuenta el promedio final al terminar cada ciclo: Semestre 2006 – II.

3.4 HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS

$H_0 : \mu_M = \mu_{M'}$ (Hipótesis Nula)

$H_1 : \mu_M \neq \mu_{M'}$ (Hipótesis de la investigación)

Donde:

μ_M : Nota promedio de los alumnos de la asignatura de Matemática I Sección A aula 412 del semestre 2006 II que emplearon el software DERIVE

$\mu_{M'}$: Nota promedio de los alumnos de la asignatura de Matemática I Sección B aula 413 del semestre 2006 II que no que emplearon el software DERIVE

3.5 VARIABLES.

Variable Independiente: Programa DERIVE

Variable Dependiente: Rendimiento académico de los alumnos.

Variables Intervenientes: Asistencia a clases, horarios, tipo de contenidos.

3.6 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.

El presente trabajo de investigación se desarrollará en los ambientes de la Universidad Cesar Vallejo en la Escuela de Ingeniería Industrial y de Sistemas, en la asignatura de Matemática I. Además se empleará el laboratorio de cómputo 305 donde se ha instalado el software DERIVE

El diseño empleado es de tipo experimental, Hernández Sampieri (2003, 188) nos dice: *“La esencia de esta concepción de “experimento” es que requiere la manipulación intencional de una acción para analizar sus posibles efectos.”* Bajo esta idea se tiene la presencia de dos variables, una independiente la cual consiste en el uso del software DERIVE como recurso didáctico para mejorar el rendimiento académico de los alumnos de Ingeniería de Sistemas, y la otra llamada dependiente, que en este caso es el rendimiento académico.

El diseño implica además la presencia de dos grupos de los cuales sólo uno será expuesto a la presencia de la variable independiente, a este grupo le llamaremos grupo experimental y estará formado por los alumnos de la Escuela de Ingeniería Industrial (aula 412), el otro recibirá el nombre de grupo de control y lo conformará los alumnos de la Escuela de Ingeniería Sistemas (Aula 413). Al finalizar el proceso de investigación se compararán ambos para determinar si el grupo que ha sido expuesto a la variable independiente difiere del otro.

Basada en la tipología de Cambell y Stanley (1966) emplearé la simbología de un diseño cuasiexperimental con una preprueba - posprueba y grupo de control siendo el esquema el siguiente:

$$\begin{array}{cccc} G_1 & O_1 & X & O_2 \\ G_2 & O_3 & - & O_4 \end{array}$$

Para el caso de este trabajo el resultado de la preprueba consiste en el promedio de la primera unidad ya que la investigación se realizará en la segunda unidad del curso de manera que las notas de la primera unidad serán de importancia en el inicio de esta investigación.

3.7 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS.

En los estudios experimentales, la técnica se encuentra limitada al procedimiento para desarrollar una actividad específica y los instrumentos son las herramientas que servirán para manipular el objeto de estudio.

La técnica consiste en el desarrollo de sesiones de laboratorio usando el software DERIVE, las cuales se realizarán dentro de la

jornada de clases, debo indicar que las clases son una vez a la semana en bloque de 5 horas iniciándose a las 7:30 am y finalizando a las 12:00 am contando con un descanso de 20 minutos a las 10:00 am.

Cada sesión con el grupo experimental será trabajado en el laboratorio de computo, el cual esta totalmente equipado para realizar la clase y los alumnos contarán con una guía de trabajo la misma que se les entregará al empezar la clase en el laboratorio. Todas las guías de trabajo se encuentran en el Anexo 3.

En el caso del grupo de control no hay asistencia al laboratorio, los alumnos trabajarán siempre en el aula y la clase se desarrollara empleando la clase magistral y el trabajo en pareja o en grupo.

Para la recolección de datos he empleado prácticas calificadas las cuales diseñé basándome en la taxonomía de Bloom mencionada anteriormente en el Capítulo II del fundamento teórico y cuyas tablas de especificaciones se encuentran en el Anexo 5, aquí se pueden apreciar en detalle las habilidades cognitivas y los ejes temáticos que se ha evaluado así como el número de preguntas por eje temático y habilidad que se intenta evaluar, luego las practicas calificadas están se encuentran en el Anexo 6.

3.8 TÉCNICAS DE PROCESAMIENTO DE DATOS.

Para la selección de la técnica para la prueba de hipótesis se utilizará la “*t*–student”:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}} \approx t(n_1 + n_2 - 2)$$

Donde:

n_1 : es el tamaño de muestra de la primera población.

n_2 : es el tamaño de muestra de la segunda población.

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n_1} : \text{Media muestral para la muestra número 1.}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n_2} : \text{Media muestral para la muestra número 2.}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Donde:

$$\text{La varianza muestral de la muestra 1 es: } s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1},$$

$$\text{La varianza muestral de la muestra 2 es: } s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (x_i - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}.$$

3.9 PROCESO DE LA INVESTIGACIÓN

3.9.1 DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Para este trabajo de investigación he tomado dos grupos, uno corresponde a la Escuela de Ingeniería Industrial, al que llamaré Grupo Experimental, y el otro corresponde a la Escuela de Ingeniería de Sistemas, al que llamaré Grupo de Control.

Es importante que mencione que aun cuando los dos grupos corresponden al segundo ciclo y esta asignatura sea igual para ambas escuelas, sus planes de estudio no son los mismos.

Una dificultad que presentan los alumnos se encuentra en la base de los contenidos que traen consigo, realizan algunos errores al emplear fundamentos algebraicos, lo cual es necesario para el trabajo con funciones, límites y derivadas esto no me permite desarrollar los contenidos de acuerdo a las fechas que se programan en el sílabo y por lo general debe reprogramar mis clases o trabajar algunas horas aparte de las asignadas, al menos en la primera parte del curso donde se trabaja mucho con funciones y sus gráficas.

3.9.2 RENDIMIENTO ACADÉMICO

Respecto al rendimiento académico considero necesario presentar, en el Anexo 2, el registro de evaluaciones de la primera unidad, donde se puede apreciar el rendimiento de los alumnos.

El grupo de Ingeniería de Sistemas consta de los 32 alumnos de los cuales siete se han retirado del curso reservando su matrícula.

En el grupo de Ingeniería Industrial consta de 19 alumnos de los cuales solo una alumna se retiro del curso.

Este año es el primero para la escuela de Ingeniería Industrial, en la filial de Piura, este grupo corresponde a la primera promoción, menciono esto porque es la primera vez que dicto el curso para alumnos de esta especialidad.

3.9.3 PROPUESTA DIDÁCTICA

1. TEMA : Cálculo Diferencial
2. TIEMPO: 4 semanas
3. N° DE HORAS SEMANALES: 5 horas
4. COMPETENCIA

Interpreta, formula, analiza y resuelve problemas de contexto real, utilizando definiciones, técnicas y aplicaciones del Cálculo Diferencial desarrollando comunicación, investigación, razonamiento y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia.

5. CAPACIDADES
 - Refuerza, empleando DERIVE, el tema de Razón de Cambio en una función.
 - Utiliza el software para visualizar y estudiar a través de un pequeño programa el problema de la Recta Tangente.
 - Observa, analiza e interpreta el comportamiento de las funciones y sus derivadas a través de gráficas elaboradas en DERIVE
 - Resuelve problemas de aplicación de la derivada (Máximos y Mínimos) al estudio de problemas naturales, económicos, sociales y tecnológicos.

- Desarrollar la capacidad de análisis crítico de las informaciones recibidas.

6. ACTITUDES

- Valora la importancia de la precisión en el trabajo de programación.
- Demuestra seguridad, orden y claridad en su trabajo.
- Manifiesta la importancia de la derivada para explicar y analizar el comportamiento de un fenómeno.

7. METODOLOGÍA DE LAS SESIONES DE CLASE

La metodología consiste en explicar el fundamento teórico empleando diversos recursos como diapositivas, pizarra – plumón, proyector multimedia, y paralelamente trabajar el laboratorio.

Al planificar estas sesiones se tendrá en cuenta la competencia y las capacidades que se espera desarrollar en los alumnos.

Se ha insistido en la necesidad de lograr que el alumno realice un aprendizaje significativo y desempeñe un rol activo para lo cual utilizaremos guías de trabajo para el tratamiento de los contenidos programados así como hojas de Evaluación de Laboratorio.

8. RECURSOS HUMANOS

- Profesora de Matemáticas
- Grupo Experimental: Alumnos del segundo ciclo de la Escuela de Ingeniería Industrial
- Grupo de Control: Alumnos del segundo ciclo de la Escuela de Ingeniería de Sistemas.

9. MATERIALES

- Centro de Cómputo
- Guías de Trabajo
- Hojas de Evaluación

10. PLANES DE CLASE

Elaborar un plan de clase se ha convertido en una tarea importante al momento de planificar nuestras asignaturas, hemos recibido algunos cursos de capacitación con la finalidad de que todos los docentes podamos manejar este instrumento que nos ayude a organizar mejor nuestro tiempo y a dosificar los

contenidos de acuerdo al tiempo establecido para cada uno de ellos en la programación oficial.

Manejamos el formato que presento en el Anexo 4, y en cada clase llevamos uno en nuestra carpeta docente. Para este trabajo de investigación se elaboraron 4 planes de clase los cuales se pueden apreciar en el Anexo 4.

Consideramos importante al momento de planificar una sesión de clase conocer los diferentes tipos de actividades a desarrollar los cuales son la parte medular de la clase, y los procedimientos a utilizar en cada una de ellas. En nuestros planes de clase consideramos las siguientes actividades:

- **Actividades Iniciales:**

Preparan el ambiente para el aprendizaje y estimulan el interés por los nuevos contenidos y facilitan su relación con los conocimientos previos de los estudiantes.

Tienen como propósito captar la atención de los alumnos hacia las principales ideas estudiadas. Se utiliza como introducción donde se señalan los aspectos a estudiar para despertar el interés de los alumnos por el tema y desarrollar una buena disposición por temas subsiguientes. También puede incluir una evaluación previa o diagnóstica del conocimiento actual, las actitudes y niveles de destreza de los alumnos.

En este mismo sentido se puede plantear una secuencia de experiencias de aprendizajes puede incluir diferentes tipos de actividades entre las cuales se encuentran las Actividades Introductorias o de Exploración:

Evidencian diagnóstico, introducción o descubrimiento.

Son orientadoras. Despiertan el interés y la motivación. A continuación se ofrecen algunos ejemplos de actividades iniciales:

Hacer una encuesta de las actitudes de los alumnos hacia un tema determinado y colocar los resultados en el pizarrón.

Mostrar una película de corto metraje.

Pedir a los estudiantes que entrevisten a personas que laboran en una empresa acerca del tema estudiado y discutan sus hallazgos en clase.

Sostener una discusión en clase que muestre la forma en que se relacionan las experiencias actuales de los alumnos con lo que va a ser estudiado.

- Actividades de Proceso:

Dan secuencia a las estrategias y técnicas de aprendizaje para lograr los objetivos propuestos.

Son las estrategias de aprendizaje y técnicas que ayudan a los estudiantes a extender su pensamiento acerca de un problema o tema y practicar sus destrezas recién aprendidas. Estas son el corazón de la Unidad y ocupan la mayor parte del tiempo y la energía de los estudiantes. Aquí podemos hablar de actividades de desarrollo, análisis y estudio las cuales son actividades destinadas a desarrollar diferentes aspectos del contenido para el logro de los objetivos.

Incluyen actividades de estudio y ejercitación.

Dentro de ésta clasificación se encuentran también las denominadas por Tabá actividades de generalización que incluyen actividades que permiten generalizar o reconstruir lo aprendido.

Ejemplos de actividades de Desarrollo:

- ✓ Solicitar a los estudiantes elaboren mapas, tablas, gráficas, modelos o secuencias cronológicas.
- ✓ Asignar actividades de redacción de reseñas de libros, temas, cartas o informes de investigación.
- ✓ Invitar a especialistas sobre el tema a dar una charla.
- ✓ Solicitar a los estudiantes que recaben su propia información a través de entrevistas o cuestionarios.

- ✓ Utilizar películas diapositivas, transparencias u otros materiales visuales.
- ✓ Organizar grupos pequeños de trabajo para que los estudiantes compartan información. Mostrar a los estudiantes la forma de desarrollar habilidades específicas y proveer actividades para la práctica.
- Actividades Finales:

Agregan y relacionan las Unidades de Aprendizaje con otras experiencias educativas y aplicaciones a situaciones nuevas.

Estas actividades favorecen la integración con resúmenes que ayuden a los estudiantes a identificar las ideas más importantes de la Unidad. Una actividad de culminación también podría brindar la oportunidad para que los alumnos practiquen o utilicen de forma conjunta los conocimientos, habilidades y actitudes desarrolladas en unidades anteriores.

Aquí podemos mencionar a las actividades de aplicación, resumen o culminación que son aquellas que propician la aplicación de lo aprendido, y sirven para medir o evaluar el nivel de logro.

Algunos ejemplos de actividades de culminación son:

Planear una puesta en común para que los estudiantes resuman lo que han aprendido en la Unidad.

Estimular a los estudiantes a realizar un proyecto que dé respuesta a problemas particulares de una empresa, de su trabajo o de su comunidad.

Producir material audiovisual, presentación de grabaciones, transparencias o cintas de vídeo en clase.

11. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Los criterios de evaluación corresponden a la Taxonomía de Bloom según la cual se evalúa de acuerdo a los criterios de conocimiento, comprensión,

aplicación, análisis, síntesis y evaluación. Así en las evaluaciones presentadas en el Anexo 5 presentamos las tablas de especificaciones de acuerdo a esta taxonomía y a los ejes temáticos que se desarrollaron en cada sesión de clase y en el Anexo 6 se muestran los instrumentos de evaluación donde se ha tenido el cuidado necesario en la redacción de cada ítem a fin de que logre medir las capacidades señaladas en los planes de clase y este de acuerdo a los criterios fijados en la tabla de especificaciones.

12. METODOLOGIA DE CLASE

En cuanto a la metodología indicamos que se trabaja por bloques de cinco horas pedagógicas con un descanso de 20 minutos. Las clases se dictan una vez a la semana y se inicia en el turno de la mañana de 7:30am hasta las 10:00am en que se da lugar al descanso de veinte minutos para retomar a las 10:20am y terminar a las 12:00 am.

Debido a la jornada de trabajo que se tiene es que el éxito de una sesión de clases depende en parte de la habilidad del docente para programar su clase haciendo un buen uso del tiempo, a fin de hacer de su clase una jornada de trabajo productivo con los alumnos. Generalmente distribuyo mi tiempo entre exposición los contenidos y resolución de ejercicios en la pizarra, también invito a los alumnos a participar resolviendo algunos ejercicios y problemas para luego explicar lo que han trabajado a sus compañeros.

Otras de las estrategias empleadas es la solución de Trabajos Práctico en clase y de forma grupal después de ello siempre se presentan las soluciones a todo el grupo.

He dejado un trabajo encargados en la primera unidad que mas que ser un trabajo de investigación de algún contenido matemático se refirió a la lectura de la novela: “Crímenes Imperceptibles” de Guillermo Martínez. Matemático y escritor argentino, esta novela posee un contenido matemático y en su momento

sirvió para reconocer que en las matemáticas no todo es solución de ejercicios y problemas.

Con el grupo experimental trabajé sesiones de laboratorio incluidas dentro de las horas de clase.

PRIMERA CLASE

Esta es la primera clase sobre Derivadas con el grupo de control aquí el desarrollo de la clase se hace siguiendo el método de la clase magistral en la cual muestro a los alumnos el concepto de razón de cambio con ayuda de diapositivas y gráficos elaborados en la pizarra es importante mencionar que toda la información ellos la tienen presente en una separata diseñada para esta clase y entregada para esa sesión.

Luego de la explicación en la cual los alumnos intervienen con sus preguntas, se procede a trabajar por parejas en la solución del primer trabajo práctico que aparece en la separata para esto se asigna a cada pareja formada un problema, un tiempo de 15' para resolverlo y entregarlo para su posterior corrección en plenaria. A continuación los alumnos exponen la solución de los 4 problemas en la pizarra.

Luego empleando nuevamente el método expositivo, dando lugar a las preguntas de los alumnos y haciendo a la vez algunas interrogantes para comprobar su comprensión presente los contenidos referidos a:

- a) Razón de cambio y el problema de la recta tangente a una curva.
- b) Definición de derivada.
- c) Presentación de gráficos de funciones y sus derivadas.

Resolvimos algunos ejercicios de los trabajos prácticos N°2 y N°3, en la pizarra, y los demás quedaron para trabajar en casa. La solución de dichos ejercicios sería expuesta en la siguiente clase de forma voluntaria.

Para la sesión con el grupo experimental, la clase se desarrolla con un inicio similar a la clase del grupo

de control, mostrando las diapositivas y trabajando con ellos trabajando con ellos sobre la ideas de Razón de cambio, Recta tangente a una curva, cálculo de la derivada de una función empleando la definiciones. De los Trabajos Prácticos N°1, N°2 y N°3 resolví en la pizarra algunos ejercicios quedando los otros como trabajo para la siguiente clase. Para la sesión de laboratorio prepare una guía de trabajo la cual está dividida en dos temas, los cuales se denominan:

- **Razón de cambio y problema de la recta tangente.**
- **Cálculo y grafica de la derivada de una función.**

Esta guía de trabajo usa el programa DERIVE y pretende reforzar los conocimientos adquiridos en las clases acerca de los temas de razón de cambio, recta secante y tangente a una curva, además del cálculo de la derivada empleando la definición, y el uso de los comandos Lim (límite) y DIF (derivada) propios de DERIVE.

Considero importante comentar que el uso de programa permitió a los alumnos recordar la teoría de gráfico de funciones, estudiada en la primera unidad la cual les sirvió de base para comprender el comportamiento de las gráficas de las funciones y sus derivadas, además se dieron indicaciones sobre el uso de sentencias lógica como IF – THEN para elaborar pequeños programas usando DERIVE pues una de las tareas era elaborar un pequeño programa que les permitiera ingresar una función y un intervalo y que de como resultado la grafica de todas las rectas secantes en un intervalo establecido hasta llegar a la tangente en un punto extremo del intervalo o en cualquier punto del mismo.

SEGUNDA CLASE

Con el grupo de control el método empleado es deductivo las estrategias para el desarrollo de la clase se combinaron entre la exposición y participación activa de los alumnos para tratar de deducir algunos conceptos o ideas y luego a través de la solución de

ejercicios reforzar los conocimientos. Los ejercicios se trabajan en parejas.

Se presentó las primeras reglas de derivación y luego se resolvieron ejercicios de cálculo de derivadas empleando las reglas. Además de calcular derivadas de orden superior.

Se continuó con el análisis de las derivadas de algunas funciones sencillas por la facilidad para realizar sus gráficas. A los alumnos se les dejó como tarea la solución de los trabajos prácticos N° 4.

Con respecto al grupo experimental se presentaron los mismos contenidos y en la parte del laboratorio sirvió básicamente para trabajar el análisis gráfico de funciones y; adelantando un poco, gracias el manejo del programa, calculamos no solo la primera sino también las segundas, terceras entre otras derivadas de algunas funciones.

El trabajar con las gráficas de la primera y segunda derivada permitió a los alumnos ir teniendo ideas sobre la relación entre la derivada de una función y su gráfica lo cual será el tema de la siguiente sesión. Así mismo recordamos conceptos estudiados en la primera parte del curso como son el de función creciente y decreciente además de relacionar los signos de la derivada para comprobar que una función sea o no creciente.

TERCERA CLASE

Esta clase tanto para el grupo de control como para el grupo experimental es la misma no incluye el desarrollo de un laboratorio para el grupo experimental y la razón es porque en esta sesión se concluye con la presentación de todas las reglas de derivación se trabajaron los temas de derivadas de funciones trigonométricas, sus inversas, exponenciales y logarítmicas. Además regla de cadena funciones implícitas, derivadas de orden superior.

Esta clase tiene la mayor parte del tiempo destinada a la práctica en clase pues los ejercicios que

se plantean tienen como finalidad que el alumno aprenda a distinguir las reglas de derivación y sobre todo reconozca cuando emplearlas.

CUARTA CLASE

Con ambos grupos se trabajaron los temas de Regla de L'Hospital y aplicaciones de las Derivadas el cálculo de Máximos y Mínimos de una función en el caso del grupo de control se invierte el tiempo en resolver ejercicios y problemas de forma individual, grupal y en presentar la solución de los problemas en la pizarra.

Con el grupo experimental si hubo laboratorio, aquí se presentan problemas diversos de aplicación para encontrar máximos y mínimos de funciones que quizás manualmente sería laboriosos derivar pero con ayuda de programa podemos hacerlo de forma inmediata dando así el tiempo necesario para trabajar la interpretación de resultados y el análisis e máximos y mínimos.

En cuanto a la evaluación debo indicar que durante el tiempo que duro la experiencia se aplicaron 3 prácticas calificadas y un examen parcial. Entonces los alumnos presentan en esta segunda unidad tres notas de práctica más la calificación del examen parcial.

13. LA EVALUACION

Al finalizar las prácticas con DERIVE, se realizó un examen para evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes. Estos exámenes fueron tres y contando con el examen parcial se pudo obtener el promedio de la segunda unidad en la asignatura.

Para la realización de los exámenes y con la finalidad de que no haya diferencia en las evaluaciones se aplico el mismo examen además fueron aplicados en un horario fuera de las horas de clase y a los dos grupos por igual y al mismo tiempo.

Las prácticas calificadas se elaboraron de acuerdo a la tabla de especificaciones y la taxonomía de Bloom. La prueba tiene una duración de dos horas.

El construir la tabla de especificaciones me sirvió para un mayor orden al momento de elaborar el banco de reactivos que evalué en cada uno de los temas según la importancia y el tiempo que se le dedicaron en clase.

Para desarrollar esta tabla fue necesario tener en cuenta:

- a) La lista de temas desarrollados.
- b) La lista de capacidades específicas que marco cada tema.
- c) Una revisión previa de todo el contenido.

Tomé en cuenta los niveles taxonómicos de Bloom:

- 1. Conocimiento.
- 2. Comprensión.
- 3. Aplicación.
- 4. Análisis - Síntesis – Evaluación.

Con respecto al porcentaje, este fue asignado según la importancia de los contenidos.

Las tablas de especificaciones para las tres prácticas calificadas así como algunas notas sobre la taxonomía de Bloom se encuentran en Anexo 5.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. ANÁLISIS ESTADÍSTICO

4.2.1. RESULTADOS DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE LOS GRUPOS EXPERIMENTAL Y DE CONTROL.

El grupo Experimental inicio el semestre académico con 19 alumnos. El número de alumnos es muy pequeño y me atrevo a suponer se deba al hecho de ser una especialidad nueva en la Universidad, esto en comparación a la especialidad de Ingeniería de Sistemas de tiene mayor tiempo.

Del grupo de Control que inicio el semestre con 19 alumnos el alumno 6 se retiro en la segunda unidad por problemas de salud.

El número de alumnos registrados en el grupo de Control es de 32.

De los 32 alumnos registrados se retiraron 7, cinco de ellos se retiraron desde la primera unidad y los otros dos en la segunda unidad.

Las razones del retiro de la asignatura de estos alumnos, fueron de carácter económico y en otros por motivos familiares y de salud.

Observemos las calificaciones del promedio de la segunda unidad en ambos grupos.

CALIFICACIONES DE LA SEGUNDA UNIDAD **GRUPO EXPERIMENTAL**

REGISTRO DE ASISTENCIA Y EVALUACIÓN

Semestre: 2006 II
Escuela: Ingeniería Industrial
Asignatura:
Matemática I

Sección: A
Aula: 412
Profesora: Lic. Diana
Quintana S.

		Evaluaciones 2º Unidad										
							Prom	Ex.	Pro m	N.F	N.P	Observaciones
Nº	Apellidos y Nombres	Practica Nº 1	Practica Nº 2	Practica Nº 3	Final		2	Sust	2			
1,	Alumno 1	11	8	9	9		9,2					
2,	Alumno 2	18	17	18	20		18,6					
3,	Alumno 3	19	18	18	20		19					
4,	Alumno 4	13	13	12	14		13,2					
5,	Alumno 5	15	17	15	15		15,4					
6,	Alumno 6	0	0	0	0		0					Retirado
7,	Alumno 7	14	9	12	12		11,8					
8,	Alumno 8	14	13	13	14		13,6					
9,	Alumno 9	12	13	10	13		12,2					
10,	Alumno 10	14	11	15	13		13,2					
11,	Alumno 11	16	18	15	15		15,8					
12,	Alumno 12	10	14	11	11		11,4					
13,	Alumno 13	8	7	7	7		7,2					
14,	Alumno 14	16	14	12	14		14					
15,	Alumno 15	13	12	12	14		13					
16,	Alumno 16	11	10	10	12		11					
17,	Alumno 17	11	12	11	9		10,4					
18,	Alumno 18	9	8	7	11		9,2					
19,	Alumno 19	18	13	8	17		14,6					
20,												

Tabla 6

CALIFICACIONES DE LA SEGUNDA UNIDAD
GRUPO DE CONTROL

REGISTRO DE ASISTENCIA Y EVALUACIÓN

Semestre: 2006 II

Escuela: Ingeniería de Sistemas

Asignatura:

Matemática I

Sección: B

Aula: 413

Profesora: Lic. Diana Quintana S.

Nº	Apellidos y Nombres	Evaluaciones 2º Unidad					Prom	Ex.	Prom	N.F	N.P	Observaciones
		Practica Nº1	Practica Nº2	Practica Nº3	Final							
						2	Sust	2				
1,	Alumno 1											Retirado
2,	Alumno 2	5	8	10	11	9						
3,	Alumno 3	14	6	5	10	9						
4,	Alumno 4	14	12	13	12	12,6						
5,	Alumno 5	0	11	5	13	8,4						
6,	Alumno 6	14	18	18	16	16,4						
7,	Alumno 7	14	15	12	13	13,4						
8,	Alumno 8	0	10	6	11	7,6						
9,	Alumno 9	0	10	6	12	8						
10,	Alumno 10											Retirada
11,	Alumno 11	14	10	6	12	10,8						
12,	Alumno 12	14	8	6	11	10						
13,	Alumno 13	11	11	10	7	9,2						
14,	Alumno 14	13	10	6	10	9,8						
15,	Alumno 15	14	7	6	12	10,2						
16,	Alumno 16	12	11	13	8	10,4						
17,	Alumno 17	14	12	7	12	11,4						
18,	Alumno 18	18	18	20	18	18,4						
19,	Alumno 19											Retirada
20,	Alumno 20	14	10	12	11	11,6						
21,	Alumno 21	14	10	6	11	10,4						
22,	Alumno 22	14	13	12	13	13						
23,	Alumno 23											Retirado
24,	Alumno 24	8	20	11	11	12,2						
25,	Alumno 25											Retirado
26,	Alumno 26	14	16	7	11	11,8						

27,	Alumno 27	14	20	5	12	12,6					
28,	Alumno 28	13	0	7	11	8,4					
30,	Alumno 29										Retirado
31,	Alumno 30	14	15	9	12	12,4					
32,	Alumno 31										Retirado
33,	Alumno 32	14	12	12	11	12					
34,											

Tabla 7

Después de finalizada la investigación, el grupo experimental resulto con el mayor número de

alumnos aprobados, lo cual me permite conjeturar que hipótesis de la investigación si se ha logrado. Pero se necesitan pruebas concretas por lo cual he empleado el software STATGRAPHICS para procesar los resultados obtenidos y de esta manera tener una mayor certeza de mis suposiciones.

4.2. ANÁLISIS INFERENCIAL

4.2.1. COMPARACIÓN DE MEDIAS

Una medida estadística de tendencia central se utiliza para indicar un valor que tiende a tipificar o a ser el más representativo de un conjunto de números.

La media es una medida de tendencia central y se define como:

DEFINICIÓN:

Media Aritmética:

La *media aritmética*, es a veces denominada simplemente media, es la suma de los valores observados de la variable, dividido por el número de observaciones.

(Córdova, 1995, 31)

Dados n valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ de la variable cuantitativa X , observados en una muestra, su media aritmética se calcula

utilizando la expresión $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

4.2.2. TABLAS DE FRECUENCIA DEL PRE TEST Y POST TEST.

Presento los resultados de las pruebas Pre Test y Post Test para el grupo Experimental.

RESULTADOS PRE TEST Y POST TEST GRUPO EXPERIMENTAL

Tabla 8

Del total de 19 alumnos inscritos los cuales representan el 100%, hubieron 12 desaprobados, que en porcentaje representan el 63.2%. Éste porcentaje es mayor que en el otro grupo lo cual me hace decidir por este grupo de alumnos para que sea el grupo experimental. Los resultados de las pruebas Pre Test y Post Test para el grupo de control son:

RESULTADOS PRE TEST Y POST TEST GRUPO DE CONTROL

Nº	Apellidos y Nombres	Pre Test	Post Test
1,	Alumno 1	9,8	9,2
2,	Alumno 2	14	18,6
3,	Alumno 3	13,6	19
4,	Alumno 4	10,2	13,2
5,	Alumno 5	13,2	15,4
6,	Alumno 6	5,4	RETIRADA
7,	Alumno 7	10	11,8
8,	Alumno 8	8,8	13,6
9,	Alumno 9	8,4	12,2
10,	Alumno 10	12,4	13,2
11,	Alumno 11	13	15,8
12,	Alumno 12	9,2	11,4
13,	Alumno 13	6,2	7,2
14,	Alumno 14	11,6	14
15,	Alumno 15	10,2	13
16,	Alumno 16	8.8	11
17,	Alumno 17	08	10,4
Nº	Apellidos y Nombres	Pre Test	Post Test
18,	Alumno 18	11,4	RETIRADO
19,	Alumno 19	11,4	RETIRADO
2	Alumno 2	9	9
3	Alumno 3	8,8	9

Tabla
Del
total
27

4	Alumno 4	13,6	12,6
5	Alumno 5	9,6	8,4
6	Alumno 6	14,6	16,4
7	Alumno 7	13,8	13,4
8	Alumno 8	7,4	7,6
9	Alumno 9	8,6	8
10	Alumno 10	RETIRADO	
11	Alumno 11	8,7	10,8
12	Alumno 12	8,6	10
13	Alumno 13	8,6	9,2
14	Alumno 14	8,4	9,8
15	Alumno 15	8,4	10,2
16	Alumno 16	8,2	10,4
17	Alumno 17	11	11,4
18	Alumno 18	17,4	18,4
19	Alumno 19	RETIRADO	
20	Alumno 20	8,6	11,6
21	Alumno 21	7	10,4
22	Alumno 22	12,2	13
23	Alumno 23	8,0	RETIRADO
24	Alumno 24	10,8	12,2
25	Alumno 25	8	RETIRADO
26	Alumno 26	11	11,8
27	Alumno 27	13,8	12,6
28	Alumno 28	8	8,4
29	Alumno 29	RETIRADO	
30	Alumno 30	10,8	12,4
31	Alumno 31	RETIRADO	
32	Alumno 32	10,8	12

9
de

alumnos inscritos los cuales representan el 100%, hubieron 16 desaprobados, que en porcentaje representan el 59.3%.

4.2.3. RESULTADOS DEL PRE TEST – POST TEST CONSIDERANDO LA COMPARACIÓN DE MEDIAS Y LA PRUEBA t- STUDENT.

Recordemos que en nuestra investigación manejamos dos hipótesis estadísticas, las cuales son:

HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS

$H_0 : \mu_M = \mu_{M'}$ (Hipótesis Nula)

$H_1 : \mu_M \neq \mu_{M'}$ (Hipótesis de la investigación o Hipótesis Alternativa)

Donde:

μ_M : Nota promedio de los alumnos de la asignatura de Matemática I Sección A aula 412 del semestre 2006 II que emplearon el software DERIVE.

$\mu_{M'}$: Nota promedio de los alumnos de la asignatura de Matemática I Sección B aula 413 del semestre 2006 II que no que emplearon el software DERIVE.

Los resultados del Pre Test son las notas obtenidas en la primera unidad, durante las primeras 7 semanas de clase siendo octava semana donde se realizan las evaluaciones parciales. Para obtener la nota de la primera unidad los alumnos deben presentar tres prácticas calificadas y un examen parcial de estas notas se obtiene un promedio ponderado donde el examen parcial tiene peso 2 y las prácticas calificadas tienen peso 1. En cuanto a los resultados del Post Test, estos son los promedios de la segunda unidad, que corresponden a las siete siguientes semanas pues en la octava semana de esta segunda Unidad se aplican los exámenes finales luego el promedio de ambas notas dará la nota del curso.

En ambos grupos los resultados de Pre Test se obtuvieron aplicando las mismas estrategias ya que hasta ese momento no se había iniciado la parte aplicativa de la investigación.

Las evaluaciones fueron diseñadas considerando la taxonomía de Bloom. Así encontraremos en ellas preguntas de conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación.

Las prácticas calificadas se encuentran en los anexos.

A continuación presento los resultados Pre Test y Post Test tanto del grupo experimental como del grupo de control, indicando que ambos grupos fueron sometidos a las mismas prácticas calificadas en el mismo horario, el cual estuvo programado fuera de las horas de clase semanales.

RESULTADOS DE PRUEBAS PRE TEST EN LOS GRUPOS

EXPERIMENTAL Y DE CONTROL

RESUMEN ESTADÍSTICO

	EXPERIMENTAL	CONTROL
Frecuencia	18	25
Media	10,7333	10,156
Varianza	4,09412	6,9284
Desviación típica	2,02339	2,63219
Coef. de variación	18,8515%	25,9175%

Suponiendo varianzas iguales: $t = 0,778652$ $P\text{-Valor} = 0,440656$

Tabla 10

En el cuadro N° 1, se puede observar que la nota promedio en el grupo de Experimental en la evaluación Pre- Test fue de 10,7333 y para el grupo de Control la evaluación Pre-Test fue de 10,156 lo cual indica que no existe una gran diferencia entre las notas de ambos grupos.

Después de aplicar la prueba “t” Student, se encontró que el valor experimental fue de 0,778652 un valor de $p=0,440656$ lo cual indica que no existe mayor diferencia entre las medias del rendimiento de ambos grupos.

RESULTADOS DE PRUEBAS POST TEST EN LOS GRUPOS

EXPERIMENTAL Y DE CONTROL

RESUMEN ESTADÍSTICO

	EXPERIMENTAL	CONTROL
Frecuencia	18	25
Media	12,9333	11,16
Varianza	9,57647	6,37
Desviación típica	3,09459	2,52389
Coef. de variación	23,9272%	22,6155%

Suponiendo varianzas iguales: $t = 2,06743$ $P\text{-Valor} = 0,0450448$

Tabla 11

En el cuadro N° 2, se puede observar que la nota promedio en el grupo de Experimental en la evaluación Post- Test fue de 12,9333 y para el grupo de Control la evaluación Post-Test

fue de 11,16 lo cual indica que existe diferencia entre las notas de ambos grupos.

Después de aplicar la prueba “t” Student, se encontró que el valor experimental fue de 2,06743 un valor de $p=0,0450448$ y puesto que el p-valor calculado es inferior a 0,05, podemos rechazar la hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa.

4.2.4. ACEPTACIÓN O RECHAZO DE LA HIPÓTESIS NULA Y ALTERNATIVA.

Observados los resultados de la evaluación y su proceso a través del software STATGRAPHICS se resuelve rechazar la hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa.

4.3. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Con respecto a la discusión de los resultados quisiera empezar indicando:

Esta investigación se ha centrado en la parte del Calculo Diferencial, y cuando la empezamos partimos de una primera preocupación, la cual era que los alumnos muchas veces no comprenden totalmente la definición de derivada. En ella se mencionan varios objetos matemáticos como función, razón de cambio instantánea, límite entre otros que están implícitos o que van saliendo a la luz cuando se recurre, por ejemplo, a la interpretación geométrica, como es el caso de gráfica de funciones y el de pendiente de recta.

Además se observar que los alumnos aún tienen cierta inseguridad para manejar estos objetos pesar de que han sido trabajados en temas preliminares al cálculo diferencial, las dudas con frecuencia son acerca de cómo interpretarlos o si son útiles para alguna tarea en específico.

Así que un primer trabajo es recordar los conceptos preliminares mencionados y un recurso para tal fin fue el examen parcial que rindieron una semana antes a la ejecución de esta investigación.

En la práctica docente siempre me había sucedido que al momento de dar la definición de derivada y ayudándome de algunos grafico ilustrativos, quedaban dudas en algunos estudiante de manera que pensé que trabajando con Derive podría

solucionar este problema pues podía graficar todo tipo de funciones, y aunque solo necesitaba conocer instrucciones sobre el programa luego, graficar no sería un gran problema, por el contrario comenzaron a graficar diferentes tipos de funciones con lo que conseguí ahorrar el tiempo que demandaría graficar manualmente e invertirlo en analizar el comportamiento de gráfico de las mismas. Los alumnos aclararon dudas de mantenía de los temas anteriores como por ejemplo el comportamiento de las gráficas cuando están cerca de sus asíntotas, contrastaron los dominios verdaderos con los que ellos en algún momento habían supuesto, entre otras conjeturas.

Con ayuda de DERIVE pude lograr que visualizaran, por ejemplo, la razón de cambio en un intervalo y la razón de cambio instantánea, las relacionaran y diferenciaron.

Logrado lo anterior se sigue con la interpretación geométrica de la derivada y que se asocia con el problema de la recta tangente, DERIVE facilita no solo la parte gráfica sino también algebraica, por cuanto en algunos casos haya que hacer alguna redefinición de la función, y sabiendo que se puede determinar una razón de cambio en cada punto de la curva fácilmente se puede entender que esa razón de cambio sea la pendiente de la recta tangente a cualquier punto de la curva de modo que ahora es posible hallar la ecuación de una recta que sea tangente en cualquier punto de la curva. A modo de una aplicación se comprueba para otras funciones y resolver problemas en otros contextos ajenos a geométrico.

DERIVE con su comando DIF permite encontrar la derivada de cualquier orden de una función, esto no se oculto a los alumnos pero se indicó que era preferible que ellos supieran las reglas de derivación y las aplicaran correctamente.

Considero que al poder visualizar la gráfica de la derivada de una función los alumnos comprendieron mejor lo que en teoría se dice acerca de que la derivada de una función es otra función, hicieron comparación de las gráficas de funciones y gráficas de sus primeras y segundas derivadas.

Otro logro obtenido se refiere a la parte conceptual de las aplicaciones de la derivada, hallar máximos, mínimos y puntos de inflexión de funciones, saber en qué intervalos es creciente, decreciente o constante. Sin DERIVE solo analizábamos funciones

sencillas pues teníamos que graficar, esto tomaba tiempo así que lográbamos unos 3 ejemplos a lo más. Con DERIVE ahorrábamos el tiempo que demanda graficar y derivar y lo invertíamos en analizar la función pues con sólo ver la gráfica sabíamos si ella tiene máximos y/o mínimos, punto de inflexión y determinar cuándo es creciente, decreciente o constante pero con la ventana algebraica podíamos derivar y determinar con exactitud donde se encontraban dichos puntos.

Finalmente mencionado la teoría de registros se les hizo más fácil la tarea de pasar de un registro semiótico a otro pues tenían herramientas para ello y creo que eso contribuyó a conceptualizar mejor los contenidos ya que como plantea en su teoría Raymond Duval si no conoce al menos dos formas distintas de expresar o representar un contenido matemático, formas a las que él llama “Registro de Representaciones” y “Registros Semióticos”, no parece posible aprender y comprender dicho contenido. Como ejemplo indico que al ser la derivada en un punto un valor numérico se deja de lado que es también una función entonces se confunde un objeto matemático que en este caso es la función derivada con una de sus representaciones que viene a ser en este caso el número esta confusión entre un objeto y su representación, en un plazo más o menos amplia, provocaba una pérdida de la comprensión. A esto es necesario añadir el hecho de que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales. De las clases de laboratorio específicamente de los diálogos que sostuvimos durante las clases, pude comprobar que en ellos trasladar un registros no es algo espontáneamente. Y que el pensamiento de un alumno puede movilizar un solo registro de representación a la vez. En este caso hemos manejado en la parte conceptual y la parte practica, tres tipos de registros: el gráfico, algebraico y la lengua natural.

CONCLUSIONES

1. De acuerdo a los resultados obtenidos a través de las prácticas calificadas administradas, suponiendo medias iguales empleando la t- student, se determina que el programa DERIVE es eficiente en el proceso de enseñanza- aprendizaje del Cálculo Diferencial.
2. De las referencias bibliográficas revisadas en el presente trabajo en relación a la definición de Derivada (N. Piskunov, 1973, 68; Spivak, 1967, 201; Purcell, 2003, 107) se concluye en una definición a mi consideración más didáctica para los alumnos que abarca todos los aportes de cada una de las definiciones leídas, y el uso de una notación más manejable.

3. Se logro diseñar y presentar una propuesta metodológica, compuesta por un módulo de trabajo, guías y actividades de laboratorio, que fueron aplicadas al grupo experimental y que permitieron mejorar las calificaciones de los alumnos.
4. El uso del DERIVE como recurso en las clases de Cálculo Diferencial permitió motivar en los alumnos el desarrollo de capacidades como las de observar, discernir, analizar e interpretar.
5. El alumno tiene la disposición de aprender sólo aquello que le encuentra sentido o lógica. Por ello el autentico aprendizaje es el aprendizaje significativo. Cualquier otro sería puramente mecánico, coyuntural o memorístico. Además este trabajo significativo puede ser estimulado con las tecnologías de información y comunicación tales como el programa DERIVE.
6. Es importante señalar que la clase magistral sigue siendo importante y por tanto nada puede reemplazar al profesor, pero el uso de algún recurso tecnológico tal como el que se propone complementaría esta labor, ya que se le pueden presentar al alumno situaciones (didácticas) no puramente algebraicas sino también intuitivas, gráficas, numéricas por lo cual lo aprendido se vea fortalecido.
7. el utilizar simultáneamente diferentes representaciones, favorece el establecimiento de conexiones entre ellas, siendo estas conexiones las que marcan las diferentes etapas del aprendizaje de los estudiantes. Aquí es donde el programa DERIVE juega un papel importante debido a su potencia visual, que ayuda a la formación y transformación de intuiciones y a la creación de imágenes del concepto, y debido también a la facilidad para realizar cálculos, eximiendo al estudiante de esta tediosa labor. De esta forma el estudiante puede concentrarse en la exploración y discusión de los conceptos. Los errores cometidos por los estudiantes sirven para acrecentar su aprendizaje y completar así sus imágenes del concepto.

RECOMENDACIONES

1. Desde el punto de vista institucional, la creación de una red de investigación y desarrollo es de fundamental importancia, pues mejora la comunicación, la sinergia, la discusión y aumenta la cantidad de profesores que pueden provocar el cambio de enseñanza, lo cual implica un mayor impacto del Proyecto en la Universidad. Se sigue la tendencia universal de no realizar investigaciones en grupos reducidos y aislados, sino de compartir experiencias, aumentar la masa crítica de investigadores y aprender de la sinergia creada.
2. Desde el punto de vista metodológico, se propone pasar de la forma clásica de la enseñanza de la matemática con tiza y pizarra, a una forma efectiva, dinámica y multimedial de adquirir los conceptos matemáticos básicos. Se incorporan procesos de

cálculo y de representación gráfica más veloces y más precisos que la operatoria personal. Se libera al docente y al alumno de tareas no auténticas para hacer hincapié en la reflexión y búsqueda de otros procedimientos de resolución de problemas. Se busca aplicar un procedimiento que provea un resultado aventajado en calidad y eficiencia que el que puede proveer el profesor con sólo tiza y pizarra. La metodología propuesta permite acercarse más a la realidad de los conceptos básicos matemáticos, abstractos por su naturaleza, a través de la visualización interactiva y la experimentación con diferentes objetos matemáticos dados, con características determinadas.

3. De acuerdo a los puntos anteriores, desde el punto de vista del aprendizaje, se logra:
 - a) Una mejor comprensión de conceptos para su aplicación en la resolución de problemas utilizando Sistemas Exploratorios de Aprendizaje.
 - b) Una mejor comprensión de los conceptos por medio de los sistemas gráficos provistos por los Sistemas de Computación Algebraica (visualización, objetivación, interactividad del software, numérico y simbólico).
 - c) En los alumnos, la promoción de la actitud y aptitud para conjeturar y desarrollar el sentido crítico y la reflexión.
 - d) El reconocimiento, experimentación y aplicación de modelos matemáticos.
 - e) El experimentar, conjeturar y descubrir propiedades sobre objetos matemáticos, mediante problemas, asegura el interés y compromiso del alumno.

Las actividades que se realizaron en el laboratorio se presentan en el Anexo, son tres y corresponden a los temas de:

1. Definición de Derivada, Razón de Cambio y Problema de la recta tangente.
2. Análisis gráfico de funciones y sus derivadas.
3. Criterio de la primera y segunda derivada para hallar máximos y mínimos de una función así como los puntos de inflexión.
4. Resolución de Problemas de Máximos y Mínimos.

La finalidad de trabajar el tema de Derivadas es que los alumnos manipulen la definición, que emplee el programa para experimentar usando diferentes funciones la variación de la razón de cambio en intervalos de diferente amplitud. La ayuda que brinda el programa es que grafica cualquier función y realiza los cálculos de forma inmediata de esta manera los alumnos pueden analizar el comportamiento de las funciones y concentrar mayor atención en la variaciones de las razones de cambio a lo largo de toda la curva.

Es necesario resaltar que dado que el programa esta diseñado para realizar graficas, los alumnos dispondrán de mayor tiempo para hacer el análisis del comportamiento de la función estudiando su variación, sus máximos y mínimos, puntos de inflexión así mismo conociendo la interpretación que reciben estos contenidos matemáticos en los diferentes campos de aplicación.

Los laboratorios se pueden encontrar en el anexo de este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Benazic, R. (2004): *Tópicos de Historia de la Matemática*. Editorial Hozlo S.R.L. Lima.
2. Calero Perez, Mavilo. (1998): *Hacia la excelencia de la educación*. Editorial San Marcos. Perú.
3. Colas, Pilar. (1994): *Investigación Educativa*. Editorial ALFAR. Sevilla.
4. Ezpinoza Ramos, E.(2002): *Análisis Matemático I*. Impreso en Perú.
5. Galvez, B.(1999): *Didáctica de las Matemáticas*. Editorial PAIDOS. Buenos Aires.

6. Gómez, P. Y Perry, P. (1996): *La Problemática de las Matemáticas Escolares*. Editorial Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.
7. Hassler, Norman. (1976): *Análisis Matemático I*. Editorial Trillas. México.
8. Helfgott, M. (1998): *Historia y Pedagogía de la Matemática*. Editorial Hozlo S.R.L. Lima.
9. Lages Lima, E. (1998): *Mi Profesor de Matemática y otras historias*. Editorial Hozlo S.R.L. Río de Janeiro.
10. Lages Lima, E., Pinto Carvalho, P. (2000): *La Matemática de la Enseñanza Media*. Editorial Hozlo S.R.L. Lima.
11. Latorre, A., Del Rincón, D. Y Arnal, J. (1997): *Bases Metodológicas de la Investigación Educativa*. Hurtado Ediciones. Barcelona. España.
12. Lazaro C, M. (2000): *Cálculo Diferencial*. Publicaciones Moshera.
13. Manning Smith, R.(1989): *Estadística*. Prentice–Hall Hispanoamericana, S. A. México.
14. Menin, O. (2001): *Pedagogía y Universidad. Currículum, didáctica y evaluación*. Editorial Homo Sapiens Ediciones. Argentina.
15. Piskunov, N. (1973): *Cálculo Diferencial e Integral*. Montaner y Simon. S.A. España
16. Purcell, E, Varberg, D, Rigdon, S.(2003): *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Pearson. México.
17. Shabunin, M., Chejlov, V.(1989): *Problemas de Análisis Matemático*. Editorial Mir Moscú.

18. Smith, R, Minton; R. (2000) *Cálculo*. Editorial Mc Graw Hill. Colombia.
19. Spivack, M. (1992): *Calculus*. Editorial Reverté, S.A. Barcelona. España.
20. Sullivan, M. (1997): *Precálculo*. Prentice–Hall Hispanoamericana, S. A. México.
21. Tan, S. (1998): *Matemática para Administración y Economía*. Editorial Thomson.
22. Toranzos, F.(1963): *Enseñanza de la Matemática*. Editorial Kapelusz.
23. Wenzelburger, Elfriede.(1993): *Didáctica del Cálculo Diferencial*. Grupo Editorial Iberoamérica.
24. Zabalza, M. (2003): *Competencias docentes del profesorado universitario. Calidad y desarrollo profesional*. Narcea, S.A de Ediciones. Madrid. España.

ANEXO 1

SILABO DE LA ASIGNATURA



**UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO – PIURA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS Y
ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL**

SÍLABO DE MATEMÁTICA I

1. DATOS GENERALES:

Código del curso	:	HT 32
Área curricular	:	Formación Básica
Ciclo	:	II
Semestre Académico	:	2006-II
Duración	:	16 Semanas
Pre-Requisito	:	Lógico Matemática
Créditos	:	5
Horas Semanales	:	05 (03 de Teoría, 02 de Práctica)
Docente	:	Lic. Diana J. Quintana de Mejía
Correo electrónico	:	dianaquintana@ucv.edu.pe dianaquintana2@hotmail.com

2. FUNDAMENTACIÓN

El Desarrollo de esta asignatura pretende potenciar en el estudiante capacidades propias del área de Matemática como el razonamiento y demostración, la interpretación de gráficos y expresiones simbólicas y la resolución de problemas.

Así como presentar los medios necesarios para la adquisición de ciertas destrezas como: análisis, interpretación y aplicación de fundamentos teóricos.

Finalmente el logro de los objetivos de esta asignatura se verá reflejado, y podrá ser evaluado en la eficiencia que demuestren los alumnos al resolver situaciones reales.

3. COMPETENCIAS

- 3.1. Representa y modela a través de fórmulas algebraicas las funciones elementales, aplicadas a situaciones de la vida cotidiana, fenómenos físicos, químicos, económicos y tecnológicos; reconociendo la relación entre el lenguaje gráfico y el numérico para una mejor comprensión de la realidad.
- 3.2. Resuelve problemas aplicando concepto de límite y continuidad, para el estudio de fenómenos naturales, presentados en diversos problemas, demostrando precisión en los resultados.
- 3.3. Interpreta, formula y resuelve problemas de contexto real, utilizando definiciones, técnicas y aplicaciones del cálculo Diferencial desarrollando comunicación, investigación,

razonamiento y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia.

4. PROGRAMACIÓN ACADÉMICA

4.1. PRIMERA UNIDAD: FUNCIONES Y LIMITES

CAPACIDADES

1. Comprende el concepto de función, reconoce las clases de funciones.
2. Grafica adecuadamente funciones, reconociendo sus características, como parte de la resolución de problemas de aplicación.
3. Emplea procedimientos analíticos y experimentales para generar modelos que expresen situaciones reales interpretando finalmente sus graficas.
4. Entiende intuitivamente la noción de límites.
5. Calcula límites laterales finitos e infinitos.

ACTITUDES

1. Demuestra precisión, orden y claridad en el tratamiento de datos.
2. Valora la importancia de las funciones en el análisis de situaciones reales.
3. Reconoce la importancia del concepto de límite en el análisis de hechos naturales, físicos, económicos y tecnológicos.

COMPORTAMIENTOS OBSERVABLES

1. Desarrolla su trabajo de manera clara y ordenada demostrando precisión en sus respuestas.
2. Realiza comentarios sobre la importancia de las funciones en la comprensión y análisis de hechos naturales, económicos, físicos, tecnológicos etc.
3. Manifiesta verbalmente la importancia del concepto de límite para una mejor comprensión de la realidad.

NIVELES MÍNIMOS DE LOGROS

1. Al menos conoce y emplea tres tipos de funciones importantes en La solución de problemas.

2. Dada una situación real, explica si esta puede ser modelada por Una función.
3. Resuelve al menos tres límites de mediana complejidad.

CONTENIDOS

SEMANA	CONTENIDOS	FECHA
01	• Funciones, definición, dominio y rango. • Clases de Funciones: Polinómicas, Racionales • Lectura: http://aula.elmundo.es/aula/laminas/numero.pdf • Trabajo Individual. • Lectura: “Los crímenes Imperceptibles”. Guillermo Martínez	Del 4 al 8 de Sept.
02	• Graficas de Funciones con asíntotas, función exponencial y Logarítmica. • Laboratorio N° 1 • Grafico de funciones con valor absoluto. • Presentación de investigación sobre la lectura	Del 11 al 15 de Sept.
03	• Grafica de funciones polinómicas. • Función Signo y Mayor entero. Ejercicios. • Técnicas de graficación. • Presentación de solución de problemas sobre funciones. • Informe sobre novela	Del 18 al 22 de Sept.
04	• Aplicaciones de las Funciones. • Laboratorio N° 2 • Evaluación de Funciones (parte teórica) • Trabajo Individual.	Del 25 al 29 de Sept.
05	• Evaluación de Funciones (parte práctica) • Laboratorio N° 3	Del 2 al 6 de Oct.
06	• Límites: Límite Finito- Teoremas • Cálculo de Límites.	Del 9 al 13 de Oct.
07	• Práctica de cálculo de límites • Laboratorio N° 4	Del 16 al 20 de Oct.
08	Examen parcial.	Del 23 al 27 de Oct.

4.2. SEGUNDA UNIDAD: CONTINUIDAD Y DERIVADAS

CAPACIDADES

1. Entiende el concepto de continuidad y clasifica los tipos de continuidad.
2. Aplica las propiedades fundamentales de las funciones continuas a la solución de problemas reales.
3. Utiliza correctamente las fórmulas de derivación.
4. Aplica el cálculo diferencial al estudio de fenómenos naturales, económicos, sociales y tecnológicos.

ACTITUDES

1. Valora de manera crítica la importancia de la exactitud y orden en el cálculo de límites, analizando la continuidad en algunos casos.
2. Demuestra precisión, orden y claridad en sus cálculos.
3. Aplica los conceptos a hechos reales y concretos.

COMPORTAMIENTOS OBSERVABLES

1. Trabaja de manera ordenada y exacta en los momentos correspondientes a prácticas y exámenes.
2. Manifiesta la importancia de la derivada para explicar y analizar hechos reales en las diferentes áreas.

NIVELES MÍNIMOS DE LOGROS

1. Aplica a situaciones reales el concepto de límite y de continuidad.
2. Dado el gráfico de una función explica con sus propias palabras el concepto de derivada puntual utilizando argumentos geométricos.
3. Dada una función halla la derivada utilizando reglas de derivación.
4. Emplea derivadas para calcular máximos y mínimos de una función.

CONTENIDOS

SEMANA	CONTENIDOS	FECHA
09	• Límite al Infinito.	Del 30 de Oct. Al 3 de

	• Límites de funciones Trigonométricas • Taller de ejercicios	Nov.
10	• Evaluación del tema anterior • Continuidad y Discontinuidad removible de una función.	Del 6 al 10 de Nov.
11	• Evaluación de Continuidad. • Trabajo en aula sobre problemas de límites.	Del 13 al 17 de Nov.
12	La Derivada: • Razón de cambio promedio e instantánea. • Taller de ejercicios • Laboratorio N°2	Del 20 al 24 de Nov.
13	• Definición e Interpretación Geométrica. • Reglas de derivación. • Regla de la Cadena. • Evaluación	Del 27 de Nov. Al 1 de Dic.
14	• Derivada de una función implícita. • Derivada de orden superior. • Laboratorio N° 3	Del 4 al 8 de Dic.
15	• Regla de H'ospital. • Aplicación de la derivada: Máximos y mínimos de una función. • Laboratorio N° 4 • Evaluación	Del 11 al 15 de Dic.
16	Examen final.	Del 18 al 22 de Dic.

5. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

Uso de metodología activa empleando principalmente los métodos:

1. Magistral
2. Trabajo Autónomo de los alumnos (Investigación Individual).
3. Trabajo de grupo.
4. Expositiva - Interactiva
5. Experimental
6. Debate

7. Demostración.

6. MEDIOS Y MATERIALES

1. Software matemático: DERIVE
2. Texto de biblioteca
3. Separata resumen
4. Direcciones electrónicas
5. Ejercicios Aplicación
6. Casos
7. Presentación multimedia

7. EVALUACIÓN

7.1 CRITERIOS DE EVALUACIÓN

El Promedio Final (PF) del curso será obtenido de la siguiente manera:

$$PF = \frac{PU_1 + PU_2}{2}$$

Siendo PU_1 y PU_2 los promedios de la primera y segunda unidad de aprendizaje, respectivamente. El promedio de cada unidad de aprendizaje se calcula como:

$$PU_1 = \frac{PC + TI + CL + LB + 2EP}{6}$$

Donde:

$PC + TI + CL + LB$: Son los Promedios de prácticas calificadas, Trabajo de Investigación, control de lectura, laboratorios.

EP : Examen parcial.

La nota se considerará con un decimal en los promedios parcial y final.

La nota mínima aprobatoria es 10.5 y se redondeará al entero inferior o superior según corresponda.

7.2 CONDICIONES DE EVALUACIÓN

El 30% de inasistencias INHABILITA del curso.

La justificación de una inasistencia será únicamente con certificado médico.

8. CRONOGRAMA ACADEMICO

UNIDAD	ACTIVIDADES	FECHA
Primera	Inicio del Ciclo Examen Parcial	4 de Septiembre de 2006 23 al 28 de Octubre
Segunda	Examen Final Término del Ciclo Exámenes Extemporáneos	Del 18 al 22 de Diciembre 23 de Diciembre

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIBROS EN BIBLIOTECA DE LA UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO:

1. AUDRY SANCHEZ, Javier. *Cálculo Diferencial e Integral*. Trillas (MAT- 01768)
2. ESPINOZA RAMOS, Eduardo. *Análisis Matemático para Ingenieros*. Impreso en Perú.2002. 723pg.
3. FILLOY YAGUE Eugenio. *Geometría Analítica*. Iberoamericana. (MAT-0532)
4. GROSSMAN, Stanley. *Algebra Lineal*. Mc Graw- Hill. Edición 1996 México. (MAT- 558)
5. LEITHOLD, Louis. *El Cálculo*. Oxford University. México 1996. (MAT- 0545)
6. PURCELL, Edwin. *Cálculo con Geometría Analítica*. Prentice Hispanoamericana. México 1993.(MAT- 0542)
7. SMITH, Robert. *Cálculo*. Mc Graw- Hill. Interamericana. Colombia 2001. Tomo I y II. (MAT- 0547) Y (MAT-0548)

ANEXO 2

REGISTRO DE EVALUACIONES

8. STEWART, JAMES. *Cálculo Diferencial e Integral*. Thomson. 1989. (MAT- 02796)
9. TOMAS, George E. *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*. Aguilar 1989. (MAT- 01119)

LIBROS DE PROPIEDAD DEL DOCENTE:

1. AYRES, Frank. *Cálculo Diferencial e Integral*. McGraw-Hill.1992.
2. DEMIDOVICH B. *Problemas de Análisis Matemático*. MIR Moscú 1981.
3. HASSER, Norman, et al. *Análisis Matemático*. Trillas 1985. México. 810pg.
4. KITCHEN, Joseph. *Cálculo*. McGraw-Hill.1992. España. 863pg.
5. KONG, Maynard. *Cálculo Diferencial*. Pontificia Universidad Católica del Perú. 1995. Perú.548 pg.
6. LAZARO CARRIÓN, Moisés. *Cálculo Diferencial*. Moshera S.R.L. Perú. 225 pg.
7. MONTOYA VALDERRAMA, Manuel. *Límites, Continuidad y Derivadas*.
8. PISKUNOV, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. Montaner y Simon. S.A. Barcelona.1973.1019pg.
9. PURCELL, Edwin J, et al. *Cálculo Diferencial e Integral*. Pearson 2003. México.480 pg.

PÁGINAS WEB: (No menor de 5 y pertinentes al curso)

<http://www.divulgamat.com>
<http://www.sectormatematica.cl/contenidos.htm>
<http://www.eduteka.org>
<http://www.es.wikipedia.org>

ANEXO 3

GUIAS METODOLOGICAS APLICANDO EL SOFTWARE DERIVE

APRENDIENDO CALCULO DIFERENCIAL CON DERIVE

SESION N° 1

**TEMA: RAZON DE CAMBIO Y PROBLEMA DE LA RECTA
TANGENTE**

CAPACIDAD: Emplea definición de razón de cambio para resolver ejercicios sobre recta tangente.

A. RAZON DE CAMBIO

Empezaremos por trabajar el concepto matemático fundamental del cálculo, sobre el cual se sustenta la teoría de derivadas. Este es Razón de Cambio media. Recordemos que Hoffmann (1985, Pág. 82) la define de la siguiente manera:

Razón de Cambio Media. Suponga que y es una función de x , $y = f(x)$, correspondiendo a un cambio de x a $x + \Delta x$, la variable y cambia en una cantidad $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Así, el cociente de diferencias:

$$\frac{\text{Cambio de } x}{\text{Cambio de } y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Representa la razón de cambio de y con respecto a x .

(Hoffmann, 1985, 82)

Consideraremos la segunda definición de la separata por cuanto es más directa en el análisis de los cambios o variaciones. Ahora sigamos las instrucciones siguientes:

- Utilice DERIVE para ingresar la función $f(x) = x^2 - 6x + 2$ y estudiar sus características.
- Una vez definida $f(x)$ construya otra función que calcule la Razón de Cambio Media o Razón de Cambio Promedio de $f(x)$ para el intervalo $[a, b]$.

$$RCP(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$RCP(a, b) := (f(b) - f(a)) / (b - a)$$

- Para probar su funcionamiento, encuentre la razón de cambio en el intervalo $[0, 3]$.

$$RCP(0, 3)$$

- Halla la RCP de $f(x)$ en los intervalos $[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1; 1,1]$, $[1, 1.01]$.
- Considera también la misma expresión para hallar la RCP en función de un valor $x = a$ y un incremento h .

$$RCP(x, h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$RCP(x, h) := (f(x + h) - f(x)) / h$$

- Halla la *RCP* de $f(x)$ en los intervalos para los valores de:
 - a) $x = 2$ con un incremento de 4
 - b) $x = 2$ con un incremento de 3
 - c) $x = 2$ con un incremento de 2
 - d) $x = 2$ con un incremento de 1

EJERCICIOS

1. RAZONAMIENTO GRÁFICO. Utiliza DERIVE para graficar la función razón de cambio de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ y su función razón de cambio $g(x) = \frac{f(x+0.01) - f(x)}{0.01}$ en una misma ventana. Calcule algunos valores empleando la opción vector.
2. Halla la *RCP* de la función $f(x) := -\ln((x-1)^2(x+3))$ en los intervalos $[5.5,6]$, $[5.4,6]$, $[5.3,6]$, $[5.2,6]$, $[5.1,6]$.
3. Halla el límite cuando $h \rightarrow 0$ de $(f(x+h) - f(x))/h$ en la pregunta anterior. Para ello sitúa el cursor sobre dicho resultado para resaltarlo y pulsa el icono .

B. RECTA TANGENTE

1. Elabore un programa que permita ingresar una función, un intervalo $[a,b]$ y grafique las rectas secantes en ese intervalo hasta la recta tangente en el punto a. Complete la hoja con los datos que vaya realizando. Utilice la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ y el intervalo $[2,3]$.
2. Una vez realizado el trabajo anterior, comprueba que se obtiene la misma solución con el comando $TANGENT(y, x, x_0)$ que DERIVE proporciona.
3. Ahora puedes resolver algunos problemas del Trabajo Practico N° 2 de tu separata empleando el comando $TANGENT(y, x, x_0)$.
4. Utiliza las formas equivalentes de la derivada (pag.39) y resuelve algunos ejercicios empleando tus propias funciones y el comando derivada que te ofrece DERIVE así podrás comprobar tus resultados.

TEMA: CÁLCULO Y GRAFICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

CAPACIDAD: Grafica funciones y encuentra su primera derivada, empleando comando propios de DERIVE.

En esta parte de nuestro primer laboratorio vamos a ingresar diversas funciones, calcularemos sus derivadas empleando la definición de derivada y empleando también el comando DIF.

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$:

- Graficarla, además construir la función derivada de dos formas: la primera empleando definición de $\text{LIM}((f(x+h)-f(x))/h, h, 0, -1)$ para calcular la derivada por izquierda y $\text{LIM}((f(x+h)-f(x))/h, h, 0, 1)$ para calcular la derivada por derecha, y la segunda forma es empleando el comando DIF $(f(x), x)$ que ofrece DERIVE.
- Observa las graficas de la función y su derivada y responde a las siguientes preguntas:
 - ✧ ¿Qué sucede con la derivada en el punto $x=0$?
 - ✧ ¿Qué representa la gráfica de la función derivada?

2. Introduce la siguiente función definida “a trozos”: $f(x) := \text{IF}(x < 4, x^2 - 5, 2x + 3)$

- Calcular las derivadas laterales en $x = 4$.
- Representa la función $f(x)$. Observa que se trata de una función continua, pero no derivable.
- Prueba con otras definiciones de $f(x)$ y otros valores distintos de $x = 4$.

3. Ingresa la función $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ y calcula su derivada en el

punto cero. Además elabora las graficas.

4. Considera $f(x) := 4 - x^2$ en $x = 2$ y halla las derivadas laterales. ¿Puedes explicar que ocurre?
5. Considera también $f(x) = 1/x$ en $x = 0$.

6. Demostrar usando DERIVE que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x \leq 0 \end{cases} \quad \text{es derivable en cero.}$$

7. Calcular y graficar las derivadas de las siguientes funciones empleando derive:

a) $f(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{\operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{\operatorname{sen} x} \right)} \right)$

b) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

c) $f(x) = \frac{1}{a - \frac{2}{x + \operatorname{sen} x}}$

d) $f(x) = x^6 (1 - \cos 2x)^2$

e) $f(x) = \ln x$

APRENDIENDO CALCULO DIFERENCIAL CON DERIVE

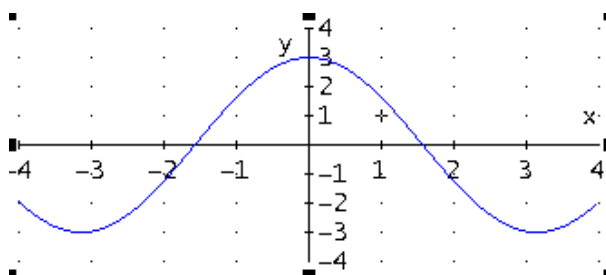
SESION N° 2

C. RELACION ENTRE LA GRAFICA DE UNA FUNCION Y SU PRIMERA DERIVADA

CAPACIDAD: Infiere, mediante un análisis grafico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y su primera derivada; signo de la primera derivada asociado con crecimiento o decrecimiento de la función, y derivada nula con puntos críticos.

PROBLEMA.- (Carácter creciente o decreciente de una función)

¿Puede la primera derivada de una función proporcionar información acerca del carácter creciente o decreciente de una función $f(x)$?



Empezaremos recordando una serie de conceptos que debemos tener en cuenta para abordar esta sesión.

Se dice que una función es **positiva** en la región en que su gráfica se encuentra arriba del eje de las abscisas.

Así use DERIVE y describa en que intervalos las siguientes funciones son positivas.

- ☐ $f(x) = 3\cos x$
- ☐ $f(x) = 3x - 3$
- ☐ $f(x) = 8 - 4x$
- ☐ $f(x) = (x + 2)^2 - 5$

o $f(x) = (x-3)^2 + 2$

Se dice que una función es **negativa** en la región en que su grafica se encuentra abajo del eje de las abscisas.

Emplea DERIVE y describe en que intervalos la siguientes funciones son negativas.

o $f(x) = 5x - 3$

o $f(x) = \frac{-x}{2} + 6$

o $f(x) = x^2 + 4x - 4$

o $f(x) = -x^2 + 6x + 9$

Una función es **creciente** en una región si y sólo si al aumentar los valores de la variable independiente x , aumentan también los valores de la función. Es decir,

$f(x)$ es creciente en una región si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 , siempre que $x_1 < x_2$, necesariamente $f(x_1) < f(x_2)$, y viceversa.

Geométricamente, una función es creciente en la región en que su gráfica **sube** a medida que recorremos el eje X de izquierda a derecha.

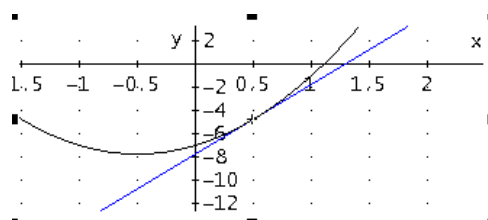
Grafica empleando derive la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ y completa lo siguiente:

- La función mostrada es **decreciente** en intervalos que empiezan inmediatamente después de _____ y termina inmediatamente antes de _____. Es decir, $f(x)$ es decreciente en el intervalo abierto $\langle \quad , \quad \rangle$. ¿Por qué intervalo abierto?
- En cambio, la misma función es creciente en dos regiones: desde menos infinito hasta _____, sin llegar a cero, a sea, en el intervalo $\langle \quad , \quad \rangle$; y en el intervalo $\langle \quad , \quad \rangle$.

- ¿Podrías dar una justificación del porqué los valores 0 y 2 están excluidos de las tres regiones?
- La función graficada es positiva en los intervalos _____, _____.
- La función graficada es negativa en los intervalos _____, _____.

También hemos trabajado las siguientes ideas. Completa lo que falta:

- Hemos afirmado el hecho de que, en un punto del dominio, la pendiente de una curva es igual a la pendiente de la recta _____ en ese punto.



Sabemos que:

- Cuando una recta es creciente, su _____ es positiva.
- Cuando una recta es decreciente, su _____ es decreciente.
- Cuando una recta es paralela al eje X, su _____ es _____.
- La pendiente de la recta tangente a la grafica de una función $f(x)$, en cualquier punto del dominio, es precisamente la primera _____ de la función.
- Elabora las graficas de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ y de su primera derivada empleando DERIVE.
- Haremos un análisis comparativo de estas gráficas:
- La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0,2)$. ¿Cómo es su derivada $f'(x)$ en ese intervalo? _____.
- La función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty,0)$. ¿Cómo es su derivada $f'(x)$ en ese intervalo? _____.

- La función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(2, \infty)$. ¿Cómo es su derivada $f'(x)$ en ese intervalo?_____.
- La función $f(x)$ es constante en los puntos $x = 0$ y $x = 2$ ¿Cómo es su derivada $f'(x)$ en esos puntos?_____.
- Los hechos que acabas de observar no son una coincidencia, ni un hecho aislado; corresponde a una relación muy importante entre una función y su primera derivada.
- Considerando tus respuestas, tenemos todos lo necesario par construir los siguientes criterios de caracterización:
- Para toda función $f(x)$ derivable en un intervalo (a, b) :
- Si $f'(x) > 0$ para todo valor x en (a, b) , $f(x)$ es **creciente** en (a, b) .
- Si $f'(x) < 0$ para todo valor x en (a, b) , $f(x)$ es **decreciente** en (a, b) .
- Si $f'(x) = 0$ para todo valor x en (a, b) , $f(x)$ es **constante** en (a, b) . Este caso nos será particularmente útil en el caso en que el intervalo conste de un solo punto.
- A cada valor de x en el que $f'(x) = 0$, se le llama **punto crítico**.
- **Problema 1:** Empleando DERIVE encuentra los intervalos donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ creciente y decreciente y los puntos donde es constante. Luego compara tus hallazgos y completa la información.
- $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(x)$ será creciente donde $f'(x) > 0$, es decir donde $3x^2 - 6x > 0$; factorizando $3x$ obtenemos: $3x(\quad) > 0$ recuerda que el producto de dos factores es mayor que cero sólo si ambos son positivos o ambos son negativos.

1. $3x > 0$ y $x - 2 > 0$

$$x > 0 \quad y \quad x > 2$$

Siempre que $x > 2$, se cumple también que $x > 0$. No al revés.

$\therefore f(x)$ es creciente en $(2, \infty)$.

2. $3x < 0$ y $x - 2 < 0$

$x < 0$ y $x < 2$

Siempre que $x < 0$, se cumple también que $x < 2$. No al revés.

$\therefore f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

- $f(x)$ será decreciente donde $f'(x) < 0$, es decir, donde $3x^2 - 6x < 0$:

- $3x(\quad) < 0$ ahora recordemos que el producto de dos factores es negativo si y solo si _____ o _____.

1. $3x > 0$ y $x - 2 < 0$

$x > 0$ y $x < 2$

$\therefore f(x)$ es decreciente en $(0, 2)$.

2. $3x < 0$ y $x - 2 > 0$

$x < 0$ y $x > 2$

¡Imposible! No hay valores de x que sean menores que cero y al mismo tiempo mayores que 2.

$f(x)$ será constante, es decir, estará momentáneamente horizontal, su tangente será paralela al eje X , donde $f'(x) = 0$: $3x(x - 2) = 0$ si $x = 0$ y $x = 2$.

Estos son los dos valores de x donde la función es constante a los que llamamos “puntos críticos”.

Otra forma de encontrar los valores de x donde la función es creciente o decreciente, sin tener que resolver desigualdades es la siguiente:

Se encuentran los valores de x donde $f'(x)$ vale cero, resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$.

Los n valores de x obtenidos al resolver la ecuación anterior nos permiten dividir el eje X en $n+1$ intervalos ajenos.

Se construye una tabla en la que los x valores en cada intervalo y, analizando el signo que toma $f'(x)$ en cada uno de ellos, podemos decidir si $f(x)$ es creciente o decreciente, con base en el criterio al que arribamos antes.

Trabajando en esta forma con $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $3x^2 - 6x = 0$; $3x(x-2) = 0$; si $3x = 0$, $x = 0$; si $x-2 = 0$, $x = 2$.

$f(x)$ es constante en $x = 0$ y en $x = 2$.

Los valores 0 y 2 dividen al eje X en tres intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$.

La tabla que construiremos será del tipo:

<i>Intervalo</i>	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Valor de x en el intervalo	-1	1	3
Valor de $f'(x)$ en el intervalo	9	-3	9
Signo de $f'(x)$	+	-	+
Carácter de $f(x)$ en el intervalo	Creciente	Decreciente	Creciente

Por lo tanto $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, mientras que es decreciente en el intervalo $(0, 2)$.

Problema 2: Empleando DERIVE encuentra los intervalos donde la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ es creciente y decreciente, así como los puntos donde es constante. Observa que esta función no está definida en $x = 0$.

Problema 3: Utiliza DERIVE y encuentra las regiones donde cada una de las siguientes funciones es creciente, decreciente o constante.

- $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$
- $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
- $f(x) = x^4 + 6x^2 - 5$
- $f(x) = x^3 - 1$
- $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$

D. RELACION ENTRE LA GRAFICA DE UNA FUNCION Y SU SEGUNDA DERIVADA

CAPACIDAD: Infiere, por medio de un análisis grafico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y su segunda derivada; signo de la segunda derivada asociado con concavidad de la función y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad.

PROBLEMA 1.- (Concavidad de una función)

¿Puede la segunda derivada de una función proporcionar información acerca del tipo de concavidad que presenta una función primitiva $f(x)$?

Emplea DERIVE y grafica la función $f(x) = (x - 3)^2 + 4$ además determina las ecuaciones y graficas de las rectas tangentes a la curva en los puntos $x = 0$ y $x = 5$.

Empleando nuevamente DERIVE grafica la función $f(x) = -(x + 7)^2 - 1$ además determina las ecuaciones y gráficas de las rectas tangentes a la curva en los puntos $x = -10$ y $x = -5$.

Observaciones:

Observa en principio que donde la curva es cóncava hacia arriba sus tangentes están por debajo de la curva y en caso de ser cóncava hacia abajo sus tangentes están por arriba de ella.

Pero donde la curva no es cóncava, la tangente la atraviesa.

Una función que presenta los dos tipos de concavidad posibles: hacia abajo y hacia arriba es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Empleando DERIVE calcula su primera y segunda derivada y graficas todas las funciones en un mismo plano. Localiza con cuidado cada grafica, colorea con un color diferente, así podrás identificarlas fácilmente en el siguiente análisis.

En el intervalo $(-\infty, 1)$:

$f(x)$ es cóncava hacia abajo.

$f'(x)$ que representa las pendientes de las rectas tangentes a $f(x)$, es decreciente. No deja de bajar, desde $-\infty$ hasta $x = 1$.

$f''(x)$, que representa las pendientes de las rectas tangentes a $f'(x)$, es negativa, porque $f'(x)$ es decreciente.

Exactamente en $x = 1$:

- o $f(x)$ cambia de concavidad. Deja de ser cóncava hacia abajo, pero aun no es cóncava hacia arriba.
- o $f'(x)$ es constante; tiene un punto crítico, porque $f''(x) = 0$.
- o $f''(x)$ corta al eje X, vale cero. Dejó de ser negativa y aún no es positiva.

En el intervalo $(1, \infty)$:

- o $f(x)$ es cóncava hacia arriba.
- o $f'(x)$ es creciente.
- o $f''(x)$, es positiva.

Una vez mas lo que has observado no es una coincidencia o un caso aislado, nuevamente corresponde a una importante relación entre una función y su segunda derivada.

Conclusión:

- Para toda función $f(x)$ cuya segunda derivada existe en el intervalo (a,b) :
- Si $f''(x) > 0$ para todo valor x en (a,b) , la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en (a,b) .
- Si $f''(x) < 0$ para todo valor x en (a,b) , la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en (a,b) .

Definición.- Se llama punto de inflexión al punto donde la grafica de la función cambia de ser cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, o viceversa, si existe la tangente en ese punto.

La función que analizamos antes, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, tiene un punto de inflexión en $x = 1$, porque $f''(1) = 0$.

Ejercicios

Estudia si tiene la función $f(x) = x^4$, punto de inflexión en $x = 0$.

Con ayuda de DERIVE halla los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y/o hacia abajo, así como las coordenadas de los puntos de inflexión, si existen. Elaborar las graficas necesarias.

o $f(x) = \frac{3}{x^2 + 3}$

o $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

o $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$

o $f(x) = 6x^2 - x^4$

APRENDIENDO CALCULO DIFERENCIAL CON DERIVE

SESION N° 3

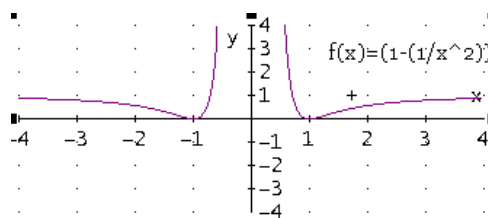
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS: MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION

A. CLASIFICACION DE LOS PUNTOS CRITICOS DE UNA FUNCIÓN

CAPACIDAD: Determina los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o de inflexiones.

RECORDEMOS:

Localiza en la gráfica de la figura 1 el punto(s) m , mínimo(s), y da sus coordenadas.

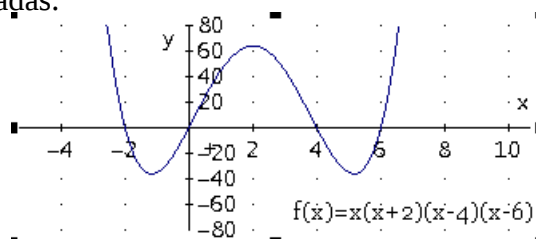


$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2$$

Figura 1

Si observas la gráfica notarás que existen dos puntos más bajo que todos los demás donde la curva es cóncava hacia arriba, a los que llamaremos mínimos locales. Las coordenadas de esos puntos en la grafica son $m_1(\quad , \quad)$ y $m_2(\quad , \quad)$.

Localiza en la gráfica de la figura 2 el punto M, máximo, y da sus coordenadas.



$$f(x) = x(x+2)(x-4)(x-6)$$

Figura 2

Si observas la grafica de la función, encontraras que alcanza un punto más alto en la región donde es cóncava hacia abajo. Las coordenadas de ese punto son: $M(\quad , \quad)$. A un punto como este que se encuentra en la cima de una región donde la curva es cóncava hacia abajo, se le llama máximo local, por que en efecto es el punto mas alto, aunque no de toda la curva sino de una región.

A los valores máximos o mínimos los llamaremos **valores extremos**.

Pregunta: ¿Qué coincidencias y qué diferencias hay donde $f(x)$ tiene máximo y donde tiene mínimo?

Coincidencias:

Diferencias:

Para determinar los valores extremos de una función, en un primer acercamiento, se requiere:

1. Obtener la primera derivada de la función, para investigar dónde $f'(x)$ es constante.
2. Igualar a cero la primera derivada: $f'(x) = 0$.
3. Resolver la ecuación resultante, para encontrar los puntos críticos de $f(x): x_1, x_2, \dots$, donde podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.
4. Bosquejar la gráfica de la función.
5. Elabora una conjetura acerca del carácter de cada punto crítico: máximo, mínimo o punto de inflexión.

Emplea DERIVE y en cada función de los siguientes ejemplos, determina los puntos críticos, bosqueja una gráfica y elabora una conjetura acerca del carácter de cada punto crítico.

Ejercicio N° 1

Graficar la función $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2$ y completar la información.

1. $f'(x) =$
2. $f'(x) = 0$ de donde $x_1 =$ $\therefore f(x)$ tiene un punto crítico.
3. ¿Qué sucede con la gráfica de la primera derivada en los puntos críticos de la función?
4. Mostrar la gráfica y determinar que tipo de punto es x_1 .
5. Determinar la segunda derivada y analizar su comportamiento grafico.

Ejercicio N° 2

Graficar la función $f(x) = x(x+2)(x-4)(x-6)$ y completar la información.

1. $f'(x) =$
2. $f'(x) = 0$ de donde $x_1 =$, $x_2 =$, $x_3 =$ $\therefore f(x)$ tiene tres puntos críticos.
3. ¿Qué sucede con la gráfica de la primera derivada en los puntos críticos de la función?
4. Mostrar la gráfica y determinar que tipo de puntos críticos tiene.
5. Determinar la segunda derivada y analizar su comportamiento grafico.

Ejercicio N° 3

Graficar la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ y completar la información.

1. $f'(x) =$
2. $3x^2 - 6x = 3x(\quad - \quad) = 0$ de donde $x_1 =$ y $x_2 =$ $\therefore f(x)$ tiene dos puntos críticos.
3. Indicar el máximo y el mínimo.
6. ¿Qué sucede con la gráfica de la primera derivada en los puntos críticos de la función?
4. Mostrar una gráfica.

5. Grafique la primera derivada y determine si el signo de ella antes y después del punto crítico coincide con la propiedad de la función de ser creciente o decreciente en los intervalos formados.
6. Grafique la segunda derivada y analice la información que representa.

Ejercicio N °4 (trabajo)

Graficar la función $f(x) = \frac{3}{x^2 + 3}$ y completar la información.

1. $f'(x) =$
2. $\frac{-6x}{(x^2 + 3)^2} = 0$
3. Puesto que $(x^2 + 3)^2$ siempre será mayor que cero, la única posibilidad de que $\frac{-6x}{(x^2 + 3)^2} = 0$ es que $-6x = 0$ luego $x = 0$.
 $\therefore f(x)$ tiene sólo un punto crítico.
4. Determine a través de la gráfica si se trata de un máximo o mínimo.
5. Grafique la primera derivada y determine si el signo de ella antes y después del punto crítico coincide con la propiedad de la función de ser creciente o decreciente en los intervalos formados.
6. Grafique la segunda derivada y analice la información que representa.

B. CRITERIO DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA PARA ENCONTRAR VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCION

CAPACIDAD: Comprende y aplica el criterio de la primera y segunda derivada para encontrar valores extremos de una función.

¿Existe un procedimiento formal para determinar los valores extremos de una función?

En el punto anterior pudimos determinar los valores críticos de una función y decidir si se trataba de un máximo o mínimo o un punto de inflexión.

Pero tuvimos las siguientes limitaciones:

- Nuestra decisión quedó a nivel de conjetura, porque para tomarla nos apoyamos en una grafica y eso le quita formalidad y precisión al procedimiento.
- No obtuvimos el valor del máximo o mínimo de la función, ni las coordenadas en el caso del punto de inflexión.

En esta sesión trabajaremos, en lápiz y papel, el procedimiento formal para obtener los valores extremos de una función, así como sus puntos de inflexión, y resolveremos los ejercicios usando derivadas así podemos comparar entre el trabajo analítico y los cálculos que podemos hacer empleando DERIVE.

RECORDAR:

Criterio de la primera derivada

Hipótesis: Si $f(x)$ es una función continua en un Intervalo (a,b) , x_1 es el único punto crítico en ese intervalo y $f(x)$ es derivable en (a,b) .

Entonces:

Tesis: el punto crítico $(x_1, f(x_1))$ se puede clasificar de acuerdo a la siguiente tabla:

Signo de $f'(x)$ en (a, x_1)	Signo de $f'(x)$ en (x_1, b)	Decisión
+	-	$f(x_1)$ es un máximo
-	+	$f(x_1)$ es un mínimo
+	+	$f(x_1)$ es un posible punto de inflexión.
-	-	$f(x_1)$ es un posible punto de inflexión.

Criterio de la segunda derivada

Hipótesis: Si $f(x)$ es una función que tiene primera y segunda derivadas en un intervalo (a, b) , y tiene un punto crítico en x_1 .

Tesis: el punto crítico $(x_1, f(x_1))$ se puede clasificar de acuerdo con el siguiente criterio:

- Si $f''(x) > 0$, $f(x)$ tendrá un máximo en x_1 , porque es cóncava hacia arriba.
- Si $f''(x) < 0$, $f(x)$ tendrá un mínimo en x_1 , porque es cóncava hacia abajo.
- Si $f''(x) = 0$, $f(x)$ podría tener un punto de inflexión x_1 , si está cambiando la concavidad.

Ejercicio N° 1

Determina los máximos y mínimos de la siguiente función:
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, completa la información que se pide y luego compara tus resultados con los obtenidos empleando DERIVE:

1. $f'(x) =$
2. $3x^2 - 6x = 0$

3. $3x^2 - 6x = 3x(\underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}) = 0$ de donde $x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$ y $x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$

4. Los valores 0 y 2 dividen al eje X en los intervalos ajenos: $(-\infty, 0), (0, 2), (2, \infty)$

5. Elaboramos una tabla para dar valores a x . Completa el valor y el signo de $f'(x)$

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Valor de x	-1	1	3
Valor de $f'(x)$			
Signo de $f'(x)$			

6. De acuerdo con el criterio de la primera derivada:

a) En $x_1 = 0$, $f(x)$ tiene un , porque $f'(x)$.

b) En $x_2 = 2$, $f(x)$ tiene un , porque $f'(x)$.

7. El valor máximo de $f(x)$ en , es .

8. El valor mínimo de $f(x)$ en , es .

Ejercicio N° 2

Determina los máximos y mínimos de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 3}, \text{ completa la información que se pide y luego compara tus}$$

resultados con los obtenidos empleando DERIVE:

1. $f'(x) =$

2. $\frac{-6x}{(x^2 + 3)^2} = 0$

3. Puesto que $(x^2 + 3)^2$ siempre será mayor que cero, la única posibilidad de que $\frac{-6x}{(x^2 + 3)^2} = 0$ es que $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
4. El valor de z divide al eje X en 2 intervalos: $(-\infty, 0), (0, \infty)$ ¿Qué sucede en el punto cero?
5. Elaboramos una tabla para dar valores a x . Completa el valor y el signo de $f'(x)$

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Valor de x	-1	1
Valor de $f'(x)$		
Signo de $f'(x)$		

6. $f(x)$ presenta un en .

Ejercicio N° 3

Empleando Derive y el criterio de la segunda derivada, determina los máximos y mínimos de la siguiente función: $f(x) = (x - 4)^3 + 10$, además completar la información y anexa la grafica de las función para verificar las validez de tus resultados:

- $f'(x) =$
- $3(x - 4)^2 = 0$
- $3(x^2 - 8x + 16) = 0$ de donde $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- $f''(x) =$
- $f''(4) = 0$. $\therefore f(x)$ tiene un
- Las coordenadas de ese punto son $(4, f(4))$, es decir, $(4, \quad)$
- $f''(2) = \underline{\hspace{2cm}} > 0$. $\therefore f(x)$ tiene un

Trabajo en casa

Ejercicio N° 1

Determina los máximos y mínimos de la siguiente función:

$f(x) = (x-4)^3$, completa la información que se pide y luego compara tus resultados con los obtenidos empleando DERIVE:

1. $f'(x) =$
2. $3(x-4)^2 = 0$
3. $3(x^2 - 8x + 16) = 0$ de donde $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. El valor 4 divide al eje X en dos intervalos ajenos:
 $(-\infty, 4), (4, \infty)$
5. Elaboramos una tabla para dar valores a x . Completa el valor y el signo de $f'(x)$

Intervalo	$(-\infty, 4)$	$(4, \infty)$
Valor de x	2	5
Valor de $f'(x)$		
Signo de $f'(x)$		

6. De acuerdo con el criterio de la primera derivada:
En $x_1 = 4$, $f(x)$ presenta: _____

Ejercicio N° 2

Determina los máximos y mínimos de la siguiente función:

$f(x) = x + \frac{1}{x}$, completa la información que se pide y luego compara tus resultados con los obtenidos empleando DERIVE:

1. $f'(x) =$
2. $1 - \frac{1}{x^2} = 0$

3. $1 - \frac{1}{x^2} = 0, 1 = \frac{1}{x^2}, x^2 = 1$, de donde $x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$ y $x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$
4. Los valores 1 y -1 dividen al eje X en 3 intervalos ajenos: $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ ¿Qué sucede en el punto cero?
5. Elaboramos una tabla para dar valores a x . Completa el valor y el signo de $f'(x)$

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Valor de x	-2	-1/2	1/2	3
Valor de $f'(x)$				
Signo de $f'(x)$				

6. El valor máximo de $f(x)$ en $\underline{\hspace{1cm}}$, es $\underline{\hspace{1cm}}$.
7. El valor mínimo de $f(x)$ en $\underline{\hspace{1cm}}$, es $\underline{\hspace{1cm}}$.

Ejercicio N° 3

Empleando Derive y el criterio de la segunda derivada, determina los máximos y mínimos de la siguiente función: $f(x) = x + \frac{1}{x}$, además completar la información y anexa la grafica de las función para verificar las validez de tus resultados:

1. $f'(x) =$
2. $1 - \frac{1}{x^2} = 0$
3. $1 - \frac{1}{x^2} = 0, 1 = \frac{1}{x^2}, x^2 = 1$, de donde $x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$ y $x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$
4. $f''(x) =$
5. $f''(1) = \underline{\hspace{1cm}} > 0. \therefore f(x)$ tiene un $\underline{\hspace{1cm}}$
6. Las coordenadas de ese punto son $(1, f(1))$, es decir, $(1, \underline{\hspace{1cm}})$
7. $f''(-1) = \underline{\hspace{1cm}} < 0. \therefore f(x)$ tiene un $\underline{\hspace{1cm}}$
8. Las coordenadas de ese punto son $(-1, f(-1))$, es decir, $(-1, \underline{\hspace{1cm}})$

Ejercicio N° 4

Calcula los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$1. \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

$$3. \quad f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$$

$$4. \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$$

Representa las gráficas para comprobarlo.

C. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

CAPACIDAD: Resuelve problemas que involucran máximos o mínimos de una función empleando derive.

Has aprendido a encontrar valores extremos de una función por medio de dos criterios: el de la primera derivada y el de la segunda derivada. Lo que haremos ahora constituye una de las principales aplicaciones del cálculo diferencial, utilizado en muy diversas áreas del conocimiento. Con frecuencia en los procesos industriales, científicos y tecnológicos se busca optimizar las condiciones en que se llevan a cabo, así como los resultados que se obtienen.

Por ejemplo, se pretende envasar el mayor volumen de un producto empleando la menor cantidad posible de material, obtener el mejor efecto de un medicamento con la menor dosis administrada, encontrar el número de artículos que deben venderse para obtener la máxima ganancia.

Todo esto es optimizar un proceso y el cálculo es una herramienta muy útil para lograrlo.

Para resolver un problema de optimización, básicamente debemos proceder de la siguiente manera:

1. A partir del enunciado del problema, obtener la función que queremos optimizar de modo que dependa de una sola variable.
2. aplicar uno de los criterios para encontrar los valores extremos de una función.
3. interpretar los resultados con base en la naturaleza del problema planteado.

PROBLEMA 1

Cuando alguien tose, la traquea se contrae violentamente, lo que afecta de modo directo a la velocidad del aire expulsado a través de ella. Si la velocidad del aire durante la tosida se puede expresar como: $v(r) = k(p-r)r^2$, donde k es una constante positiva que depende de la persona, p es el radio normal de la traquea y r el radio durante el golpe de tos,

- a) Utilice una escala apropiada para mostrar la grafica de la velocidad del aire durante la tosida. Utilice los valores de $K=1$ y $p=3$.
- b) Determina el dominio apropiado para estudiar esta función.
- c) ¿Qué valor del radio r producir la máxima velocidad del aire expulsado? ¿Cuál es la velocidad?

Solución

1. Siendo la función a maximizar: $v(r) = k(p-r)r^2 = k(p^2r - r^3)$
2. La primera derivada es: $\frac{dv}{dr} =$
3. Los puntos críticos son: $r_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ y $r_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
4. luego la velocidad del aire expulsado tiene un máximo cuando:
 $r =$

PROBLEMA 2

Se quiere fabricar latas de refresco cuyo contenido sea 33cl, de manera que el costo de la chapa sea mínimo. Hallar las dimensiones que ha de

ANEXO 4

PLANES DE CLASE

Los planes de clase, en general, son los mismos para ambos grupos pero si difieren del lugar donde se trabajan pues el grupo experimental recibirá clases en el laboratorio de cómputo, mientras que el grupo de control trabajara sus sesiones de clase en el aula.

Debo indicar también que solo la tercera clase de ambos grupos será en el salón de clases pues se deben trabajar las derivadas de funciones trigonométricas, logarítmicas, implícitas, regla de L'Hospital.

El modelo de plan de clase que presento a continuación es el que manejamos en la universidad para nuestra carpeta docente. Fue diseñado por los docentes de la Escuela de Educación y lo trabajamos en todas las escuelas.

Presento cuatro planes de clase que corresponde a las 4 sesiones que tuvimos para resolver el capítulo de Derivadas.



PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE 2006-II
ESCUELA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS

ASIGNATURA:		Ciclo:	Sección:	Semana Nº Sesión	DOCENTE:	
COMPETENCIA:						
TÍTULO:			CAPACIDAD:			
ACTIVIDADES		TIEMPO	INDICADORES			
INICIALES			Destreza/Habilidad	Contenido	Producto	
PROCESO						
			Actitudes			
FINALES						

--	--	--	--



ASIGNATURA: MATEMÁTICA I		Ciclo: II Sección: A, B	Semana 12 Nº Sesión 1	DOCENTE: Lic Diana Quintana Sánchez
COMPETENCIA: Interpreta, formula, analiza y resuelve problemas de contexto real, utilizando definiciones, técnicas y aplicaciones del Cálculo Diferencial.				

comunicación, investigación, razonamiento y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia.					
CONTENIDO: Derivadas		CAPACIDAD: Resuelve problemas sobre razón de cambio, recta tangente y grafico d derivadas.			
ACTIVIDADES	TIEMPO	INDICADORES			
INICIALES		Destreza/Habilidad	Contenido	Producto	
- Saludo. - Para esta clase he preparado un relato sobre la historia del cálculo diferencial. La historia de Newton y Leibnitz.	15'	Resuelve	Razón de cambio.	Opinión sobre los protagonistas de la Historia de Calculo.	1. Resuelve aplicación
		Encuentra	Dos Problemas con un mismo tema.		
ACTIVIDADES DE PROCESO		Calcula	Definición de Derivada.	Presentación de ejercicios propuestos en clase.	2. Encuentra funciones
- Se expone el fundamento teórico sobre la definición de derivada y se entrega el material didáctico. - Se resuelve en parejas en la solución del primer trabajo práctico. - Los alumnos exponen en la pizarra la solución de los problemas. - Con el grupo experimental se trabaja la guía de laboratorio.	2h15' break 1h30'	Grafica	Resolución de problema empleando derivadas.		3. Calcula la $f'(x)$ en de derivad
ACTIVIDADES FINALES		Actitudes			4. Grafica derivadas.
Presentar en la siguiente clase la solución de los ejercicios propuestos en la separata.	10'	Valora de manera crítica la importancia de la historia del calculo así mismo muestra orden e interés por aprender.			
METODO	AYUDAS	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN			

<table><tr><td>x</td><td>Expositivas-Interactivas</td></tr><tr><td></td><td>Investigación Individual</td></tr><tr><td></td><td>Debate</td></tr><tr><td></td><td>Proyecto</td></tr><tr><td></td><td>Demostración</td></tr><tr><td>x</td><td>Investigación por equipos</td></tr><tr><td></td><td>Otros</td></tr></table>		x	Expositivas-Interactivas		Investigación Individual		Debate		Proyecto		Demostración	x	Investigación por equipos		Otros	<table><tr><td>Texto</td><td></td></tr><tr><td>Separatas-resumen</td><td>x</td></tr><tr><td>Transparencias-Diapositivas</td><td></td></tr><tr><td>Ejercicios Aplicación</td><td>x</td></tr><tr><td>Casos</td><td></td></tr><tr><td>Presentación Multimedia</td><td>x</td></tr><tr><td>Otros</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	Texto		Separatas-resumen	x	Transparencias-Diapositivas		Ejercicios Aplicación	x	Casos		Presentación Multimedia	x	Otros						<table><tr><td colspan="2">Observación Situación</td></tr><tr><td></td><td>Lista de cotejo</td></tr><tr><td>x</td><td>Registro anecdótico</td></tr><tr><td></td><td>Escala de actitud</td></tr><tr><td></td><td>Otros(Indicar)</td></tr></table>	Observación Situación			Lista de cotejo	x	Registro anecdótico		Escala de actitud		Otros(Indicar)	<table><tr><td colspan="2">Ejercicio Práctico</td></tr><tr><td></td><td>Mapa mental</td></tr><tr><td></td><td>Mapa Conceptual</td></tr><tr><td>x</td><td>Estudios de Casos</td></tr><tr><td>x</td><td>Prácticas- Laboratorio</td></tr><tr><td></td><td>Proyecto</td></tr><tr><td></td><td>Portafolio</td></tr><tr><td></td><td>Ensayos</td></tr><tr><td></td><td>Otros (Indicar)</td></tr></table>	Ejercicio Práctico			Mapa mental		Mapa Conceptual	x	Estudios de Casos	x	Prácticas- Laboratorio		Proyecto		Portafolio		Ensayos		Otros (Indicar)	<table><tr><td colspan="2">Pruebas Escritas</td></tr><tr><td></td><td>Pruebas de Desempeño</td></tr><tr><td></td><td>Examen Temático</td></tr><tr><td>x</td><td>Ejercicios Interpretativos</td></tr><tr><td></td><td>Pruebas Objetivas</td></tr></table>	Pruebas Escritas			Pruebas de Desempeño		Examen Temático	x	Ejercicios Interpretativos		Pruebas Objetivas	Si de
x	Expositivas-Interactivas																																																																											
	Investigación Individual																																																																											
	Debate																																																																											
	Proyecto																																																																											
	Demostración																																																																											
x	Investigación por equipos																																																																											
	Otros																																																																											
Texto																																																																												
Separatas-resumen	x																																																																											
Transparencias-Diapositivas																																																																												
Ejercicios Aplicación	x																																																																											
Casos																																																																												
Presentación Multimedia	x																																																																											
Otros																																																																												
Observación Situación																																																																												
	Lista de cotejo																																																																											
x	Registro anecdótico																																																																											
	Escala de actitud																																																																											
	Otros(Indicar)																																																																											
Ejercicio Práctico																																																																												
	Mapa mental																																																																											
	Mapa Conceptual																																																																											
x	Estudios de Casos																																																																											
x	Prácticas- Laboratorio																																																																											
	Proyecto																																																																											
	Portafolio																																																																											
	Ensayos																																																																											
	Otros (Indicar)																																																																											
Pruebas Escritas																																																																												
	Pruebas de Desempeño																																																																											
	Examen Temático																																																																											
x	Ejercicios Interpretativos																																																																											
	Pruebas Objetivas																																																																											
Bibliografía: Análisis Matemático I. Eduardo Espinoza Ramos Análisis Matemático. Máximo Mittac Meza				Página Web: www.ucvpiura.edu.pe (aula virtual)																																																																								



PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE 2006- II
ESCUELA DE INGENIERIA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS

ASIGNATURA: MATEMATICA I	Ciclo: II Sección: A	Semana 13 Nº Sesión 1	DOCENTE: Lic Diana Quintana Sánchez
COMPETENCIA: Interpreta, formula, analiza y resuelve problemas de contexto real, utilizando definiciones, técnicas y aplicaciones del Cálculo Diferencial, comunicación, investigación, razonamiento y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia.			

CONTENIDO: Derivadas		CAPACIDAD: Infiere, mediante un análisis grafico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y el signo de la primera derivada asociado con crecimiento o decrecimiento de la función, y derivada nula con puntos críticos.			
ACTIVIDADES	TIEMPO	INDICADORES			ÍTEM
INICIALES		Destreza/Habilidad	Contenido	Producto	
- Saludo. - Esta clase se inicia con una lluvia de ideas sobre lo trabajado en la clase anterior.	15'	Calcula	Reglas de Derivación	Solución de ejercicios sobre derivadas.	5. Calcule la derivada de las siguientes funciones.
ACTIVIDADES DE PROCESO		Determina	Derivadas de orden superior.	Análisis de grafico de funciones y su primera derivada.	6. Encuentra derivadas de orden superior de funciones.
- Para esta sesión los alumnos han descargado el material del aula virtual. Pero para el grupo experimental la guía se entrega en clase. - Se presenta el contenido y se trabaja dando espacios para las posibles preguntas de los alumnos. Además se presentan ejemplos. - Se solicita a los alumnos que voluntariamente expongan sus soluciones.	2h 15' break 1h 30'	Analiza	Análisis gráfico de funciones y su primera derivada	Ejemplos de primera y segunda derivada.	7. Analiza las funciones y su comportamiento.
ACTIVIDADES FINALES		Actitudes			
Presentar en la siguiente clase la solución del trabajo práctico N° 4.	10'	Valora la importancia de conocer el comportamiento grafico de una función y su derivada.			
METODO	AYUDAS	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN			

<table><tr><td>x</td><td>Expositivas-Interactivas</td></tr><tr><td></td><td>Investigación Individual</td></tr><tr><td></td><td>Debate</td></tr><tr><td></td><td>Proyecto</td></tr><tr><td></td><td>Demostración</td></tr><tr><td></td><td>Investigación por parejas</td></tr><tr><td></td><td>Otros</td></tr></table>		x	Expositivas-Interactivas		Investigación Individual		Debate		Proyecto		Demostración		Investigación por parejas		Otros	<table><tr><td>Texto</td><td></td></tr><tr><td>Separatas-resumen</td><td>x</td></tr><tr><td>Transparencias-Diapositivas</td><td></td></tr><tr><td>Ejercicios Aplicación</td><td>x</td></tr><tr><td>Casos</td><td></td></tr><tr><td>Presentación Multimedia</td><td></td></tr><tr><td>Otros</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	Texto		Separatas-resumen	x	Transparencias-Diapositivas		Ejercicios Aplicación	x	Casos		Presentación Multimedia		Otros						Observación Situación	<table><tr><td></td><td>Lista de cotejo</td></tr><tr><td>x</td><td>Registro anecdótico</td></tr><tr><td></td><td>Escala de actitud</td></tr><tr><td></td><td>Otros(Indicar)</td></tr></table>		Lista de cotejo	x	Registro anecdótico		Escala de actitud		Otros(Indicar)	Ejercicio Práctico	<table><tr><td></td><td>Mapa mental</td></tr><tr><td></td><td>Mapa Conceptual</td></tr><tr><td></td><td>Estudios de Casos</td></tr><tr><td>x</td><td>Prácticas- Laboratorio</td></tr><tr><td></td><td>Proyecto</td></tr><tr><td></td><td>Portafolio</td></tr><tr><td></td><td>Ensayos</td></tr><tr><td></td><td>Otros (Indicar)</td></tr></table>		Mapa mental		Mapa Conceptual		Estudios de Casos	x	Prácticas- Laboratorio		Proyecto		Portafolio		Ensayos		Otros (Indicar)	Pruebas Escritas de Evaluación	<table><tr><td></td><td>Pruebas de Desempeño</td></tr><tr><td></td><td>Examen Temático</td></tr><tr><td>x</td><td>Ejercicios Interpretativos</td></tr><tr><td></td><td>Pruebas Objetivas</td></tr></table>		Pruebas de Desempeño		Examen Temático	x	Ejercicios Interpretativos		Pruebas Objetivas	Situación	<table><tr><td>x</td></tr><tr><td>x</td></tr><tr><td></td></tr><tr><td></td></tr></table>	x	x		
x	Expositivas-Interactivas																																																																													
	Investigación Individual																																																																													
	Debate																																																																													
	Proyecto																																																																													
	Demostración																																																																													
	Investigación por parejas																																																																													
	Otros																																																																													
Texto																																																																														
Separatas-resumen	x																																																																													
Transparencias-Diapositivas																																																																														
Ejercicios Aplicación	x																																																																													
Casos																																																																														
Presentación Multimedia																																																																														
Otros																																																																														
	Lista de cotejo																																																																													
x	Registro anecdótico																																																																													
	Escala de actitud																																																																													
	Otros(Indicar)																																																																													
	Mapa mental																																																																													
	Mapa Conceptual																																																																													
	Estudios de Casos																																																																													
x	Prácticas- Laboratorio																																																																													
	Proyecto																																																																													
	Portafolio																																																																													
	Ensayos																																																																													
	Otros (Indicar)																																																																													
	Pruebas de Desempeño																																																																													
	Examen Temático																																																																													
x	Ejercicios Interpretativos																																																																													
	Pruebas Objetivas																																																																													
x																																																																														
x																																																																														
Bibliografía: Análisis Matemático I. Eduardo Espinoza Ramos Análisis Matemático. Máximo Mittac Meza					Página Web: www.ucvpiura.edu.pe (aula virtual)																																																																									



PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE 2006-II

ESCUELA DE INGENIERIA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS

ASIGNATURA: MATEMATICA I	Ciclo: II	Sección: A, B	Semana 14 Nº Sesión 1	DOCENTE: Lic Diana Quintana Sánchez
COMPETENCIA: Interpreta, formula, analiza y resuelve problemas de contexto real, utilizando definiciones, técnicas y aplicaciones del Cálculo I, comunicación, investigación, razonamiento y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia.				
CONTENIDO: Derivadas			CAPACIDAD: Determina los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos.	
ACTIVIDADES		TIEMPO	INDICADORES	

INICIALES		15'	Destreza/ Habilidad	Contenido	Producto	• Identifica que em determina • Demuestra derivación funciones calcular. • Emplea superior p
• Saludo. • Esta clase se inicia con la presentación de un problema el cual implica derivar una función trascendente, la intención es generar el desequilibrio cognitivo.			Identifica	Reglas de Derivación de funciones : Trigonometricas. Trigonometricas Inversas. Exponenciales. Logarítmicas. Reglas de Derivación de funciones Implícitas. Derivadas de orden superior.	Solución de ejercicios y problemas de la separata referidos a derivadas.	
ACTIVIDADES DE PROCESO		Demuestra				
• Para esta sesión los alumnos han descargado el material del aula virtual. • La clase se desarrolla empleando el método expositivo dando espacios para las posibles preguntas de los alumnos. Además se presentan ejemplos y la solución del problema planteando al inicio de la clase. • Con el grupo experimental no hubo laboratorio. • Se resuelve de forma individual los ejercicios del trabajo práctico. • Se solicita a los alumnos que voluntariamente expongan sus soluciones.		Emplea				
ACTIVIDADES FINALES		2h15' break 1h30'				
• Presentar en la siguiente clase la solución del trabajo práctico de la separata.		10'	Actitudes Interés por conocer fundamentos teóricos que le permitan resolver ejercicios y problemas.			
METODO		AYUDAS		TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN		

<table><tr><td>x</td><td>Expositivas-Interactivas</td></tr><tr><td></td><td>Investigación Individual</td></tr><tr><td></td><td>Debate</td></tr><tr><td></td><td>Proyecto</td></tr><tr><td></td><td>Demostración</td></tr><tr><td></td><td>Investigación por parejas</td></tr><tr><td></td><td>Otros</td></tr></table>		x	Expositivas-Interactivas		Investigación Individual		Debate		Proyecto		Demostración		Investigación por parejas		Otros	<table><tr><td>Texto</td><td></td></tr><tr><td>Separatas-resumen</td><td>x</td></tr><tr><td>Transparencias-Diapositivas</td><td></td></tr><tr><td>Ejercicios Aplicación</td><td>x</td></tr><tr><td>Casos</td><td></td></tr><tr><td>Presentación Multimedia</td><td></td></tr><tr><td>Otros</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	Texto		Separatas-resumen	x	Transparencias-Diapositivas		Ejercicios Aplicación	x	Casos		Presentación Multimedia		Otros						Observación Situación	<table><tr><td></td><td>Lista de cotejo</td></tr><tr><td>x</td><td>Registro anecdótico</td></tr><tr><td></td><td>Escala de actitud</td></tr><tr><td></td><td>Otros(Indicar)</td></tr></table>		Lista de cotejo	x	Registro anecdótico		Escala de actitud		Otros(Indicar)	Ejercicio Práctico	<table><tr><td></td><td>Mapa mental</td></tr><tr><td></td><td>Mapa Conceptual</td></tr><tr><td></td><td>Estudios de Casos</td></tr><tr><td>x</td><td>Prácticas- Laboratorio</td></tr><tr><td></td><td>Proyecto</td></tr><tr><td></td><td>Portafolio</td></tr><tr><td></td><td>Ensayos</td></tr><tr><td></td><td>Otros (Indicar)</td></tr></table>		Mapa mental		Mapa Conceptual		Estudios de Casos	x	Prácticas- Laboratorio		Proyecto		Portafolio		Ensayos		Otros (Indicar)	Pruebas Escritas de Evaluación	<table><tr><td></td><td>Pruebas de Desempeño</td></tr><tr><td></td><td>Examen Temático</td></tr><tr><td>x</td><td>Ejercicios Interpretativos</td></tr><tr><td></td><td>Pruebas Objetivas</td></tr></table>		Pruebas de Desempeño		Examen Temático	x	Ejercicios Interpretativos		Pruebas Objetivas
x	Expositivas-Interactivas																																																																							
	Investigación Individual																																																																							
	Debate																																																																							
	Proyecto																																																																							
	Demostración																																																																							
	Investigación por parejas																																																																							
	Otros																																																																							
Texto																																																																								
Separatas-resumen	x																																																																							
Transparencias-Diapositivas																																																																								
Ejercicios Aplicación	x																																																																							
Casos																																																																								
Presentación Multimedia																																																																								
Otros																																																																								
	Lista de cotejo																																																																							
x	Registro anecdótico																																																																							
	Escala de actitud																																																																							
	Otros(Indicar)																																																																							
	Mapa mental																																																																							
	Mapa Conceptual																																																																							
	Estudios de Casos																																																																							
x	Prácticas- Laboratorio																																																																							
	Proyecto																																																																							
	Portafolio																																																																							
	Ensayos																																																																							
	Otros (Indicar)																																																																							
	Pruebas de Desempeño																																																																							
	Examen Temático																																																																							
x	Ejercicios Interpretativos																																																																							
	Pruebas Objetivas																																																																							
Bibliografía: Análisis Matemático I. Eduardo Espinoza Ramos Análisis Matemático. Máximo Mittac Meza				Página Web: www.ucvpiura.edu.pe (aula virtual)																																																																				



PLAN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE 2006-II

ESCUELA DE INGENIERIA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS

ASIGNATURA: MATEMATICA I	Ciclo: II	Sección: B	Semana 15	DOCENTE: Lic Diana Quintana Sánchez	
			Nº Sesión 1		
COMPETENCIA: Interpreta, formula, analiza y resuelve problemas de contexto real, utilizando definiciones, técnicas y aplicaciones del Cálculo Diferencial, comunicación, investigación, razonamiento y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia.					
CONTENIDO: Derivadas			CAPACIDAD: Emplea criterios de primera y segunda derivada para resolver problemas de m		
ACTIVIDADES		TIEMPO	INDICADORES		
INICIALES			Destreza/Habilidad	Contenido	Producto

• Saludo. • Esta clase se inicia con la participación de los alumnos en un pequeño dialogo sobre los contenidos estudiados en la clase anterior.	15'	Calcula	Reglas de L'Hospital.	Opinión sobre los protagonistas de la Historia de Calculo.	8. Calcula lím regla de L'H 9. Aplica el crit segunda der ejercicios. 10. Resue máximos y n
ACTIVIDADES DE PROCESO	2h15' break 1h30'	Aplica	Criterio de la Primera y segunda derivada.	Presentación de ejercicios propuestos en clase.	
• Se expone el fundamento teórico sobre la definición de derivada y se entrega el material didáctico. • Se resuelve en parejas en la solución del primer trabajo práctico. • Los alumnos exponen en la pizarra la solución de los problemas.		Resuelve	Problemas de Máximos y Mínimos.		
ACTIVIDADES FINALES	10'	Actitudes			
• Resolver y exponer la solución de los ejercicios de la separata.		Valora de manera crítica la importancia de la historia del cálculo así mismo muestra orden e interés por aprender.			

METODO	AYUDAS	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
---------------	---------------	--

<table><tr><td>x</td><td>Expositivas-Interactivas</td></tr><tr><td></td><td>Investigación Individual</td></tr><tr><td></td><td>Debate</td></tr><tr><td></td><td>Proyecto</td></tr><tr><td></td><td>Demostración</td></tr><tr><td>x</td><td>Investigación por equipos</td></tr><tr><td></td><td>Otros</td></tr></table>		x	Expositivas-Interactivas		Investigación Individual		Debate		Proyecto		Demostración	x	Investigación por equipos		Otros	<table><tr><td>Texto</td><td></td></tr><tr><td>Separatas-resumen</td><td>x</td></tr><tr><td>Transparencias-Diapositivas</td><td></td></tr><tr><td>Ejercicios Aplicación</td><td>x</td></tr><tr><td>Casos</td><td></td></tr><tr><td>Presentación Multimedia</td><td>x</td></tr><tr><td>Otros</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	Texto		Separatas-resumen	x	Transparencias-Diapositivas		Ejercicios Aplicación	x	Casos		Presentación Multimedia	x	Otros						<table><tr><td colspan="2">Observación Situación</td></tr><tr><td></td><td>Lista de cotejo</td></tr><tr><td>x</td><td>Registro anecdótico</td></tr><tr><td></td><td>Escala de actitud</td></tr><tr><td></td><td>Otros(Indicar)</td></tr></table>	Observación Situación			Lista de cotejo	x	Registro anecdótico		Escala de actitud		Otros(Indicar)	<table><tr><td colspan="2">Ejercicio Práctico</td></tr><tr><td></td><td>Mapa mental</td></tr><tr><td></td><td>Mapa Conceptual</td></tr><tr><td></td><td>Estudios de Casos</td></tr><tr><td>x</td><td>Prácticas- Laboratorio</td></tr><tr><td></td><td>Proyecto</td></tr><tr><td></td><td>Portafolio</td></tr><tr><td></td><td>Ensayos</td></tr><tr><td></td><td>Otros (Indicar)</td></tr></table>	Ejercicio Práctico			Mapa mental		Mapa Conceptual		Estudios de Casos	x	Prácticas- Laboratorio		Proyecto		Portafolio		Ensayos		Otros (Indicar)	<table><tr><td colspan="2">Pruebas Escritas</td></tr><tr><td></td><td>Pruebas de Desempeño</td></tr><tr><td></td><td>Examen Temático</td></tr><tr><td>x</td><td>Ejercicios Interpretativos</td></tr><tr><td></td><td>Pruebas Objetivas</td></tr></table>	Pruebas Escritas			Pruebas de Desempeño		Examen Temático	x	Ejercicios Interpretativos		Pruebas Objetivas	Si de
x	Expositivas-Interactivas																																																																											
	Investigación Individual																																																																											
	Debate																																																																											
	Proyecto																																																																											
	Demostración																																																																											
x	Investigación por equipos																																																																											
	Otros																																																																											
Texto																																																																												
Separatas-resumen	x																																																																											
Transparencias-Diapositivas																																																																												
Ejercicios Aplicación	x																																																																											
Casos																																																																												
Presentación Multimedia	x																																																																											
Otros																																																																												
Observación Situación																																																																												
	Lista de cotejo																																																																											
x	Registro anecdótico																																																																											
	Escala de actitud																																																																											
	Otros(Indicar)																																																																											
Ejercicio Práctico																																																																												
	Mapa mental																																																																											
	Mapa Conceptual																																																																											
	Estudios de Casos																																																																											
x	Prácticas- Laboratorio																																																																											
	Proyecto																																																																											
	Portafolio																																																																											
	Ensayos																																																																											
	Otros (Indicar)																																																																											
Pruebas Escritas																																																																												
	Pruebas de Desempeño																																																																											
	Examen Temático																																																																											
x	Ejercicios Interpretativos																																																																											
	Pruebas Objetivas																																																																											
Bibliografía: Análisis Matemático I. Eduardo Espinoza Ramos Análisis Matemático. Máximo Mittac Meza				Página Web: www.ucvpiura.edu.pe (aula virtual)																																																																								

tener la lata, es decir el radio y la altura. Calcula también el valor de la superficie de la chapa mínima.

PROBLEMA 3

Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx$ tenga un máximo relativo en P (1,2)

PROBLEMA 4

Calcular el polinomio de tercer grado que pasa por el origen de coordenadas O (0,0), tiene un máximo relativo en el punto P (-2,4) y un punto de inflexión en el punto Q (-1,2)

ANEXO 5

TABLAS DE ESPECIFICACIONES

**TABLA DE ESPECIFICACIONES
PRUEBA DE MATEMATICA I**

PRACTICA 1

Habilidades Cognitivas Ejes Temáticos	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis, Síntesis y Evaluación	TOTAL		
					# Preg.	# horas	%
Razon de Cambio- Problema de la recta tangente.	1	0	0	0	1	1	20
Definicion de Derivada	1	0	1	0	2	1	20
Gráfico de Funciones y su derivada.	0	2	0	2	4	3	60
TOTAL	2	2	1	2	7	5	100

**TABLA DE ESPECIFICACIONES
PRUEBA DE MATEMATICA I**

PRACTICA 2

Habilidades Cognitivas Ejes Temáticos	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis, Síntesis y Evaluación	TOTAL		
					# Preg.	# horas	%
Calculo de Derivadas de orden Superior	0	2	0	1	3	3	60
Primera y segunda Derivada de una Función	0	0	2	2	4	2	40
TOTAL	0	2	2	3	7	5	100

**TABLA DE ESPECIFICACIONES
PRUEBA DE MATEMATICA I**

PRACTICA 3

Habilidades Cognitivas Ejes Temáticos	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis, Síntesis y Evaluación	TOTAL		
					# Preg.	# horas	%
Grafico de funciones y sus derivadas y propiedades de las funciones	1	0	1	1	3	2	40
Problemas de Optimizacion	1	0	2	0	3	3	60
TOTAL	2	0	3	1	6	5	100

**TABLA DE ESPECIFICACIONES
EXAMEN FINAL DE MATEMATICA I**

Habilidades Cognitivas Ejes Temáticos	Conocimiento	Comprensión	Aplicación	Análisis, Síntesis y Evaluación	TOTAL		
					# Preg.	# horas	%
SEGUNDA UNIDAD	1	0	3	1	5	20	100
TOTAL	1	0	3	1	5	20	100

ANEXO 6

INSTRUMENTOS DE EVALUACION

PRACTICA CALIFICADA N° 1

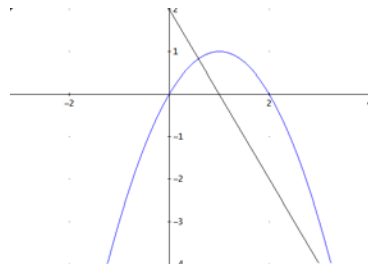
INDICACIONES: Cuide la redacción de sus respuestas y trabaje en forma ordenada evitando los borrones.

CONOCIMIENTO (2 pts cada una)

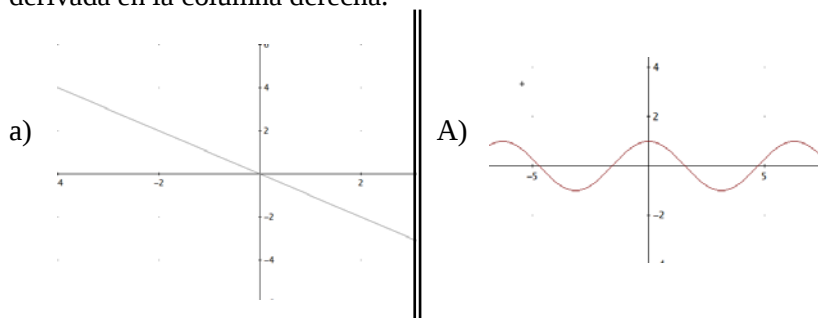
1. Identifica el concepto de razón de cambio en el problema de la recta tangente.
2. Menciona las dos formas equivalentes de la derivada y explica su diferencia simbólica.

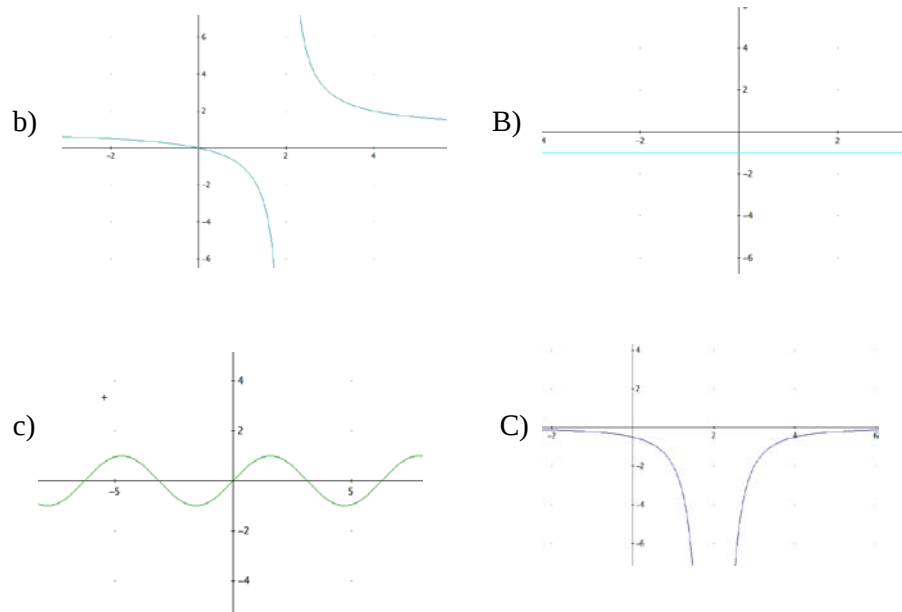
COMPRENCION (2 pts cada una)

3. En la siguiente figura se dan las gráficas de una función f y su derivada f' sobre unos ejes comunes. Explicar en un breve párrafo dichas gráficas.



4. Empareja cada función de la columna izquierda con la grafica de su derivada en la columna derecha.





APLICACIÓN (4 ptos)

5. Usar la definición de derivada para hallar $f'(x)$. Siendo $f(x) = x^3 + x^2$

ANÁLISIS, SÍNTESIS Y EVALUACIÓN (4 ptos cada una)

6. Analiza la situación en el punto $x=0$ para la función $f(x)$ y su derivada así mismo elabora una grafica de dichas funciones.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , x > 0 \\ x^2 - 4 & , x \leq 0 \end{cases}$$

7. Evalúe las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = |x| + 1$ simultáneamente en la cercanía del punto $(0,1)$ y responda: ¿Qué se observa? ¿Qué función es derivable en ese punto?

PRACTICA CALIFICADA N° 2

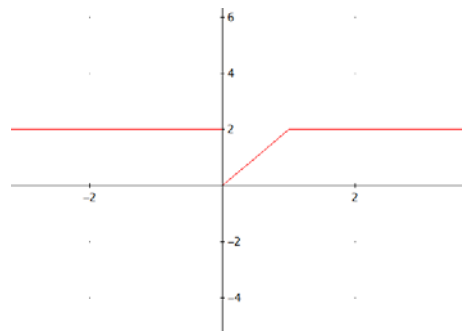
INDICACIONES: Cuide la redacción de sus respuestas y trabaje en forma ordenada evitando los borrones.

COMPRENCION (3 ptos cada una)

1. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de que sea falsa, explica por qué o da un ejemplo que muestre su falsedad.
 - a) Si $y = f(x)g(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = f'(x)g'(x)$.
 - b) Si $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ entonces $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$
 - c) La segunda derivada representa el ritmo de cambio de la primera.
2. Sean f y g funciones cuyas primeras y segundas derivadas existen en un intervalo I . Señala ¿Cuál de estas formulas es correcta?
 - a) $fg'' - f''g = (fg' - f'g)'$
 - b) $fg'' + f''g = (fg)''$

APLICACIÓN (2.5 ptos)

3. Soluciona el siguiente problema: El costo C de pedido y transporte de las componentes utilizadas en la fabricación de un producto es:
$$C = 100 \left(\frac{200}{x} + \frac{x}{x+30} \right), 1 \leq x$$
 donde C se mide en miles dólares y x es el tamaño del pedido. Hallar el ritmo de cambio de C con respecto a x cuando $x = 10, x = 15$.
4. Usa la gráfica de f para esbozar la de f' y f''



ANALISIS, SINTESIS Y EVALUACIÓN (3 cada una)

5. Hallar la derivada de f para $n = 1, 2, 3, 4$ y usar los resultados para proponer una fórmula general para $f'(x)$ en términos de n .
6. Selecciona y gráfica de una función derivable f tal que $f' > 0$ y $f' < 0$ para todos los números reales x .
7. Evalúa la derivada de la función en el punto que se indica

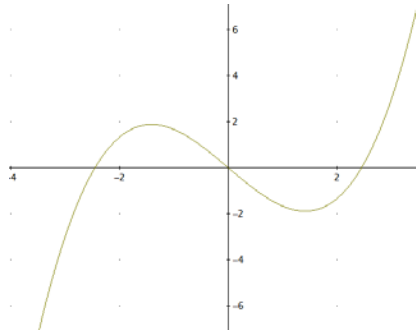
$$y = \frac{1 + \cos ecx}{1 - \cos ecx} \text{ en } \left(\frac{\pi}{6}, -3 \right).$$

PRACTICA CALIFICADA N° 3

INDICACIONES: Cuide la redacción de sus respuestas y trabaje en forma ordenada evitando los borrones.

CONOCIMIENTO (1.5 pto cada una)

1. La gráfica de $f(x)$ viene dada en la figura adjunta. Indica:
 - a) ¿En qué valores de x es $f'(x)$ cero, positiva o negativa?
 - b) ¿En qué intervalo es f' creciente?



2. Describa el criterio de la segunda Derivada para hallar máximos y mínimos de una función.

APLICACIÓN (4.5 cada una)

Soluciona los siguientes problemas:

3. El rendimiento (medido de 0 a 10) de cierto producto en función del tiempo de uso (x en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2} \quad x \geq 0$$

- a) ¿Hay intervalos de tiempo en los que el rendimiento crece? ¿Y en que decrece? ¿Cuáles son?
- b) ¿En qué punto se alcanza el rendimiento máximo? ¿Cuánto vale?

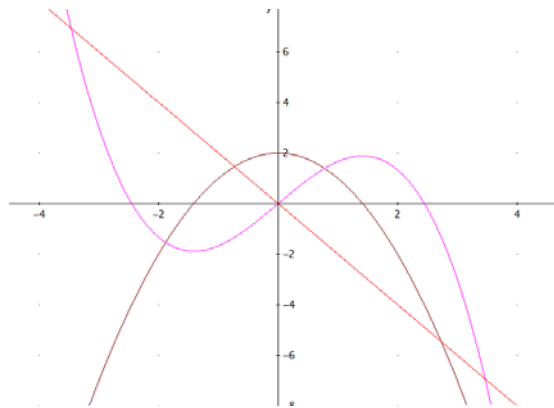
4. Se ha construido una presa de almacenamiento de agua cuyos costos de mantenimiento diarios son una función de la cantidad de agua que la misma tiene almacenada. Tales costos (en dólares.) vienen dados por la siguiente expresión ($C(x)$ representa el costo si el volumen de agua, en millones de metros cúbicos, es x) :

$$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73$$

- a) encontrar el volumen diario de agua óptimo que debe mantenerse para minimizar costos.
b) calcular el costo mínimo diario que supone el mantenimiento de la instalación. Si un día la presa tiene almacenados 3 millones de metros cúbicos de agua, ¿cuánto se ha gastado de más respecto del costo mínimo?
5. Proponga y dibuje una función cuya derivada sea siempre negativa.

ANÁLISIS, SÍNTESIS Y EVALUACIÓN (3.5 pts)

6. Las gráficas de f , f' , f'' se muestran en los mismos ejes. ¿Podrías decir cuál es cuál?



EXAMEN FINAL

INDICACIONES: Cuide la redacción de sus respuestas y trabaje en forma ordenada evitando los borrones.

CONOCIMIENTO (2 ptos)

1. Demostrar usando la definición que $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x$

APLICACIÓN (4 ptos cada una)

2. Emplea las reglas de derivación para encontrar la derivada de la siguiente función $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} \right)$
3. Calcular la primera derivada de la función implícita:
 $\sqrt{4xy} + 6y = y^2 + xy^3$
4. Encontrar la derivada de la siguiente función, reduciendo en lo posible, dicha derivada a su mínima expresión:

$$f(x) = \ln \left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right] + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

ANALISIS, SINTESIS Y EVALUACIÓN (6 ptos)

5. Lee atentamente el siguiente enunciado y responde a las preguntas: La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x , expresado en horas) en los siguientes términos:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ \frac{2x}{0.2x+3} & \text{si } 15 < x \end{cases}$$

- a) Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justificar que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.
- b) Justificar que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.