



UNIVERSIDAD
DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

**Génesis Instrumental de los polígonos regulares con el
uso del TortugArte en estudiantes para profesor de
Educación Primaria**

Tesis para optar el Grado de
Magíster en Educación con mención en Psicopedagogía

Norbil Severo Bustamante García

Asesor(es):
Mgtr. Emma Lizelly Carreño Peña

Piura, julio de 2022



Dedicatoria

A mi esposa Irma Victoria.

A mis hijas Ana Gabriela, Silvia Raquel y María Gracia.

A mis alumnos y alumnas quienes son un estímulo para crecer profesionalmente.





Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que me ayudaron e incentivaron a la realización de este trabajo.

Un particular agradecimiento a mi asesora Mgtr. Emma Carreño, por sus sugerencias para mejorar este trabajo.

Al Mgtr. Moisés Pariahuache, por compartir sus conocimientos del contexto educativo actual, indispensables para que esta investigación alcance relevancia y utilidad práctica para los maestros.

Un agradecimiento póstumo a Carola García, por su incondicional apoyo durante los estudios de la maestría y por sus palabras de constante aliento: *“Cholo, concluye esa tesis”*.





Resumen

Esta investigación trata de la Génesis Instrumental que realizan cuatro estudiantes para profesor de Educación Primaria, cuando estudian los polígonos regulares con la mediación del software TortugArte, a través del desarrollo de una secuencia didáctica cuyo diseño considera las orientaciones metodológicas de la Ingeniería Didáctica. El análisis de las interacciones de los estudiantes con el TortugArte y la noción de polígono regular, desde la perspectiva del Enfoque Instrumental, nos permitió observar la elaboración de varios instrumentos utilizados en la organización de programas computacionales que permitieron la construcción de polígonos regulares y de diseños geométricos formados con polígonos regulares de un solo tipo (teselados). Los resultados muestran que la organización de la secuencia didáctica favoreció la apropiación progresiva de técnicas para construir programas computacionales y además, en las tareas finales pudimos constatar que las propiedades de estos artefactos, conservaron las funciones adquiridas durante sus respectivas transformaciones a instrumentos, lo cual indica que la instrumentalización es durable o permanente y los esquemas de acción instrumentada se perciben como funciones adquiridas por el artefacto en relación a un conjunto de acciones.

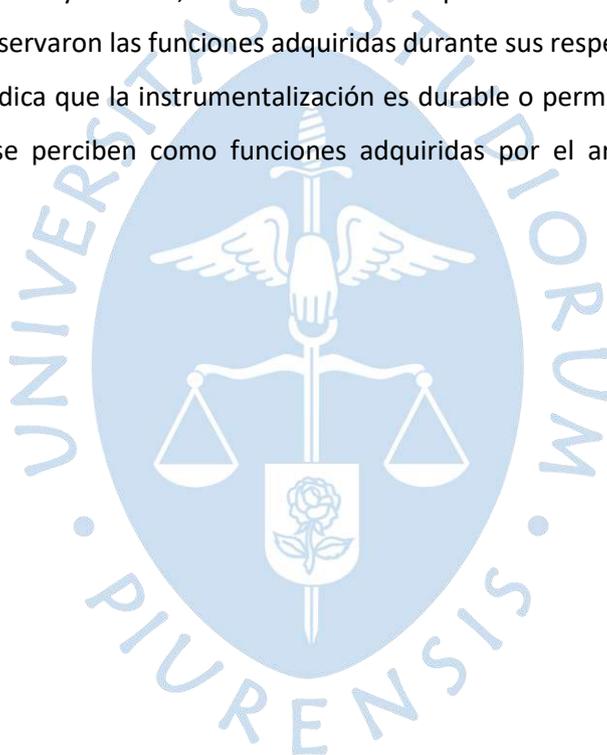




Tabla de contenido

Introducción.....	19
Capítulo I. Problemática.....	21
1.1 Antecedentes.....	21
1.2 El software TortugArte.....	31
1.3 Justificación de la investigación.....	37
1.4 Objetivos de la investigación.....	41
1.4.1 <i>Objetivo general</i>	41
1.4.2 <i>Objetivos específicos</i>	41
Capítulo II. Aspectos teóricos y metodológicos.....	43
2.1 El Enfoque Instrumental como marco teórico del estudio.....	43
2.2 La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación.....	47
2.2.1 <i>Fase 1. Análisis preliminares</i>	49
2.2.2 <i>Fase 2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas</i>	56
2.2.3 <i>Fase 3. Experimentación</i>	58
2.2.4 <i>Fase 4. Análisis a posteriori y evaluación</i>	58
Capítulo III. Los polígonos regulares como objeto de estudio.....	61
3.1 Polígonos en la vida cotidiana.....	61
3.2 Líneas poligonales y polígonos.....	62
3.3 Polígonos regulares.....	65
3.4 Suma de los ángulos interiores de un polígono.....	66
3.5 Suma de los ángulos exteriores de un polígono.....	69
3.6 Teselados.....	70
Capítulo IV. Experimento y análisis.....	75
4.1 Ambiente de la investigación.....	75
4.2 Las actividades y su análisis.....	76
4.2.1 <i>Actividad 1. Introducción al TortugArte</i>	77
4.2.2 <i>Actividad 2. Construcción de polígonos regulares con el TortugArte</i>	113
4.2.3 <i>Actividad 3. Diseños geométricos con polígonos regulares de un solo tipo</i>	138
Conclusiones.....	159
Recomendaciones.....	165
Lista de referencias.....	167
Apéndices.....	171
Apéndice A. Actividad 1: Introducción al TortugArte.....	173

Apéndice B. Actividad 2: Construcción de polígonos regulares con el TortugArte 179
Apéndice C. Actividad 3: Diseños geométricos con polígonos regulares de un solo tipo 181



Lista de tablas

Tabla 1 Clasificación de polígonos	65
Tabla 2 Descripción de las actividades	76
Tabla 3 Construcción de figuras: Respuestas esperadas	79
Tabla 4 Construcción de la escalera A (Modelo SAI) – Estudiante 1	90
Tabla 5 Construcción de la escalera A (Modelo SAI) – Estudiante 2	92
Tabla 6 Construcción de la escalera A (Modelo SAI) – Equipo	93
Tabla 7 Construcción de la escalera B (Modelo SAI) – Estudiante 1	95
Tabla 8 Construcción de la escalera B (Modelo SAI) – Estudiante 2	96
Tabla 9 Construcción de la escalera B (Modelo SAI) – Equipo	97
Tabla 10 Construcción del cuadrado (Modelo SAI) – Estudiante 1	99
Tabla 11 Construcción del cuadrado (Modelo SAI) – Estudiante 2	101
Tabla 12 Construcción del cuadrado (Modelo SAI) – Equipo	102
Tabla 13 Construcción de la casa (Modelo SAI) – Estudiante 1	104
Tabla 14 Construcción de la casa (Modelo SAI) – Estudiante 2	105
Tabla 15 Construcción de la casa (Modelo SAI) – Equipo	107
Tabla 16 Construcción del triángulo equilátero (Modelo SAI) – Estudiante 1	110
Tabla 17 Construcción del triángulo equilátero (Modelo SAI) – Estudiante 2	112
Tabla 18 Construcción del triángulo equilátero (Modelo SAI) – Equipo	113
Tabla 19 Construcción de Polígonos regulares I (Modelo SAI) – Estudiante 1	118
Tabla 20 Construcción de Polígonos regulares I (Modelo SAI) – Estudiante 2	121
Tabla 21 Construcción de Polígonos regulares I (Modelo SAI) – Equipo	123
Tabla 22 Construcción de Polígonos regulares II (Modelo SAI) – Estudiante 1, Estudiante 2 y Equipo	137
Tabla 23 Construcción de diseños geométricos con polígonos regulares. (Modelo SAI) Estudiante 1, Estudiante 2 y Equipo	157



Lista de figuras

Figura 1 Interfaz del software TortugArte	31
Figura 2 Ejemplo de un programa computacional en TortugArte	32
Figura 3 SuperLogo vs TortugArte	32
Figura 4 Bloques de programación TORTUGA y PLUMA	34
Figura 5 Bloque de programación MIS BLOQUES	35
Figura 6 Bloques de programación NÚMEROS y FLUJO	35
Figura 7 Uso del comando “repetir”	36
Figura 8 Usos del comando “repetir”	37
Figura 9 Componentes de un instrumento	44
Figura 10 Modelo de Situaciones de Actividad Instrumentada (SAI)	44
Figura 11 Proceso de Génesis Instrumental	46
Figura 12 Triángulo regular, cuadrado y hexágono regular	61
Figura 13 Polígonos y señalización vial	62
Figura 14 Mosaicos o teselados con azulejos	62
Figura 15 Línea poligonal abierta	63
Figura 16 Línea poligonal cerrada o polígono	63
Figura 17 Polígono de n lados	64
Figura 18 Ángulo exterior de un polígono	64
Figura 19 Cuadrilátero equiángulo	65
Figura 20 Cuadrilátero equilátero	66
Figura 21 Cuadrado y triángulo equilátero	66
Figura 22 Demostración empírica de la suma de los ángulos de un triángulo	67
Figura 23 Suma de los ángulos interiores de un triángulo	67
Figura 24 Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero	67
Figura 25 Suma de los ángulos interiores de un pentágono	68
Figura 26 Suma de los ángulos interiores de un hexágono	68
Figura 27 Suma de los ángulos interiores de un heptágono	68
Figura 28 Ángulos interiores y ángulos exteriores de un polígono	69
Figura 29 Teselados en la naturaleza	70
Figura 30 Teselados regular y semirregular	71
Figura 31 Teselados regulares	71
Figura 32 Propiedad de los ángulos alrededor de un punto	71
Figura 33 Con un pentágono regular no se cubre el plan	72

Figura 34 Polígonos regulares y la abertura de sus ángulos.....	72
Figura 35 Teselado con heptágonos	73
Figura 36 Teselados con triángulos regulares (triángulos equiláteros).....	73
Figura 37 Figuras propuestas para la Actividad 1	79
Figura 38 Limitaciones del área gráfica del TortugArte.....	83
Figura 39 Programas computacionales y figuras geométricas	84
Figura 40 Programa computacional y figura geométrica	85
Figura 41 Programas computacionales y figuras geométricas	85
Figura 42 Programas computacionales y figuras geométricas	86
Figura 43 Paleta del comando “repetir”	86
Figura 44 Programa computacional y diseño geométrico.....	87
Figura 45 Diseños obtenidos para distintos valores del parámetro.....	87
Figura 46 Programa computacional y diseño construido	88
Figura 47 Figura geométrica (escalera A) para ser construida con el TortugArte	89
Figura 48 Programa computacional y figura geométrica	89
Figura 49 Programa computacional y figura geométrica	89
Figura 50 Programa computacional y figura geométrica	90
Figura 51 Visualización parcial y total de la figura geométrica	91
Figura 52 Programas computacionales equivalentes.....	92
Figura 53 Figura geométrica (escalera B) para ser construida con el TortugArte	93
Figura 54 Programa computacional y figura geométrica	94
Figura 55 Programa computacional y figura geométrica requerida.....	94
Figura 56 Programa computacional y figura geométrica requerida.....	95
Figura 57 Patrón geométrico y escalera B.....	96
Figura 58 Programa computacional y figura geométrica	97
Figura 59 Figura geométrica (cuadrado) para ser construida con el TortugArte	98
Figura 60 Patrón geométrico y cuadrado	98
Figura 61 Subprograma computacional con comandos “adelante: 200”	99
Figura 62 Programas computacionales y construcciones geométricas.....	100
Figura 63 Patrón geométrico y cuadrado de 200 pasos de lado	100
Figura 64 Programa computacional óptimo y cuadrado de lado 200	100
Figura 65 Programas computacionales y figuras geométricas obtenidas	101
Figura 66 Programa computacional y cuadrado.....	102
Figura 67 Figura geométrica (casa) para ser construida con el TortugArte	102

Figura 68 Programa computacional y figura geométrica	103
Figura 69 Programas computacionales y figuras geométricas construidas	104
Figura 70 Ángulos de giro, inadecuados.....	105
Figura 71 Instrumentalización incorrecta del transportador	106
Figura 72 Medidas de los ángulos de giro de la tortuga.....	106
Figura 73 Programa computacional y figura geométrica casa	107
Figura 74 Figura geométrica (triángulo equilátero) para ser construida con el TortugArte	108
Figura 75 El resultado muestra limitaciones del área gráfica del TortugArte	108
Figura 76 Programa computacional y figura geométrica construida	109
Figura 77 Programa computacional y triángulo equilátero.....	109
Figura 78 Programa computacional simplificado para el triángulo equilátero	110
Figura 79 Programas computacionales sin optimizar y optimizado, para el triángulo equilátero.....	111
Figura 80 Midiendo el ángulo de giro con el transportador.....	112
Figura 81 Programa computacional y triángulo equilátero.....	113
Figura 82 Patrón geométrico y cuadrado de lado igual a 150 pasos.....	114
Figura 83 Programas computacionales y triángulos equiláteros.....	115
Figura 84 Programa computacional y figura geométrica	115
Figura 85 Patrón geométrico y programas computacionales.....	116
Figura 86 Programa computacional y triángulo equilátero.....	116
Figura 87 Programa computacional y figura geométrica	116
Figura 88 Programa computacional y pentágono regular	117
Figura 89 Programa computacional y figura geométrica no requerida.....	117
Figura 90 Programa computacional y hexágono regular.....	118
Figura 91 Patrón geométrico y cuadrado de lado 80 pasos	119
Figura 92 Patrón geométrico y triángulo equilátero de lado 80 pasos	119
Figura 93 Patrón y figura geométricos obtenidos	120
Figura 94 Patrón geométrico y pentágono regular de lado 120 pasos	120
Figura 95 Patrón geométrico y hexágono de lado 120 pasos.....	120
Figura 96 Patrón geométrico y cuadrado de lado 200 pasos	121
Figura 97 Programa computacional optimizado y cuadrado de lado 100 pasos.....	122
Figura 98 Patrón geométrico y triángulo equilátero de lado 100 pasos	122
Figura 99 Programa computacional y pentágono regular de lado 100 pasos	122
Figura 100 Programa computacional y hexágono regular de lado 100 pasos.....	123
Figura 101 Programa computacional y “heptágono regular”	125

Figura 102 Programa computacional y octógono regular de lado 100 pasos	125
Figura 103 Programas computacionales y polígonos regulares de 9 y 10 lados	126
Figura 104 Limitaciones del área gráfica del TortugArte	126
Figura 105 Programa computacional y polígono regular de 12 lados	127
Figura 106 Limitaciones del área gráfica del TortugArte	127
Figura 107 Programa computacional y polígono de 20 lados	128
Figura 108 Programa computacional y polígono regular de 30 lados	128
Figura 109 Esquema de un programa computacional para un polígono regular de n lados y lado l .	129
Figura 110 Programa computacional y figura geométrica	129
Figura 111 Programa computacional y figura geométrica	130
Figura 112 Patrón geométrico y octógono regular de lado 120 pasos.....	130
Figura 113 Programas computacionales y polígonos regulares de 9 y 10 lados	131
Figura 114 Programas computacionales y polígonos regulares de 12 y 20 lados	131
Figura 115 Programa computacional y polígono regular de 30 lados	132
Figura 116 Esquema de un programa computacional para un polígono regular de n lados y lado l .	132
Figura 117 Programa computacional y “heptágono regular”	133
Figura 118 Programa computacional y octógono regular de lado 100 pasos	133
Figura 119 Programas computacionales y polígonos regulares de 9 y 10 lados	134
Figura 120 Limitaciones del área gráfica del TortugArte.....	134
Figura 121 Visualización completa del polígono regular de 12 lados.....	135
Figura 122 Programa computacional y polígono de 20 lados	135
Figura 123 Polígonos regulares de 30 lados y de lado, 50 y 20 pasos, respectivamente	136
Figura 124 Programa computacional y polígono regular de 360 lados y lado 2 pasos	136
Figura 125 Esquema del programa computacional para un polígono regular de n lados y lado l	137
Figura 126 Diseño geométrico simple con cuadrados.....	139
Figura 127 Diseño geométrico con cuadrados	139
Figura 128 Diseños geométricos con triángulos equiláteros.....	140
Figura 129 Diseños geométricos con pentágonos regulares.....	141
Figura 130 Diseño geométrico con hexágonos regulares.....	141
Figura 131 Diseño geométrico con octógonos regulares	142
Figura 132 Diseño geométrico con nonágonos regulares	142
Figura 133 Diseño geométrico con decágonos regulares.....	143
Figura 134 Diseño geométrico con polígonos regulares de 15 lados	143
Figura 135 Diseño geométrico con polígonos regulares de 30 lados	143

Figura 136 Diseño geométrico con triángulos equiláteros.....	144
Figura 137 Diseño geométrico con triángulos equiláteros y un hexágono regular.....	144
Figura 138 Diseño geométrico simple con triángulos equiláteros	145
Figura 139 Diseño geométrico con triángulos equiláteros.....	145
Figura 140 Diseño geométrico con cuadrados y rectángulos.....	146
Figura 141 Diseño simple con cuadrados	146
Figura 142 Diseño geométrico con cuadrados de diferente tamaño	147
Figura 143 Diseño geométrico con cuadrados	147
Figura 144 Programa computacional y diseños geométricos con uno, dos, tres y cuatro pentágonos regulares	148
Figura 145 Diseños geométricos con hexágonos regulares.....	148
Figura 146 Programa computacional y diseño geométrico con hexágonos regulares.....	149
Figura 147 Diseños geométricos con 1, 2 y 3 octógonos regulares.....	149
Figura 148 Diseño geométrico con polígonos regulares de 9 lados.....	150
Figura 149 Diseño geométrico con polígonos regulares de 10 lados.....	150
Figura 150 Diseño geométrico con polígonos regulares de 15 lados.....	150
Figura 151 Diseño geométrico con polígonos regulares de 20 lados.....	151
Figura 152 Programa computacional y diseño geométrico con triángulos equiláteros.....	151
Figura 153 Diseño geométrico con cuadrados	152
Figura 154 Programa computacional y diseño geométrico.....	152
Figura 155 Diseños geométricos con pentágonos y triángulos	153
Figura 156 Diseños geométricos con hexágonos regulares.....	154
Figura 157 Diseños geométricos con “heptágonos regulares”	155
Figura 158 Diseño geométrico con octógonos regulares	155
Figura 159 Diseño geométrico con nonágonos regulares	156
Figura 160 Diseño geométrico con decágonos regulares.....	156
Figura 161 Diseño geométrico con polígonos regulares de 15 lados.....	156
Figura 162 Diseño geométrico con polígonos regulares de 20 lados.....	157



Introducción

El desarrollo de la investigación que presentamos ha tenido diversas motivaciones: la manera en que se desarrolla la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, particularmente, el estudio descontextualizado de los polígonos regulares, la escasez de investigaciones de los fenómenos cognitivos como resultado de las interacciones de los estudiantes cuando usan tecnología para resolver las tareas, así como también, las deficiencias en la formación inicial de los profesores de Educación Primaria, relacionadas con el enfoque de resolución de problemas y el uso transversal de la tecnología.

Debido a lo anterior, se adecuaron y diseñaron actividades haciendo uso del software TortugArte, como tecnología mediadora, para estudiar los polígonos regulares, en el contexto de la construcción de teselados. La secuencia de aprendizaje diseñada tiene en cuenta las fases de la Ingeniería Didáctica, para promover acciones instrumentadas de los estudiantes para profesor de Educación Primaria, cuando trabajan la solución de las tareas con la mediación del TortugArte. En consecuencia, dicha solución se analiza desde la Génesis Instrumental puesto que, esta perspectiva teórica, pone su atención en la transformación de los artefactos en instrumentos durante la actividad humana. La Ingeniería Didáctica, además, constituye, el enfoque metodológico de la investigación que presentamos. Durante la lectura de este trabajo, el lector encontrará el desarrollo del proyecto de investigación, el cual ha sido estructurado de la siguiente manera:

En el **primer capítulo**, presentamos la problemática que involucra nuestro estudio, considerando diferentes investigaciones y artículos científicos que están relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los polígonos regulares y, además, que hacen uso de la tecnología como elemento mediador de dichos procesos. También, presentamos una breve descripción del software TortugArte, para luego justificar la investigación y formular la pregunta de investigación y los objetivos.

En el **segundo capítulo**, abordamos aspectos teóricos y metodológicos relativos al Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) y a la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), respectivamente.

En el **tercer capítulo** desarrollamos los aspectos históricos y matemáticos de los polígonos regulares, como objeto de estudio.

El **cuarto capítulo** está referido a la ejecución del experimento y análisis de los datos recogidos. Describimos el ambiente de la investigación, presentamos las actividades y sus respectivos análisis a priori y a posteriori.

Finalmente, presentamos las conclusiones o consideraciones finales, y algunas recomendaciones del trabajo de investigación



Capítulo I. Problemática

En este capítulo detallamos la problemática que involucra a la temática de este estudio. Para ello, se realizó la revisión de diferentes trabajos de investigación y artículos científicos, que tuvieran relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los polígonos regulares y la mediación instrumental, los que permitan justificar la elección del software TortugArte como ambiente virtual para desarrollar el estudio y la pregunta de investigación con sus respectivos objetivos. Asimismo, presentamos una breve descripción del software TortugArte.

1.1 Antecedentes

El avance tecnológico y sus diversos usos no es ajeno al ámbito educativo, pero promover que la tecnología se use en las instituciones educativas es un desafío que implica cambios estructurales y significativos en las teorías educativas, así como, en la propia percepción y práctica pedagógica. Teniendo como presupuesto la necesidad de integrar el uso de las tecnologías en el ámbito educativo y focalizándose en la Educación Secundaria, Do Amaral (2013), desarrolló una investigación cuyo objetivo era mostrar maneras de enseñar, utilizando recursos computacionales disponibles en el GeoGebra, que favorezcan el aprendizaje de conceptos relacionados a polígonos.

En un primer momento, hace un abordaje clásico sobre polígonos, con el que introduce su estudio a través de definiciones, representaciones y teoremas, de manera general y muestra cómo son abordados los temas en el aula. En este sentido afirma:

(...) se percibe en gran parte de las escuelas una enseñanza mecánica, enfocada en la presentación de diversas fórmulas que son asociadas a figuras estáticas, muchas veces sin relación con lo cotidiano del alumno, presentando problemas descontextualizados y que no llevan a un aprendizaje significativo. (Do Amaral, 2013, p. 23. Traducción propia).

Asimismo, dicho autor destaca en su investigación importantes dificultades en el proceso de aprendizaje de los polígonos, siendo las mismas que generalmente se presentan en la Matemática: falta de interés en aprender, descontextualización de los contenidos, uso de metodologías arcaicas, el uso excesivo de fórmulas preparadas que inducen a un aprendizaje mecánico y aversión a la disciplina. Menciona otras complicaciones adicionales como: la falta de percepción visual, dificultades para representar e interpretar los objetos a través de un dibujo, la falta de creatividad en la resolución de problemas, dificultades de abstraer y entender demostraciones. Sin embargo, destaca que:

(...) una de las dificultades encaradas por el profesor en la clase es encontrar formas de motivar al alumno para aprender, pues lo que motiva a uno puede no motivar a otro, el profesor tiene que buscar mecanismos para promover motivación en todo el grupo, para que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más atrayente y dinámico. (Do Amaral, 2013, p. 48. Traducción propia).

En un segundo momento, aborda la misma temática, exhibiendo medios para la enseñanza de los polígonos con el uso del GeoGebra. Para este nuevo contexto, las actividades fueron elaboradas procurando que el alumno explore los conceptos básicos, así como, verifique y explore propiedades fáciles, fomentando el análisis crítico y exigiendo de los alumnos descripciones y/o conclusiones de tales conceptos. En esta perspectiva constructivista, donde el profesor no solo instruye sino también motiva y moviliza a sus alumnos a descubrir conocimientos, los recursos computacionales se tornan aliados potenciales para la exploración intuitiva de conceptos matemáticos, la innovación pedagógica y la estimulación del gusto por aprender y hacer Matemática (Do Amaral, 2013).

Respecto al GeoGebra, el investigador destaca la capacidad para realizar construcciones geométricas rápidas y precisas, además de permitir la manipulación de los objetos construidos, preservando sus características inherentes, definidas en su construcción. El potencial del GeoGebra se muestra en las guías detalladas que el autor desarrolla para las construcciones geométricas que requiere cada actividad propuesta para el estudio de los polígonos. El propósito de estas guías era auxiliar al alumno en la construcción, desarrollo y aplicación de ideas y conceptos sobre cada tópico, esperando que comprenda y le atribuya significado a lo que está construyendo y, de esta manera evitar la simple memorización y mecanización.

La metodología empleada en esta investigación no está explícita, tiene aspectos similares a investigaciones de tipo estudio de caso. Las actividades fueron aplicadas a dos grupos de estudiantes del primer año de Educación Secundaria. Después de dos clases introductorias al uso del GeoGebra, las actividades fueron aplicadas a parejas, para que hubiese debate e intercambio de información, así como soluciones más críticas y profundas.

Respecto a los resultados, Do Amaral (2013) concluye que las respuestas fueron apropiadas, mostrando que los alumnos asimilaron la idea y los objetivos del trabajo. En algunos momentos percibió, preocupación por parte de los alumnos para argumentar de forma correcta y clara, sus respuestas; así como, debates acalorados y hasta prolongados sobre las indagaciones contenidas en las actividades. Las duplas de trabajo estaban formadas por alumnos de ciencias exactas y de otras áreas, con la finalidad de promover una mayor interacción, favoreciendo de esta manera, el cumplimiento de todas las actividades, de forma aceptable. Los alumnos tenían que escribir sus respuestas ya que la finalidad de las actividades no era evaluativa sino investigativa, lo que generó preocupación en los alumnos por fundamentar muy bien sus respuestas, escribiéndolas de forma clara y objetiva.

La relevancia para nuestro trabajo de investigación radica en los interesantes aportes sobre el uso del GeoGebra dentro de un enfoque constructivista, para la generación de aprendizajes más significativos respecto a los polígonos. Las actividades, elaboradas con el uso del GeoGebra, fueron

estructuradas para favorecer la experimentación de los alumnos, al investigar y crear conjeturas para resolver las tareas propuestas. En una perspectiva más amplia sobre el uso de la tecnología en la Educación Matemática, Oliveira et al. (2015) argumentan:

(...) la apropiación de las tecnologías no surge desconectada del proceso, de las condiciones del sujeto que aprende, del saber matemático y de sus correlaciones con los demás elementos de una propuesta educativa, esto es, todas las actividades hacen parte de una propuesta, que prevé la figura del profesor como orientador, la centralidad del alumno y su relevancia en la construcción del conocimiento matemático al que está sujeto. (p. 487. Traducción propia).

Gumiere (2018), nos presenta una propuesta pedagógica de contextualización para la enseñanza de la Geometría a alumnos del 7° año de Educación Primaria.

El objetivo principal de su investigación fue hacer que los alumnos manipulen los polígonos regulares para enladrillar el plano, actividad también conocida como teselado. En este sentido, antes de aplicar las actividades, fueron abordados varios tópicos relacionados a los polígonos, a la construcción de modelos de polígonos en papel y al estudio de nociones relativas al enladrillado del plano.

El enladrillado es una práctica muy antigua que se remonta a la época mora y bizantina, 5000 años a. C. Consiste en cubrir el plano con polígonos sin dejar espacios entre ellos ni superponerlos. Muchos de los enladrillados están basados en polígonos y el enladrillado correcto requiere de la presencia de matemática coherente para el cálculo del espacio a enladrillar (Gumieri, 2018).

En la actualidad, la técnica del enladrillado es utilizada en una variedad de aplicaciones: empapelado de pared, pisos con cerámica o piedras, forros de madera, estampado de tejido, embalaje.

La propuesta didáctica pretende ser una oportunidad más para el análisis y la interpretación de los conceptos geométricos. En este sentido: se hizo la exploración de los objetos del mundo físico, el enladrillado con polígonos regulares, permitiendo al alumno establecer conexiones entre el mundo real y la Geometría (Gumiere, 2018).

El aspecto lúdico está presente en la propuesta. Los alumnos interactúan con las diferentes piezas o modelos de polígonos regulares tratando de enladrillar correctamente el plano. Al respecto:

(...) con la aplicación de materiales lúdicos, el profesor promueve una significativa interacción de la clase como grupo para que se desarrolle la iniciativa en una composición de nuevas ideas interesantes, creativas y curiosas, así como la capacidad de analizar y reflexionar sobre los conceptos geométricos. Las actividades lúdicas aumentan la motivación para el aprendizaje. (Gumieri, 2018, p. 70. Traducción propia).

Sobre la metodología empleada en la investigación, esta tiene algunas características de la Ingeniería Didáctica al contrastar la fase a priori con la fase a posteriori. Las metas pretendidas en la investigación fueron: analizar e interpretar conceptos geométricos; abordar conceptos sobre ángulos, polígonos y sus propiedades; aplicar modelos físicos de polígonos regulares para cubrir el plano (enladrillado). En este sentido, para cada uno de estos tópicos se diseñaron cuestionarios para evidenciar logros en relación con el objetivo principal.

Los resultados indican que los alumnos perciben la posibilidad de enladrillar el plano con solo tres tipos de polígonos regulares: triángulos, cuadrados y hexágonos; observan que su aprendizaje es más significativo: al manipular las piezas (polígonos regulares) y encontrar las soluciones (enladrillados) están conectando los conceptos teóricos y la práctica; señalan que el aspecto lúdico, presente en todas las actividades, les ayudó a superar las dificultades de los años finales de la Educación Primaria. La propuesta didáctica también buscó involucrar la motivación del alumno tanto afectiva como cognitiva; dando lugar a que la enseñanza de la Geometría sea más placentera, favoreciendo el desarrollo y la consolidación de las habilidades del alumno para resolver problemas, así como su pensamiento crítico y autónomo.

La relevancia para nuestra investigación está en que el enladrillado es un contexto rico e interesante para la utilización de muchos conceptos geométricos. Estimula la creatividad de los alumnos, se pueden desarrollar conceptos de Geometría plana tales como la suma de ángulos, simetría, rotación, polígonos y la comparación de figuras. El enladrillado también posibilita una visión de conservación del área de figuras, facilitando la visualización de cómo son hechas las transformaciones en el plano. Asimismo, abordar situaciones de aprendizaje contextualizadas, como el caso del enladrillado o mosaico, implica vivenciar nuevas formas de educación. Por último, establecer propiedades a partir del mundo real, permite que el alumno tenga un mejor escenario de interacción para el análisis e interpretación de conceptos geométricos.

En esta misma línea de propuestas didácticas constructivistas y de estudio contextualizado de la Geometría, revisamos el trabajo de investigación desarrollado por Gomes (2017). El objetivo general de la investigación consistió en mostrar que el uso de la tecnología es positivo, porque puede abordarse la enseñanza de la Geometría de una manera diferente, a través del Enladrillado del Plano. Gomes (2017) nos habla de explorar el Enladrillado del Plano utilizando, como herramienta mediadora, el software GeoGebra disponible en móviles *touchscreen* como las *tablets* y *smartphones*. La pregunta de su investigación fue: *¿Cómo favorecer la enseñanza de la Geometría utilizando dispositivos touchscreen?*

Los sujetos de investigación fueron 40 alumnos del 8° año de Educación Primaria. Como metodología de investigación utiliza la Ingeniería Didáctica en la planificación e implementación de las

actividades. Las actividades propuestas a través de vídeos fueron organizadas en seis secuencias didácticas utilizando el GeoGebra Book, herramienta virtual disponible en el sitio web del GeoGebra. Los vídeos fueron desarrollados como una posibilidad para facilitar la enseñanza de los conceptos geométricos usando el GeoGebra y el *smartphone*. El contenido de las actividades comprende aspectos relacionados al uso del software GeoGebra en un *smartphone*, al enladrillado con rectángulos y cuadrados, al enladrillado con hexágonos, a la equivalencia de áreas por medio del enladrillado con rectángulos y cuadrados previamente construidos, al enladrillado del hexágono regular con triángulos equiláteros y finalmente, al enladrillado con polígonos regulares.

La propuesta didáctica muestra al enladrillado del plano como una oportunidad para integrar la Tecnología (GeoGebra disponible en dispositivos *touchscreen*), el Arte (enladrillado) y la Geometría (polígonos regulares). La investigación de Gumiere destaca la importancia de utilizar enladrillados para superar las dificultades de los alumnos, en la comprensión de conceptos geométricos relativos a polígonos regulares, una diferencia de este trabajo con el de Gomes (2017) es la forma como se construyen los enladrillados. Así pues, en el de Gumiere (2018) se usan modelos físicos de polígonos regulares, mientras que, en el de Gomes (2017) los enladrillados son construidos con polígonos virtuales, utilizando tecnologías como el *smartphone*.

Este tipo de propuesta didáctica es un ejemplo de nuevas posibilidades para la enseñanza de la Matemática, donde se tiene en consideración la innovación constante de las tecnologías ya insertadas en el aula de clase, por parte del alumno. A continuación, algunas características del *smartphone* (Henrique, 2017 citado en Gomes, 2017, p. 39. Traducción propia) que contribuyen a la realización de las actividades en el aula:

- Debido a la movilidad puede ser incorporado más fácilmente en las prácticas del aula.
- Puede estimular la curiosidad y la motivación en la realización de las actividades.
- Es un repositorio de las más variadas herramientas para la enseñanza de la matemática.
- Puede ser utilizado por su propio dueño, lo que dispensa de laboratorio de informática y no necesita de conexión a Internet.

Asimismo, la utilización de la tecnología se justifica en la medida que permita, a través de estrategias pedagógicas adecuadas, que los alumnos se animen a crear y verificar sus conjeturas, de manera autónoma. En este sentido, Motta y Silveira (2010) afirman:

La informática está al servicio de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, pues proporciona al alumno la creación de una imagen diferente de la disciplina, así como el enriquecimiento de prácticas pedagógicas que desarrollan la exploración, la creatividad, lo lúdico, el raciocinio lógico, la interactividad, la socialización, la afectividad y la reflexión crítica. (p. 116. Traducción propia).

Los resultados mostrados por Gomes (2017) indican que los alumnos fueron capaces de realizar las actividades propuestas, empezaron a utilizar el lenguaje matemático para hacer preguntas y elaborar cuestionamientos con sus compañeros. Sobre el GeoGebra se afirma que es de fácil utilización, pero cuando comienzan a mover los vértices de los polígonos, a veces, pierden sus propiedades y es necesario el apoyo del profesor/investigador. Los videos organizados en el GeoGebra Book constituyen un producto educativo para ser usado y mejorado.

La relevancia de esta investigación, para nuestro estudio, comprende varios aspectos. El primero tiene que ver con el enladrillado del Plano, tema que incita el estudio contextualizado de la Geometría y está relacionado transversalmente con el Arte. Respecto al uso del GeoGebra, está su potencial para ilustrar y permitir el desarrollo de conjeturas sobre conceptos matemáticos. Finalmente, está la Ingeniería Didáctica, la cual ha sido elegida, como la metodología de investigación. Dicha teoría busca relacionar lo teórico con lo práctico a la vez que abre un camino para la experimentación en la sala de clase. El trabajo con esta metodología se da en cuatro fases: análisis preliminares, concepciones y análisis a priori, experimentación y, análisis a posteriori y validación. Asimismo, Gomes (2017) muestra con mucha claridad y detalle, un itinerario metodológico con la Ingeniería Didáctica. En este sentido, muestra cómo es utilizada para organizar las acciones en la sala de clase, de manera tal que sea posible la verificación de las hipótesis y de los objetivos propuestos. Este aspecto es muy importante y servirá de orientación para las acciones de nuestro trabajo de investigación.

Otro estudio referencial es el de Gonçalves (2014). En este se destaca el uso del software SuperLogo como herramienta mediadora en la construcción de conocimiento. Se planteó como objetivo, analizar una secuencia de actividades, desarrollada por alumnos del 8° año de Educación Primaria y mediada por el uso del software SuperLogo.

Desde una línea constructivista del aprendizaje, la secuencia didáctica buscaba que los sujetos construyesen su aprendizaje del Teorema de Pitágoras, a partir de construcciones geométricas, optando por un saber matemático más autónomo y menos memorístico. En este sentido, Gonçalves (2014) considera para su elaboración, aspectos de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Gay Brousseau, la Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel y la mediación de una herramienta computacional denominada SuperLogo, amparada en los trabajos de Oliveira (2013), sobre utilización de tecnología en el aula.

La secuencia didáctica, propuesta en la investigación, requiere de la construcción de líneas poligonales y una diversidad de polígonos regulares, destacando a su vez, la importancia de las construcciones geométricas para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos geométricos. Dichas construcciones geométricas constituyen una manera de expresar gráficamente la forma de un

determinado ente geométrico, mediante un soporte informático dinámico como el SuperLogo, en lugar de objetos, tradicionalmente usados, tales como lápiz, papel, regla, compás, transportador y escuadra.

El análisis explicita las bondades del uso del SuperLogo como herramienta mediadora en la construcción de conocimiento. Los resultados validan el supuesto de que la realización de construcciones geométricas con SuperLogo, como la construcción de líneas poligonales y polígonos regulares, contribuyeron a la comprensión del Teorema de Pitágoras por parte de los alumnos. El análisis también hace referencia a una mejor comprensión de la definición de polígono regular y de sus elementos. Gonçalves (2014) destaca el uso del SuperLogo como herramienta que colabora para viabilizar la experimentación de los conceptos matemáticos. De hecho, los alumnos se mostraron interesados y motivados para la realización de las actividades y se adaptaron rápidamente al lenguaje de programación, comprendiendo sus reglas y su lógica interna. Por tanto, el SuperLogo presenta potencialidades educativas para el desarrollo de procesos cognitivos de la Matemática y gran facilidad de interacción por parte de los alumnos.

En relación, a la contribución del SuperLogo para la enseñanza de la Geometría, Motta y Silveira (2010) agregan:

El SuperLogo desarrolla un ambiente facilitador, en el cual el alumno es un sujeto activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de la mediación del profesor. Este intercambio ocurrirá por medio de interacciones con el lenguaje de programación, desarrollando o dando nuevos significados a los conocimientos geométricos. (p. 117. Traducción propia).

La importancia de esta investigación, para nuestro estudio, tiene que ver con el software SuperLogo y en especial, su potencial para las construcciones geométricas, haciendo del alumno un agente activo de su aprendizaje en lugar de mero reproductor de guías e instrucciones. El software SuperLogo es un ambiente de aprendizaje virtual muy similar al software que usaremos en nuestra investigación, el TortugArte. Más adelante se describirán sus principales características. Tanto el SuperLogo como el TortugArte son versiones del lenguaje de programación LOGO o lenguaje de la Tortuga, desarrollado por Seymour Papert.

Las investigaciones que a continuación describimos tratan de analizar la conducta del profesor cuando usa herramientas tecnológicas en sus clases de Matemática.

Drijvers, et al. (2010), desarrollan una investigación titulada: “El profesor y la herramienta: Orquestaciones instrumentales en aulas de matemática con abundante tecnología”. La investigación utilizó la Orquestación Instrumental como marco interpretativo para el análisis de la conducta del profesor, cuando usa herramientas tecnológicas en sus clases de Matemática. La meta fue doble, primero: identificar los tipos de orquestaciones instrumentales que los profesores desarrollan en sus

clases de Matemática y segundo: determinar el grado en que estas orquestaciones se relacionan con la visión que tienen los profesores sobre Educación Matemática y el rol que le asignan a la tecnología.

Drijvers, et. al. (2010), mencionan el aspecto problemático de la integración de la tecnología, a pesar de que investigadores y profesores reconocen su potencial para la enseñanza y el aprendizaje. Al mismo tiempo, destacan el rol del profesor como un factor crítico y problemático en este proceso de integración. Crítico, en el sentido de cómo los profesores enfocan su uso para lograr mejores resultados en el aula y problemático, porque algunos profesores no perciben el uso de la tecnología como valioso para sus metas educativas y tratan de evitarla, a menos que explícitamente sea requerido su uso por la institución o el currículo. Los autores citan el trabajo de Robert y Rogalski (2005) para indicar:

Las prácticas pedagógicas son complejas y estables. En base a esto, Lagrange y Monaghan (2009) afirman que la integración de tecnología amplifica la complejidad y, en consecuencia, desafía la estabilidad de las prácticas de enseñanza: las técnicas que son usadas en un ambiente “tradicional” pueden no ser aplicadas de manera rutinaria cuando la tecnología está disponible. Un nuevo repertorio de técnicas de enseñanza, instrumentadas por las herramientas disponibles, tiene que ser desarrollado. (Drijvers et. al., 2010, p.214. Traducción propia).

Drijvers, et. al., (2010) consideran que es importante ampliar el conocimiento sobre las nuevas técnicas de enseñanza que emergen en aulas con tecnología, así como su relación con la visión que tienen los profesores sobre Educación Matemática y el rol asignado a la tecnología.

Los investigadores observan la conducta del profesor, en aulas con abundante tecnología, utilizando aspectos de la perspectiva teórica del Enfoque Instrumental (Rabardel, 1995), específicamente las nociones de Génesis Instrumental y de Orquestación Instrumental. La *Génesis Instrumental* es un proceso durante el cual el artefacto tecnológico se transforma en instrumento. El término instrumento es un constructo psicológico y se usa para designar, la combinación del artefacto con los esquemas cognitivos del usuario cuando éste lo usa en una tarea específica. De otro lado, la *Orquestación Instrumental* comprende la organización sistemática e intencional de varios artefactos tecnológicos en un ambiente de aprendizaje, por parte del profesor, para que el estudiante los use en una tarea matemática y guíe su génesis instrumental.

Los resultados de la investigación muestran seis tipos de orquestaciones, caracterizadas en cierta medida, como ampliaciones de las técnicas tradicionales de enseñanza, lo cual sugiere una evolución de las técnicas de enseñanza más que una revolución. Los cambios realizados por los profesores están alineados con sus prácticas habituales y la visión que tienen sobre la enseñanza de la matemática; lo cual refuerza la idea de que las prácticas pedagógicas de los profesores son estables.

Cabe destacar que las orquestaciones fueron descritas a un nivel global puesto que la meta era desarrollar un inventario de tipos de orquestaciones. Respecto a la relación entre la orquestación elegida por el profesor y su visión sobre la enseñanza–aprendizaje de la matemática, así como el rol asignado a la tecnología, los datos obtenidos a partir de cuestionarios y entrevistas, revelan un fuerte vínculo entre sus preferencias por las orquestaciones y su visión de lo que es importante alcanzar durante la enseñanza y cómo la tecnología puede apoyarlo.

Drijvers, et. al. (2010), concluyen que la Orquestación Instrumental es un marco teórico fructífero y pertinente para analizar la práctica de los profesores cuando enseñan matemática con herramientas tecnológicas. Como limitaciones del estudio, hacen referencia a aspectos importantes que no fueron abordados explícitamente durante estas orquestaciones, tales como la interacción entre profesor y alumno o la mediación potencial del artefacto entre el alumno y el conocimiento matemático.

Bittar (2011), en su artículo titulado: “El Enfoque Instrumental para el estudio de la integración de tecnología en la práctica pedagógica del profesor de matemática”, hace referencia a un proyecto de investigación–acción, el cual fue desarrollado durante un período de dos años, involucrando a 22 profesores en servicio y 8 investigadores (profesores universitarios, alumnos de maestría y doctorado). El objetivo de la investigación era doble: en primer lugar, observar los cambios de conducta de los profesores, cuando usan tecnología en sus clases de matemática y luego, discutir la pertinencia de la teoría adoptada para el estudio de la incorporación de tecnología en la práctica pedagógica del profesor que enseña matemática. El marco teórico adoptado, para estudiar el proceso de integración de la tecnología desarrollado por el profesor en su práctica pedagógica, estaba conformado por algunos elementos conceptuales del Enfoque Instrumental. En particular, pone su atención en el concepto de Génesis Instrumental.

En sus conclusiones para el primer objetivo, destaca la idea, en el grupo de participantes, que la tecnología debe ser usada para provocar el aprendizaje, al llevar al alumno a construir su conocimiento. También refiere que, en los meses finales del proyecto, era común las discusiones sobre alguna actividad preparada por alguno de ellos, las cuales giraban en torno a preguntas como: *¿Por qué lo haces de esa forma? ¿Qué ventajas tiene usar informática? ¿No podría hacerse con papel y lápiz? ¿Qué cambiaría, en ese caso?*

Bittar (2011) agrega:

... en los momentos de discusión colectiva, presentes a lo largo de los dos años de trabajo, proporcionaban nuevos aprendizajes, o sea, nuevos esquemas eran producidos y, además, diferentes para cada participante. En esos momentos, quedaba muy claro que ellos se

encontraban en diferentes etapas en lo que se refiere al uso de la tecnología en las clases de matemática. (p. 169. Traducción propia).

Para el segundo objetivo, los análisis realizados mostraron que el Enfoque Instrumental es pertinente para comprender mejor cómo el profesor aprende e incorpora la tecnología en su práctica pedagógica. Al respecto, Bittar (2011) agrega:

Investigar esa incorporación significa investigar el proceso de Génesis Instrumental, esto es, cómo se da la elaboración del instrumento por el sujeto. Es importante destacar que este enfoque teórico también puede ser y es utilizado para investigar el aprendizaje con instrumentos, o sea, para estudiar cómo el alumno aprende en la presencia de instrumentos. (p. 169. Traducción propia).

La relevancia de las dos últimas investigaciones, para nuestro trabajo de investigación, está relacionada con los siguientes temas:

- la necesidad de profundizar aspectos importantes como la interacción entre profesor y alumno o la mediación potencial del artefacto tecnológico entre el alumno y el conocimiento matemático.
- el uso de algunos elementos del Enfoque Instrumental, como marco teórico para estudiar el proceso de integración de la tecnología desarrollado por el profesor en su práctica pedagógica. Específicamente se hace referencia a la Génesis Instrumental.

En resumen, hemos presentado una serie de investigaciones que muestran diferentes maneras de abordar el estudio de los polígonos regulares utilizando diversas tecnologías. Do Amaral (2013) nos muestra las ventajas de usar una herramienta como el GeoGebra para la experimentación de los alumnos cuando investigan y crean conjeturas al resolver las tareas propuestas. Gumiere (2018) nos presenta una propuesta de contextualización (Enladrillado del plano) para el estudio de los polígonos, utilizando modelos físicos de polígonos regulares. Gomes (2018), utilizando la misma propuesta de contextualización, nos muestra el uso del software GeoGebra disponible en tecnologías *touchscreen* como *tablets* y *smartphones*. Gonçalves (2014) nos muestra cómo la construcción de polígonos regulares, utilizando el software SuperLogo, contribuye a la comprensión del Teorema de Pitágoras por parte de los alumnos. Finalmente, Drijvers, et. al., (2010) y Bittar (2011), destacan la importancia de analizar la conducta del profesor, cuando usa herramientas tecnológicas en sus clases de Matemática, considerando como referente teórico el Enfoque Instrumental y en particular el proceso de Génesis Instrumental. Estos argumentos son suficientes para fundamentar nuestra investigación, es decir, establecer el problema que deseamos investigar, formular la pregunta de investigación, elegir la metodología, así como la teoría que nos permita realizar el análisis de los resultados y responder la pregunta de investigación.

1.2 El software TortugArte

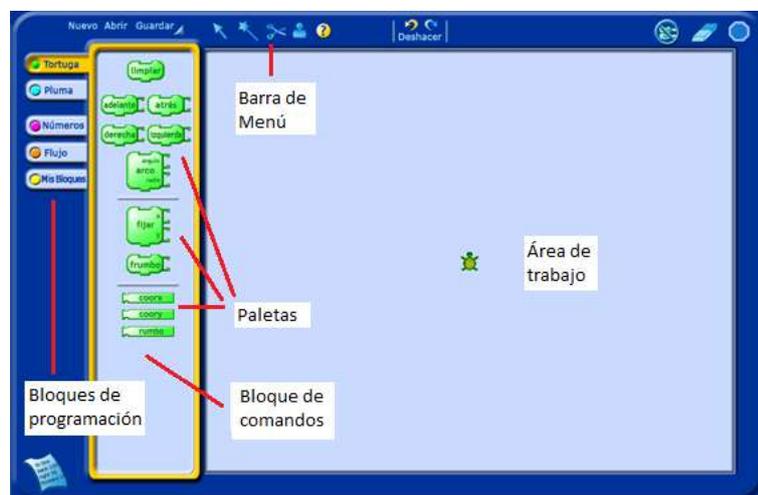
En la década de los 60, Seymour Papert, en coordinación con otros investigadores del Instituto Tecnológico de Massachusetts, inició el desarrollo de un lenguaje de programación simple, potente y capaz de ser usado por los niños. El resultado fue el lenguaje de programación LOGO o lenguaje de la Tortuga. Su uso fue muy promovido en su inicio, luego tuvo un estancamiento y ahora, con todas las ventajas de la innovación tecnológica ha sido relanzado con otras potencialidades y versiones.

El proyecto *One Laptop Per Child* de alcance mundial, liderado por Nicholas Negroponte, incluye una versión del lenguaje de programación LOGO como parte de las Actividades o APP para la laptop XO, con el nombre de TortugArte (OLPC, 2005).

El software TortugArte es una versión del LOGO y está constituido como un lenguaje de programación visual. Para manipular el TortugArte el usuario necesita expresar su pensamiento en forma de comandos. Su interfaz es intuitiva y está compuesta de dos áreas principales: el área formada por los bloques de comandos y el área gráfica, donde los comandos son arrastrados y conectados para formar la programación y, las creaciones son visualizadas. En resumen, usar el TortugArte implica programar el comportamiento de una tortuga, para que realice formas y diseños en la pantalla de una computadora. La **Figura 1** muestra la interfaz del software TortugArte y algunos elementos de programación del bloque TORTUGA.

Figura 1

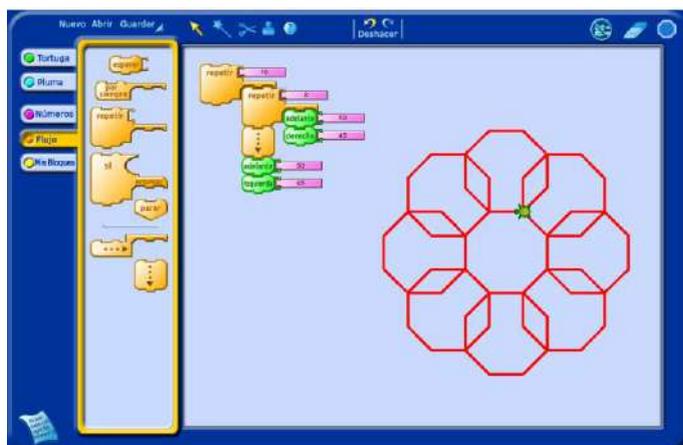
Interfaz del software TortugArte



En la **Figura 2**, en el área de la interfaz gráfica del TortugArte, se muestran algunos comandos conectados (la programación o programa computacional) y la figura de una tortuga, cursor gráfico que, a través de la ejecución de un doble clic sobre alguno de los comandos conectados, se mueve y construye un dibujo, llamado también “camino” de la tortuga.

Figura 2

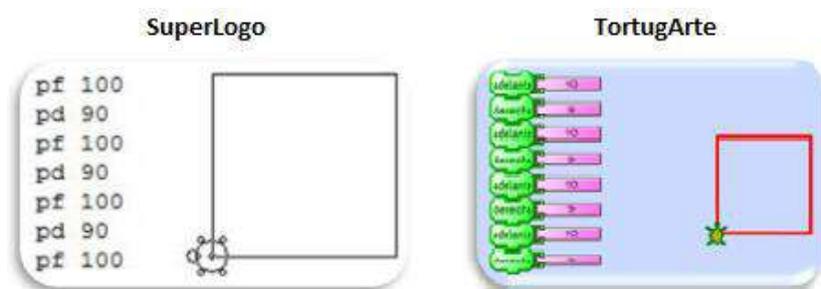
Ejemplo de un programa computacional en TortugArte



Los comandos básicos para mover la tortuga, son idénticos a cuando se realiza una caminata: *anda para adelante*, *anda para atrás*, *gira a la derecha* o *gira a la izquierda*. El movimiento de la tortuga en el área gráfica puede hacerse por medio de comandos de desplazamiento y de giro. Además, es necesario indicar el número de pasos de la tortuga (número de píxeles) en el caso del desplazamiento y el número de grados para el giro. La **Figura 3**, muestra la programación para construir el dibujo de un cuadrado utilizando dos versiones del lenguaje de la tortuga: el SuperLogo y el TortugArte.

Figura 3

SuperLogo vs TortugArte



El SuperLogo utiliza líneas de texto con una sintaxis definida, mientras que el TortugArte utiliza “piezas” organizadas como un puzle. La línea de sintaxis “*pf 100*” y el comando “”, producen la misma acción o comportamiento de la tortuga en el área gráfica: *un desplazamiento de 100 píxeles o pasos*. El resultado de la ejecución de todos los comandos es un cuadrado de lado 100.

En los siguientes apartados presentamos una descripción de los principales comandos del software TortugArte, los cuales están organizados en bloques de programación (MINEDU, 2010).

Paletas del bloque TORTUGA

- **Limpiar.** Limpia el rastro del lápiz que la Tortuga haya realizado, por defecto la Tortuga se ubica en el centro.
- **Adelante.** La Tortuga avanza hacia delante el número de pasos que le sea indicado. (Puntos de píxeles).
- **Atrás.** La Tortuga retrocede hacia atrás el número de pasos que le sea indicado.
- **Izquierda.** La Tortuga gira sobre si misma hacia la izquierda, el número de grados que le sean indicados (de 0° a 360°). Es un giro en sentido antihorario.
- **Derecha.** La Tortuga gira sobre si misma hacia la derecha, el número de grados que le sean indicados (de 0° a 360°). Es un giro en sentido horario.
- **Arco.** Bloque para crear arcos dando un ángulo (de 0° a 360°) y un radio.
- **Fijar x-y.** Ubica a la Tortuga según las coordenadas x-y que se indiquen.
- **Frumbo.** La tortuga gira sobre sí misma en el sentido de las manecillas del reloj, sin tomar en cuenta el ángulo en que se encuentra, es decir, como si estuviera en 0°.
- **Coorx.** Ubicación del eje de las "x", se puede conectar a un parámetro.
- **Coory.** Ubicación del eje de las "y", se puede conectar a un parámetro.
- **Rumbo.** Conectado con un parámetro ubica a la Tortuga en 0°, independientemente de su posición.

Paletas del bloque PLUMA

- **Con.** Para que la Tortuga deje rastros de lápiz.
- **Sin.** Si no queremos que la Tortuga deje algún rastro de lápiz.
- **Fijar tamaño.** Bloque para indicar el tamaño del lápiz, si lo queremos más grande basta con aumentar el número en el bloque morado.
- **Fijar color.** Este bloque sirve para establecer el color del lápiz. Los colores y las sombras en TortugArte están representados por números del 0 al 99.
- **Fijar tono.** Bloque para indicar la sombra, al igual que el color, la sombra se indica con número, cuando el número es mayor, la sombra es menos densa.
- **Pintar fondo.** Esta instrucción hace que la pantalla se pinte de algún color, con o sin sombra.

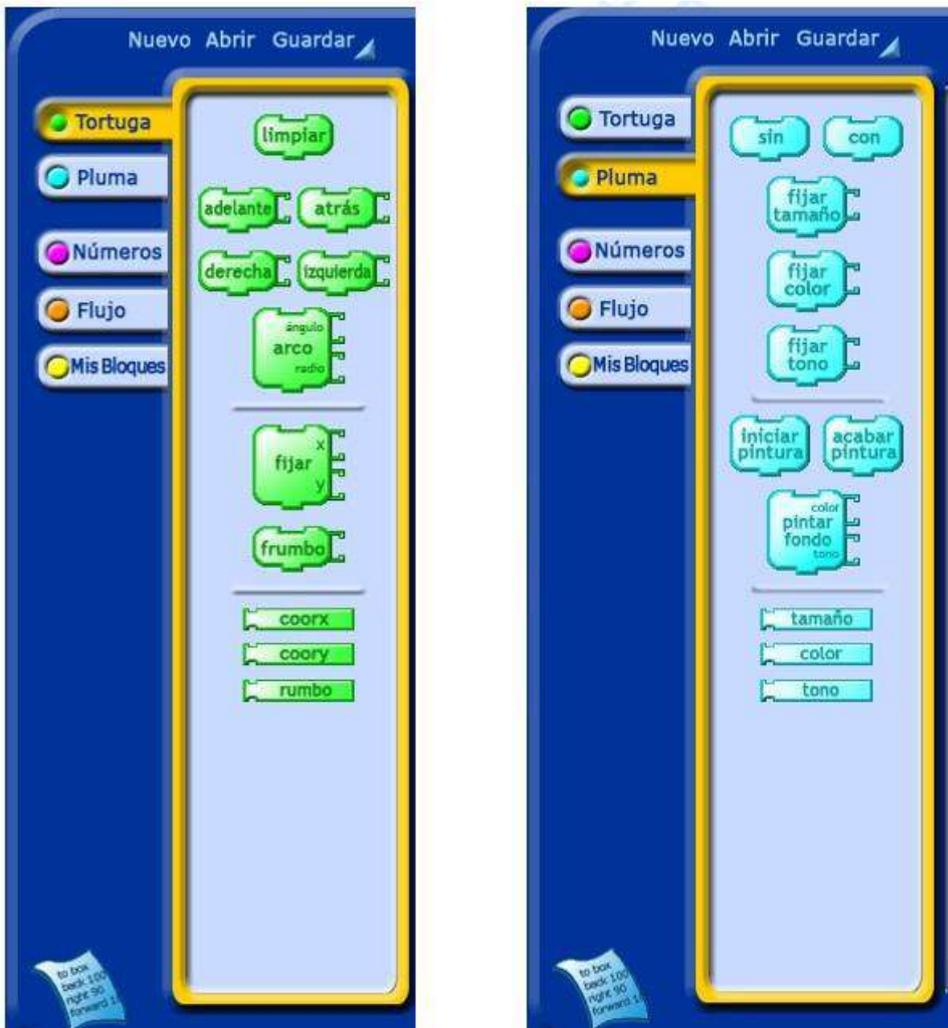
Paletas del bloque FLUJO

- **Esperar.** Para detener las acciones de la Tortuga.
- **Por siempre.** Para realizar alguna instrucción durante todo el tiempo, hasta que alguien lo pare.
- **Repetir.** Bloque para repetir cierto número de veces una secuencia o pila de bloques.
- **Si-entonces.** Este bloque sirve para instaurar una condicional: si pasa esto entonces haz esto.

- **Parar.** Para detener una secuencia de bloques.
- **Condicional en forma de flecha.** Cuando acaba la secuencia de arriba, entonces empieza la de la derecha.
- **Condicional con flecha.** Cuando acaba la secuencia de arriba, entonces empieza la de abajo.

Figura 4

Bloques de programación TORTUGA y PLUMA



Paletas del bloque MIS BLOQUES

Las paletas de este bloque le permiten al usuario definir sus propios bloques.

Figura 5

Bloque de programación MIS BLOQUES

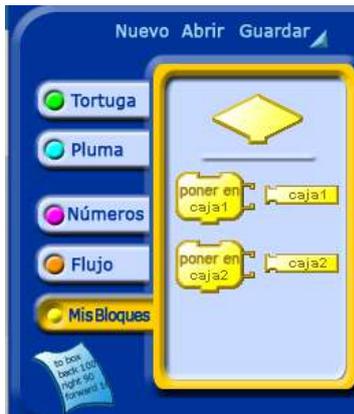
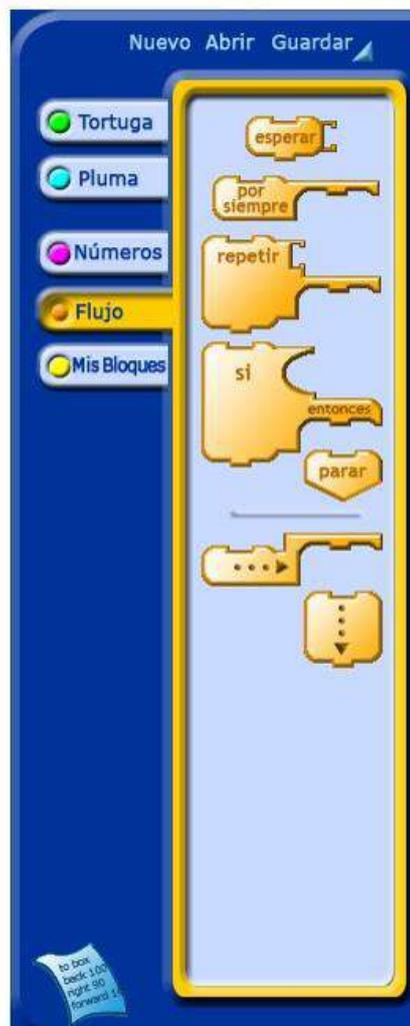
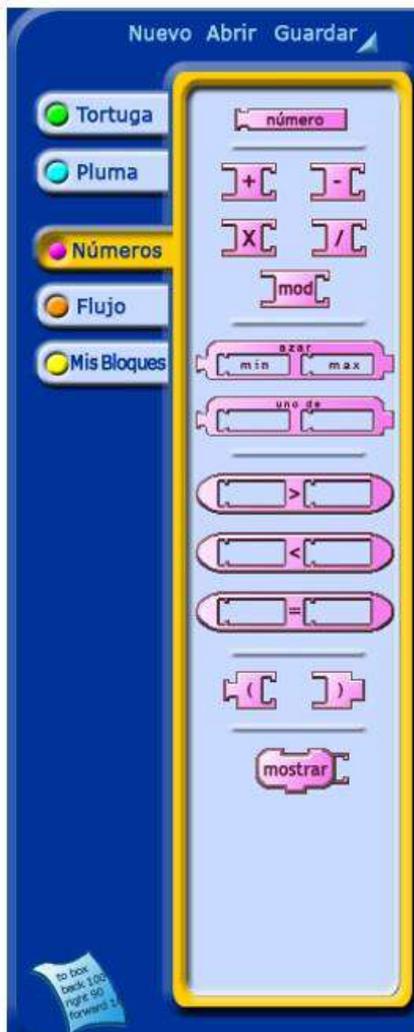


Figura 6

Bloques de programación NÚMEROS y FLUJO



Una particularidad del TortugArte es que no dispone de herramientas específicas para la construcción de figuras geométricas, el alumno debe programar un algoritmo para elaborarlas. Sin embargo, la ventaja de este software está en las posibilidades que el alumno tiene para elaborar

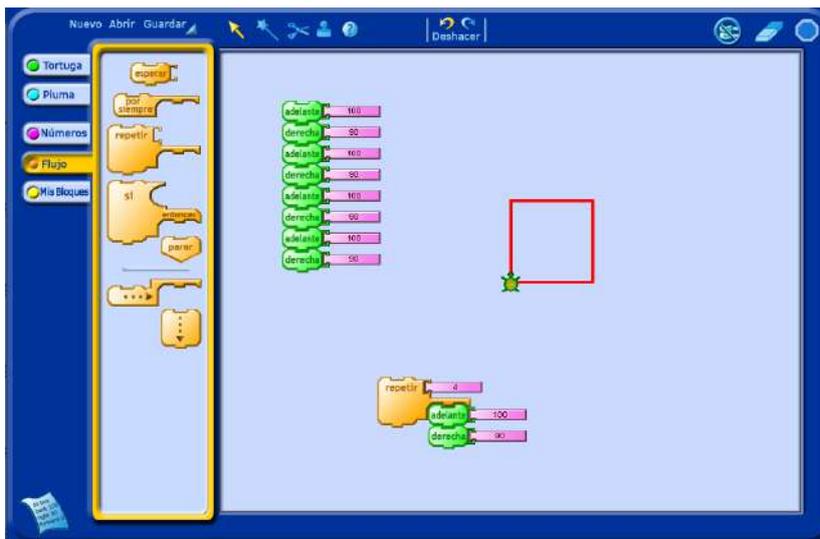
conjeturas libremente y experimentarlas, identificar sus aciertos y errores de manera autónoma, luego reflexionar sobre su solución.

Con el TortugArte, el alumno representa y construye conocimiento, pero también se forma como programador. En este sentido, el TortugArte se constituye en un ambiente que implica al alumno en el desarrollo de ideas que lo encaminan a la resolución de problemas, más que al aprendizaje de reglas formales. Por otro lado, la tarea del profesor será proporcionar estímulos y desafíos a los aprendices, en lugar de dar respuestas prontas e instantáneas a las actividades.

En la **Figura 7**, mostramos la construcción de un cuadrado, utilizando dos bloques de comandos organizados de diferente manera. El primero es una secuencia de comandos que se repite cuatro veces: “adelante: 100, derecha: 90, adelante: 100, derecha: 90, adelante: 100, derecha: 90, adelante: 100, derecha: 90” y el segundo es una secuencia que combina el comando “repetir: 4” junto con los comandos “adelante: 100” y “derecha: 90”.

Figura 7

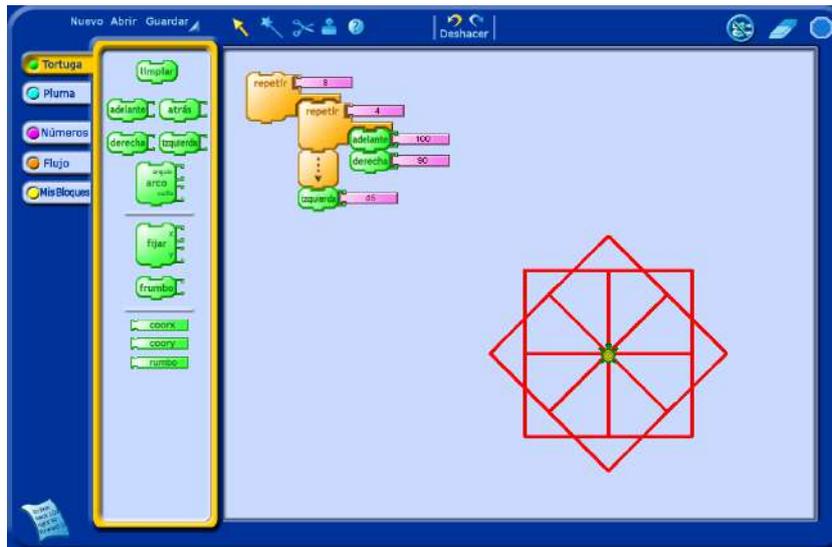
Uso del comando “repetir”



En la **Figura 8**, observamos una secuencia de comandos conectados y el respectivo registro gráfico producido por la tortuga. El ejemplo muestra doblemente, el uso del comando “repetir” para simplificar el programa computacional o secuencia de comandos, cuando se generan procesos repetidos.

Figura 8

Usos del comando “repetir”



1.3 Justificación de la investigación

El desarrollo de saberes matemáticos es un desafío en la educación básica, esto tanto a nivel de logros de aprendizaje como en la forma de enseñar. Para el desarrollo del área de matemática se propone el enfoque de resolución de problemas y se sugiere la integración transversal de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). El enfoque de resolución de problemas plantea un rol activo del alumno, una mirada más contextualizada de la matemática y una orientación práctica – la solución de problemas.

Basándonos en los lineamientos pedagógicos explícitos en el Currículo Nacional, los esfuerzos que se hacen por introducir las TIC en la educación – como el proyecto One Laptop per Child (Proyecto OLPC) – y conscientes del poco saber práctico que se genera a partir de la práctica escolar; consideramos pertinente comprender cómo se construye un saber matemático mediado con el uso de un software. En este sentido, proponemos que esta tarea comprensiva de la génesis de un conocimiento matemático específico se haga desde una metodología sistemática: la Ingeniería Didáctica propuesta por Artigue (1995).

Siguiendo las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica – análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y, análisis a posteriori y evaluación – realizamos un análisis epistemológico, cognitivo y didáctico de un contenido matemático; el diseño de una secuencia didáctica mediada por el software TortugaArte; la implementación y recogida de información y, la validación interna de la propuesta. Mediante este planteamiento se espera que los sujetos de la investigación – estudiantes para profesor de Educación Primaria – vivan una experiencia de

aprendizaje constructivista y a partir de sus desempeños se pueda identificar el proceso de instrumentación de un saber matemático y la instrumentalización de un software.

Desarrollar esta investigación con estudiantes para profesor de Educación Primaria resulta sustantivo porque, por un lado, permite familiarizarlos con un nuevo modelo de enseñanza y a la vez, un modelo de investigación matemática: la Ingeniería Didáctica y; por otro, ver en acción una secuencia didáctica orientada a generar saberes matemáticos y la integración de TIC de forma transversal.

Cabe advertir, también, la pertinencia de esta investigación desde el ámbito pedagógico y el desarrollo profesional del docente; pues proponemos organizar una secuencia didáctica que surja de un análisis a priori, además de mostrar el proceso de validación interna que puede constituirse como un referente a afianzarse en el perfil profesional de los futuros maestros, en la línea de lo que propone el Marco de Buen Desempeño Docente (Ministerio de Educación [MINEDU], 2014), a decir, los desempeños 19, 22 y 23:

- Desempeño 19. Propicia oportunidades para que los estudiantes utilicen los conocimientos en la solución de problemas reales con una actitud reflexiva y crítica.
- Desempeño 22. Desarrolla estrategias pedagógicas y actividades de aprendizaje que promueven el pensamiento crítico y creativo en sus estudiantes y que los motivan a aprender.
- Desempeño 23. Utiliza recursos y tecnologías diversas y accesibles, y en el tiempo requerido en función del propósito de la sesión de aprendizaje.

A continuación, con el propósito de comprender el contexto en el cual se plantea la educación matemática actualmente, se detallan algunas acciones de inserción de tecnología a la educación, lineamientos educativos – referidos a las competencias matemáticas – y planteamientos normativos referidos al perfil del docente.

La primera gran introducción de tecnología a la educación fue vía el proyecto mundial One Laptop per Child (Proyecto OLPC) (Ministerio de Educación [MINEDU], 2007). Empezó con la adquisición de 950 000 computadoras portátiles XO y una inversión aproximada de 400 millones de soles. La capacitación de los profesores fue corta –en promedio 20 horas– y para la mayoría de ellos, este fue un primer encuentro con ambientes de aprendizaje 1:1, es decir, una computadora para cada alumno (Laura, 2015). Es muy frecuente que en estas capacitaciones se prioricen objetivos relacionados a la brecha tecnológica antes que la puesta en práctica de verdaderas transformaciones pedagógicas mediadas por el uso de las TIC (Camarda, 2016). Según Laura (2015) los resultados de la investigación no mostraron diferencias estadísticamente significativas, relativas al incremento del rendimiento académico, entre el grupo de control y el grupo experimental, a pesar de haber observado mejoras en el aspecto emocional y oportunidades de autonomía e independencia. Para la

presente investigación se usará el software TortugArte que está disponible en la computadora portátil XO, por lo tanto, esperamos aportar con ideas para que los profesores elaboren prácticas pedagógicas innovadoras.

Con relación al contenido, cabe señalar que una característica muy importante e inseparable de la Geometría es su componente visual. Es imposible no hacer uso de representaciones gráficas cuando se exponen conceptos geométricos. De hecho, cuando expresamos verbalmente una situación o nombramos a una figura geométrica, es común intentar “dibujarla” mentalmente (Barrantes et. al., 2015). Con el avance tecnológico, se han desarrollado herramientas de visualización muy potentes para la representación de conceptos geométricos simples y complejos. En ese sentido, el software TortugArte permite al alumno representar y construir conocimiento, en un ambiente amigable, interactivo, flexible y de manera colaborativa.

En la construcción de un triángulo con lápiz, papel y regla (o escuadra, compás y semicírculo) se pone en juego saberes y se habilitan procedimientos diferentes que en las construcciones realizadas con un software de Geometría Dinámica como el GeoGebra (software de código abierto, que integra de forma dinámica Geometría Sintética y Analítica y, la representación de objetos gráficos). Con el software TortugArte se pasa de la representación y la interpretación, a la programación, puesto que las figuras no están predefinidas por el software, sino que se van dibujando de acuerdo, a las órdenes que le demos a la tortuga.

Tanto la geometría como el uso de entornos virtuales están contemplados en el Currículo Nacional de la Educación Básica (Ministerio de Educación [MINEDU], 2016), específicamente, se espera que los estudiantes logren como resultado de su formación básica las competencias 26 y 28.

La *Competencia 26. Resuelve problemas de forma, movimiento y localización*, para el nivel 5, se plantea que un estudiante tiene dicho nivel si:

Resuelve problemas en los que modela las características y datos de ubicación de los objetos del entorno a formas bidimensionales y tridimensionales, sus elementos, posición y desplazamientos. Describe estas formas mediante sus elementos: número de lados, esquinas, lados curvos y rectos; número de puntas, caras, formas de sus caras, usando representaciones concretas y dibujos. Así también traza y describe desplazamientos y posiciones, en cuadrículados y puntos de referencia. Emplea estrategias y procedimientos basados en la manipulación, para construir objetos y medir su longitud (ancho y largo) usando unidades no convencionales. Explica semejanzas y diferencias entre formas geométricas, así como su proceso de resolución. (p. 147)

De igual manera, en relación con el uso de las TIC, en el nivel 5 de desarrollo de la *Competencia 28. Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC*, se afirma que un estudiante ha alcanzado dicho nivel si:

Se desenvuelve en los entornos virtuales cuando analiza y ejecuta procedimientos para elaborar o modificar objetos virtuales que representan y comunican vivencias en espacios virtuales adecuados a su edad, realizando intentos sucesivos hasta concretar su propósito (p.153).

Asimismo, sobre el perfil del egresado y en relación con los dos aspectos mencionados anteriormente, se indica que:

- El estudiante interpreta la realidad y toma decisiones a partir de conocimientos matemáticos que aporten a su contexto (p.15).
- El estudiante aprovecha responsablemente las TIC para interactuar con la información, gestionar su comunicación y aprendizaje. (p.17)

Estas renovadas demandas de aprendizaje exigen replantear la naturaleza de los procesos pedagógicos en las escuelas y, a la vez, da contexto a la nueva función social y a la tarea pedagógica de la profesión docente. En síntesis, se preconiza que el estudiante debe ser protagonista en la construcción de su aprendizaje, situación que exige: capacidad de pensar, producir ideas y transformar realidades, así como transferir conocimientos a diversos contextos y circunstancias; y, en lo que concierne al docente, se le exige un rol distinto de aquel desempeñado en un contexto de mera reproducción del saber, debe ser un facilitador y mediador del aprendizaje.

El Marco de Buen Desempeño Docente (MBDD) (Ministerio de Educación [MINEDU], 2012), es una herramienta que, entre otras funciones, permite orientar la formación de docentes. Ha sido estructurado en tres categorías compuestas por: cuatro (4) dominios que comprenden nueve (9) competencias, las cuales a su vez contienen cuarenta (40) desempeños. En lo que concierne a nuestra investigación, se relaciona con el Dominio 2: Enseñanza para el aprendizaje de los estudiantes, del que tomamos la Competencia 4: Conduce el proceso de enseñanza con dominio de los contenidos disciplinares y el uso de estrategias y recursos pertinentes, para que todos los estudiantes aprendan de manera reflexiva y crítica lo que concierne a la solución de problemas relacionados con sus experiencias, intereses y contextos culturales. En dicha competencia, consideramos los desempeños 19, 22 y 23 ya indicados en un párrafo anterior.

De manera particular, podemos observar que dichos desempeños, se relacionan con la contextualización de los contenidos, el desarrollo del pensamiento crítico y creativo y, el uso de la tecnología. Estos aspectos están en congruencia con las investigaciones referenciadas en los antecedentes, las cuales destacan la importancia del estudio contextualizado del contenido

matemático, en este caso, el enladrillado, teselado o cubrimiento de superficies planas con polígonos regulares, los cuales están presentes en el entorno del alumno y su estudio en la Educación Básica Regular se da en los tres niveles: inicial, primaria y secundaria. El uso de diversas herramientas tecnológicas en la enseñanza y el aprendizaje de los polígonos regulares es otro aspecto destacado en dichas investigaciones. Asimismo, está la referencia a la Génesis Instrumental de Rabardel (1995), como un marco teórico pertinente para comprender el proceso de integración de la tecnología en el contexto escolar.

Los aspectos comentados ponen en evidencia que la docencia es un quehacer complejo y que las exigencias profesionales, frente a las políticas curriculares actuales, requieren de propuestas didácticas innovadoras en la formación inicial de los futuros docentes. En esta línea está nuestro trabajo de investigación, cuyo objetivo es el desarrollo de una secuencia didáctica, por parte de estudiantes para profesor de Educación Primaria, que les permita experimentar la generación de instrumentos, en la solución de tareas específicas que involucra el concepto y propiedades de un polígono regular. Por lo tanto, la pregunta que orienta este trabajo de investigación es: *¿Cómo ocurre la Génesis Instrumental de los polígonos regulares, en estudiantes para profesor de Educación Primaria, por medio de una secuencia didáctica que involucra el uso del software TortugArte?*

1.4 Objetivos de la investigación

1.4.1 Objetivo general

Analizar como ocurre la Génesis Instrumental de los polígonos regulares, en estudiantes para profesor de Educación Primaria, por medio de una secuencia didáctica que involucra el uso del software TortugArte.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar la construcción y/o movilización de los esquemas de uso y de acción instrumentada durante el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta.
- Identificar como ocurre el proceso de instrumentación durante las acciones de los estudiantes para profesor de Educación Primaria, en el desarrollo de la secuencia didáctica y de instrumentalización respecto al software TortugArte.
- Analizar las dificultades encontradas por los estudiantes para profesor de Educación Primaria al movilizar las propiedades matemáticas inherentes a los polígonos regulares.



Capítulo II. Aspectos teóricos y metodológicos

En este capítulo exponemos algunos aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995) que utilizamos en el desarrollo de nuestra investigación: cuestiones sobre su origen, diferencias fundamentales entre artefacto e instrumento, esquemas de uso, esquemas de acción instrumentada, los procesos de instrumentación e instrumentalización y el modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada (SAI).

En lo que respecta a la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), como metodología de investigación, presentamos una descripción de las cuatro fases que comprende su proceso experimental: los análisis preliminares; la concepción y el análisis a priori de la secuencia didáctica; la experimentación y, el análisis a posteriori y validación.

2.1 El Enfoque Instrumental como marco teórico del estudio

Para nuestra investigación utilizamos el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), más específicamente aquellos aspectos relacionados a la Génesis Instrumental. Dicho enfoque tiene su origen en la Ergonomía Cognitiva, la cual se ocupa de las relaciones entre los seres humanos y los artefactos, considerando una perspectiva cognitiva. La originalidad de su enfoque está en no considerar por separado el artefacto y el sujeto que lo utiliza, sino en considerar como unidad de análisis de las influencias recíprocas entre el artefacto y el usuario. Un caso particular es la interacción entre persona y computadora.

Salazar (2009, p.63), en su tesis doctoral sobre Génesis Instrumental hace referencia a tres nociones claves de este enfoque:

- **Artefacto:** Es el objeto material (lápiz, computador, software ...) o simbólico (una figura, un concepto, ...), destinado a dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de cierto tipo de tareas.
- **Esquemas de utilización:** Rabardel usa este término, que de acuerdo con Vergnaud (1996), es *una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.*
- **Instrumento:** Es lo que un sujeto construye a partir del artefacto; por lo tanto, es una identidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización contruidos por el sujeto durante su interacción.

La **Figura 9**, muestra la relación entre estos tres conceptos, llamados también componentes del instrumento.

Figura 9

Componentes de un instrumento



Nota. Adaptado de Garcia-Cuellar (2014, p. 21)

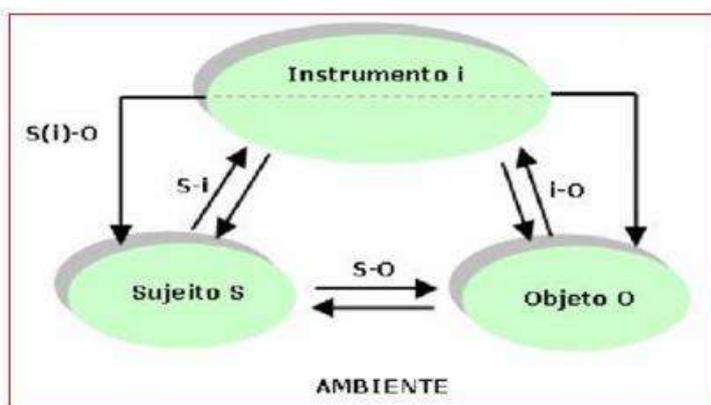
El Enfoque Instrumental estudia, entre otras cuestiones, las diferencias que existe entre artefacto, instrumento y los procesos que involucran la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que Rabardel (1995) llama proceso de Génesis Instrumental. Según Verillon y Rabardel (1995), este proceso busca la integración entre las características de los artefactos (sus potencialidades y limitaciones) y las actividades del sujeto (sus conocimientos y métodos de trabajo).

Con la finalidad de caracterizar las situaciones donde el artefacto sufre una transformación, Rabardel (1995) propone el modelo de Situaciones de Actividad Instrumentada (SAI), a partir de la triada: **sujeto-instrumento-objeto**, donde:

- el **sujeto** puede ser un usuario, operario, trabajador o agente;
- el **instrumento**, se refiere a la herramienta, máquina, sistema, utensilio y,
- el **objeto**, sobre el cual va dirigida la acción con la ayuda del instrumento, puede ser la materia prima, objeto de la actividad o trabajo.

Figura 10

Modelo de Situaciones de Actividad Instrumentada (SAI)



Nota. Adaptado de Rabardel (1995, p.53)

La **Figura 10**, describe las posibles interacciones que intervienen en las actividades instrumentadas: sujeto-objeto [S-O], sujeto-instrumento [S-I], instrumento-objeto [I-O] y sujeto-objeto mediado por el instrumento [S(I)-O], que se desarrollan en un ambiente formado por un conjunto de condiciones que el sujeto debe tener en cuenta para realizar sus actividades.

El modelo SAI constituye una herramienta para examinar, de manera detallada, el uso de instrumentos en una tarea. El instrumento como mediador tiene la orientación Objeto-sujeto (es el medio que permite el conocimiento del objeto) y la orientación Sujeto-objeto (es el medio para la acción transformadora dirigida al objeto).

Rabardel (1995) sostiene que el instrumento es una entidad mixta con dos componentes: el *artefacto*, producido para el sujeto y los *esquemas de utilización* asociados, que son el resultado de una construcción del propio sujeto o de una apropiación de esquemas de utilización ya existentes. El artefacto pasará al estado de instrumento cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes. El instrumento puede constituirse en artefacto en función del uso o usos que el sujeto hace de él. De esta manera, los usos del artefacto dependen también de las necesidades y objetivos del usuario.

Rabardel (1995) justifica que los esquemas están formados por el componente psicológico del instrumento que organiza la actividad (nuevos esquemas, esquemas personales o sociales preexistentes), de esta manera, los esquemas modelan al sujeto y su actividad. Los esquemas concernientes al uso del artefacto, son denominados esquemas de utilización, los cuales tienen relación con dos dimensiones de la actividad:

- las actividades relacionadas a *tareas secundarias* (tareas relativas a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto – funcionamiento y manejo) en las cuales los esquemas son definidos como esquemas de uso (EU)
- las actividades *primarias* (orientadas al objeto de la actividad, en las cuales el artefacto es un medio de concretización y de realización), en que los esquemas son definidos como esquemas de acción instrumentada (EAI).

Un mismo esquema puede tener el estado de EU o EAI. De igual manera, los diferentes tipos de esquemas son mutuamente dependientes. Por lo tanto, el instrumento es una entidad dinámica que evoluciona según las situaciones en las cuales la acción del sujeto se involucra.

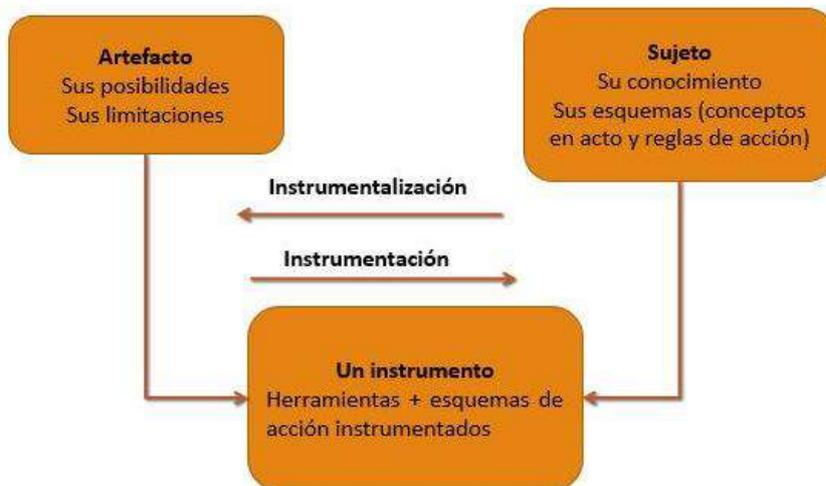
Un tercer tipo de esquemas de utilización, según lo especifica Rabardel (1995), son los esquemas de acción colectiva instrumentada (EACI) y corresponde a la utilización simultánea o conjunta de un instrumento en un contexto de actividades compartidas o colectivas.

Según Rabardel (1995), la composición y el origen del instrumento dependen de sus invariantes: esquemas y artefactos son instrumentalizados (utilizados) por el sujeto. Los esquemas

pertenecen al sujeto y son generalizados o acomodados por él al artefacto, pero algunas veces, es necesario construir nuevos esquemas. Estos dos procesos descritos son distinguidos en términos de *instrumentalización* e *instrumentación*, a los cuales Rabardel llama Génesis Instrumental o génesis del instrumento.

Figura 11

Proceso de Génesis Instrumental



Nota. Adaptado de Rabardel (1995)

Rabardel (1995) describe la Génesis Instrumental suponiendo una dialéctica entre dos polos: el *artefacto* y el *sujeto*, y distinguiendo dos dimensiones o procesos:

- La **instrumentación** (orientada al sujeto): tiene relación con el surgimiento y evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada. Zuchi (2008) caracteriza la instrumentación como un proceso por el cual las especificidades y potencialidades de un artefacto van a condicionar las acciones del sujeto para resolver un problema dado.
- La **instrumentalización** (orientada al artefacto): tiene relación con el enriquecimiento de las propiedades del artefacto. Zuchi (2008) caracteriza a la instrumentalización como un proceso por el cual el sujeto modifica, adapta o produce nuevas propiedades, personalizando el artefacto de acuerdo con sus necesidades, por ejemplo, cuando el sujeto personaliza el computador en cuanto a accesibilidad de los programas, barra de herramientas, formato de la pantalla, etc.

Los dos tipos de procesos corresponden al sujeto. Se distinguen por la orientación de la actividad: “en el proceso de instrumentación, está dirigida al sujeto mismo, en el proceso de instrumentalización está orientada a la componente artefactual del instrumento” (Rabardel, 1995, p.12). En esta misma perspectiva, Bellemain y Trouche (2016) sostienen que estos dos procesos de la Génesis Instrumental no son independientes uno del otro, sino que se entrelazan. Con la finalidad de

distinguirlos en el análisis, se puede focalizar por un lado en el estudiante, preguntándonos: en qué medida la integración de un nuevo artefacto modifica la forma de su actividad y, por otro lado, en el artefacto, preguntándonos: en qué medida éste aporta al resultado de la actividad, de su poder creativo.

El Enfoque Instrumental considera como unidad de análisis a los esquemas de utilización, los cuales son definidos como invariantes observables en la actividad instrumentada. Se consideran como el producto de la experiencia y los conocimientos del sujeto, por una parte, y de las restricciones y potenciales de los artefactos en la acción instrumentada, por otra. Los esquemas pueden ser construidos por el sujeto de manera individual o colectiva, y en ese caso se llaman esquemas sociales de utilización.

Los esquemas son objeto de transmisión, de transferencia, más o menos formales: desde las informaciones transmitidas de un usuario a otro, hasta las formaciones estructuradas alrededor de sistemas técnicos complejos, pasando por los diversos tipos de ayudas (manuales, asistencias incorporadas o no en el artefacto mismo). Por eso los hemos calificado como esquemas sociales de utilización (Rabardel, 1995 p. 115)

El Enfoque Instrumental permite evidenciar, durante el desarrollo de las situaciones de enseñanza, los siguientes tres fenómenos que están relacionados con el aprendizaje del estudiante:

- **Un artefacto no es neutro.** Las restricciones que impone a la acción y los potenciales que ofrece, estructuran la acción y por eso la conceptualización. Diferentes artefactos producen conceptualizaciones diferentes.
- **El artefacto sólo es una parte del instrumento y por lo tanto, no basta su inclusión en la actividad para garantizar un aprendizaje determinado.** Es la organización de la acción instrumentada, -los tipos de tareas propuestas y las interacciones sociales en el interior de la clase- lo que contribuye a la génesis de un instrumento determinado.
- **Los esquemas de utilización se pueden transmitir.** Por eso interesa identificar aquellos que son pertinentes con respecto al aprendizaje buscado, y socializarlos.

En resumen, para el Enfoque Instrumental, el aprendizaje es la transformación de esquemas de acción y de pensamiento, dentro de una práctica de resolución de problemas mediado por artefactos. En este sentido, la enseñanza debe proponer tareas y artefactos que por sus características (potencial y restricciones) hagan probable el surgimiento de determinados instrumentos considerados adecuados para el estudiante.

2.2 La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación

Para nuestro trabajo de investigación utilizamos algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica. En lo que sigue haremos una breve descripción de dicha metodología.

La noción de Ingeniería Didáctica surge a inicios de la década de los 80 para describir una manera de abordar el trabajo didáctico comparándolo como el trabajo de un ingeniero. Según Artigue (1995):

(...) para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (p. 33)

Al igual que un ingeniero, el profesor concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un contenido matemático determinado por un grupo específico de alumnos. Además, a medida que pone en práctica lo planeado evoluciona de acuerdo a las interacciones que se producen en clase.

Desde su origen, la Ingeniería Didáctica estuvo ligada a las intervenciones didácticas (experimentaciones) en las clases, tomando la forma de secuencias de actividades. En concreto, se trata del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de provocar la emergencia de determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logra elaborar recursos para la enseñanza científicamente experimentados (Artigue, 2011, p.20). Cabe destacar dos características de la Ingeniería Didáctica:

- ser un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, 1995, p.36).
- su validación es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (y no en validación externa, la cual se basa en la comparación del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control) (Artigue, 1995, p.37).

En relación al primer aspecto se distinguen, por lo general, dos niveles de Ingeniería Didáctica, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación:

- A nivel de micro-ingeniería. Las investigaciones a este nivel son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema. Ellas son locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos del aula.
- A nivel de macro-ingeniería. Son las que permiten componer la complejidad de las investigaciones de micro-ingeniería con las de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Los dos niveles de investigación son importantes y se complementan. Las investigaciones de micro-ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica, mientras que las investigaciones de macro-ingeniería, a pesar de las dificultades metodológicas e institucionales, son indispensables.

El proceso experimental de la metodología de la Ingeniería Didáctica consta de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori de situaciones didácticas, experimentación y, análisis a posteriori y validación.

2.2.1 Fase 1. Análisis preliminares

Esta primera etapa de la Ingeniería Didáctica está estructurada con el propósito de analizar cómo están desarrollándose los conceptos que aborda nuestra investigación, de modo que la propuesta de intervención que pretendemos llevar adelante impacte positivamente en la práctica actual del aula. En este sentido, se analiza el impacto de la enseñanza tradicional, las concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que limitan el desarrollo de dichos conceptos.

Según Carneiro (2005), Michelle Artigue sugiere un análisis en tres dimensiones: 1) dimensión epistemológica, relacionada a las características del saber en juego; 2) dimensión didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza; 3) dimensión cognitiva, ligada a las particularidades del público al cual se dirige la enseñanza.

2.2.1.1 Dimensión epistemológica. Carneiro (2005) nos presenta parcialmente, una evolución histórica de la Geometría, donde destaca su naturaleza mutable y las diferentes connotaciones, con el transcurrir de los siglos: Geometría intuitiva, Geometría científica, Geometría deductiva, Geometría de las transformaciones, Geometría avanzada.

La Geometría intuitiva o geometría del subconsciente, originada en las observaciones del espacio físico real. El hombre observa, compara, reconoce: nacen las nociones primitivas de distancia, las figuras geométricas simples, el paralelismo y la perpendicularidad. La Geometría científica, es producto de la mente humana al consolidar conscientemente las nociones primitivas, en un conjunto de reglas y leyes más generales. La Geometría deductiva o demostrativa, fue introducida por los griegos, quienes haciendo uso del pensamiento lógico-deductivo amplían el cuerpo de leyes y reglas iniciales, para constituir finalmente la Geometría euclidiana: en esta concepción el "espacio" deja de ser real y pasa a ser idealizado. La Geometría de las transformaciones, tiene su origen en la percepción de que existen varias geometrías: las euclidianas y las no euclidianas, fueron creadas en el siglo XIX. La Geometría avanzada, designa una concepción más reciente y muy general de geometría, es una teoría que tiene un espacio definido y que posee un conjunto de relaciones entre sus objetos.

Sobre la enseñanza de la Geometría en el Perú, debemos considerar que, durante los últimos años, el Ministerio de Educación (MINEDU) ha propuesto tres diseños curriculares durante los años

2005, 2008 y 2016. El Diseño Curricular Nacional del 2005 presentaba para el estudio de la geometría, el componente Geometría y Medida:

Este componente permitirá a los alumnos examinar y analizar las formas, características y relaciones de figuras en el plano y sólidos en el espacio, interpretar las relaciones espaciales mediante sistemas de coordenadas y otros sistemas de representación. Asimismo, comprender los atributos o cualidades mensurables de los objetos, así como las unidades, sistemas y procesos de medida; y la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas (Ministerio de Educación, 2005, p.166)

El Diseño Curricular Nacional del 2008 consideraba competencias por ciclos, así como un conjunto de capacidades, conocimientos y actitudes afines al desarrollo de los estudiantes y detalladas en el marco de cada competencia. En este documento, el componente Geometría y Medida es cambiado por la competencia: Geometría y Medición; aunque los conceptos geométricos son similares a los establecidos en el Diseño Curricular del 2005. Sin embargo, se puede observar que esta propuesta tiene un enfoque constructivista para su desarrollo. En esta perspectiva se desarrollaron estándares nacionales de aprendizaje para cada ciclo de la Educación Básica Regular y fueron organizados en los Mapas de Progreso del Aprendizaje. Para la Geometría, un estudiante alcanzará el Nivel Destacado si:

Construye y representa formas bidimensionales y tridimensionales compuestas aplicando relaciones entre propiedades de las formas y generaliza los procesos seguidos para la construcción. Argumenta y demuestra propiedades y teoremas por medio de la deducción. Evalúa el nivel de exactitud de las mediciones que realiza considerando el margen de error. Formula conjeturas referidas a la equivalencia entre dos composiciones de transformaciones, las comprueba y argumenta. Interpreta movimientos elípticos e hiperbólicos mediante modelos algebraicos y los representa en el plano cartesiano (Instituto Peruano de la Calidad de la Educación Básica [IPEBA], 2013, p.10).

La enseñanza de la geometría propuesta en el DCN-2005, ponía el énfasis en el análisis de las figuras planas y los sólidos geométricos, mientras que el Currículo Nacional del 2016, orienta el estudio de la geometría a través de la competencia: *Resuelve problemas de forma, movimiento y localización*. Esta perspectiva pretende el desarrollo de habilidades geométricas del estudiante como la de obtener información a partir de la observación; interpretar, representar y describir relaciones entre formas; desplazarse en el espacio; entre otras. Dado que la Geometría está presente en diversas manifestaciones de la cultura y la naturaleza, su aprendizaje implica dotarse de herramientas y argumentos para comprender el mundo; la Geometría, además de ser una herramienta para el entendimiento, es la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y ligada a la realidad (Cabellos Santos, 2006, citado en IPEBA, 2013).

La enseñanza de la Geometría, en el Perú, según nos muestran los diferentes currículos, empieza en el nivel inicial con una Geometría intuitiva y se continúa con la Geometría científica, en el nivel secundario. Las demostraciones geométricas son poco usuales en el desarrollo de la asignatura, en este sentido la Geometría Euclidiana es abordada superficialmente.

Sobre la formación del profesorado, Salazar y Gaita (2015) en su artículo sobre "*Educación Matemática en el Perú: avances y perspectivas*", afirman que:

... se encuentran evidencias de la presencia de un modelo conductista muy arraigado en los planes de formación de profesores, en particular, en la formación de profesores de nivel primario y de profesores de matemáticas de nivel secundario. (p.258).

Las investigadoras destacan las deficiencias en la formación inicial de docentes para Educación Primaria: existe escaso o nulo conocimiento sobre la resolución de problemas matemáticos, lo cual hace que no puedan enfrentar con éxito la resolución de problemas matemáticos. También señalan la existencia de libros de texto para Matemática, elaborados por editoriales privadas, que son utilizados tanto en los colegios particulares como estatales; sin embargo, el enfoque por competencias que se promueve en el CN-2016, no es considerado en la elaboración de los textos; los contenidos son presentados en bloques teóricos seguidos de problemas de aplicación directa, sin ser contextualizados y desconectados, uno del otro. Esta problemática es atendida por el MINEDU, a través de documentos como las Rutas del Aprendizaje (Ministerio de Educación, 2015), proporcionando orientaciones para apoyar el trabajo pedagógico en los colegios y de esta manera, cubrir los vacíos que presentan en su formación los profesores de los niveles de primaria y secundaria. Esta iniciativa ha sido complementada con programas de perfeccionamiento docente, a través de becas de estudios para maestrías en Enseñanza de las Matemáticas.

2.2.1.2 Dimensión didáctica. Rutas del Aprendizaje (Ministerio de Educación [MINEDU], 2015), es un material pedagógico de apoyo, proporcionado por el MINEDU a las instituciones educativas del sector público y son de libre disponibilidad para el sector privado. Revisamos y analizamos su contenido para conocer cómo es sugerida la enseñanza del tema que involucra nuestra investigación: los polígonos regulares. Dichos documentos presentan, entre otros aspectos, orientaciones didácticas para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las competencias de cada área curricular. El discurso principal es el enfoque centrado en la resolución de problemas, cuya intención es promover formas de enseñanza y aprendizaje a partir del planteamiento de problemas en diversos contextos. Esta perspectiva promueve la vinculación del estudiante con la realidad que lo circunda, haciendo de su aprendizaje una experiencia más significativa.

En síntesis, en los diversos documentos podemos observar que la contextualización de los contenidos es un aspecto novedoso para la enseñanza tradicional. En relación con los polígonos

regulares, las actividades propuestas comprenden, además de la resolución de problemas reales del mundo donde se mueven los estudiantes, el uso de materiales como el Tangram, los Mecanos, el Geoplano y el GeoGebra. El doblado de papel o papiroflexia es otro recurso sugerido para el estudio de los polígonos regulares. Dicho recurso favorece la visualización y comprensión de conceptos geométricos básicos (diagonal, altura, mediana, ...), figuras planas y cuerpos tridimensionales. El proceso de creación y ejecución de una figura mediante dobleces no solo implica análisis e imaginación, sino que también permite estudiar propiedades, observar, analizar y conjeturar (Cañadas y otros, 2003, citado en Ministerio de Educación, 2015).

Otros documentos analizados son los Cuadernos de trabajo de Matemática: Resolvamos problemas (Ministerio de Educación [MINEDU], 2017), proporcionados a los estudiantes de secundaria. En ellos se proponen una diversidad de fichas de trabajo, las cuales presentan situaciones problemáticas que destacan la presencia de la matemática en distintos contextos de la vida cotidiana. En relación con los polígonos regulares, se proponen situaciones que involucran patrones geométricos en mantas de la cultura Paracas, diseños arquitectónicos incas y modernos, mosaicos o teselados en un piso plano.

Los libros de texto siguen siendo un recurso didáctico ampliamente utilizado por alumnos y profesores; sin embargo, es importante destacar algunos aspectos, presentes en los libros, que son responsables por la manera en cómo se enseña la geometría. Por ejemplo, el uso de representaciones geométricas para introducir conceptos, es considerado por el profesor como suficiente y satisfactorio: relacionar figuras prototípicas con definiciones. Otro aspecto, es el uso de imágenes reales para aludir a elementos geométricos abstractos. Además, en la enseñanza de la matemática, se puede observar el estatus inferior que se le da a la Geometría y dentro de ésta, al estudio de los polígonos regulares (Barrantes et. al., 2015; Carneiro, 2005). De igual manera, es frecuente observar en los libros de texto que el contenido relativo a la Geometría se presenta en los capítulos finales, quedando relegada su importancia en el desarrollo del educando. Para Barrantes y Balletbo (2012), la principal finalidad de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría es conectar a los alumnos con su entorno ya que el conocimiento, la intuición y las relaciones geométricas impactan positivamente en el desarrollo de su vida cotidiana.

La revisión de libros de texto, de la colección "*Lógicamente*", de la Editorial Norma, edición 2009, pone en evidencia los aspectos comentados en el apartado anterior. En el desarrollo de los temas, podemos observar una concepción de la enseñanza de la Geometría restringida a la Geometría intuitiva y científica. El tema de nuestro interés, los polígonos regulares, es abordado tangencialmente y descontextualizado. También, revisamos la colección de textos para secundaria: "*Matemáticas para todos*", material producido por la editorial alemana Kletty, edición 2008, adaptada al contexto

peruano, en coordinación con el Instituto Apoyo y la agencia de cooperación alemana GTZ. La elección para su análisis radica en que el contenido matemático es presentado a través de casos y situaciones de la vida cotidiana, las ciencias y la producción. De esta manera se pretende conectar el aprendizaje del alumno con su entorno, promover su capacidad de observación, enriquecer su cultura general y que “viva” las matemáticas. En lo que respecta a la Geometría, la concepción de su enseñanza transita por la Geometría intuitiva, la Geometría científica, la Geometría deductiva y la Geometría euclidiana. Algunas cuestiones geométricas son abordadas desde la perspectiva de la Geometría analítica o Geometría cartesiana. Los temas son abordados en profundidad, buscando que los alumnos comprendan y sean capaces de fundamentar lo que aprenden. Con relación a los polígonos regulares, no hemos hallado alguna situación de contexto que destaque su importancia, no obstante, su utilización se muestra desde tiempos muy antiguos, en la elaboración de mosaicos.

En algunos colegios existe la disponibilidad de recursos TIC para las clases de matemática, así como el acceso a software de Geometría dinámica, necesario para planificar y desarrollar experiencias de aprendizaje innovadoras. En los antecedentes de nuestra investigación hemos podido constatar las ventajas del uso de software como el GeoGebra o el SuperLogo, para la construcción de conocimiento geométrico, particularmente en el estudio de los polígonos regulares. Este tipo de tecnologías, denominadas también Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), son plataformas que posibilitan la construcción y la manipulación de objetos geométricos ya sea en la pantalla del computador vía el mouse o directamente al tocar la pantalla en dispositivos con tecnología *touchscreen* (Henrique, 2017). Un AGD favorece la interacción entre el sujeto y las TIC, lo cual supone descubrimientos de propiedades mediante ensayo y error, la observación, el desarrollo y la verificación de conjeturas, así como la múltiple representación del objeto de estudio, son algunos de los aspectos positivos de estos entornos tecnológicos (Bairral, 2013). Por tanto, la implementación de actividades en un AGD, se ven favorecidas en cuanto a la construcción y manipulación de objetos geométricos, la exploración de conjeturas y la investigación previa al razonamiento formal. En lo que respecta a las actividades propuestas en nuestro trabajo de investigación, éstas han sido diseñadas de modo que se promueva la construcción de conjeturas, el descubrimiento de relaciones geométricas y, además, utilicen el software TortugArte.

2.2.1.3 Dimensión cognitiva. En la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, es notorio observar que se fuerzan los tiempos de conceptualización, para introducir muy pronto los conceptos abstractos, dejando a un lado la realización de actividades concretas y enfatizando el uso temprano de nomenclatura definitiva.

Los profesores deben detenerse más en el mundo de las figuras con actividades de interdisciplinariedad con otras materias como el arte; con actividades de laboratorio en las que los

conceptos y propiedades de las figuras geométricas se manipulen o la realización de investigaciones y proyectos de estudio sobre las figuras (Barrantes y Zapata, 2008).

Este modo de enseñanza, junto al auge que supuso la Matemática Moderna en la década del setenta, con su mensaje de formalismo y abstracción pura, han tenido un impacto negativo en los estudiantes para profesor. Estos llegan a la universidad con escasos conocimientos de Geometría y con concepciones sobre su enseñanza-aprendizaje, que perduran en su recuerdo y actúan como un elemento bloqueador de nuevas realidades para la actuación y comprensión. En su práctica preprofesional planean la enseñanza-aprendizaje de la manera en que ellos aprendieron (Barrantes, 2003).

Según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003), con la materia de Geometría, el estudiante estudia las formas y estructuras geométricas, aprende a analizar sus características y relaciones. A su vez, la visualización es un aspecto importante del pensamiento geométrico, junto con la construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial para describir el entorno. Estos aspectos hacen de la Geometría una herramienta para resolver problemas, no solo geométricos sino de cualquier área de las matemáticas o del conocimiento en general.

El avance de las TIC ha propiciado el desarrollo de programas de visualización y de geometría dinámica, situación que ha estimulado el interés en las ideas geométricas y la necesidad de aclarar la naturaleza del razonamiento geométrico y su desarrollo. De otro lado, han surgido diversas teorías con el fin de describir y comprender el desarrollo del razonamiento geométrico, así como aspectos relacionados a la visualización y construcción geométrica. Las teorías que destacan por su relevancia para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría, son: el modelo de Van Hiele sobre el pensamiento en Geometría, la teoría de Fischbein de los conceptos figurales y el modelo cognitivo de razonamiento geométrico de Duval. De manera particular, en el documento Rutas del Aprendizaje (MINEDU, 2015), se propone de manera explícita, que el modelo de enseñanza de Van Hiele sea la pauta a seguir en el aprendizaje de la Geometría.

A continuación, presentamos una breve descripción de tres teorías que pueden servir, desde la perspectiva del docente, como herramientas para entender las dificultades que tienen los estudiantes cuando desarrollan procesos cognitivos de alto nivel, como los relacionados a las demostraciones.

El modelo de Van Hiele (1986), también llamado “niveles de Van Hiele”, fue propuesto por el matrimonio danés, Dina y Pierre van Hiele. El modelo está integrado por dos componentes principales, la primera es una descripción de las diferentes formas de razonamiento o pensamiento que llevan a cabo los estudiantes, las cuales van desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento formal y abstracto. Los autores sugieren que existen diferentes niveles de comprensión de las ideas

geométricas: Visualización o reconocimiento (Nivel 0); Análisis (Nivel 1); Ordenación, clasificación o abstracción (Nivel 2); Deducción formal (Nivel 3) y Rigor (Nivel 4).

El modelo distribuye el conocimiento escalonadamente en cinco niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados. Es decir, el estudiante avanza a través de una serie de "niveles" caracterizados por una abstracción creciente. Dominar el nivel en el que se encuentra, implica haber cumplido ciertos procesos de logro y aprendizaje, los cuales le sirven de base para avanzar al nivel inmediato superior.

La segunda componente comprende cinco fases o etapas del proceso de instrucción, que pueden ayudar a los estudiantes a alcanzar un nivel de pensamiento o razonamiento superior al que poseen en un momento dado. Desde la perspectiva docente, el objetivo de estas fases es proporcionar elementos que le permitan diseñar actividades y organizar escenarios de instrucción que permitan a los estudiantes avanzar en los sucesivos niveles de pensamiento geométrico: Información o indagación (Fase 1); Orientación guiada (Fase 2); Explicitación o explicación (Fase 3); Orientación libre (Fase 4) e Integración (Fase 5).

La teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993) sostiene que todas las figuras geométricas representan construcciones mentales que poseen, simultáneamente, propiedades conceptuales y figurales. Según esta noción de conceptos figurales, el razonamiento geométrico se caracteriza por la interacción entre estos dos aspectos, el figural y el conceptual. Fischbein observa que si bien una figura geométrica como un cuadrado puede describirse como teniendo propiedades intrínsecamente conceptuales (en el sentido de que está controlada por una teoría), no es únicamente un concepto, también es una imagen. En esta perspectiva, la Geometría es un campo en el que es necesario que las figuras geométricas y los conceptos geométricos interactúen, pero que para el estudiante puede haber tensión entre los dos.

En **el modelo cognitivo de razonamiento geométrico de Duval (1995)**, la Geometría es abordada desde un punto de vista cognitivo y perceptivo. Duval (1995) proporciona un recurso analítico en forma de un marco detallado para analizar la semiótica de los dibujos geométricos. En este marco, identifica cuatro tipos de lo que él llama "aprehensión cognitiva": aprehensión perceptiva, aprehensión secuencial, aprehensión discursiva y aprehensión operativa.

Duval (1995) refiere que siempre existe un conflicto potencial entre la aprehensión perceptiva de una figura y la percepción matemática: "las dificultades para moverse de las características percibidas de una figura pueden inducir a error a los estudiantes en cuanto a las propiedades matemáticas y los objetos representados por un dibujo, y puede obstaculizar la apreciación de la necesidad del descubrimiento de pruebas" (p.155). Igualmente, afirma que la aprehensión operatoria no funciona independientemente de las demás; de hecho, la aprehensión discursiva y perceptiva

puede muy a menudo oscurecer la aprehensión operativa. Desde una perspectiva docente, defiende que “se requiere un aprendizaje especial y separado de la aprehensión operativa, así como de la discursiva y secuencial” (p.155). Asimismo, sugiere que el trabajo con computadoras puede apoyar no solo el desarrollo de la aprehensión secuencial, sino también el desarrollo de la aprehensión operativa, si el software ha sido diseñado con esto en mente. Concluye que “una forma matemática de mirar las figuras solo resulta de la coordinación entre procesos separados de aprehensión durante un largo tiempo” (p.155). Las cuestiones abordadas hasta aquí se refieren al trabajo con dibujos geométricos. Duval (1998) va más allá y propone que el razonamiento geométrico involucra tres tipos de procesos cognitivos que cumplen funciones epistemológicas específicas. Estos procesos cognitivos son:

- Procesos de **visualización**, por ejemplo, la representación visual de un enunciado geométrico, la exploración heurística de una situación geométrica compleja.
- Procesos de **construcción** (utilizando herramientas)
- Procesos de **razonamiento** - particularmente procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la explicación, para la prueba.

Señala que estos diferentes procesos se pueden realizar por separado. Por ejemplo, la visualización no depende necesariamente de la construcción. De manera similar, incluso si la construcción conduce a la visualización, los procesos de construcción en realidad dependen solo de las conexiones entre las propiedades matemáticas relevantes y las limitaciones de las herramientas que se utilizan. De manera similar, incluso si la visualización puede ser una ayuda para el razonamiento, por ejemplo, ayudando a encontrar una prueba, en algunos casos la visualización puede ser engañosa.

Sin embargo, argumenta que “estos tres tipos de procesos cognitivos están estrechamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para el dominio de la geometría” (Duval, 1998, p.38). Además, agrega que al intentar comprender el desarrollo del razonamiento geométrico, su investigación muestra lo siguiente: los tres tipos de procesos deben desarrollarse por separado; es necesario trabajar en la diferenciación de los procesos de visualización y entre los diferentes procesos de razonamiento en el plan de estudios y, la coordinación de estos tres tipos de procesos sólo puede ocurrir realmente después de este trabajo sobre la diferenciación.

2.2.2 Fase 2. Concepción y análisis a priori de la situación didáctica

La fase de los Análisis Preliminares (Fase 1) y, la fase de la Concepción y Análisis a Priori (Fase 2), funcionan como mecanismos de orientación para el desarrollo de la Experimentación (Fase 3). Dichas fases anteceden a la fase de la Experimentación considerando las variables que pueden o no interferir y/o influir en la aplicación de esta. En efecto, tienen como objetivo determinar que las selecciones en cuanto a las variables en el aula permitan controlar los comportamientos de los

estudiantes y el sentido de dichos comportamientos. Estas selecciones son denominadas variables de comando y son percibidas como pertinentes en relación con el problema estudiado.

Según Artigue (1995) el análisis a priori comprende una parte descriptiva y otra parte predictiva. Es necesario describir las selecciones efectuadas, definiendo a su vez las variables de comando en el ámbito más global y en la perspectiva local, describiendo cada actividad propuesta.

Las primeras selecciones se refieren a las variables globales, aquellas que dicen respecto a la organización global de la ingeniería. En nuestro caso:

- Dejar explícito el cambio de una enseñanza tradicional de la Geometría a un enfoque constructivista y contextualizado de los conceptos geométricos.
- Utilizar computadoras y software de Geometría Dinámica, optando por el TortugArte, por su disponibilidad en las instituciones educativas, su gratuidad y la facilidad de usarlo.
- Introducir el estudio de los polígonos regulares a través de los enladrillados o teselados.
- Situar a los estudiantes sobre la posibilidad de un trabajo interdisciplinar que involucre la Geometría, el Arte y la Tecnología.
- Trabajar, en el aula, conectando siempre las dos posibilidades – la pantalla y el papel – haciendo preguntas y teniendo como referencia conceptos formales presentes en libros de texto para la Educación Básica.

Las segundas selecciones se refieren a las variables locales, son las asociadas a la organización local de la ingeniería, es decir a la organización de una secuencia o fase dependiente del contenido didáctico en que se enfoca la enseñanza. En nuestro caso organizamos las variables de acuerdo al tipo de artefacto investigado:

- Variables respecto a la génesis instrumental del TortugArte:
 - Los tipos de paletas presentes en los bloques de programación del TortugArte.
 - La posición de la tortuga: posición estándar y su reubicación para optimizar el uso de la ventana gráfica.
 - La orientación de la tortuga: orientación estándar y su reorientación para generar un ángulo en posición normal.
- Variables respecto a la génesis instrumental de los polígonos regulares:
 - Ángulos de un polígono: ángulo interior y ángulo exterior.
 - Tipos de polígonos regulares: identificación de un algoritmo para la construcción de polígonos regulares considerando el número de sus lados y la medida de su ángulo interior o exterior.
 - Los polígonos regulares y su contextualización: posibilidades para elaborar teselados o enladrillados del plano con polígonos regulares.

Para efectos de la validación, las hipótesis no pueden ser muy amplias, hasta el punto de poner en juego procesos de aprendizaje, a largo plazo. Al expresarlas es preciso tener en cuenta en que vamos a retornar a ellas, durante la fase de experimentación, revisándolas, preguntándolas. ¿Será que el plan de acciones funciona? ¿Será que nuestras hipótesis serán válidas?

En nuestro caso, las hipótesis han sido formuladas de esta manera:

- En el nivel cognitivo, creemos que, con el conjunto de acciones propuestas, los estudiantes van a adquirir conocimientos más profundos y contextualizados sobre los polígonos regulares.
- Los conocimientos de Geometría producidos en el medio informatizado, con ayuda del TortugArte, constituyen un campo más amplio que el que es tratado en los libros de texto de la Educación Básica. La transposición de los conocimientos del medio informatizado al papel es natural. Quien aprende Geometría con auxilio de un software como el TortugArte tiene la capacidad de apropiarse más rápidamente de una mayor cantidad de conceptos, tornándose capaz de resolver diversos problemas prácticos, los cuales pueden servir como situaciones motivadoras para el trabajo con el software.
- La falta de familiaridad de los estudiantes con el software puede ser superado con el desarrollo de una actividad lúdica para comprender su lógica interna. El TortugArte es de fácil utilización.

2.2.3 Fase 3. Experimentación

Esta fase comprende la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. Se inicia cuando se da el primer contacto del investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes que participan en la investigación.

La experimentación consiste en:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos diseñados en la fase anterior.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una sesión, hacer un análisis a posteriori local, confrontando con los análisis a priori, con el fin de hacer las correcciones necesarias. Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis a priori.

2.2.4 Fase 4. Análisis a posteriori y validación

Esta es la última fase de la Ingeniería Didáctica. Se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, así como en las observaciones realizadas en las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes dentro o fuera del aula. Estos datos se

complementan con otros obtenidos a través de cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas en diversos momentos de la enseñanza.

La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación del análisis a priori y del análisis a posteriori.





Capítulo III. Los polígonos regulares como objeto de estudio

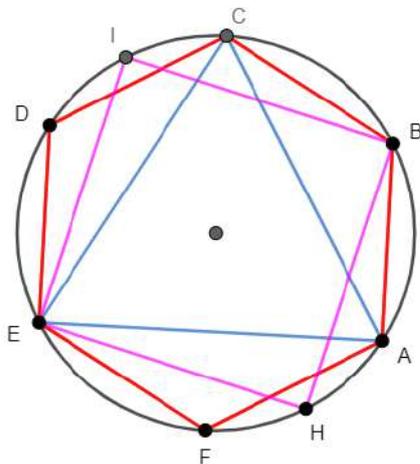
En este capítulo presentamos algunos aspectos matemáticos relacionados a los polígonos regulares, así como una breve referencia a la presencia de esta noción en diversos contextos del mundo real antiguo y actual.

Diversas pinturas rupestres halladas en las cavernas muestran al hombre primitivo interesado por expresar a través de dibujos lo que sentía y veía; así nace el arte pictórico. Su admiración por la naturaleza y aquello que le rodea, lo llevó a idear conceptos de formas, figuras, cuerpos, líneas, que luego constituirían una parte de la matemática, denominada Geometría.

Un aspecto geométrico, muy valorado por los pueblos primitivos, es la simetría por su belleza intrínseca. Los pitagóricos estaban obsesionados por la simetría, reconocieron el círculo como el objeto geométrico plano más simétrico. Dentro de los polígonos, se refieren a los polígonos regulares como los más simétricos, aquellos que tenían sus lados y sus ángulos iguales. Descubrieron que los polígonos regulares podían inscribirse en el círculo, es decir, se podía construir un círculo que pase por todos sus vértices. De hecho, dado un círculo cualquiera, se puede construir un hexágono de lado igual al radio del círculo. Para el triángulo equilátero, basta elegir un vértice sí y otro no, del hexágono. Trazando dos rectas perpendiculares que pasen por el centro y luego, uniendo los puntos que cortan al círculo se tendrá un cuadrado. De esta manera, se tienen los polígonos regulares de 3, 4 y 6 lados.

Figura 12

Triángulo regular, cuadrado y hexágono regular

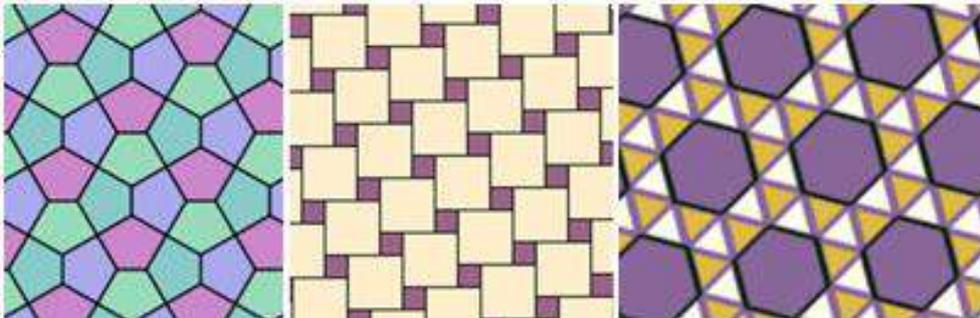


3.1 Polígonos en la vida cotidiana

Un contexto que muestra una gran variedad de formas poligonales son las señalizaciones de tránsito. La señalización internacional de "PARE" está circundada por un octógono. La línea de cebra está conformada por rectángulos.

Figura 13*Polígonos y señalización vial*

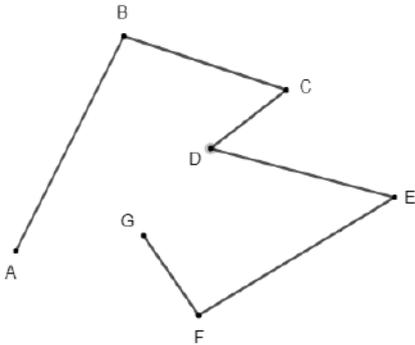
También se pueden observar formas poligonales en los azulejos de los pisos de las casas.

Figura 14*Mosaicos o teselados con azulejos*

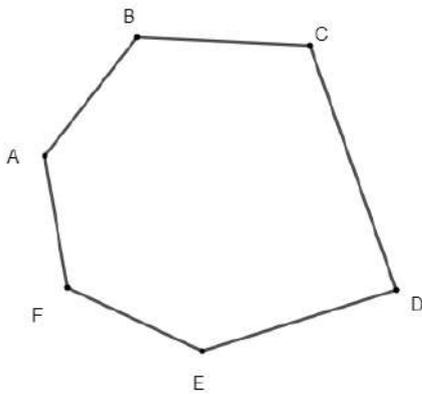
La palabra *polígono* deriva del griego, donde “*poli*” significa muchos y “*gono*” significa ángulos. Hoy en día los polígonos son entendidos por el número de sus lados: triángulo, 3 lados; cuadrilátero, 4 lados; pentágono, 5 lados; ...

3.2 Líneas poligonales y polígonos

Denominamos línea poligonal a un conjunto de segmentos unidos sucesivamente por sus extremos, tal que el extremo de cada uno es el origen del siguiente y donde dos segmentos sucesivos no deben estar alineados. Pueden ser líneas poligonales abiertas:

Figura 15*Línea poligonal abierta*

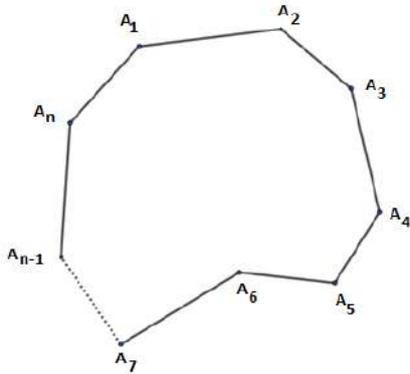
O líneas poligonales cerradas, llamadas también polígonos.

Figura 16*Línea poligonal cerrada o polígono*

En la Geometría Euclidiana es costumbre denotar a los puntos con letras mayúsculas del alfabeto latino, como **A**, **B**, ...; a su vez, el segmento de extremos **A** y **B** es denotado como **AB**. Teniendo en cuenta esta nomenclatura, establecemos una definición, típica del abordaje clásico, sobre polígonos.

Sean A_1, A_2, \dots, A_n un conjunto de n puntos del plano, con $n \geq 3$, diferentes dos a dos, donde cualesquiera tres puntos consecutivos no son colineales. Consideremos también puntos consecutivos a A_{n-1}, A_n y A_1 , así como a los puntos A_n, A_1 y A_2 . Llamamos polígono $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ a la reunión de segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ y A_nA_1 si se satisfacen las siguientes condiciones:

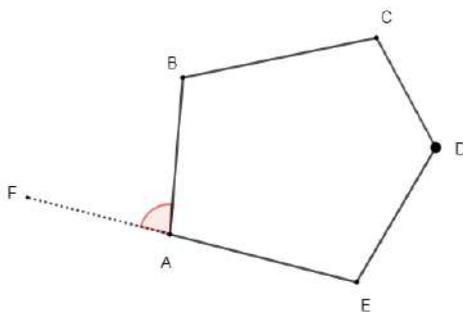
- Los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ y A_nA_1 se intersecan, cuando lo hacen, solo en sus extremos.
- Dos segmentos cualesquiera con un extremo en común no pertenecen a una misma recta.

Figura 17*Polígono de n lados*

Considerando el polígono $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ y usando la misma nomenclatura, establecemos lo siguiente:

- Los puntos A_1, A_2, \dots, A_n , son denominados vértices del polígono;
- Los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ y A_nA_1 son llamados lados del polígono;
- $\angle A_1 = \angle A_n A_1 A_2, \angle A_2 = \angle A_1 A_2 A_3, \dots, \angle A_n = \angle A_{n-1} A_n A_1$, son denominados ángulos del polígono;
- Dos lados que tienen un vértice en común son denominados lados consecutivos;
- Dos ángulos de un polígono son consecutivos si tienen en común un lado del polígono;
- Un polígono de n vértices tiene n lados y n ángulos;
- Los segmentos que unen dos vértices no consecutivos se llaman diagonales del polígono;
- Un polígono se dice que es convexo cuando todos sus ángulos interiores miden menos de 180° . Cuando posee al menos un ángulo interior que mide más de 180° se denomina polígono no convexo;
- El ángulo externo está formado por un lado y por la prolongación del lado consecutivo a éste.

La **Figura 18**, muestra uno de los ángulos externos de un polígono.

Figura 18*Ángulo exterior de un polígono*

Cada polígono recibe un nombre que lo identifica, de acuerdo con el número de lados (n) que posee. La **Tabla 1**, describe tal nomenclatura.

Tabla 1

Clasificación de polígonos

Número de lados	Polígono	Número de lados	Polígono
$n = 3$	Triángulo	$n = 12$	Dodecágono
$n = 4$	Cuadrilátero	$n = 13$	Tridecágono
$n = 5$	Pentágono	$n = 14$	Tetradecágono
$n = 6$	Hexágono	$n = 15$	Pentadecágono
$n = 7$	Heptágono	$n = 16$	Hexadecágono
$n = 8$	Octógono	$n = 17$	Heptadecágono
$n = 9$	Eneágono	$n = 18$	Octodécágono
$n = 10$	Decágono	$n = 19$	Eneadecágono
$n = 11$	Undecágono	$n = 20$	Icoságono

3.3 Polígonos regulares

Denominamos polígonos regulares a aquellos polígonos que tienen todos sus lados con medidas iguales (equiláteros) y todos sus ángulos con medidas también iguales (equiángulos).

Las figuras 19 y 20 nos permiten comprender mejor cuando un polígono es equiángulo y cuando es equilátero, para luego entender la definición de polígono regular.

Figura 19

Cuadrilátero equiángulo

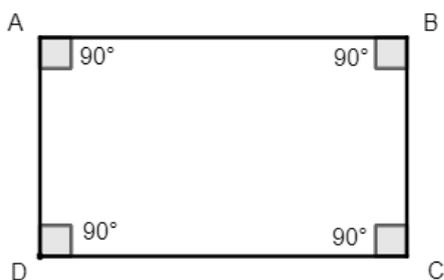
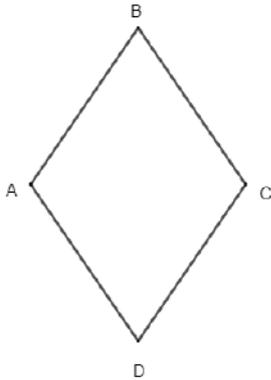
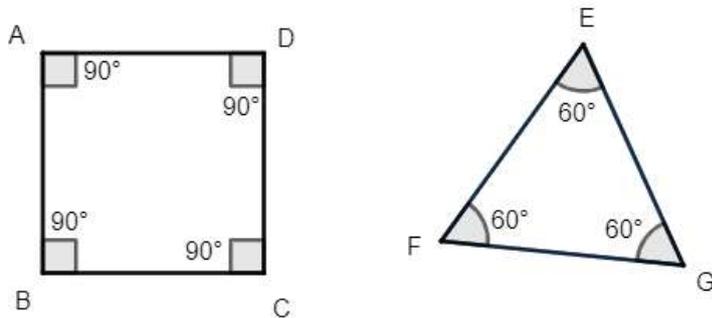


Figura 20*Cuadrilátero equilátero*

Después de un breve análisis de las figuras 19 y 20 podemos concluir que un polígono es regular si y solo si tiene las medidas de sus lados iguales y también, la medida de sus ángulos iguales.

Figura 21*Cuadrado y triángulo equilátero*

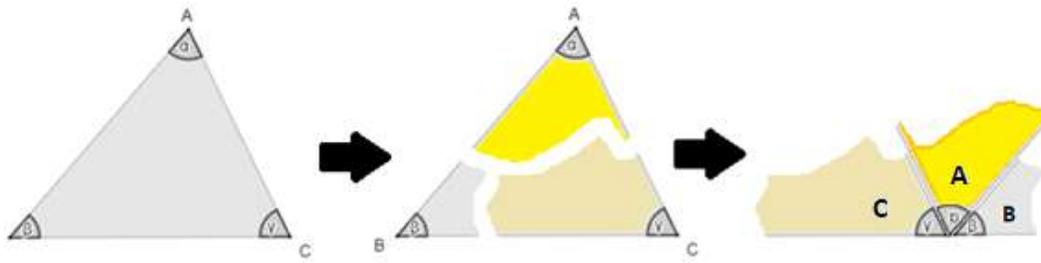
3.4 Suma de los ángulos interiores de un polígono

De manera empírica demostraremos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , para luego generalizar y obtener el resultado para un polígono de n lados.

Dibujamos un triángulo cualquiera y denotamos sus ángulos, luego recortamos el triángulo en tres partes, de modo que cada parte quede con uno de sus ángulos. En la **Figura 22**, se muestra dicho proceso.

Figura 22

Demostración empírica de la suma de los ángulos de un triángulo



Nótese que la unión los ángulos α , β y γ forma un ángulo plano, igual a 180° . Esto nos lleva a concluir que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es 180° :

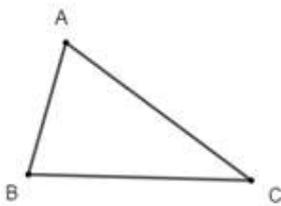
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Para determinar la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera, descompondremos el polígono en triángulos disjuntos y por inducción, obtendremos una fórmula.

Triángulo (3 lados)

Figura 23

Suma de los ángulos interiores de un triángulo



$$S_3 = (3 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_3 = 1 \cdot 180^\circ$$

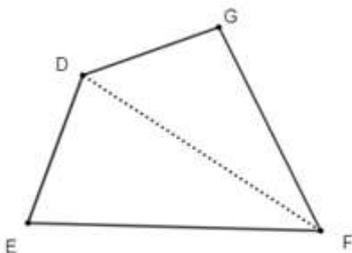
$$S_3 = 180^\circ$$

Todo polígono puede descomponerse en varios triángulos, entonces para un cuadrilátero cualquiera, partiendo de uno de sus vértices podemos trazar una diagonal y el cuadrilátero quedará dividido en dos triángulos.

Cuadrilátero (4 lados)

Figura 24

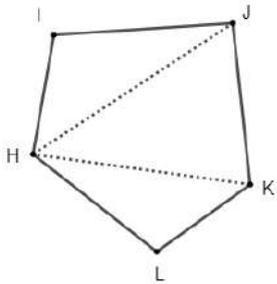
Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero



$$S_4 = (4 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_4 = 2 \cdot 180^\circ$$

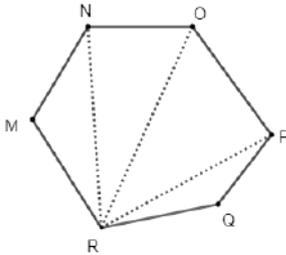
$$S_4 = 360^\circ$$

Pentágono (5 lados)**Figura 25***Suma de los ángulos interiores de un pentágono*

$$S_5 = (5 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_5 = 3 \cdot 180^\circ$$

$$S_5 = 540^\circ$$

Hexágono (6 lados)**Figura 26***Suma de los ángulos interiores de un hexágono*

$$S_6 = (6 - 2) \cdot 180^\circ$$

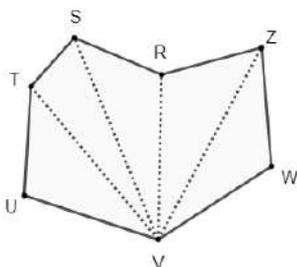
$$S_6 = 4 \cdot 180^\circ$$

$$S_6 = 720^\circ$$

Los resultados particulares sugieren que el número que multiplica a 180 corresponde al número de lados del polígono disminuido en dos, por lo tanto, la suma de los ángulos interiores de un polígono tiene el siguiente patrón a seguir:

$$\text{Suma de los ángulos interiores del polígono} = (N^\circ \text{ de lados del polígono} - 2) \times 180^\circ$$

Para un polígono de siete lados o heptágono, tenemos:

Heptágono (7 lados)**Figura 27***Suma de los ángulos interiores de un heptágono*

$$S_7 = (7 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_7 = 5 \cdot 180^\circ$$

$$S_7 = 900^\circ$$

Se concluye que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados está dada por la fórmula:

$$S_n = (n - 2) \times 180^\circ$$

donde S_n es la suma de los ángulos interiores y n es el número de lados del polígono.

Para el caso de los polígonos regulares, se sabe que las medidas de sus ángulos interiores son iguales, por lo tanto, la suma de los ángulos interiores para un polígono de n lados es: $S_n = (n - 2) \times 180^\circ$. De igual manera, si deseamos la medida de uno de sus ángulos basta dividir la suma total de los ángulos interiores por el número de lados:

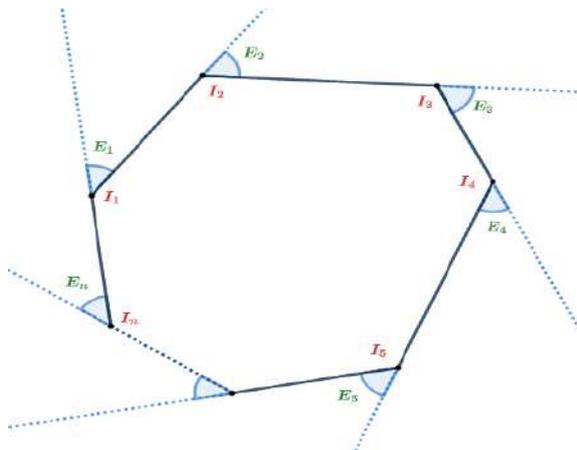
$$\alpha_n = \frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n}$$

3.5 Suma de los ángulos exteriores de un polígono

El ángulo exterior puede interpretarse también como el ángulo suplementario adyacente al ángulo interior del polígono.

Figura 28

Ángulos interiores y ángulos exteriores de un polígono



Sean $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ los ángulos interiores y $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ los ángulos exteriores de un polígono de n lados. Entonces:

$$I_1 + E_1 = 180^\circ$$

$$I_2 + E_2 = 180^\circ$$

$$I_3 + E_3 = 180^\circ$$

...

$$I_n + E_n = 180^\circ$$

Luego, sumando miembro a miembro todas las ecuaciones mostradas, tenemos:

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n + E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n = n \times 180^\circ$$

Pero $I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = (n - 2) \times 180^\circ$, entonces:

$$(n - 2) \times 180^\circ + E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n = n \times 180^\circ$$

$$E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n = 360^\circ$$

La última relación demuestra que la suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a 360° .

3.6 Teselados

El arte o técnica de teselar, denominado también enladrillado, se remonta a 5000 años a. C. y estuvo presente en las civilizaciones asiria, babilónica, romana, persa, egipcia, griega, islámica, china, árabe, entre otras, como manifestación cultural, religiosa y de registro de hechos históricos.

En la actualidad, esta técnica se sigue usando en una gran variedad de aplicaciones: papel decorativo para pared, pisos decorados con cerámicas, estampados de tejidos, en el empaqueo o acopio de objetos iguales, etc. También está presente en la naturaleza, algunos ejemplos de esta técnica se muestran en las escamas de los peces, en las piñas de las coníferas, en los arreglos de los cristales y en las burbujas de jabón.

Figura 29

Teselados en la naturaleza



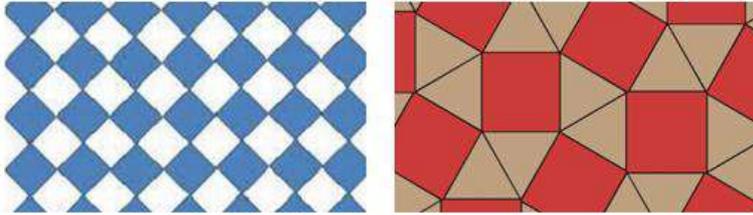
Los teselados son un contexto muy interesante para el estudio de los polígonos regulares, tema de nuestra investigación. El contexto que hemos elegido consiste en teselar el piso plano de una habitación.

Para obtener un teselado ideal de una superficie plana, con polígonos regulares, se requiere tener en cuenta dos condiciones:

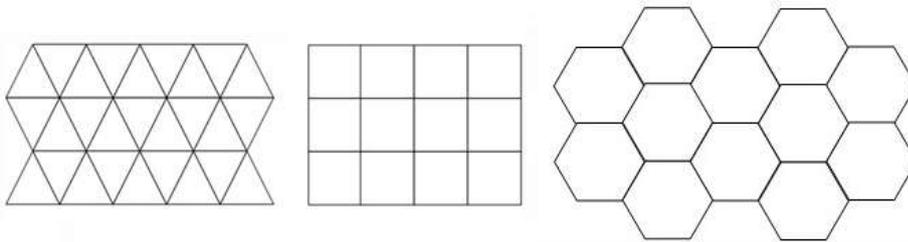
- Entre los polígonos no deben quedar espacios libres y,
- Los polígonos no deben estar superpuestos (uno sobre el otro).

Existen dos tipos de teselados formados por polígonos regulares:

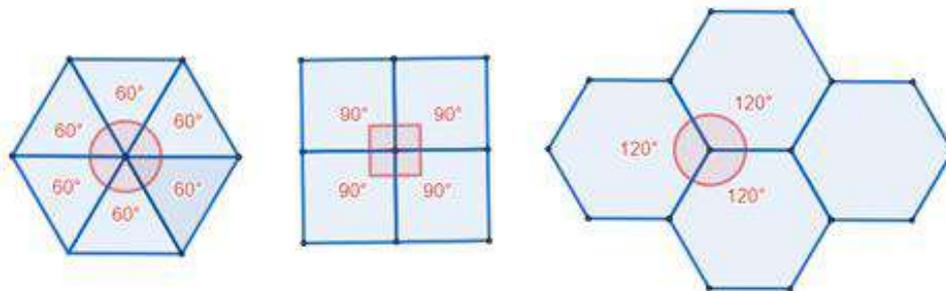
- **Teselados regulares**, aquellos que están formados con un solo tipo de polígono regular.
- **Teselados semirregulares**, aquellos que están formados con dos o más tipos de polígonos regulares.

Figura 30*Teselados regular y semirregular*

En nuestro estudio, la opción ha sido por los teselados regulares. La **Figura 31**, muestra los únicos tres tipos de teselados regulares.

Figura 31*Teselados regulares*

Una propiedad importante con este tipo de teselados es que deben cumplir la siguiente condición: *la suma de sus ángulos en un punto en común debe ser 360°*.

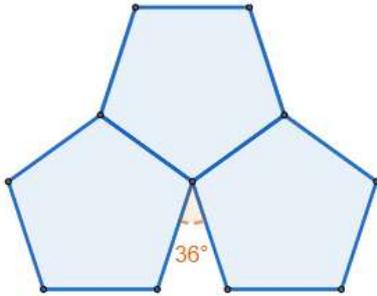
Figura 32*Propiedad de los ángulos alrededor de un punto*

El ángulo interior del triángulo equilátero mide 60° , del cuadrado mide 90° y del hexágono regular mide 120° , por lo tanto, dichos valores son divisores de 360° .

¿Qué pasa con el pentágono regular, es posible cubrir el plano en su totalidad? No es posible, recordemos que su ángulo interior mide 108° y si reunimos tres ángulos de 108° obtenemos 324° , faltando 36° para completar un ángulo de 360° . Si juntamos otro pentágono regular estaríamos superponiendo un polígono sobre otro. Además, 108° no es divisor de 360° .

Figura 33

Con un pentágono regular no se cubre el plano

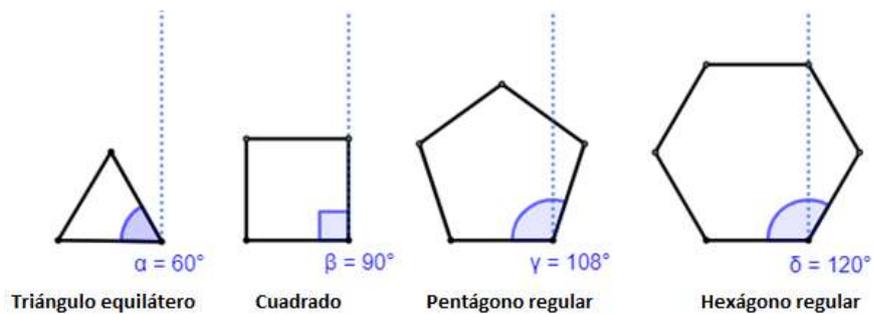


En la **Figura 34**

Polígonos regulares y la abertura de sus ángulos podemos observar que la medida del ángulo interior del polígono aumenta cuando crece el número de lados.

Figura 34

Polígonos regulares y la abertura de sus ángulos

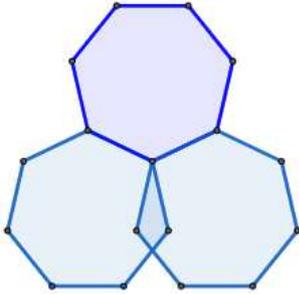


Para un polígono regular de 7 o más lados, la medida de su ángulo interior estará comprendido entre 120° y 180° . Además, la medida no puede ser 180° , en ese caso los lados del polígono regular serían colineales.

Usando tres heptágonos regulares, observamos que los polígonos se superponen, puesto que la suma de las medidas de tres ángulos interiores, suman más de 360° y, usando solo dos heptágonos la suma de sus medidas no superaría los 360° .

Figura 35

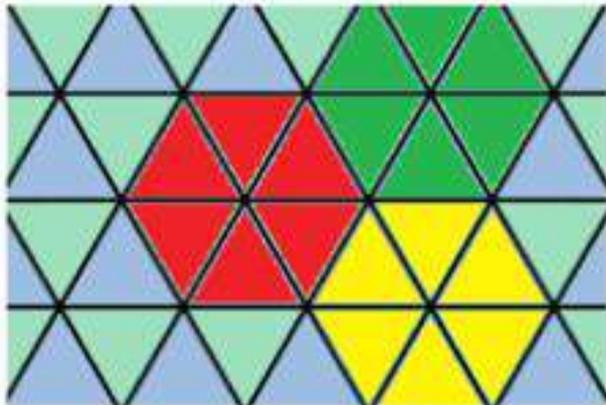
Teselado con heptágonos



Por lo tanto, solo pueden conseguirse tres teselados regulares: uno con triángulos equiláteros, otro con cuadrados y un tercero con hexágonos regulares. Siendo más rígidos, diríamos que son posibles solo dos tipos de teselados, ya que el teselado con hexágonos podría ser sustituido con triángulos regulares.

Figura 36

Teselados con triángulos regulares (triángulos equiláteros)





Capítulo IV. Experimento y análisis

En este capítulo consideramos el ambiente donde se desarrolló la investigación, las características de los sujetos y la secuencia de actividades. En relación con las actividades destacamos lo siguiente:

La Actividad 1 (**Apéndice A**) comprende una parte lúdica, diseñada para introducir a los participantes en la lógica del software TortugArte y la otra parte, está orientada a la exploración y familiarización de los estudiantes con algunos comandos básicos, así como la creación de figuras geométricas con el software TortugArte; la Actividad 2 (**Apéndice B**) está relacionada a la construcción de polígonos regulares utilizando el software TortugArte y la Actividad 3 (**Apéndice C**) es un problema que busca la movilización del concepto de polígono regular y sus propiedades en el desarrollo de teselados del plano, con mediación del software TortugArte.

4.1 Ambiente de la investigación

La parte experimental de nuestra investigación se desarrolló de manera virtual, previa coordinación del horario, con cuatro estudiantes de la carrera de Educación Primaria, los cuales participaron de manera voluntaria.

Se realizaron tres encuentros virtuales con una duración de 90 minutos cada uno, entre el docente investigador y cada uno de los estudiantes. El trabajo fue organizado de la siguiente manera: dos estudiantes participaron de manera individual (Estudiante 1 y Estudiante 2) y dos estudiantes en equipo (Estudiante 3 y Estudiante 4), en momentos distintos. Cada estudiante disponía de un computador con el software TortugArte instalado y, además, material digital con información sobre las actividades que debían resolver. Se habilitó la plataforma de video conferencia Zoom para los encuentros virtuales y se grabaron las interacciones entre el investigador y los estudiantes, para su posterior análisis.

En el primer encuentro se desarrolló la Actividad 1, la cual permitió a los estudiantes, a través del juego, adquirir la lógica interna del software TortugArte. Asimismo, exploraron los comandos básicos del TortugArte para construir líneas poligonales abiertas y cerradas.

El segundo encuentro, correspondiente a la Actividad 2, permitió que los estudiantes, mediados por el uso del TortugArte, desarrollen esquemas de utilización nuevos y preexistentes en la elaboración de programas computacionales, que permiten la construcción de polígonos regulares de cualquier número de lados.

En el tercer y último encuentro, Actividad 3, se abordó un problema de contextualización que involucra la noción de polígono regular. Se esperaba que los estudiantes, mediados por el uso del TortugArte, movilen y/o creen esquemas de utilización para elaborar programas computacionales que permiten la construcción de diseños geométricos con polígonos regulares de un solo tipo, a partir

de los cuales se pueda determinar qué tipo de polígonos regulares sirven para cubrir o teselar una determinada área del plano, sin dejar espacios vacíos entre los polígonos ni superponerse uno al otro.

La **Tabla 2**, muestra las actividades que se realizaron en los tres encuentros virtuales, previstos para el experimento.

Tabla 2

Descripción de las actividades

Encuentro	I	II	III
Actividad	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3
Contenido	<ul style="list-style-type: none"> • Introducción a la lógica del software TortugArte. • Exploración de los comandos básicos del TortugArte: «adelante», «atrás», «derecha», «izquierda», «limpiar». • Combinación de comandos. • Exploración del comando «repetir». • Construcción de figuras con el TortugArte. 	<ul style="list-style-type: none"> • Construcción de polígonos regulares: <i>triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, ...</i> 	<ul style="list-style-type: none"> • Construcción de teselados con polígonos regulares de un solo tipo.

Durante la realización del experimento, la información fue recolectada a través de:

- *Fichas de actividades*: correspondientes a las tres actividades propuestas. *Actividad 1. Introducción al TortugArte; Actividad 2. Construcción de polígonos regulares con el TortugArte y Actividad 3. Diseños geométricos con polígonos regulares de un solo tipo.*
- *Grabaciones*: se grabaron las interacciones de los estudiantes durante el desarrollo de las tres actividades para identificar si habían realizado cuestionamientos relevantes sobre lo que estaban trabajando.
- *Archivos generados en la computadora al usar el software TortugArte*: se grabaron las interacciones en la pantalla para su posterior análisis.
- *Entrevistas individual y grupal*: se recopiló sus opiniones sobre sus aciertos y las dificultades que enfrentaron durante el desarrollo de las actividades.

4.2 Las actividades y su análisis

En esta sección presentamos el análisis a priori y a posteriori de las actividades propuestas en la secuencia didáctica.

Para la Actividad 1, PARTE I, presentamos un análisis descriptivo de la actividad lúdica, cuyo objetivo fue introducir a los estudiantes en la lógica del TortugArte aprovechando la analogía existente entre las órdenes dadas a los participantes vendados para alcanzar un objetivo específico y los

comandos básicos del TortugArte, necesarios para movilizar a la tortuga a través de un recorrido determinado.

La PARTE II, de este primer encuentro, tenía como objetivo familiarizar a los estudiantes con la utilización del software TortugArte, a partir de sus primeros comandos, para que después de dominar el lenguaje de programación del software les sea posible trabajar los conocimientos matemáticos y hacer que las herramientas se transformen en instrumentos de mediación en el proceso de construcción del conocimiento. Según Oliveira (2013):

Dominar herramientas inherentes a la interfaz es una condición para usarla con fluidez, de modo que, a partir de allí, la tecnología asociada se puede transformar en extensión de la memoria, del pensamiento, de procedimientos de construcción y de conjetura – es decir, aprender a usar, con fluidez, un dispositivo, un software, un artefacto. [...] El centro del proceso, evidentemente, son las personas, pero la dimensión secundaria de la experiencia en una determinada interfaz no debe ser ignorada (p.5. Traducción propia).

En la Actividad 2 y la Actividad 3 se considera el proceso de génesis instrumental de los polígonos regulares y el TortugArte, así como sus respectivos análisis a priori y análisis a posteriori.

4.2.1 Actividad 1. Introducción al TortugArte

En el desarrollo de esta actividad se esperaba que los estudiantes comprendan la lógica interna del software TortugArte, se familiaricen con los comandos básicos: “adelante”, “atrás”, “derecha”, “izquierda”, “limpiar” y empiecen a crear figuras geométricas con el software.

4.2.1.1 PARTE I. Introducción a la lógica del software TortugArte. En esta primera parte de la Actividad 1, se esperaba que los estudiantes perciban, de forma autónoma, qué órdenes o instrucciones son necesarias para que su compañero vendado se mueva en la sala y alcance el objetivo establecido. Se esperaba órdenes como: avanza para el frente, para atrás, gira a la derecha o gira a la izquierda.

La actividad involucra los conceptos matemáticos de distancia y ángulo, permitiéndoles a los estudiantes desarrollar lateralidad, ya que, además de informar de los conceptos básicos (avanza para el frente, para atrás, gira a la derecha o gira a la izquierda) deben orientar a su compañero vendado sobre la cantidad de pasos y la angulación necesaria (90° , 180° , 270° y 360°) para que éste evite los obstáculos que están al frente.

Dada las condiciones en que se desarrolla el experimento, se propuso a los estudiantes que imaginasen un compañero vendado, al cual deben darle instrucciones para que se desplace desde un determinado lugar hasta otro elegido como punto de llegada u objetivo.

Se identificó, tanto en los estudiantes que trabajaron de manera individual como en equipo, una serie de expresiones clave, como: *“avanza, sigue al frente”, “gira a la derecha”, “gira a la izquierda”, “retrocede”*.

Inicialmente, el Estudiante 1 y el Estudiante 2, no fueron conscientes de la necesidad de precisar la cantidad de pasos o el valor del ángulo de giro que debería acompañar a las órdenes: *“avanza, sigue al frente”, “gira a la derecha”, “gira a la izquierda”*. Pronto, se dieron cuenta que esas órdenes no eran suficientes para que su compañero recorriese el camino propuesto. El trabajo del Equipo fue más efectivo. Uno de ellos describe el recorrido de la siguiente manera:

- *“... da tres pasos de frente”*
- *“... gira a la derecha”*
- *“... da cuatro pasos”*
- *“... gira de nuevo a la derecha”*
- *“... da dos pasos más hacia adelante”*

Al preguntar sobre qué significa girar a la derecha o girar a la izquierda, su compañero comenta: *“... los ángulos de giro son de 90°... así nos han enseñado cuando marchamos en el colegio ...”*

4.2.1.2 PARTE II. Exploración de los comandos básicos del TortugArte y construcción de figuras geométricas. En esta segunda parte de la Actividad 1, se esperaba que después de la actividad lúdica y una breve introducción a los principales comandos del TortugArte: *“adelante”, “atrás”, “derecha”, “izquierda”, “limpiar”, “repetir”*, los estudiantes encontrasen una analogía entre estos comandos y las orientaciones dadas a sus compañeros vendados, durante el desarrollo de la actividad lúdica (PARTE I). Igualmente, se esperaba que se diesen discusiones sobre la angulación necesaria para las figuras geométricas propuestas.

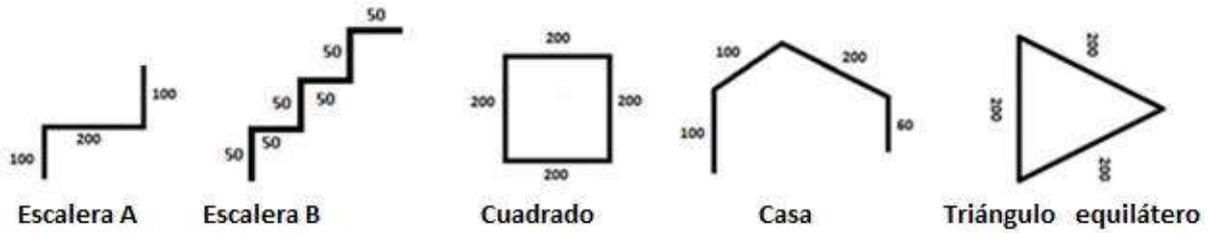
Las actividades iniciales con los comandos básicos del TortugArte tenían como objetivo, que los estudiantes conozcan las acciones (construcciones) que realiza la tortuga cuando los comandos son ejecutados y, además, que dichas construcciones involucren a los conceptos matemáticos de segmento de recta y ángulo.

En lo que respecta a la construcción de figuras geométricas específicas, mediadas con el TortugArte, los estudiantes recibieron orientaciones para su desarrollo, como: *“Utilizando el TortugArte, elabore las figuras lo más próximas o similares a las que están diseñadas en el papel”, “Los números indicados al lado de cada segmento, indican la cantidad de pasos de la tortuga”, “Al finalizar, capture la imagen del programa computacional TortugArte y el dibujo construido por la tortuga”*.

La **Figura 37**, muestra las figuras que deberían construirse con el TortugArte. Cabe mencionar que la construcción de estas figuras, son abordadas por Gonçalves (2014) utilizando SuperLogo.

Figura 37

Figuras propuestas para la Actividad 1



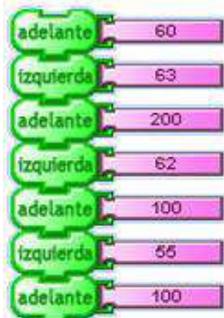
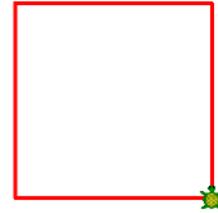
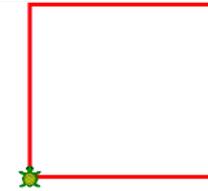
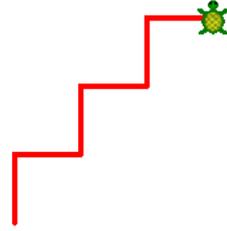
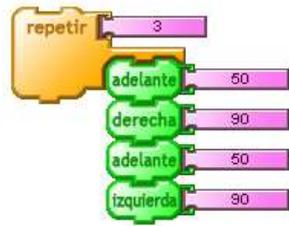
Nota. Extraído de Gonçalves (2014, p. 78)

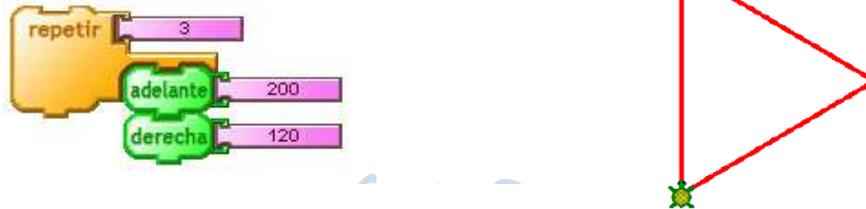
La **Tabla 3**, muestra los programas computacionales y las figuras geométricas respectivas, que produce su ejecución y que, además, se esperaba sean elaborados por los estudiantes.

Tabla 3

Construcción de figuras: Respuestas esperadas

Respuestas esperadas	
Programa computacional	Figura geométrica
<pre>adelante 100 derecha 90 adelante 200 izquierda 90 adelante 100</pre>	
<pre>adelante 50 derecha 90 adelante 50 izquierda 90 adelante 50 derecha 90 adelante 50 izquierda 90 adelante 50 derecha 90 adelante 50</pre>	





Ítem a) Comandos básicos

Los estudiantes serán capaces de describir y comprender la acción de cada uno de los comandos básicos del TortugArte: “adelante”, “atrás”, “izquierda” y “derecha”, al descubrir la analogía existente con las órdenes proporcionadas a sus compañeros vendados, durante el desarrollo de la actividad lúdica. La descripción adecuada de las acciones que realiza la tortuga respecto a cada comando será un indicador de la comprensión de los estudiantes. Lo mismo deberá suceder, cuando describan una secuencia de comandos o programa computacional.

Estas actividades iniciales con los comandos básicos del software TortugArte, tienen como objetivo que los estudiantes movilicen esquemas de uso relacionados a su funcionamiento y manipulación.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

En las acciones del Estudiante 1, observamos que después de leer las instrucciones, hace clic sobre el comando “adelante”, lo arrastra a la zona donde está la tortuga y luego, haciendo un doble clic sobre el comando, la tortuga se desplaza hacia adelante una determinada distancia. Observamos que repite la acción más de una vez, logrando que la tortuga se desplace y pinte su recorrido como un segmento de recta. Utilizando el ícono del borrador, borra el camino recorrido por la tortuga y luego, ésta retorna a su posición inicial. En su descripción, el estudiante destaca la orientación de la cabeza de la tortuga y su desplazamiento hacia adelante: “... la tortuga se mueve en la dirección de su visual, hacia la parte superior de la pantalla...”. Para el comando “atrás”, comenta: “... la tortuga avanza hacia abajo, pero sin girar el cuerpo, retrocede...”, asimismo, repite la acción más de una vez. Luego, el estudiante ejecuta el comando “derecha” más de una vez y comenta: “... la tortuga no traza un camino, solo da un giro de 90° a la derecha...”. Con el comando “izquierda”, el estudiante realiza

acciones similares a las efectuadas con el comando “*derecha*”, en particular, repite la acción más de una vez, al parecer pretende ampliar su comprensión de la acción que realiza la tortuga y concluye afirmando: “*la tortuga gira a la izquierda un cuarto de vuelta*”.

En los cuatro comandos analizados, el parámetro numérico asume valores por defecto: *adelante:100*, *atrás:100*, *derecha:90* e *izquierda:90*. El trabajo con los comandos: “*izquierda: 135*” y “*adelante: 200*”, le permite al estudiante, manipular los parámetros numéricos y adquirir la noción de variable. De manera autónoma, el estudiante realiza cambios a los parámetros numéricos y luego, ejecuta los comandos para visualizar la acción de la tortuga. Sobre la analogía con los incidentes del juego, no hace ningún comentario.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

El Estudiante 2 describe el comando “*adelante:100*” como: “... *la tortuga avanza en la dirección que está ...*”. Para el comando “*atrás:100*”, su comentario es: “... *la tortuga retrocede desde el lugar donde se encuentra...*”. Con relación al comando “*derecha:90*”, afirma: “... *la tortuga gira 90 a la derecha desde el lugar en que se encuentra...*” y, por último, para el comando “*izquierda:90*”, indica que: “... *la tortuga gira 90 a la izquierda desde el lugar en que se encuentra...*”. Sobre la analogía con los incidentes del juego, responde: “... *en el software, el niño vendado se ha convertido en tortuga...*”

La actividad con los comandos: “*izquierda: 135*” y “*adelante 200*”, permite al estudiante manipular los parámetros numéricos y modificarlos según sus necesidades. Observamos, que el estudiante experimenta con los comandos, primero cambiándoles el valor del parámetro y luego, ejecutándolos para visualizar la acción de la tortuga.

- **Descripción del trabajo del Equipo**

En lo que sigue, vamos a describir algunas acciones colectivas realizadas por el Estudiante 3 y el Estudiante 4. El Estudiante 3 toma posición en la computadora y hace doble clic sobre el comando “*adelante:100*”. Al respecto, comenta: “... *la tortuga se dirige hacia adelante, trazando una línea roja según el número de pasos...*”; su compañero, el Estudiante 4, agrega: “... *la tortuga avanza hacia adelante y si le damos otro doble clic, la tortuga avanza la misma cantidad ...*”. Respecto a la analogía con los incidentes de la actividad lúdica, el Estudiante 4 comenta: “... *nosotros somos quienes dirigimos a la tortuga, si es que avanza o gira a la derecha o izquierda...*”. El Estudiante 3, agrega: “... *el niño vendado es la tortuga... lo curioso de esto es como que nosotros mismos lo controlamos, lo que le decimos, ... derecha, izquierda, adelante y controlamos los pasos...*”. Los comentarios finales reflejan la transparencia del software TortugArte en cuanto a su diseño, fácil de aprender y muy adecuado para los niños.

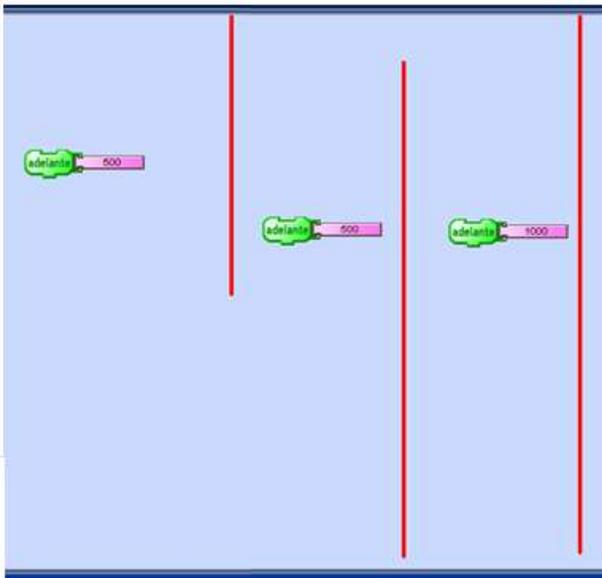
Sobre el comando “atrás”, comentan: “la tortuga retrocede y pinta también una línea recta, pero no gira...”. Para los comandos “izquierda” y “derecha” refieren que la tortuga “... gira sobre su propio eje, 90 a la izquierda o 90 a la derecha ... si cambiamos el valor, por ejemplo, 135 ... la tortuga queda en diagonal ...”. La interpretación que hacen para el comando “adelante:200”, es el siguiente: “...la tortuga avanza al frente 200 pasos y pinta una línea, el doble que adelante:100...”.

Observamos que, de manera autónoma, experimentan la acción de la tortuga para valores como: 10, 50, 500, 1000 ...”. Llamó su atención, los resultados para los comandos “adelante:500” y “adelante:1000”, al percibir que no podían visualizar el recorrido de la tortuga en su totalidad. Observamos que movilizan un esquema de uso del arrastre, probablemente aprendido en el uso de otro software. La tortuga, ubicada por defecto en el centro del área gráfica del TortugArte, es arrastrada al extremo inferior de la pantalla, logrando visualizar el camino recorrido para el comando “adelante:500”; pero, para el comando “adelante:1000”, no tuvieron éxito. El área gráfica del TortugArte no permite hacer zoom, con lo cual aprendieron una de las limitaciones de este software.

La **Figura 38**, muestra las limitaciones del área gráfica del TortugArte para la visualización de los recorridos de la tortuga, correspondientes a los comandos “adelante:500” y “adelante:1000”.

Figura 38

Limitaciones del área gráfica del TortugArte



De manera general, percibimos que, en el desarrollo de las tareas propuestas, para conocer el funcionamiento y la manipulación de los comandos básicos del TortugArte, los estudiantes han movilizad o esquemas de uso de manera exitosa, por lo tanto, ha ocurrido el proceso de instrumentalización de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995).

Ítem b) Combinación de comandos

Los comandos básicos pueden ser combinados y organizados secuencialmente como puzles o rompecabezas, dando lugar a un programa computacional, el cual al ser ejecutado permite visualizar el potencial gráfico del software TortugArte.

En primer lugar, se proporcionan dos secuencias de comandos o programas computacionales para ser reproducidos, utilizando las paletas de programación del TortugArte y luego, se propone la descripción de un camino recorrido por la tortuga, para que el estudiante elabore el programa computacional pertinente.

Este tipo de actividades permiten que los estudiantes empiecen a movilizar esquemas de acción instrumentada sencillos, concretizados en programas computacionales o secuencias de comandos ensamblados que al ser ejecutados producen figuras geométricas diversas.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

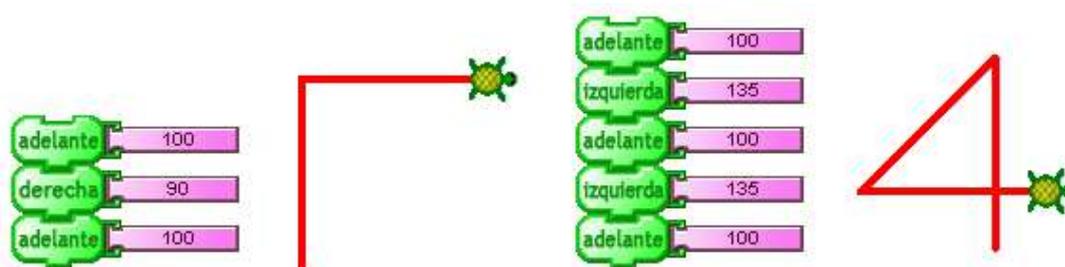
El Estudiante 1 reproduce los dos programas computacionales, utilizando elementos del lenguaje de programación del TortugArte y luego, los ejecuta para visualizar las figuras geométricas o dibujos que construye la tortuga en su recorrido. Las descripciones de ambas situaciones muestran su comprensión de las acciones realizadas por la tortuga y su relación con la sintaxis del lenguaje de programación, asimismo, ponen en evidencia el carácter intuitivo que tiene dicho lenguaje.

“... la tortuga avanza 100 para adelante, gira 90° a la derecha y avanza 100 pasos en la misma dirección ...”

La **Figura 39**, muestra los programas computacionales y las figuras geométricas construidas.

Figura 39

Programas computacionales y figuras geométricas

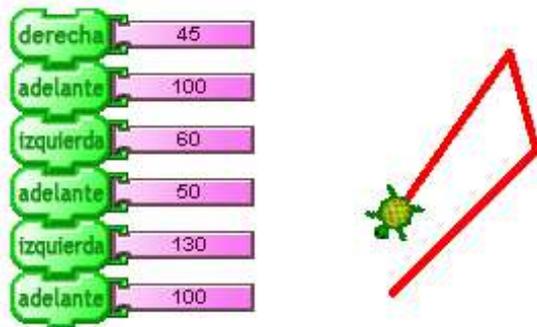


El programa computacional, correspondiente a la descripción de un camino recorrido por la tortuga, fue elaborado sin dificultades, lo cual refleja la simplicidad del diseño del software.

La **Figura 40**, muestra el programa computacional o secuencia de comandos y la figura geométrica construida por dicho programa.

Figura 40

Programa computacional y figura geométrica



- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

El trabajo del Estudiante 2, se desarrolla sin dificultades. Sobre el primer programa computacional comenta: "... la tortuga avanza y gira a la derecha 90 grados, luego avanza, ... dibuja un ángulo recto...". El segundo programa computacional es reproducido y ejecutado para visualizar la figura que construye la tortuga. Al respecto comenta: "... veo que agrupando comandos la tortuga dibuja figuras extrañas... como un cuatro...".

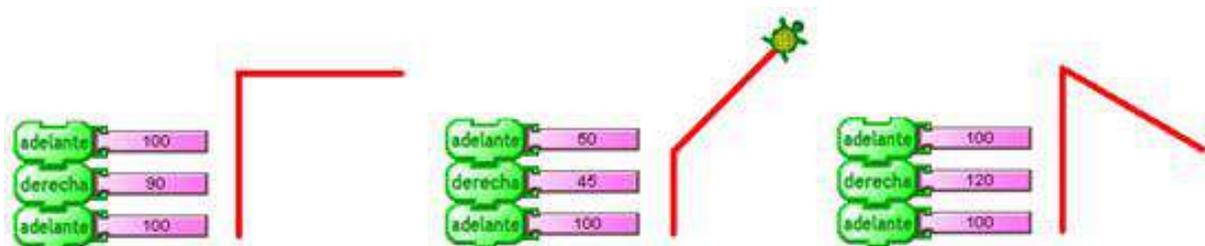
El estudiante no tuvo dificultades para elaborar el programa computacional correspondiente a la descripción de un camino específico. Los comandos TortugArte fueron instrumentalizados según las necesidades de la actividad. Podemos observar que el estudiante empieza a movilizar esquemas de acción instrumentada sencillos.

- **Descripción del trabajo del Equipo**

El Equipo desarrolla su trabajo sin dificultades. La primera secuencia de comandos es reproducida y ejecutada, pero, además, modifican los valores de los parámetros. La **Figura 41**, muestra los programas computacionales y sus respectivos resultados.

Figura 41

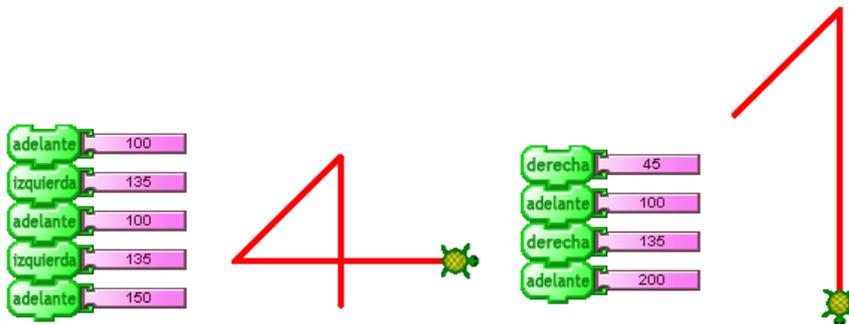
Programas computacionales y figuras geométricas



Después de reproducir el segundo programa y ejecutarlo, el equipo moviliza esquemas de uso de los comandos, logrando elaborar un nuevo programa computacional. La **Figura 42**, muestra la tarea propuesta, así como el aporte del equipo.

Figura 42

Programas computacionales y figuras geométricas



Al indagar por algún aspecto que les parece difícil, el Estudiante 3 refiere que: “... lo más difícil es calcular los ángulos, el giro que debe dar la tortuga, ... eso dificulta ...”.

El programa computacional correspondiente a la descripción de un camino recorrido por la tortuga es elaborado sin dificultades. Se observa que los estudiantes empiezan a movilizar esquemas de acción instrumentada simples y, además, de manera colectiva.

Ítem c) Comando: «repetir»

La Actividad 1 continúa con la presentación del comando “repetir”. La **Figura 43**, muestra la paleta o elemento de programación, correspondiente. El parámetro numérico por defecto es igual a 10 y puede ser modificado, según las necesidades. Este comando facilita la construcción de figuras más generales a partir de ciertas características principales o patrones geométricos.

Figura 43

Paleta del comando “repetir”



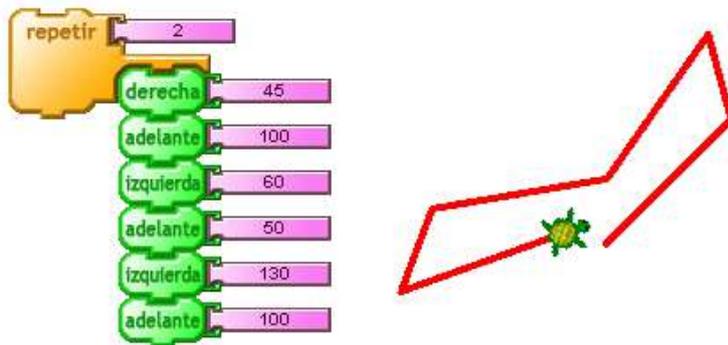
La tarea propuesta para este apartado busca que el estudiante combine correctamente, el comando “repetir” con un programa computacional elaborado anteriormente (ver **Figura 40**), asimismo, modifique los valores de su parámetro y visualice los resultados para cada caso.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

El Estudiante 1 ensambla el comando “repetir” al programa computacional mostrado anteriormente (ver **Figura 40**), modifica el valor del parámetro asignado por defecto y luego lo ejecuta. La **Figura 44**, muestra la acción de la tortuga para el comando “repetir” con parámetro 2.

Figura 44

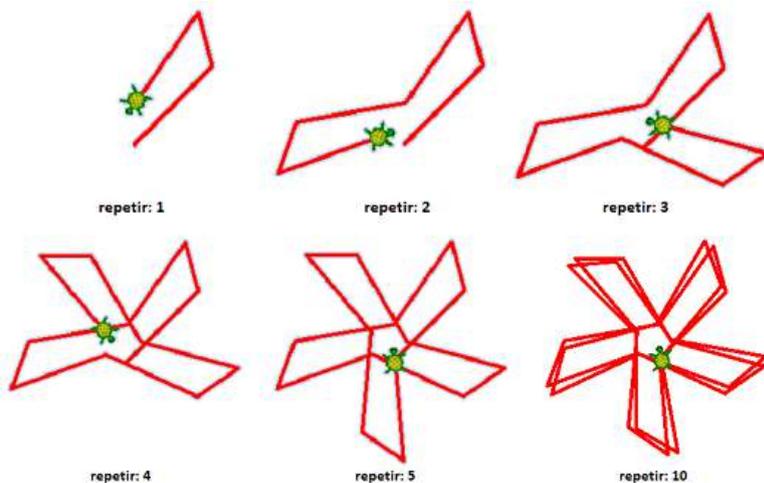
Programa computacional y diseño geométrico



El estudiante realiza la modificación del parámetro asociado al comando “*repetir*” y luego, ejecuta el programa computacional respectivo para visualizar el camino recorrido por la tortuga. En la descripción de las acciones que realiza la tortuga, para los distintos valores del parámetro, el estudiante manifiesta que: “... *la tortuga repite su camino inicial, según el valor del parámetro asociado al comando repetir*”.

Figura 45

Diseños obtenidos para distintos valores del parámetro



- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

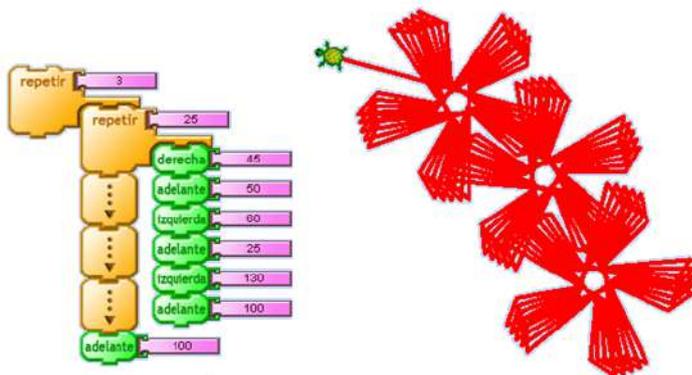
El Estudiante 2 instrumentaliza el comando “*repetir*”, modificando el parámetro por defecto, igual a 10 y lo cambia por 2; luego, combina el comando “*repetir: 2*” con el programa computacional mostrado anteriormente en la **Figura 40**. Se observa que el estudiante moviliza un esquema de acción instrumentada, al elaborar el nuevo programa computacional que le permite construir dos veces la misma figura. El estudiante comenta: “... *la tortuga repite la figura inicial las veces que indica el número en (el comando) repetir ...*”.

El estudiante asigna nuevos valores al parámetro del comando “*repetir*” y ejecuta el programa computacional respectivo. Se concluye que el estudiante está movilizando un esquema de uso respecto al programa computacional, está siendo instrumentado.

La **Figura 46**, muestra el resultado de su exploración libre con el comando “*repetir*”.

Figura 46

Programa computacional y diseño construido



- **Descripción del trabajo del Equipo**

El Equipo moviliza un esquema de acción colectiva instrumentada al combinar el comando “*repetir:2*” con el programa computacional, mostrado anteriormente en la **Figura 40**. Además, instrumentalizan el comando “*repetir*”, modificando su parámetro para los valores 3, 4, 5 y 10. Sobre las acciones de la tortuga, comentan que: “... *la tortuga repite la misma acción las veces que indica el parámetro del comando repetir... formando un diseño más complejo*”.

En general, en el desarrollo de las tareas, los estudiantes han adquirido fluidez en el uso del TortugArte. Se percibe que están familiarizados e instrumentados con los comandos básicos, la combinación de comandos y el uso particular del comando “*repetir*”.

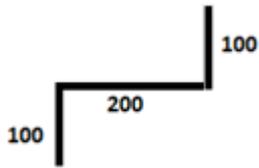
Ítem d) Construcción de figuras geométricas

La Actividad 1 concluye con la construcción de figuras geométricas específicas mostradas en la **Figura 37**. El objetivo de las tareas propuestas en este apartado es que los estudiantes movilicen y/o creen esquemas de utilización (esquemas de uso – EU/ esquemas de acción instrumentada – EAI) con el TortugArte, en la elaboración de programas computacionales, que permitan la construcción de figuras geométricas específicas involucrando los conceptos matemáticos de línea poligonal abierta y línea poligonal cerrada (polígono).

Construcción de la Escalera A

Figura 47

Figura geométrica (escalera A) para ser construida con el TortugArte



- **Análisis a priori**

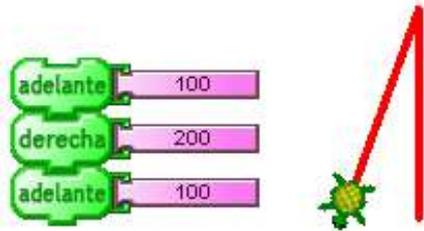
Se espera, a priori, que el estudiante movilice sus esquemas de uso, respecto a los comandos: “adelante”, “izquierda” y “derecha”, así como un esquema de acción instrumentada para elaborar un programa computacional que le permita construir la escalera A.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

En su primer intento, el estudiante elabora un programa computacional, lo ejecuta y obtiene la siguiente figura geométrica:

Figura 48

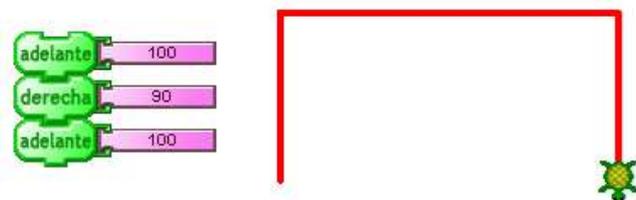
Programa computacional y figura geométrica



Al percibir que no había obtenido la figura requerida, el estudiante elabora un segundo programa computacional y lo ejecuta dos veces. El resultado es el siguiente:

Figura 49

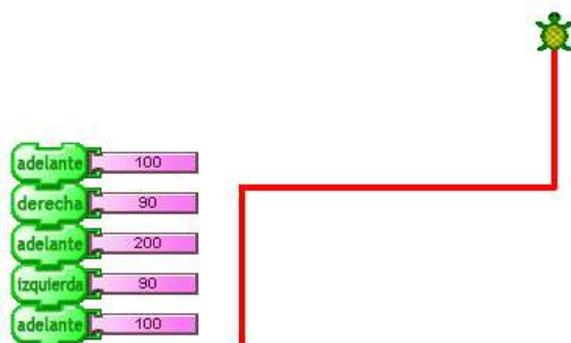
Programa computacional y figura geométrica



Finalmente, en un tercer intento elabora un nuevo programa computacional, lo ejecuta y obtiene la figura geométrica requerida.

Figura 50

Programa computacional y figura geométrica



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 1, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción de la escalera A (**Figura 47**).

Tabla 4

Construcción de la escalera A (Modelo SAI) – Estudiante 1

Modelo SAI. Construcción de la escalera A			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “izquierda”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Estudiante 1 usa los comandos: “adelante”, “derecha” e “izquierda” del software TortugArte y elabora tres programas computacionales, obteniendo resultados distintos. En el primer programa, el estudiante asigna erróneamente, el parámetro 200 pasos al comando “derecha”, el cual produce un giro de 200 grados y, por lo tanto, no logra la figura geométrica requerida. Luego, corrige su error y elabora un nuevo programa, con el cual pretende obtener la figura de manera recursiva, al parecer, a partir de un patrón geométrico que ha identificado en dicha figura, pero el resultado no es el correcto. Finalmente, estructura un tercer programa computacional más intuitivo, ensamblando cada comando que la tortuga debería ejecutar para lograr la figura requerida.

Se observa que el estudiante moviliza sus esquemas de uso respecto a los comandos “adelante”, “derecha” e “izquierda”, modificando los respectivos parámetros de los comandos e instrumentalizándolos para lograr las siguientes tareas secundarias: *la construcción de dos segmentos de longitud 100, un segmento de 200 pasos y dos ángulos de 90 grados*. Se puede afirmar que en el

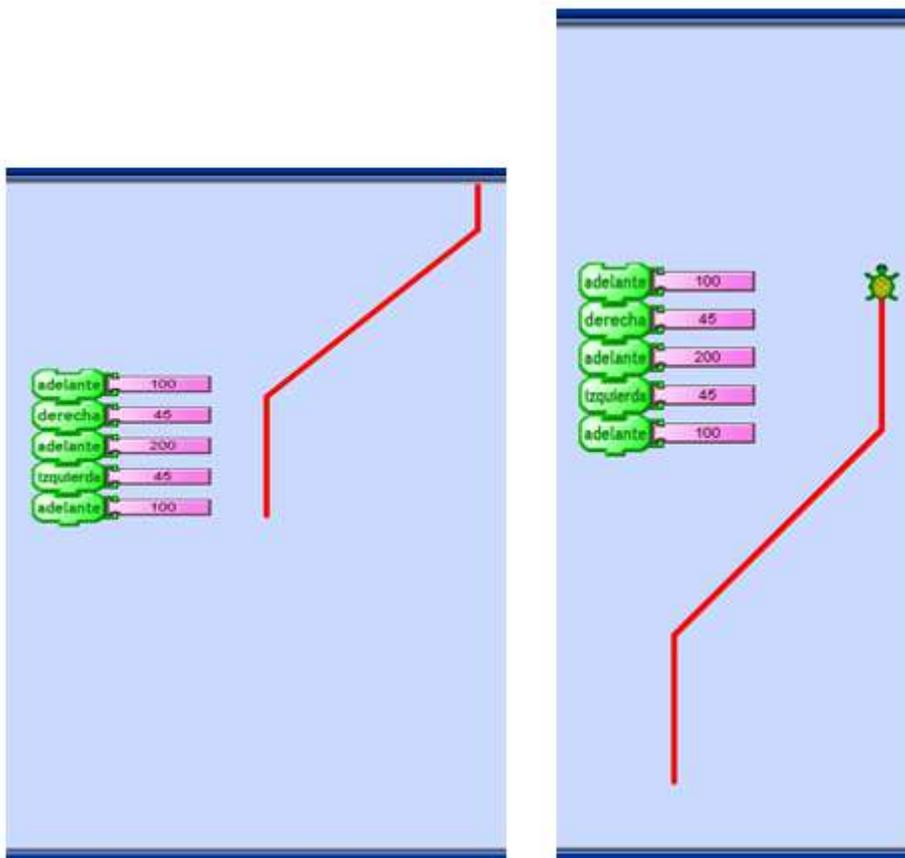
tercer intento, el estudiante ha movilizado un esquema de acción instrumentada correcto, consiguiendo el programa computacional que permite construir la escalera A, logrando la tarea principal u objetivo.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

El Estudiante 2 moviliza un primer esquema de acción instrumentada y elabora un programa computacional incorrecto. La **Figura 51**, muestra el programa computacional y la figura geométrica construida, así como también las limitaciones del área gráfica del TortugArte. Se observa que el estudiante moviliza un esquema de uso de la propiedad del arrastre, para posicionar la tortuga en la parte inferior del área gráfica y de esta manera, poder visualizar en su totalidad, la figura construida por la tortuga, sin embargo, no es la figura solicitada.

Figura 51

Visualización parcial y total de la figura geométrica



Después de la corrección de los ángulos de giro, el estudiante logra la figura requerida. Al ser indagado sobre el error, responde: “... mi idea de girar a la derecha estaba asociada a un ángulo de 90... por lo que pensé que para la figura era la mitad”. Se puede percibir que estaba asociando 90 grados a una media vuelta y, por lo tanto, la tortuga necesitaba girar la mitad.

- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 2, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción de la escalera A.

Tabla 5

Construcción de la escalera A (Modelo SAI) – Estudiante 2

Modelo SAI. Construcción de la escalera A			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “izquierda”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
IV	El arrastre	Desplazamiento con el cursor	Programa y/o la tortuga
V	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Estudiante 2 moviliza un esquema de acción instrumentada para elaborar el programa computacional y un esquema de uso asociado a la propiedad del arrastre, para modificar la posición estándar de la tortuga.

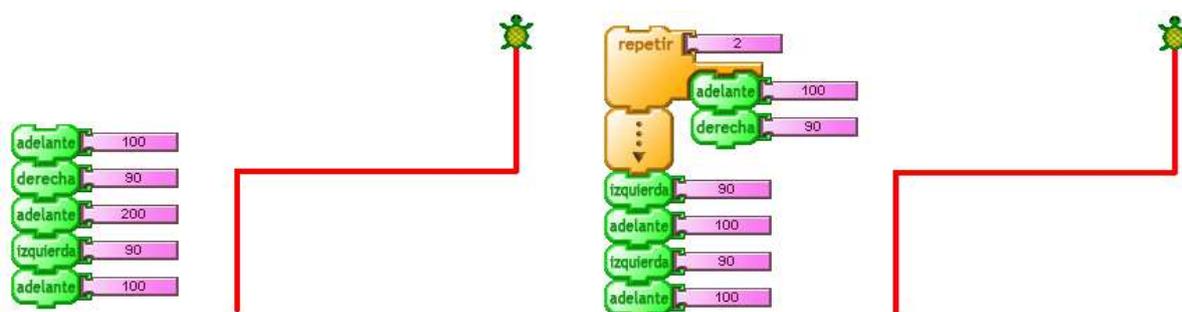
El área gráfica del TortugArte, a diferencia del GeoGebra, es un área finita y estática, no permite hacer zoom (acercar y alejar la imagen); además, la tortuga tiene una posición estándar de inicio, empieza su recorrido en el centro de la pantalla y orientada hacia la parte superior de la pantalla. Se observa en las acciones del estudiante, que dichas limitaciones son superadas a través de la instrumentalización del arrastre, propiedad probablemente aprendida, en el uso de un software similar.

- **Descripción del trabajo del Equipo**

El Equipo elabora dos programas computacionales equivalentes, es decir, programas que producen la misma figura geométrica. La **Figura 52**, muestra los resultados.

Figura 52

Programas computacionales equivalentes para construir la escalera A



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del equipo, como sujetos de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración de los programas computacionales que permiten la construcción de la escalera A.

Tabla 6

Construcción de la escalera A (Modelo SAI) – Equipo

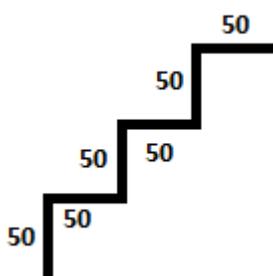
Modelo SAI. Construcción de la escalera A			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “izquierda”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
IV	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Estudiante 3 del equipo elabora el primer programa movilizándolo un esquema de acción instrumentada con éxito. En la elaboración del segundo programa computacional, movilizan un esquema de acción colectiva instrumentada combinando el comando “repetir” con los comandos “adelante”, “izquierda” y “derecha”. Durante el desarrollo de la tarea, se observa que los integrantes del equipo estaban dialogando con el objetivo de aportar sus ideas e hipótesis, a la solución.

Construcción de la escalera B

Figura 53

Figura geométrica (escalera B) para ser construida con el TortugArte



- **Análisis a priori**

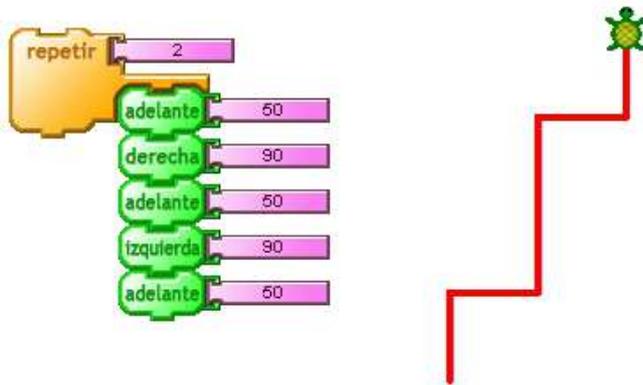
Se espera a priori, que el estudiante movilice sus esquemas de uso respecto a los comandos: “adelante”, “derecha”, “izquierda” y “repetir”, para elaborar un programa computacional que le permita construir la escalera B (**Figura 53**). Igualmente, se especula que el estudiante, después de identificar un patrón geométrico en la escalera B, proceda a elaborar un programa computacional óptimo y más simple, haciendo uso del comando “repetir”.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

El Estudiante 1 elabora un primer programa computacional, lo ejecuta y obtiene una figura geométrica distinta a la requerida.

Figura 54

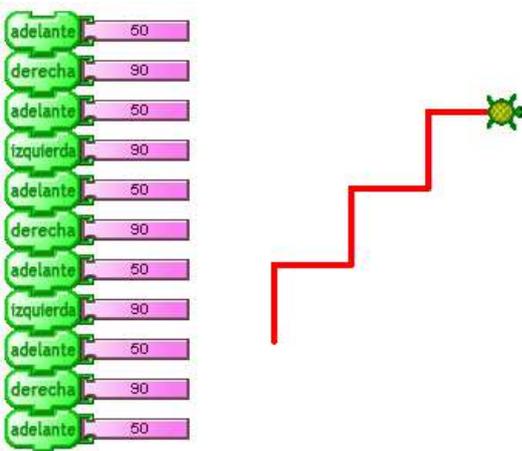
Programa computacional y figura geométrica



En el segundo intento, el estudiante abandona su estrategia inicial, basada en un patrón geométrico inadecuado y elabora un nuevo programa computacional más intuitivo, ensamblando los comandos que la tortuga debería ejecutar, paso a paso, para construir la escalera B.

Figura 55

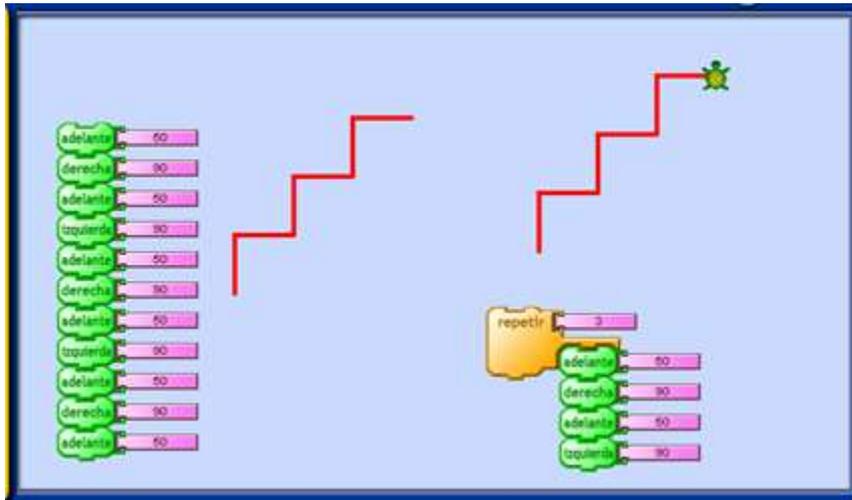
Programa computacional y figura geométrica requerida



Se observa que el programa computacional obtenido en el segundo intento, le permite identificar un patrón geométrico, retomar su estrategia inicial y, por último, lograr un tercer programa computacional más simple. Además, se observa que el estudiante instrumentaliza la propiedad del arrastre, para presentar simultáneamente, los programas computacionales y sus respectivas figuras. La **Figura 56**, muestra el resultado de sus acciones.

Figura 56

Programa computacional y figura geométrica requerida



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 1, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción de la escalera B.

Tabla 7

Construcción de la escalera B (Modelo SAI) – Estudiante 1

Modelo SAI. Construcción de la escalera B			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “izquierda”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
IV	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
V	El arrastre	Desplazamiento con el cursor	Programa y/o la tortuga
VI	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Estudiante 1 moviliza sus esquemas de uso, respecto a los comandos: “adelante”, “derecha”, “izquierda” y “repetir”. La elaboración correcta de dos programas computacionales equivalentes (programas que producen la misma figura geométrica), demuestra que el estudiante alcanza fluidez con el software: primero, ensamblando cada comando que la tortuga debería ejecutar, paso a paso, para construir la figura requerida y luego, utilizando el comando “repetir” para elaborar un programa computacional más simple.

Un aspecto por destacar es la optimización del uso de la ventana gráfica. Se observa que la tortuga, mediante la propiedad del arrastre, es ubicada en una nueva posición inicial, de modo que la

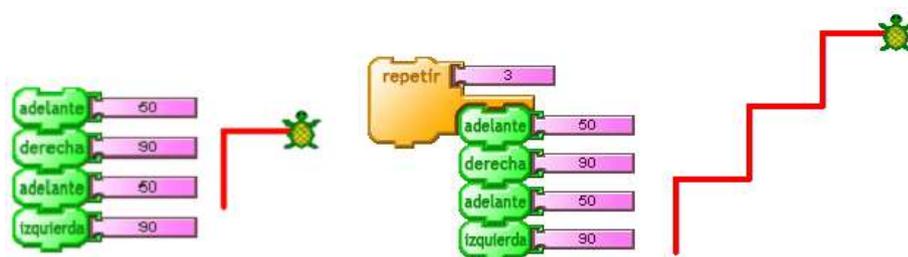
figura construida pueda ser visualizada en su totalidad y de esta manera, superar las limitaciones del espacio en la interfaz. El estudiante lo utiliza de dos maneras, primero para observar la totalidad de la figura que construye el programa computacional durante su experimentación y segundo, para mostrar, de forma simultánea, el resultado de los dos programas computacionales.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

El Estudiante 2 elabora el programa computacional correcto, a partir de la identificación de un patrón geométrico en la escalera B. La **Figura 57**, muestra el subprograma computacional y el patrón geométrico.

Figura 57

Patrón geométrico y escalera B



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 2, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción de la escalera B.

Tabla 8

Construcción de la escalera B (Modelo SAI) – Estudiante 2

Modelo SAI. Construcción de la escalera B			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “izquierda”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
IV	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
V	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Estudiante 2 moviliza un esquema de acción instrumentada donde, además de usar los comandos básicos “adelante”, “izquierda”, “derecha”, utiliza el comando “repetir”. Observamos que instrumentaliza un subprograma computacional, relativo a un patrón geométrico que está presente en la escalera B. El éxito en la tarea propuesta es un hecho que caracteriza a la ocurrencia de la instrumentación de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995).

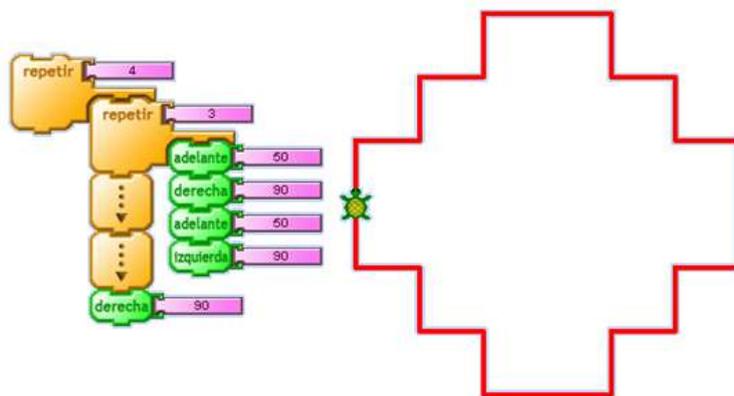
- **Descripción del trabajo del Equipo**

Percibimos que el equipo identifica un patrón geométrico en la escalera B y elabora el subprograma computacional pertinente, luego instrumentaliza el comando “*repetir*” para concretar la tarea. Los resultados son idénticos a los que obtiene el estudiante 2 y se muestran anteriormente en la **Figura 57**.

El equipo aprovecha el programa computacional obtenido y empieza a experimentar de manera autónoma. Se observa que moviliza un esquema de uso del comando “*repetir*”. La **Figura 58**, muestra el resultado de su experimentación.

Figura 58

Programa computacional y figura geométrica



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Equipo, como sujetos de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción de la escalera B.

Tabla 9

Construcción de la escalera B (Modelo SAI) – Equipo

Modelo SAI. Construcción de la escalera B			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “ <i>adelante</i> ”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “ <i>derecha</i> ”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “ <i>izquierda</i> ”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
IV	Comando “ <i>repetir</i> ”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
V	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Equipo moviliza un esquema de acción colectiva instrumentada con éxito, para elaborar el programa computacional que construye la escalera B. La colaboración y el intercambio de ideas está

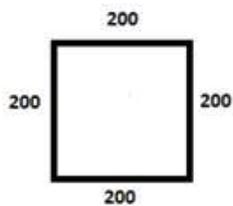
presente durante toda la tarea: “... la tortuga tiene que subir, ... haz que gire, ponle izquierda 90, ... ahora repetir 3...”.

De manera particular, al observar las acciones realizadas por el equipo durante el desarrollo de la tarea, se percibe la instrumentalización del comando “repetir”, para atender las necesidades de construcción y manipulación del patrón geométrico.

Construcción del Cuadrado

Figura 59

Figura geométrica (cuadrado) para ser construida con el TortugArte



- **Análisis a priori**

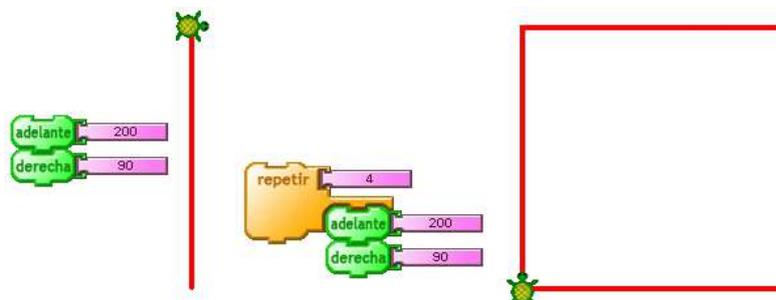
Esperamos a priori, que el estudiante movilice sus esquemas de uso respecto a los comandos: “adelante”, “derecha”, “izquierda”, “repetir” y elabore un programa computacional que le permita construir el cuadrado. Pero también, creemos que el estudiante, puede identificar un patrón geométrico en el cuadrado y elaborar el subprograma computacional correspondiente; luego, movilizándolo un esquema de acción instrumentada deberá elaborar un programa computacional óptimo, combinando el subprograma con el comando “repetir”. De esta manera, estará demostrando su fluidez y comprensión de los procesos de construcción con el software TortugArte.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

El Estudiante 1 estructura un programa computacional sin dificultades, después de reconocer en el cuadrado un patrón geométrico. El resultado de sus acciones se muestra en la **Figura 60**.

Figura 60

Patrón geométrico y cuadrado



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 1, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción del cuadrado.

Tabla 10

Construcción del cuadrado (Modelo SAI) – Estudiante 1

Modelo SAI. Construcción del cuadrado			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

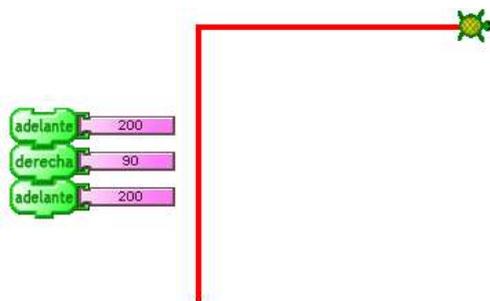
El Estudiante 1 percibe en el cuadrado, un patrón geométrico y moviliza sus esquemas de uso respecto a los comandos: “adelante” y “derecha”. Primero, elabora el subprograma computacional correspondiente al patrón geométrico y luego, moviliza un esquema de acción instrumentada, sin dificultades, ensamblando el comando “repetir: 4” con el subprograma.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

El Estudiante 2 identifica un patrón geométrico en el cuadrado y elabora el subprograma computacional correspondiente. El patrón geométrico reconocido por el Estudiante 2 es diferente al identificado por el Estudiante 1. La **Figura 61** muestra el subprograma computacional y el patrón geométrico respectivo.

Figura 61

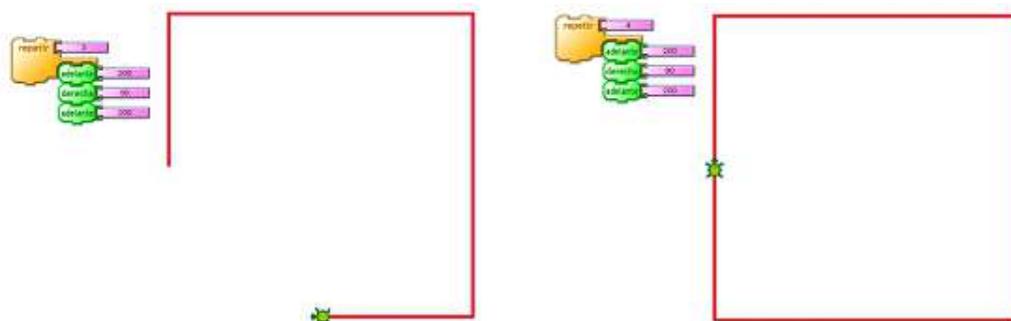
Subprograma computacional con comandos “adelante: 200”



La **Figura 62**, muestra los programas computacionales para los comandos “repetir: 3” y “repetir: 4” y sus figuras geométricas respectivas. El cuadrado tiene 400 pasos de lado.

Figura 62

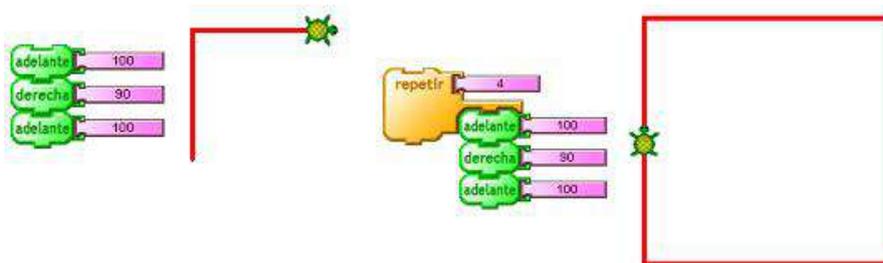
Programas computacionales y construcciones geométricas



El estudiante elabora un nuevo programa computacional, asignando el valor de 100, al parámetro del comando “adelante”. La **Figura 63**, muestra los respectivos resultados.

Figura 63

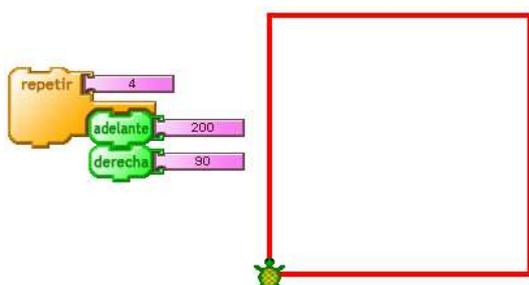
Patrón geométrico y cuadrado de 200 pasos de lado



Finalmente, el estudiante fue motivado a elaborar un programa computacional óptimo, es decir, que utilice la menor cantidad de comandos. El resultado fue el siguiente:

Figura 64

Programa computacional óptimo y cuadrado de lado 200



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 2, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción del cuadrado.

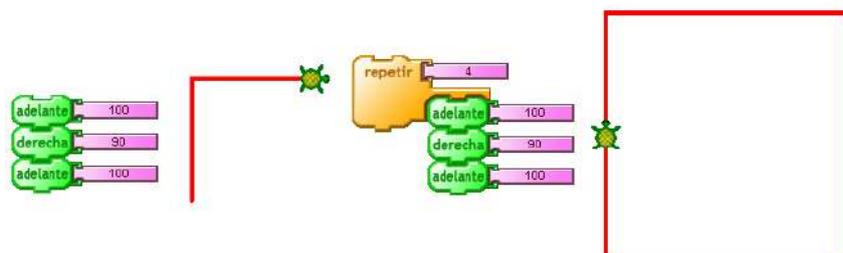
Tabla 11*Construcción del cuadrado (Modelo SAI) – Estudiante 2*

Modelo SAI. Construcción del cuadrado			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Estudiante 2 percibe en el cuadrado, un patrón geométrico, sin embargo, la asignación de los parámetros correspondientes a los comandos “adelante” y “repetir” no son los adecuados, el resultado es un cuadrado de lado 400 pasos. Después de las correcciones pertinentes, logra elaborar el programa computacional requerido para construir el cuadrado y, además, consigue simplificarlo.

- **Descripción del trabajo del Equipo**

El equipo moviliza un esquema de acción colectiva instrumentada y elabora un programa computacional con éxito. El patrón geométrico identificado en el cuadrado tiene una característica peculiar: empieza en la mitad de un lado y continúa hasta la otra mitad del lado adyacente y el subprograma computacional correspondiente es combinado con el comando “repetir:10”. Se observa que utilizando la estrategia de ensayo y error, logran determinar el valor 4 como parámetro correcto para el comando “repetir”. La **Figura 65**, muestra los programas computacionales elaborados para el patrón geométrico y para el cuadrado.

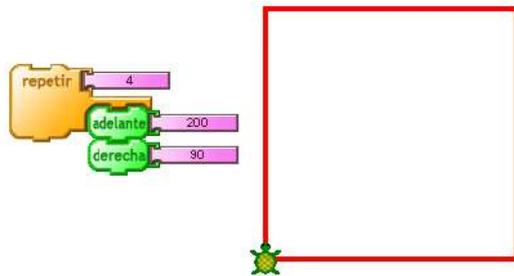
Figura 65*Programas computacionales y figuras geométricas obtenidas*

El equipo fue motivado a elaborar un programa computacional con menos comandos, es decir, un programa óptimo, más simple y con el mínimo de comandos. Con base en el último programa computacional elaborado, el equipo moviliza un esquema de acción colectiva instrumentada. El estudiante 4 propone: “... quítale un (comando) adelante ... el primero no, es el último ... prueba ahora...”. El estudiante 3 comenta: “listo ... pero el resultado es un cuadrado de lado 100 ... cambiémoslo por 200... listo, tenemos el cuadrado de (lado) 200...”.

La **Figura 66**, muestra el programa computacional optimizado y la figura geométrica requerida.

Figura 66

Programa computacional y cuadrado



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Equipo, como sujetos de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción del cuadrado.

Tabla 12

Construcción del cuadrado (Modelo SAI) – Equipo

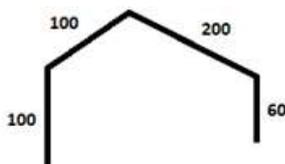
Modelo SAI. Construcción del cuadrado			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

Se observa que el equipo moviliza un esquema de acción colectiva instrumentada de manera exitosa. Identifican un patrón geométrico para el cuál el subprograma computacional no es el óptimo, sin embargo, han sido capaces de simplificarlo.

Construcción de la Casa

Figura 67

Figura geométrica (casa) para ser construida con el TortugArte



- **Análisis a priori**

En la elaboración del programa computacional para la construcción de la línea poligonal abierta: *casa*, esperamos a priori, que el estudiante movilice sus esquemas de uso respecto a los comandos: “adelante”, “izquierda” y “derecha”.

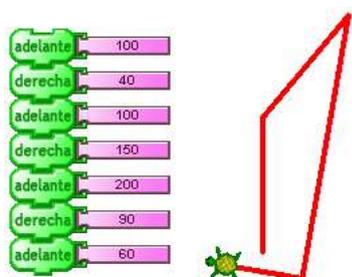
Las características particulares de la figura geométrica “casa”, requieren de la determinación de las medidas de los ángulos de giro para orientar el desplazamiento de la tortuga. Se ha previsto el uso de un transportador, actividad que, además, le permitirá al estudiante establecer un paralelo entre un soporte estático (transportador) y un soporte dinámico (TortugArte).

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

El Estudiante 1 desarrolla un primer programa computacional y obtiene el siguiente resultado:

Figura 68

Programa computacional y figura geométrica

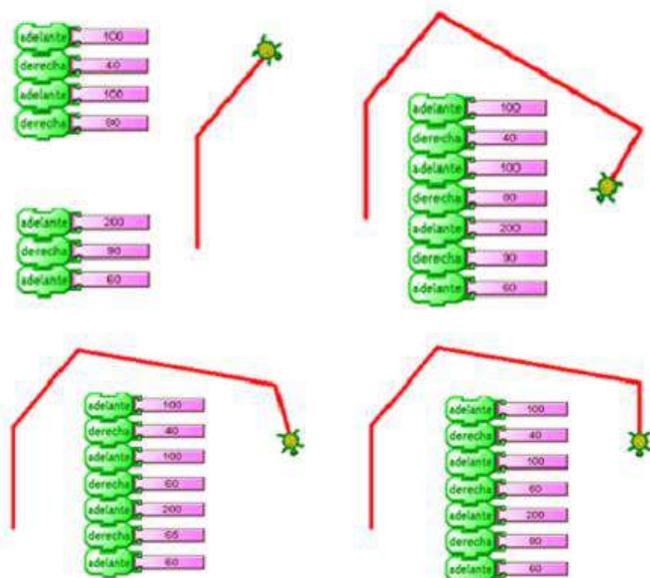


Los siguientes programas computacionales y las respectivas figuras geométricas que construyen, muestran la forma como el Estudiante 1 aborda la tarea. Utiliza la estrategia del ensayo y error, mide primero los ángulos con el transportador y luego, asigna dichos valores a los comandos. También, se perciben dificultades con la instrumentalización del transportador, al parecer la doble disposición (en un sentido y en otro) de las medidas de los ángulos en la herramienta le genera conflictos cognitivos.

La **Figura 69**, muestra los programas computacionales y sus figuras geométricas respectivas, como resultado de las distintas acciones del estudiante, al realizar la tarea.

Figura 69

Programas computacionales y figuras geométricas construidas



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 1, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción de la casa.

Tabla 13

Construcción de la casa (Modelo SAI) – Estudiante 1

Modelo SAI. Construcción de la casa			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando "adelante"	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando "derecha"	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Estudiante 1 moviliza sus esquemas de uso respecto a los comandos: "adelante", "derecha" y logra estructurar un primer programa computacional. Se percibe que los valores del parámetro correspondiente al comando "derecha" (ángulo de giro), no son los adecuados, confunde el ángulo de giro con su suplemento; además, las medidas realizadas con el transportador son incorrectas.

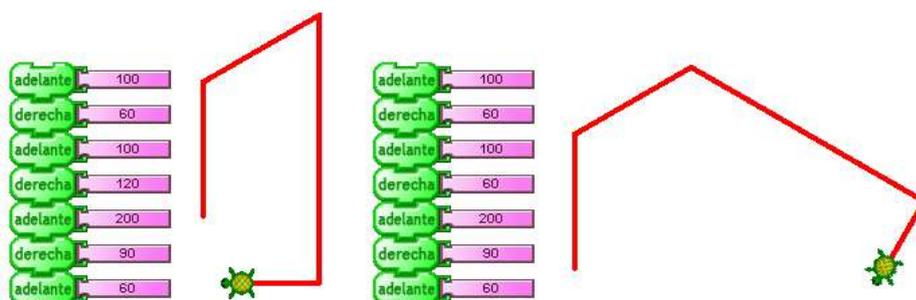
Se observa, que el estudiante no explora la posibilidad de utilizar el comando "izquierda" para desarrollar un programa computacional que construya la casa, partiendo el recorrido desde el lado derecho.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

El Estudiante 2 elabora el programa computacional para construir la casa, con algunas dificultades respecto a la asignación del valor del ángulo de giro. Se puede percibir inadecuada instrumentalización del transportador, toma la lectura incorrectamente y confunde la medida del ángulo de giro con la medida de su suplemento. Después de ejecutar el programa computacional y observar la construcción de la figura geométrica, el estudiante procede a realizar las correcciones necesarias, mediante ensayo y error, probando con el ángulo de giro y su suplemento, hasta obtener una aproximación de la casa. La **Figura 70**, muestra las dificultades relacionadas con la asignación correcta del ángulo de giro, correspondiente al comando “*derecha*”.

Figura 70

Ángulos de giro, inadecuados



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 2, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción de la casa.

Tabla 14

Construcción de la casa (Modelo SAI) – Estudiante 2

Modelo SAI. Construcción de la casa			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “ <i>adelante</i> ”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “ <i>derecha</i> ”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Estudiante 2 moviliza sus esquemas de uso respecto a los comandos: “*adelante*”, “*derecha*” y estructura un primer programa computacional. Se percibe que la mayor dificultad radica en la asignación correcta del ángulo de giro, la cual se agudiza al realizar una inadecuada

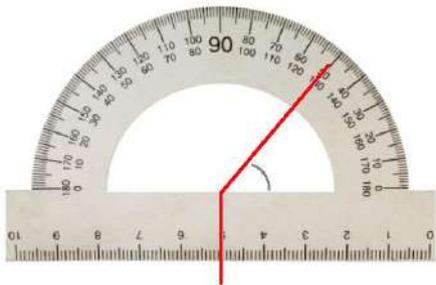
instrumentalización del transportador. El estudiante concreta la tarea haciendo las correcciones necesarias hasta obtener una aproximación de la casa, mediante ensayo y error.

- **Descripción del trabajo del Equipo**

El equipo moviliza un esquema de acción colectiva instrumentada. Se observa que el diálogo es frecuente, comparten ideas y medidas sobre el ángulo de giro. El Estudiante 3, acentúa su observación en las características de la línea poligonal y su relación con el ángulo de giro de la tortuga, afirmando que: "... la tortuga debe girar siempre a la derecha...". Se perciben dificultades con la asignación correcta del ángulo de giro, al respecto, el Estudiante 4, propone: "... asigne 40 y luego prueba con 140...". La figura obtenida no se aproxima a la requerida, se observa que el transportador no está siendo instrumentalizado de manera correcta. La **Figura 71**, muestra la manera como están instrumentalizando el transportador.

Figura 71

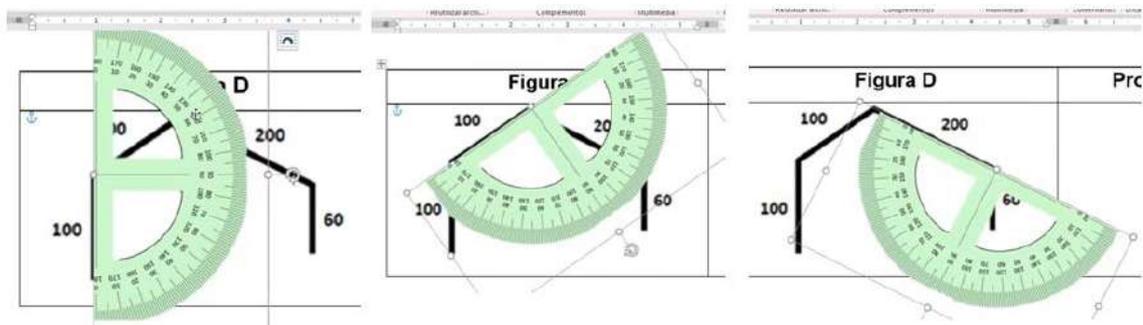
Instrumentalización incorrecta del transportador



Se observa que el equipo se propone resolver la forma de medir correctamente los ángulos de giro. El equipo comparte imágenes de la forma como debe ser usado el transportador para medir los ángulos correctamente. La **Figura 72**, muestra imágenes de las tres medidas del ángulo de giro.

Figura 72

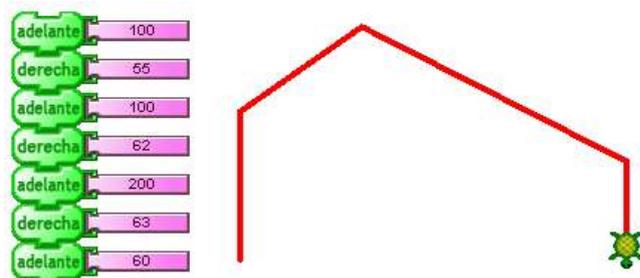
Medidas de los ángulos de giro de la tortuga



El programa computacional correctamente elaborado se muestra en la **Figura 73**.

Figura 73

Programa computacional y figura geométrica casa



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Equipo, como sujetos de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en su elaboración del programa computacional que permite la construcción de la casa (**Figura 73**).

Tabla 15

Construcción de la casa (Modelo SAI) – Equipo

Modelo SAI. Construcción de la casa			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando "adelante"	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando "derecha"	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Equipo moviliza un esquema de acción colectiva instrumentada con éxito. Las interacciones que ocurren en esta tarea verifican la relación de los sujetos con el objeto (la casa). El Estudiante 3, percibe una característica particular para la construcción de la casa: *el ángulo de giro de la tortuga, siempre se realiza hacia la derecha.*

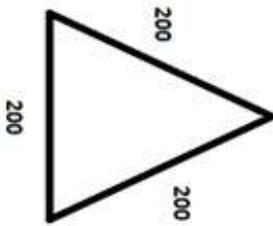
De manera colectiva resuelven sus dificultades sobre la instrumentalización correcta del transportador; asimismo, se puede percibir en sus acciones, que se ha establecido en ellos la dimensión de instrumentación de la génesis instrumental de Rabardel (1995), respecto al instrumento transportador.

Finalmente, se percibe que después de rectificar las medidas de los ángulos de giro, el equipo configura de forma correcta el programa computacional y por tanto, la relación sujetos – instrumento, ha sido establecida con éxito.

Construcción del Triángulo equilátero

Figura 74

Figura geométrica (triángulo equilátero) para ser construida con el TortugArte



- **Análisis a priori**

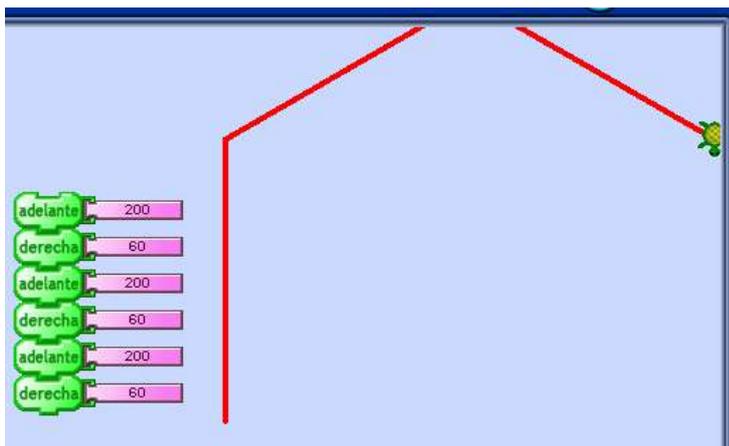
A priori, se espera que el estudiante elabore el programa computacional para la construcción del triángulo equilátero movilizandos esquemas de uso respecto a los comandos “adelante”, “izquierda”, “derecha” y “repetir”. Puede hacerlo combinando comandos según las acciones de la tortuga, paso a paso o combinando el comando “repetir” con el subprograma computacional correspondiente al patrón geométrico, identificado en el triángulo equilátero.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

El Estudiante 1 organiza un primer programa computacional, combinando los comandos, de acuerdo con las acciones que debe realizar la tortuga en su recorrido, hasta construir el triángulo equilátero. El resultado es el siguiente:

Figura 75

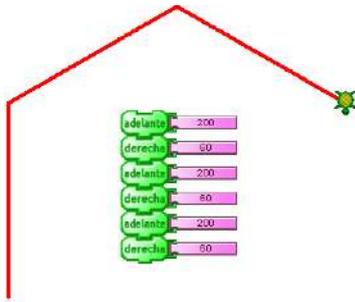
El resultado muestra limitaciones del área gráfica del TortugArte



Se observa que la figura no puede ser visualizada en su totalidad. El estudiante procede a movilizar un esquema de uso de la propiedad del arrastre, posicionando la tortuga en la parte inferior de la pantalla. La figura que obtiene no es la requerida.

Figura 76

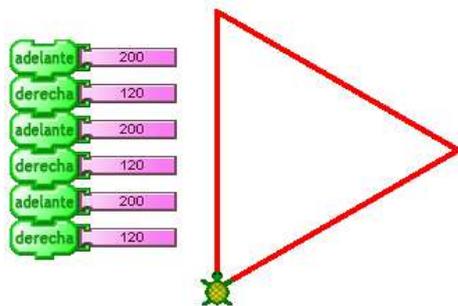
Programa computacional y figura geométrica construida



El estudiante realiza las correcciones inmediatamente, se da cuenta que ha asignado como ángulo de giro, el ángulo interior del triángulo equilátero (60°) y debe ser, el ángulo exterior (120°), equivalente a su suplemento. El programa computacional corregido, construye el triángulo equilátero solicitado y se muestra en la **Figura 77**.

Figura 77

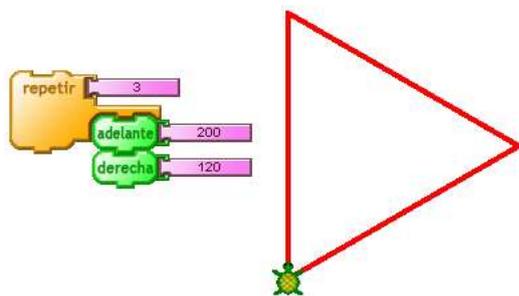
Programa computacional y triángulo equilátero



En las siguientes acciones, se observa que el estudiante logra simplificar el programa computacional. Se percibe que la configuración del programa computacional obtenido, le sugiere la presencia de un patrón geométrico. Así, utilizando el comando "*repetir*" y combinándolo con el subprograma correspondiente al patrón geométrico, configura un nuevo programa computacional para el triángulo equilátero. El resultado se muestra en la **Figura 78**.

Figura 78

Programa computacional simplificado para el triángulo equilátero



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 1, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción del triángulo equilátero.

Tabla 16

Construcción del triángulo equilátero (Modelo SAI) – Estudiante 1

Modelo SAI. Construcción del triángulo equilátero			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

En el primer programa computacional, la dificultad se presenta al asignar el valor del ángulo interior del triángulo equilátero, como parámetro del comando “derecha”. Esta situación contrasta cuando se trata de un cuadrado, allí no existen complicaciones, contradicciones y desequilibrios, ya que los ángulos interior y exterior del cuadrado, son iguales. De allí que el estudiante, a priori, sin mucha reflexión asignara el valor del ángulo interior (60°) y no el valor del ángulo exterior (120°), que es el ángulo de giro pertinente para que la tortuga oriente su recorrido en el plano.

En las acciones del estudiante, se observa la instrumentalización de la propiedad del arrastre para modificar la posición estándar de la tortuga, optimizar el punto de partida de la tortuga y visualizar en su totalidad, la figura geométrica construida por el programa computacional. Cabe resaltar que el área gráfica del TortugArte, es un espacio acotado en la pantalla, a diferencia de otros softwares como el GeoGebra, cuya ventana gráfica es un plano virtual que se puede ampliar o reducir, según las necesidades de visualización del usuario.

Con las modificaciones necesarias, el segundo programa computacional fue el correcto, sin embargo, esto motivó a que, de manera inmediata, el estudiante optara por elaborar un programa computacional simplificado y simple (menor cantidad de elementos de programación TortugArte); este aspecto es reconocido, como la meta ineludible de un buen programador.

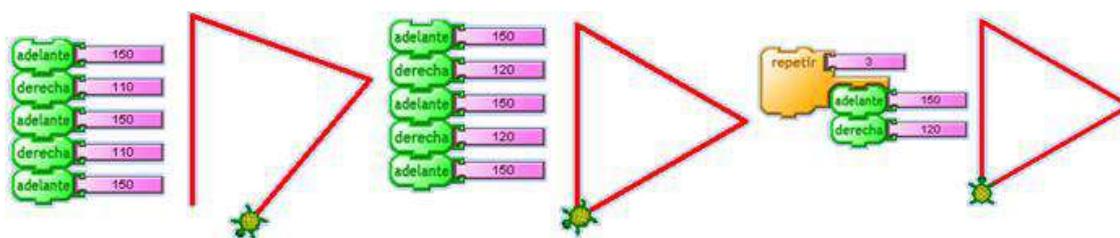
En la elaboración de los dos últimos programas computacionales, se percibe que el estudiante moviliza esquemas de acción instrumentada con éxito. En la Actividad 2, se amplía la construcción de otros polígonos regulares y se espera que el estudiante continúe demostrando su comprensión de las potencialidades y limitaciones del TortugArte.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

El Estudiante 2 elabora un primer programa, asignando un valor de 110° para el ángulo de giro. Se observa que la medida del ángulo de giro es imprecisa, sin embargo, corrige su error apelando a la propiedad de los ángulos internos de un triángulo equilátero: *cada uno de sus ángulos mide 60°* . La **Figura 79**, muestra el resultado de las acciones del estudiante al resolver la tarea propuesta.

Figura 79

Programas computacionales sin optimizar y optimizado, para el triángulo equilátero



El estudiante es motivado a optimizar el programa computacional y lo logra sin dificultades. Se percibe que le es fácil movilizar un esquema de acción instrumentada, a partir del programa computacional sin optimizar. El estudiante identifica un patrón geométrico, elabora el subprograma respectivo y lo combina con el comando *“repetir: 3”*.

- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 2, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción del triángulo equilátero.

Tabla 17

Construcción del triángulo equilátero (Modelo SAI) – Estudiante 2

Modelo SAI. Construcción del triángulo equilátero			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

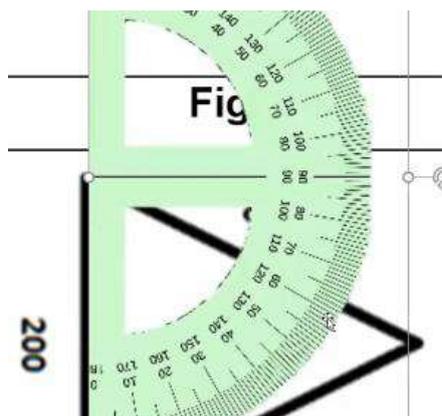
El Estudiante 2 moviliza esquemas de utilización del TortugArte y elabora el programa computacional que le permite construir un triángulo equilátero; incluso elabora el programa computacional óptimo. Se observa que la relación instrumento–objeto se ha establecido con éxito, dado que el TortugArte le ha permitido concluir con la tarea.

- **Descripción del trabajo del Equipo**

El Equipo, al igual que en las acciones anteriores, moviliza un esquema de acción colectiva instrumentada. El problema de la medida del ángulo de giro, lo resuelven, midiendo dicho ángulo con el transportador, no apelan a las características de la figura, pues se trata de un triángulo equilátero (ángulo interior igual a 60°) y, por lo tanto, el ángulo de giro sería 120° . La **Figura 80**, muestra el uso del transportador para medir el ángulo de giro.

Figura 80

Midiendo el ángulo de giro con el transportador

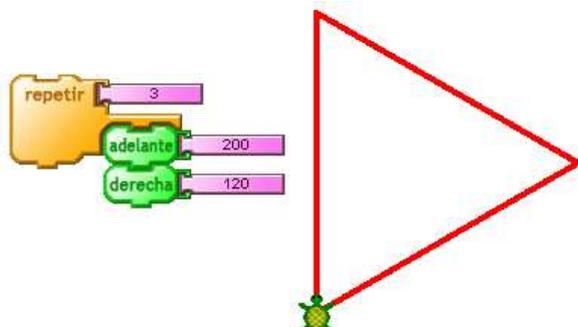


Con esta información, configuran el programa computacional con éxito. El Estudiante 3, procede a medir el ángulo de giro, mientras tanto el Estudiante 4 observa lo que hace su compañero, éste percibe que la medida del ángulo es 120° y expresa: “...listo ... el ángulo es 120... entonces, se

necesitan un adelante: 200, un derecha: 120 y un repetir: 3...”. La **Figura 81**, muestra el resultado de sus acciones.

Figura 81

Programa computacional y triángulo equilátero



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Equipo, como sujetos de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración del programa computacional que permite la construcción del triángulo equilátero.

Tabla 18

Construcción del triángulo equilátero (Modelo SAI) – Equipo

Modelo SAI. Construcción del triángulo equilátero			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Figura geométrica

El Equipo consigue de forma correcta elaborar el programa computacional que construye el triángulo equilátero, movilizándolo un esquema de acción colectiva instrumentada.

En las acciones del equipo, se observa la correcta medición del ángulo de giro, lo cual constituye una evidencia de que están instrumentados con el uso del transportador. Superada la determinación del ángulo de giro, percibimos la facilidad con que configuran el programa computacional y la relación entre los sujetos y el instrumento, ha sido establecida con éxito.

4.2.2 Actividad 2. Construcción de polígonos regulares con el TortugArte

Con el desarrollo de esta actividad, esperamos que los estudiantes demuestren su competencia en la elaboración de programas computacionales, para construir polígonos regulares de cualquier número de lados. En este sentido, consideramos que los estudiantes movilizarán y/o crearán

sus esquemas de uso y de acción instrumentada, para elaborar programas computacionales que construyan polígonos regulares, con la mediación del TortugArte. De igual manera, esperamos que esquemas de acción instrumentada adquieran el nivel de esquemas de uso, que la técnica sea adquirida y, por tanto, el conocimiento quede instalado en la conducta de acción de los estudiantes. Desde la perspectiva del Enfoque Instrumental, se espera que el software TortugArte sea transformado en instrumento.

Las tareas de esta actividad se organizaron en dos bloques: Polígonos regulares I y Polígonos regulares II (**Apéndice B**).

4.2.2.1 Polígonos regulares I

- **Análisis a priori**

En este primer bloque de tareas de la Actividad 2, denominado **Polígonos regulares I**, esperamos que los estudiantes movilicen y/o creen esquemas de uso y de acción instrumentada en la elaboración de programas computacionales que permitan la construcción de polígonos regulares de tres, cuatro, cinco y seis lados.

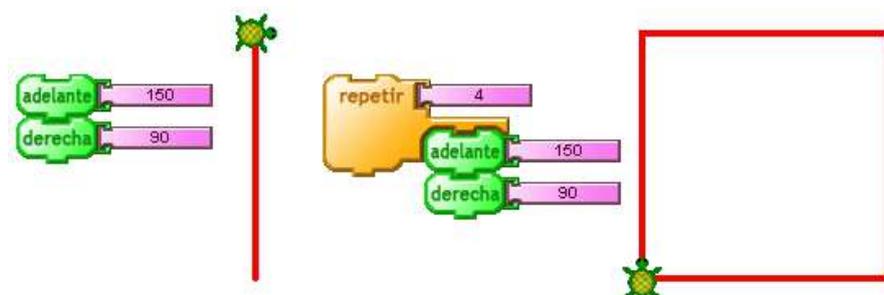
A priori esperamos que utilicen los comandos “adelante”, “derecha”, “izquierda” y “repetir” para construir los diversos tipos de polígonos regulares. Creemos que la capacidad para identificar la presencia de un patrón geométrico en una figura geométrica debe consolidarse en esta primera etapa de la Actividad 2.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

Cuadrado: El estudiante no tiene dificultades para elaborar el programa computacional que permite construir un cuadrado. Elabora el subprograma computacional para el patrón geométrico identificado en el cuadrado, instrumentalizando el comando “adelante: 150” para obtener un lado del cuadrado de longitud 150 pasos y el comando “derecha: 90” para lograr un ángulo de giro de 90°. Finalmente, hace uso del comando “repetir: 4” para combinarlo con el subprograma computacional correspondiente al patrón geométrico del cuadrado.

Figura 82

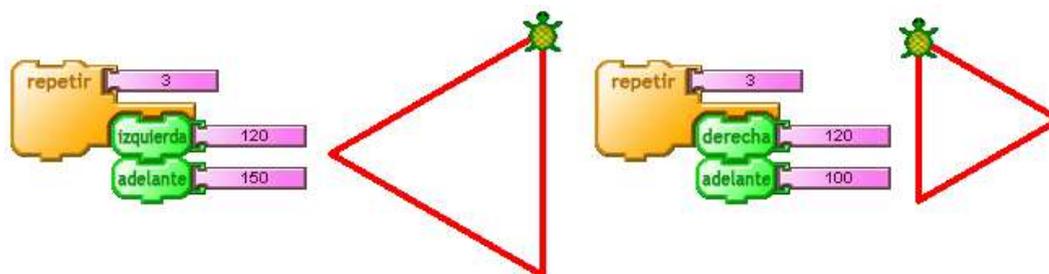
Patrón geométrico y cuadrado de lado igual a 150 pasos



Triángulo equilátero: Respecto a la construcción del triángulo equilátero, el estudiante elabora varios programas computacionales correctos, además, las figuras construidas tienen diferente longitud del lado y se muestran en posiciones poco familiares.

Figura 83

Programas computacionales y triángulos equiláteros



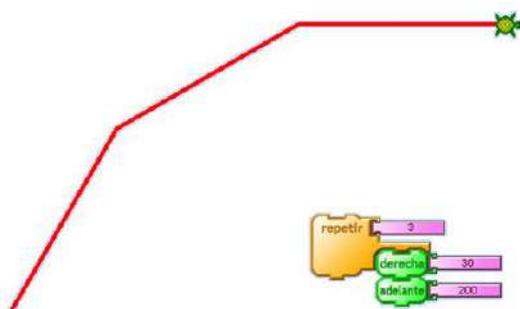
En su intento por construir un triángulo equilátero con base horizontal, moviliza un esquema de acción instrumentada que le produce una línea poligonal abierta (**Figura 84**). El estudiante identifica un patrón geométrico, elabora el subprograma computacional, pero el esquema de acción instrumentada no produce un triángulo equilátero con base horizontal. Al parecer, estamos apreciando un *milieu*, factor de dificultades, contradicciones y desequilibrios. Según Brouseau (2008, citado por Gonçalves, 2014):

“el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de dificultades, contradicciones y desequilibrios”. Esto presupone que la secuencia de actividades propuesta por el profesor, debe ser elaborada con cuidado, de modo que las tareas del alumno se asemejen al trabajo de un científico, en cuanto a la construcción del conocimiento en adaptación al *milieu* antagónico, que le impone desequilibrios y contradicciones. (p. 46, traducción propia)

De otro lado, observamos que las dificultades generadas en esta tarea se deben principalmente a la incompletitud de aspectos conceptuales del esquema, relacionado al ángulo exterior de un polígono (lo cognitivo en el estudiante) y no a los aspectos técnicos del software.

Figura 84

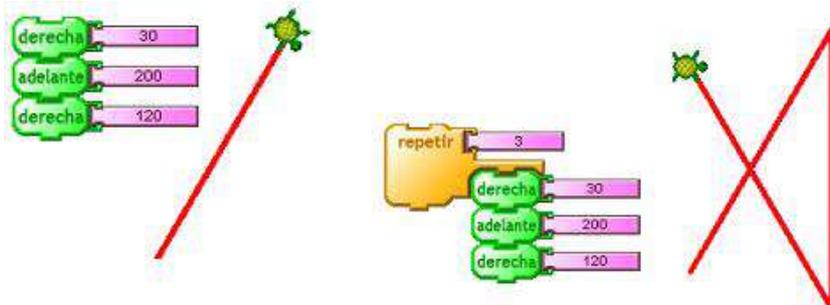
Programa computacional y figura geométrica



La siguiente figura muestra la intención del estudiante de organizar un programa computacional a partir de un patrón geométrico distinto y el uso del comando “*repetir*”.

Figura 85

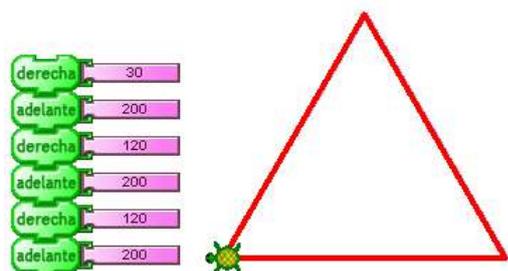
Patrón geométrico y programas computacionales



En la elaboración del siguiente programa computacional, observamos que el estudiante moviliza un esquema de acción instrumentada, a partir de las acciones que la tortuga debe realizar, paso a paso, para construir el triángulo equilátero con base horizontal.

Figura 86

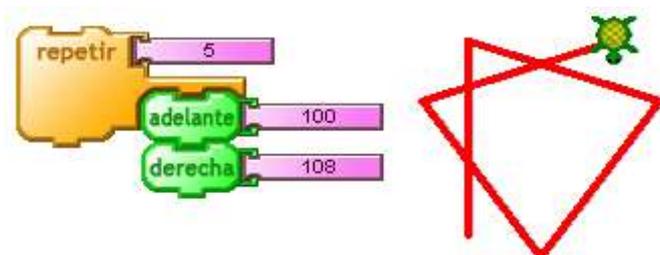
Programa computacional y triángulo equilátero



Pentágono regular: El estudiante elabora un primer programa computacional sin éxito. Observamos que el estudiante moviliza un esquema de uso del comando “*derecha*” incompleto, no tiene claro qué valor asignarle al ángulo de giro, si el del ángulo interior o el del ángulo exterior del polígono.

Figura 87

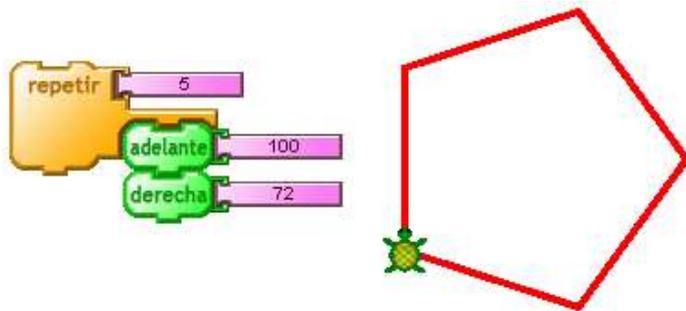
Programa computacional y figura geométrica



Finalmente, logra elaborar un programa computacional que le permite construir un pentágono regular, movilizándolo un esquema de acción instrumentada correcto. Al ser entrevistado sobre el cambio del parámetro correspondiente al comando “*derecha*”, el estudiante comenta sus errores y conclusiones: “... *estaba considerando que la suma de las medidas de los ángulos interiores del pentágono es 360° y, por lo tanto, el ángulo interior mide 72° y el ángulo exterior mide 108°. Por eso asignaba, el valor 108 al parámetro del comando “derecha” ... luego me di cuenta que la suma de los ángulos interiores del triángulo equilátero, es 180° y por eso el ángulo interior media 60° y el exterior 120°, ... en el cuadrado, la suma de sus ángulos interiores es 360° y las medidas de sus ángulos interiores y exteriores es 90° cada uno, ya que deben sumar en todos los casos 180°*”. Percibimos que la asignación del valor del ángulo de giro es casual, no obedece a un razonamiento lógico.

Figura 88

Programa computacional y pentágono regular



Hexágono regular: El primer programa computacional que elabora el estudiante, construye un triángulo equilátero. Observamos que la asignación del valor del ángulo exterior del hexágono, como valor del ángulo de giro de la tortuga, sigue siendo un problema.

Figura 89

Programa computacional y figura geométrica no requerida

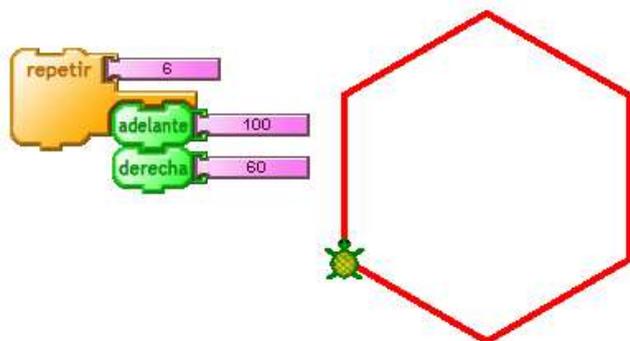


En el segundo intento, logra elaborar un programa computacional que construye un hexágono regular. Al ser entrevistado sobre las dificultades enfrentadas, comenta: “... *en el primer programa fallo, ... tenía las medidas de los ángulos interior y exterior, ... pero aún fallo, no tengo claro ... se me hace difícil cuál valor asignarle al comando “derecha” ... eso es lo que fallé al inicio, por eso me salió así ... porque puse la medida del ángulo interior y no el del exterior ... veo que el patrón para la*

construcción de los polígonos es el mismo, ... adelante y derecha o adelante e izquierda y ... la repetición es de acuerdo al número de lados de la figura, por ejemplo ... en el triángulo es 3, ... en el cuadrado es 4, ... en el pentágono 5, ... en el hexágono 6”.

Figura 90

Programa computacional y hexágono regular



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 1, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración de los programas computacionales que permiten la construcción de los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 6 lados.

Tabla 19

Construcción de Polígonos regulares I (Modelo SAI) – Estudiante 1

Modelo SAI. Construcción de polígonos regulares			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Polígono regular

En las acciones realizadas por el estudiante, para elaborar los diversos programas computacionales, hemos observado que moviliza un esquema de acción instrumentada y esquemas de uso de los comandos “adelante”, “derecha” y “repetir”.

Hemos identificado algunas dificultades con relación a la asignación del ángulo de giro, aspecto que requiere de precisar el ángulo exterior del polígono. Las dificultades no se presentaron para el cuadrado ni para el triángulo equilátero. Sin embargo, al elaborar un programa computacional para un triángulo equilátero con base horizontal, las acciones del estudiante pusieron de manifiesto que la movilización de un esquema de acción instrumentada que supuestamente estaba completo y

que podría pasar al nivel de esquema de uso, aún no lo había conseguido. Finalmente, el estudiante opta por movilizar un esquema de acción instrumentada, pero a partir del recorrido, paso a paso, que la tortuga debe realizar para construir el triángulo equilátero con base horizontal.

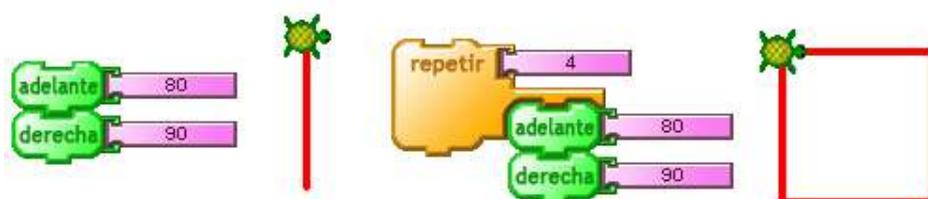
Para el pentágono regular y el hexágono regular, las dificultades para asignar el ángulo de giro correcto persisten, pero posteriormente son superadas vía la estrategia de ensayo y error. Las entrevistas nos dan claridad de cómo el estudiante va abordando esta problemática. Finalmente, percibimos que la capacidad para identificar la presencia de un patrón geométrico en la figura se ha alcanzado.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

Cuadrado: El estudiante identifica la presencia de un patrón geométrico y elabora un subprograma computacional, movilizan esquemas de uso de los comandos “adelante: 80” y “derecha: 90”. Luego, moviliza un esquema de acción instrumentada combinando el comando “repetir: 4” con el subprograma computacional. El resultado se muestra en la **Figura 91**.

Figura 91

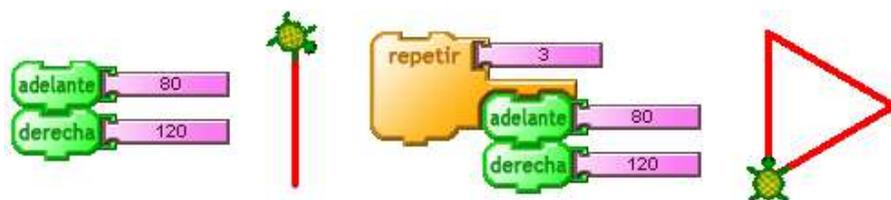
Patrón geométrico y cuadrado de lado 80 pasos



Triángulo equilátero: El estudiante elabora el programa computacional sin dificultades. Moviliza un esquema de acción instrumentada, combinando el comando “repetir: 3” y un subprograma computacional correspondiente al patrón geométrico presente en el triángulo equilátero. La **Figura 92**, muestra el resultado correspondiente.

Figura 92

Patrón geométrico y triángulo equilátero de lado 80 pasos



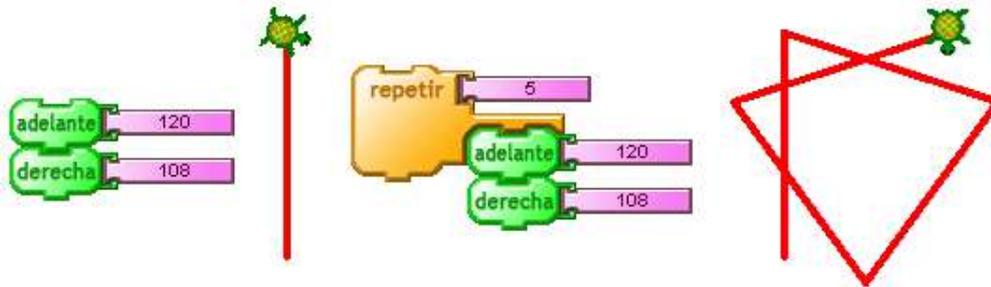
Pentágono regular. El estudiante elabora un programa computacional teniendo en cuenta un patrón geométrico en el polígono, pero la asignación del ángulo de giro no es el adecuado. Observamos que el valor del ángulo de giro corresponde a la medida del ángulo interior del pentágono

regular. Al respecto, el estudiante comenta: "... el ángulo interior lo obtengo de una fórmula ... para la suma de los ángulos interiores de un polígono".

La **Figura 93**, muestra el resultado de las acciones del estudiante.

Figura 93

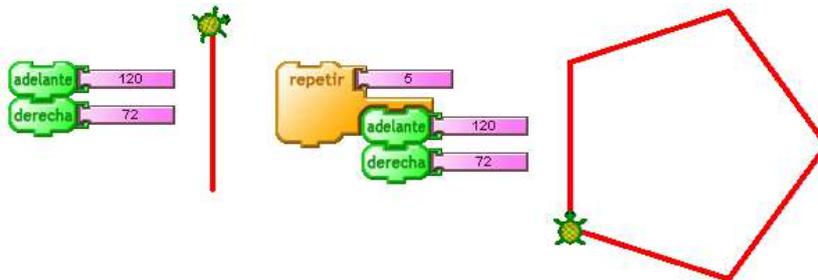
Patrón y figura geométricos obtenidos



Observamos la dificultad en asignar el ángulo de giro adecuado. El valor 72, corresponde al ángulo exterior y es el suplemento del ángulo interior. La **Figura 94**, muestra el programa computacional corregido.

Figura 94

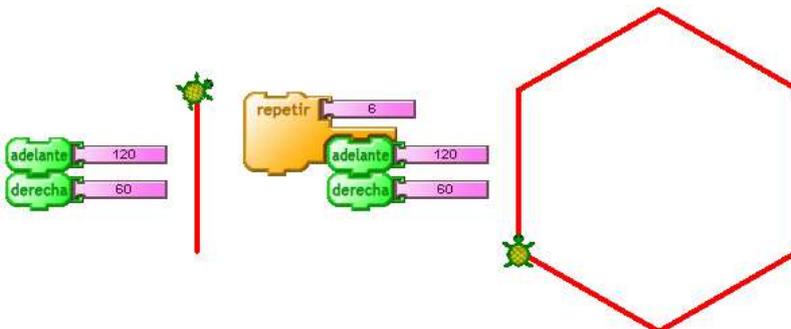
Patrón geométrico y pentágono regular de lado 120 pasos



Hexágono regular: El programa computacional elaborado para el hexágono regular es el correcto. Percibimos que el esquema conceptual sobre el ángulo exterior de un polígono regular ha sido completado.

Figura 95

Patrón geométrico y hexágono de lado 120 pasos



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 2, como sujeto de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración de los programas computacionales que permiten la construcción de los polígonos regulares.

Tabla 20

Construcción de Polígonos regulares I (Modelo SAI) – Estudiante 2

Modelo SAI. Construcción de polígonos regulares			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugaArte	Doble clic sobre el programa	Polígono regular

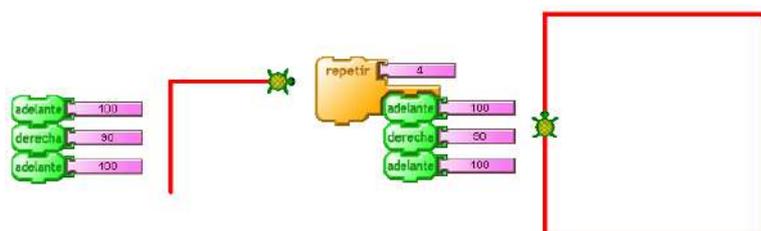
El estudiante moviliza con éxito un esquema de acción instrumentada para elaborar los diferentes programas computacionales. Sin embargo, debemos destacar las dificultades iniciales en la asignación correcta del ángulo de giro. Al respecto, percibimos un esquema conceptual incompleto sobre la noción matemática de ángulo exterior de un polígono. De otro lado, observamos que moviliza con éxito, un esquema de uso para el patrón geométrico, el cual está caracterizado por la utilización de los comandos “adelante” y “derecha”.

- **Descripción del trabajo del Equipo**

Cuadrado: El equipo elabora un programa computacional para el cuadrado de forma correcta. La **Figura 96**, muestra los programas computacionales para la construcción del patrón geométrico y el cuadrado de lado igual a 200 pasos.

Figura 96

Patrón geométrico y cuadrado de lado 200 pasos

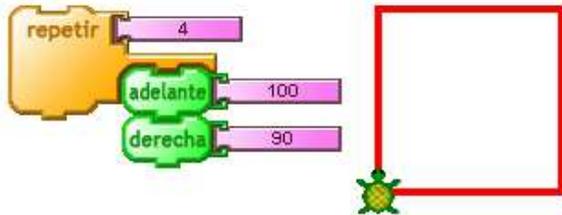


El equipo es motivado a elaborar un programa computacional más simple para construir un cuadrado y lo consigue, movilizándolo un esquema de acción colectiva instrumentada. El Estudiante 4,

sugiere: “... quítale el último adelante y deja el repetir, así como está ... a ver que sale...”. La figura construida es un cuadrado de lado 100 pasos, aspecto que no ha sido percibido por el equipo.

Figura 97

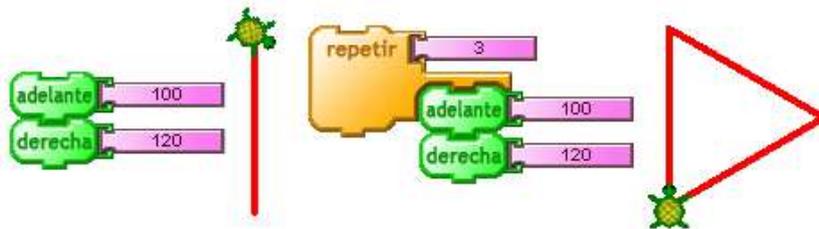
Programa computacional optimizado y cuadrado de lado 100 pasos



Triángulo equilátero: El equipo elabora el programa computacional para el triángulo equilátero con éxito.

Figura 98

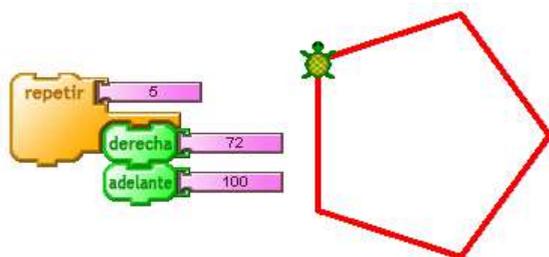
Patrón geométrico y triángulo equilátero de lado 100 pasos



Pentágono regular: El equipo elabora el programa computacional para el pentágono regular, pero observamos algunas dificultades. Inicialmente, el ángulo de giro es asignado al azar, sin lograr un resultado correcto. Se dan cuenta que hay un patrón geométrico, pero no logran precisarlo, tienen dificultad con la determinación del ángulo de giro. El Estudiante 4, sugiere el ángulo de 72, configuran el programa y el resultado es el correcto. Al ser entrevistado, responde: “...he dividido 360 entre 5, ... es una propiedad de los ángulos interiores (exteriores)...”. Percibimos que los esquemas conceptuales, sobre el ángulo interior y el exterior, no están totalmente interiorizados y, por lo tanto, su instrumentalización se dificulta.

Figura 99

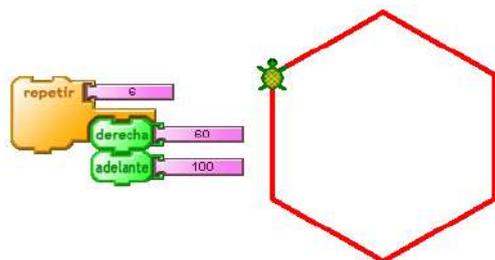
Programa computacional y pentágono regular de lado 100 pasos



Hexágono regular: El equipo configura un programa computacional para el hexágono regular sin dificultades. Observamos que movilizan un esquema de acción colectiva instrumentada basada en los resultados para el pentágono regular. El Estudiante 3, comenta: “... dividimos 360 entre 6 ... la tortuga gira 60... es el ángulo exterior...”; asimismo, agrega: “... la medida del ángulo exterior multiplicado por la cantidad de vértices daría una vuelta ... que es igual a 360...”.

Figura 100

Programa computacional y hexágono regular de lado 100 pasos



- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Equipo, como sujetos de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración de los programas computacionales que permiten la construcción de los polígonos regulares.

Tabla 21

Construcción de Polígonos regulares I (Modelo SAI) – Equipo

Modelo SAI. Construcción de polígonos regulares			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “adelante”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “derecha”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “repetir”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Polígono regular

El equipo moviliza con éxito un esquema de acción colectiva instrumentada para elaborar los diferentes programas computacionales. Sobre las dificultades de asignación del ángulo correcto de giro, pasa con el equipo, lo mismo que sucede con los estudiantes que trabajan de manera individual; sin embargo, esta problemática es superada progresivamente, perciben que hay un patrón o generalidad y es el cociente entre 360 y el número de vértices del polígono.

Observamos que la configuración de los programas computacionales tiene como base, la movilización de un esquema de uso para el patrón geométrico del polígono.

A partir de los resultados obtenidos, concluimos que el TortugArte ha sido transformado en un instrumento, aspecto característico de la Génesis Instrumental de Rabardel (1995). Asimismo,

observamos que el éxito en las tareas depende fuertemente del conocimiento matemático sobre las nociones de ángulo exterior y de ángulo interior de un polígono, así como también, de sus propiedades.

4.2.2.2 Polígonos regulares II

- **Análisis a priori**

Este segundo bloque de tareas de la Actividad 2, denominado **Polígonos regulares II**, tuvo como objetivo principal, la generalización del proceso de construcción de polígonos regulares con la mediación del software TortugArte, es decir, la configuración de un programa computacional que permita construir polígonos regulares de cualquier número de lados.

Esperamos que los estudiantes movilicen y/o creen esquemas de uso y de acción instrumentada en la configuración de programas computacionales para construir polígonos regulares de siete, ocho, nueve, diez, doce, veinte y treinta lados. Esta particularidad de casos, deberá servir para que el estudiante esboce un esquema de programa computacional genérico, de manera inductiva.

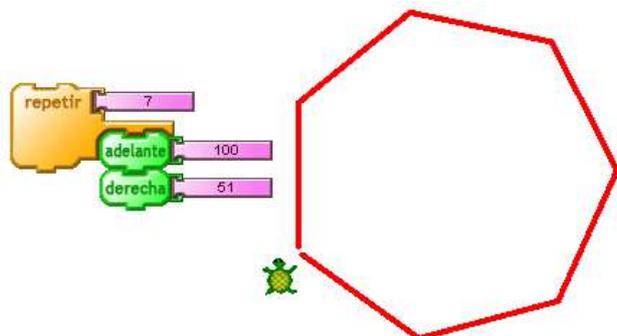
A priori esperamos que utilicen los comandos “adelante”, “derecha”, “izquierda” y “repetir” para construir los diversos tipos de polígonos regulares. Además, al concluir este segundo bloque de tareas, esperamos que el estudiante movilice un esquema de acción instrumentada para la construcción de polígonos regulares, sobre el cual podríamos afirmar que ha alcanzado el nivel de un esquema de uso.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

Heptágono regular: El estudiante elabora un programa computacional para el heptágono, al parecer bajo la lógica aplicada en los casos anteriores. Moviliza un esquema de acción instrumentada, utilizando los comandos: “repetir”, “adelante”, “derecha” y asignando el valor de 51 para el ángulo de giro. Al ser entrevistado sobre cómo logra el valor para el ángulo de giro, manifiesta: “... *creo haber encontrado la medida del ángulo de giro para formar la figura, pero hay algo que no me cuadra porque ya encontré la relación... la suma de los ángulos externos de cada uno de los polígonos que hemos ido viendo me ha dado 360... he multiplicado: $120 \times 3 = 360$, ... , $90 \times 4 = 360$, ... $72 \times 5 = 360$, ... $60 \times 6 = 360$, ... entonces, según lo que he deducido, ... si yo multiplico el ángulo externo por la cantidad de lados del polígono me da 360... y en esa deducción, debo encontrar un número que multiplicado por 7 me dé 360, ... pero para el heptágono hay un problema, no hay... he dividido $360/7$, ...si hay uno que tiene decimales y da 51.42... aproximándolo al entero sería 51*”. No percibió que la línea poligonal, no cerraba, porque la tortuga estaba bloqueando el error producido por el programa computacional. Amplía sus comentarios al respecto, indicando que: “... *sigue manteniéndose el patrón en el programa computacional ..., los comandos siguen siendo “adelante” y “derecha” o “adelante” e “izquierda.”*”

Figura 101

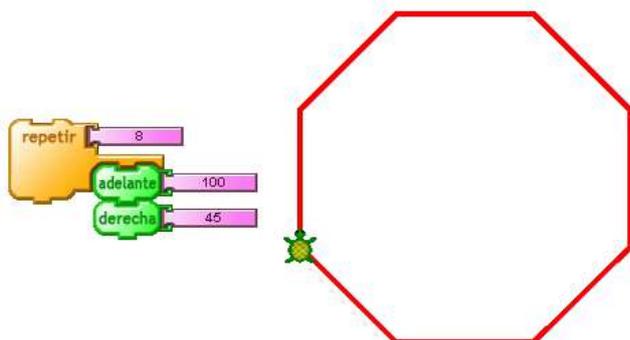
Programa computacional y "heptágono regular"



Octógono regular: El programa computacional elaborado para la construcción del octógono regular, es el correcto. Al parecer, el estudiante moviliza un esquema de acción instrumentada, sobre el cual se podría afirmar que ha alcanzado el nivel de esquema de uso y ha sido incorporado en su aprendizaje.

Figura 102

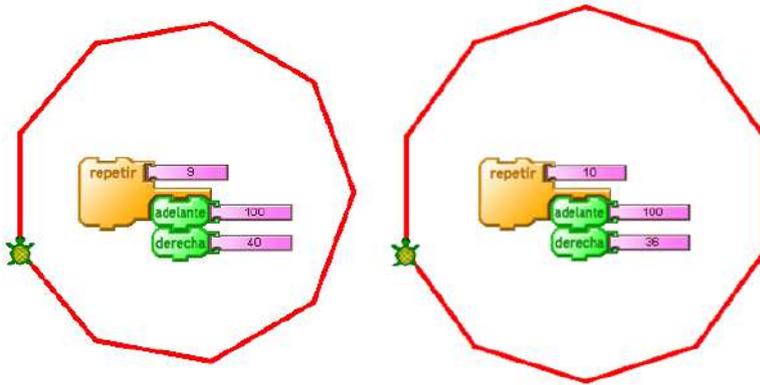
Programa computacional y octógono regular de lado 100 pasos



Polígonos regulares de 9, 10, 12, 20 y 30 lados: Los programas computacionales para los polígonos requeridos son elaborados sin dificultades. Al respecto el estudiante comenta: "... es como si hubiese encontrado la regla de formación". La **Figura 103**, muestra los programas computacionales y sus respectivas construcciones de los polígonos regulares de 9 y 10 lados.

Figura 103

Programas computacionales y polígonos regulares de 9 y 10 lados



Observamos que la visualización del polígono regular de 12 lados, presenta dificultades. El estudiante resuelve las limitaciones del espacio de visualización en el área gráfica del TortugArte, utilizando la propiedad del arrastre (esquema de uso, probablemente aprendido y movilizado en el uso de otro software similar); en efecto, posicionando el ícono de la tortuga en la parte inferior de la pantalla, define el nuevo punto de partida y de esta manera, consigue visualizar la totalidad del polígono.

Figura 104

Limitaciones del área gráfica del TortugArte

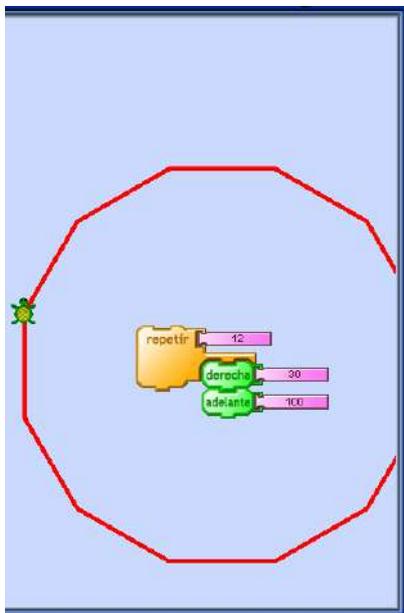
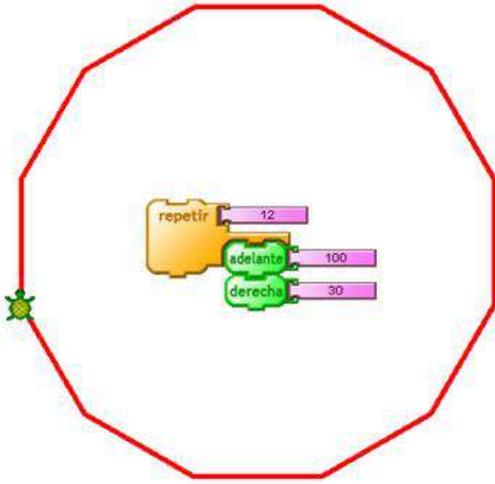


Figura 105

Programa computacional y polígono regular de 12 lados



En la construcción del polígono regular de 20 lados, surge un nuevo problema de visualización por las limitaciones del área gráfica del TortugArte: *la figura geométrica construida, es muy grande*. Observamos que el estudiante instrumentaliza el comando “adelante”, asignándole un valor menor al parámetro actual y, por consiguiente, reduce la longitud del lado del polígono.

Figura 106

Limitaciones del área gráfica del TortugArte

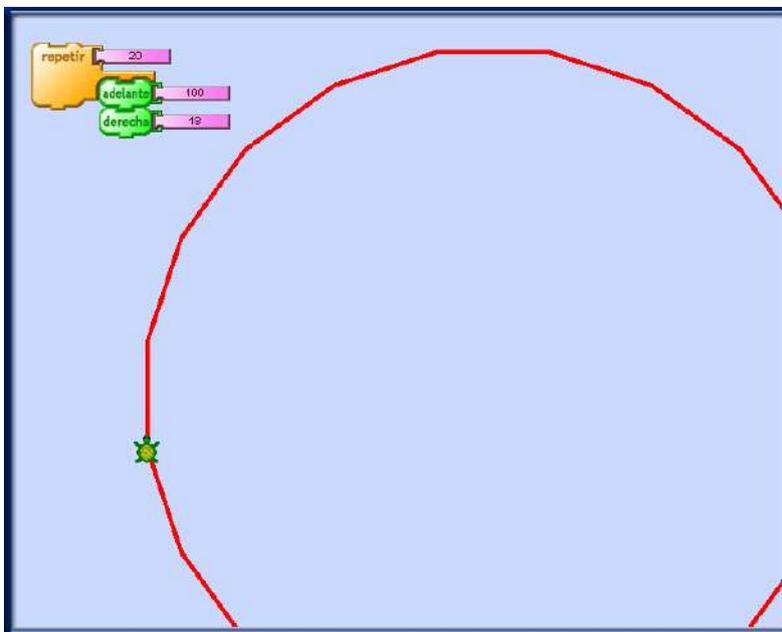
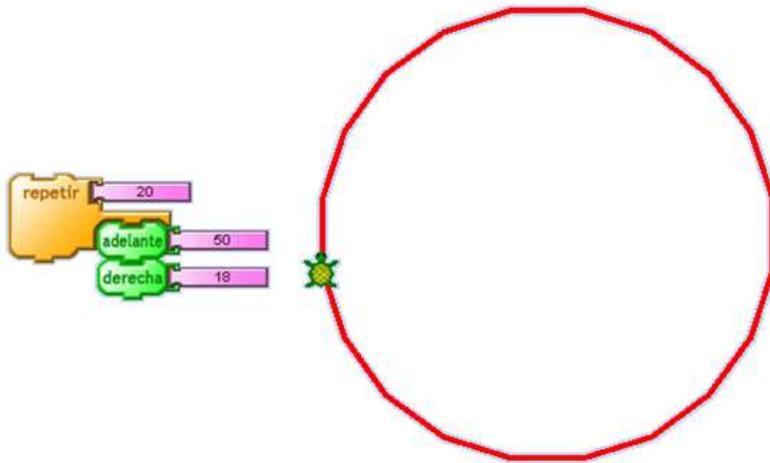


Figura 107

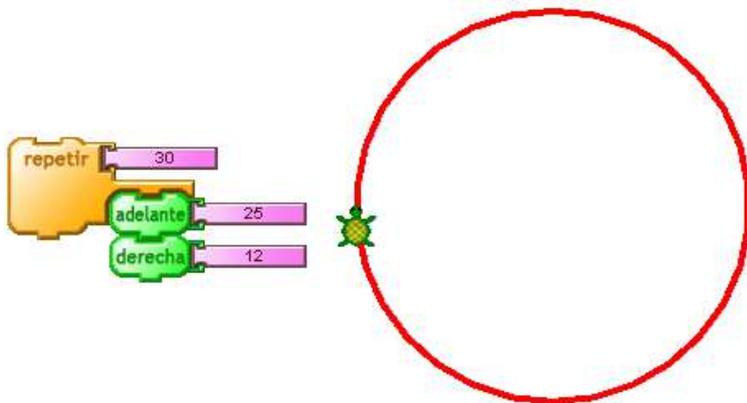
Programa computacional y polígono de 20 lados



De manera autónoma, el estudiante manipula el programa disponible en la pantalla, logrando instrumentalizar los comandos “*repetir*”, “*adelante*” y “*derecha*”, mediante el cambio de los parámetros: *número de lados*, *longitud del lado* y *ángulos de giro*. La **Figura 108**, muestra el programa computacional y la figura geométrica de un polígono de 30 lados. Al respecto, el estudiante hace el siguiente comentario: “... *entre más lados, la figura es más circular* ...”.

Figura 108

Programa computacional y polígono regular de 30 lados



En relación con el proceso de generalización, el estudiante esboza un esquema de programa computacional, donde muestra los elementos de programación del TortugArte y sus parámetros genéricos respectivos, a tener en cuenta para su elaboración.

Figura 109

Esquema de un programa computacional para un polígono regular de n lados y lado l

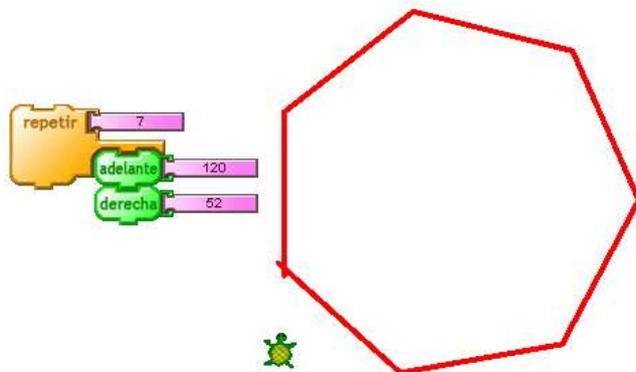


- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

Heptágono regular: El estudiante elabora un programa computacional para el heptágono regular, asignando el valor de 52 al ángulo de giro, después de aproximar el cociente: $360/7=51.428\dots$ a un número entero. El estudiante considera correcto el resultado, sin embargo, al arrastrar la tortuga a otra posición, observamos que dos lados del polígono se cruzan; por lo tanto, no es posible obtener un heptágono regular con el TortugArte: *el ángulo de giro es un número decimal infinito.*

Figura 110

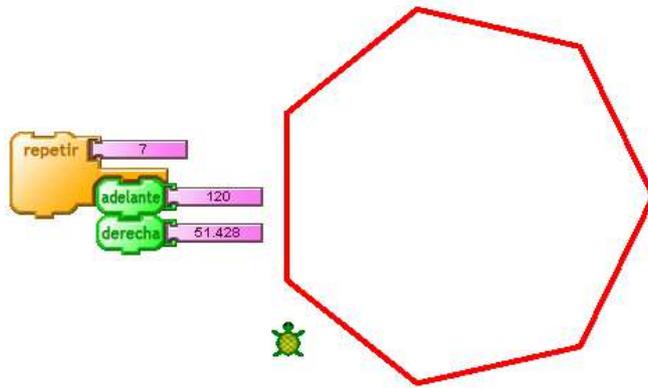
Programa computacional y figura geométrica



La **Figura 111**, muestra un programa computacional donde el ángulo de giro es aproximado a un número decimal finito con tres cifras decimales. El resultado es una figura geométrica “muy semejante” a la de un heptágono regular. La elección de un número aproximado a las milésimas, como valor del ángulo de giro, oculta las limitaciones de construcción del software.

Figura 111

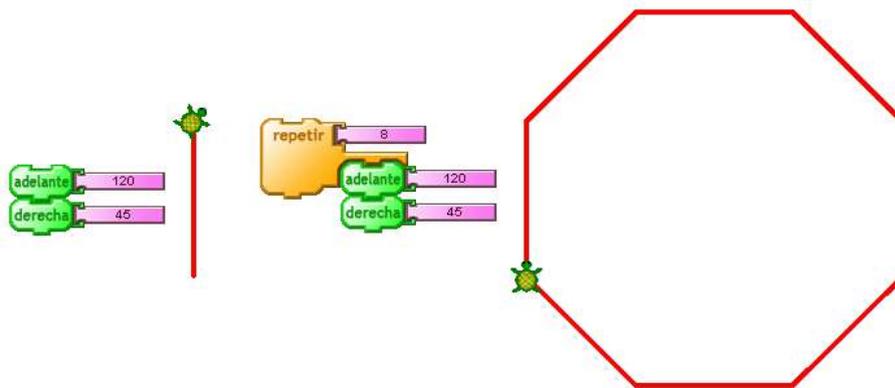
Programa computacional y figura geométrica



Octógono regular: El estudiante moviliza un esquema de acción instrumentada para elaborar el programa computacional. Por el éxito obtenido en las tareas anteriores, percibimos que este ha alcanzado el nivel de esquema de uso y el estudiante está instrumentado.

Figura 112

Patrón geométrico y octógono regular de lado 120 pasos

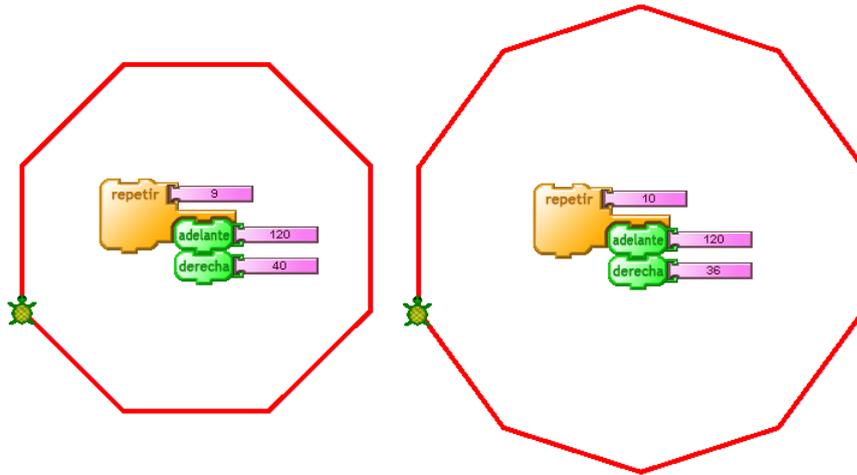


Polígonos regulares de 9, 10, 12, 20 y 30 lados: El estudiante elabora los programas computacionales para todos los polígonos regulares requeridos. Al respecto, el estudiante comenta: "...utilizo una fórmula para el ángulo interior... $180 - 360/n$ y luego, uso el suplemento...".

La **Figura 113**, muestra el resultado de las acciones del estudiante.

Figura 113

Programas computacionales y polígonos regulares de 9 y 10 lados



Para los polígonos regulares de 12, 20 y 30 lados, el estudiante instrumentaliza el comando “adelante” para reducir la longitud del lado, así como también, instrumentaliza la propiedad del arrastre para optimizar la posición de partida de la tortuga.

Figura 114

Programas computacionales y polígonos regulares de 12 y 20 lados

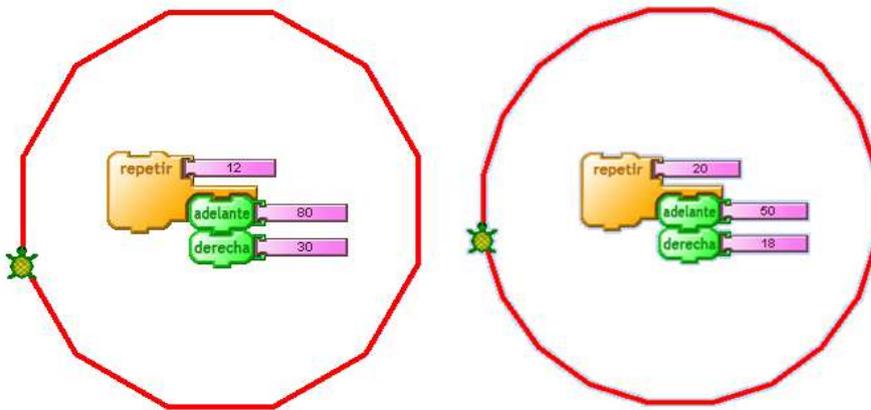
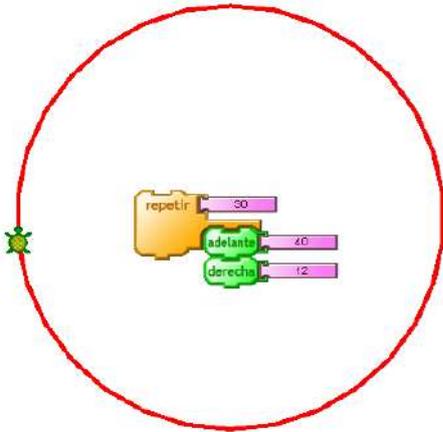


Figura 115

Programa computacional y polígono regular de 30 lados



En relación con el proceso de generalización del programa computacional para la construcción de polígonos regulares de cualquier número de lados, el Estudiante 2 elabora la siguiente secuencia de comandos TortugArte.

Figura 116

Esquema de un programa computacional para un polígono regular de n lados y lado l

```

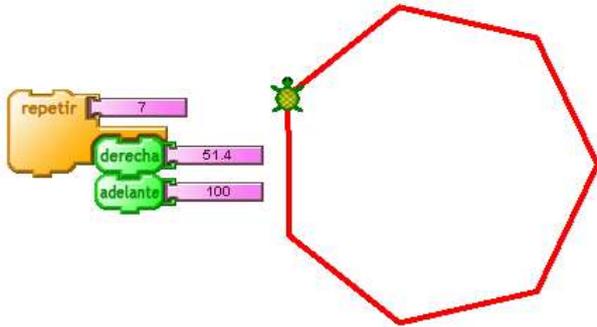
repetir: n
adelante: l
derecha: 360/n
  
```

- **Descripción del trabajo del Equipo**

Heptágono regular: El equipo elabora el programa computacional para el heptágono regular, basándose en resultados anteriores. El ángulo de giro lo obtienen dividiendo 360 entre 7, el resultado es un número decimal infinito. El valor asignado es 51.4 y la figura geométrica obtenida, es muy semejante a la figura requerida; los estudiantes no perciben la imprecisión, en la construcción del último lado del polígono.

Figura 117

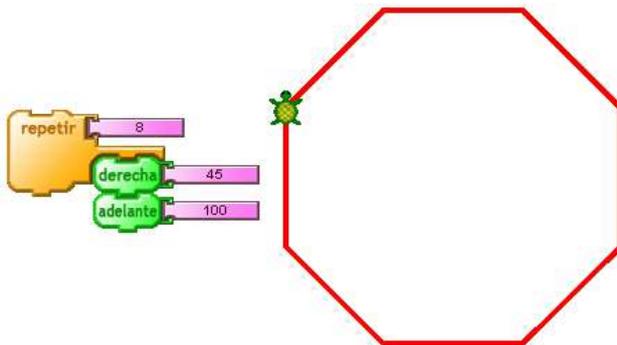
Programa computacional y “heptágono regular”



Octógono regular: El equipo instrumentaliza el programa computacional anterior, modificando los parámetros del comando “*repetir*” y del comando “*derecha*”, en este caso: 8 y 45, respectivamente.

Figura 118

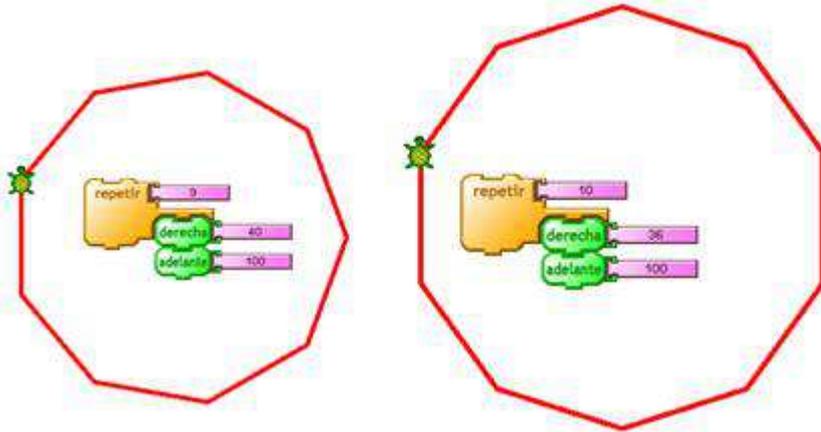
Programa computacional y octógono regular de lado 100 pasos



Polígonos regulares de 9, 10, 12, 20 y 30 lados: Observamos que movilizan un esquema de uso para el programa computacional. Para cada caso, realizan las modificaciones de manera correcta y visualizan las figuras geométricas correspondientes. Percibimos que la colaboración y el intercambio de ideas es permanente entre los integrantes del equipo. El Estudiante 4, propone los siguientes datos: “... al de 9 lados ponle 40 y al de 10 ... ponle 36...”; mientras tanto, el Estudiante 3, se encarga de configurar los comandos del programa computacional y ejecutarlos, para luego visualizar las construcciones geométricas.

Figura 119

Programas computacionales y polígonos regulares de 9 y 10 lados



Debido a las limitaciones del área gráfica del TortugArte, el polígono regular de 12 lados no puede ser visualizado en su totalidad. El equipo opta por arrastrar la tortuga para cambiar el inicio de su recorrido.

Figura 120

Limitaciones del área gráfica del TortugArte

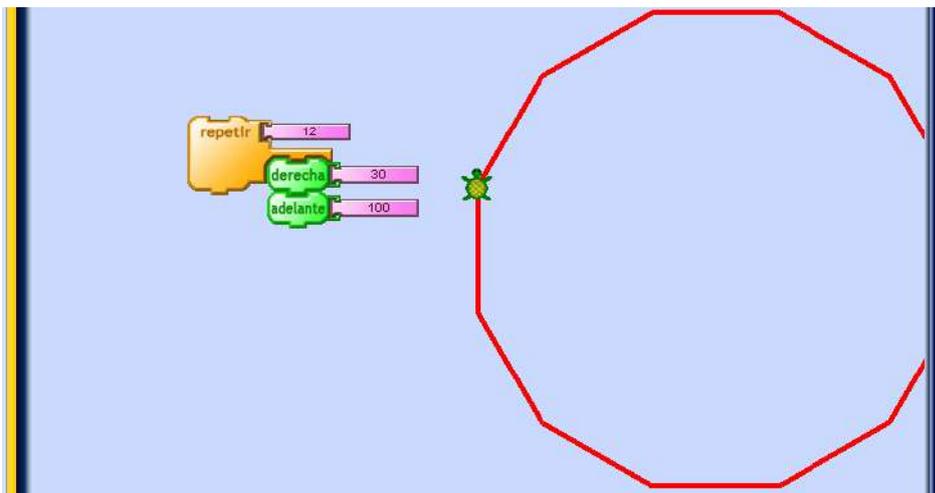
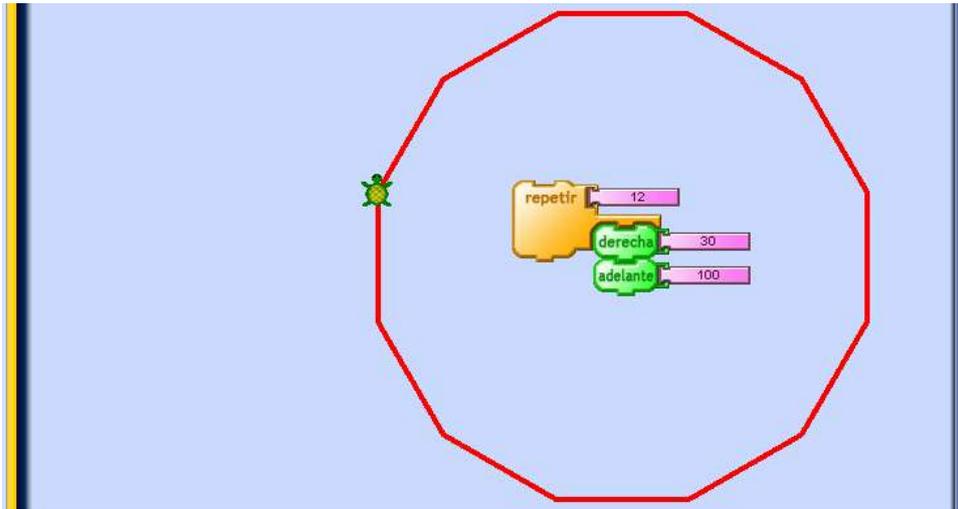


Figura 121

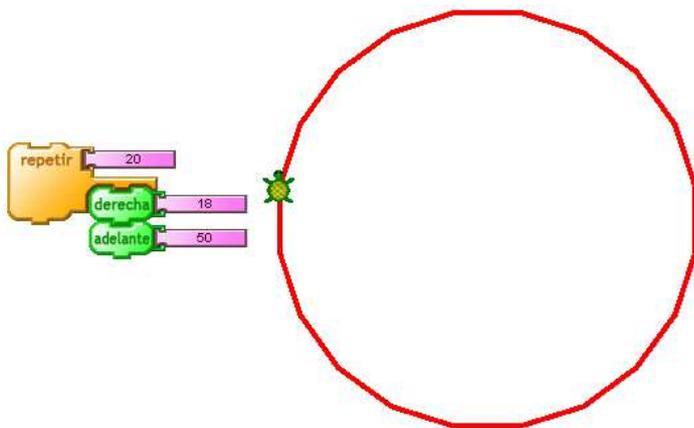
Visualización completa del polígono regular de 12 lados



En la construcción del polígono de 20 lados, el equipo detecta nuevos problemas con la visualización total del polígono y la longitud de su lado. El Estudiante 4, sugiere la instrumentalización del comando “adelante”, indicando lo siguiente: “... bájale el adelante:100... sino se te va del cuadro... ponle 50...no necesitas mover la tortuga...”. Al observar la figura, agrega: “... ya parece un círculo...”

Figura 122

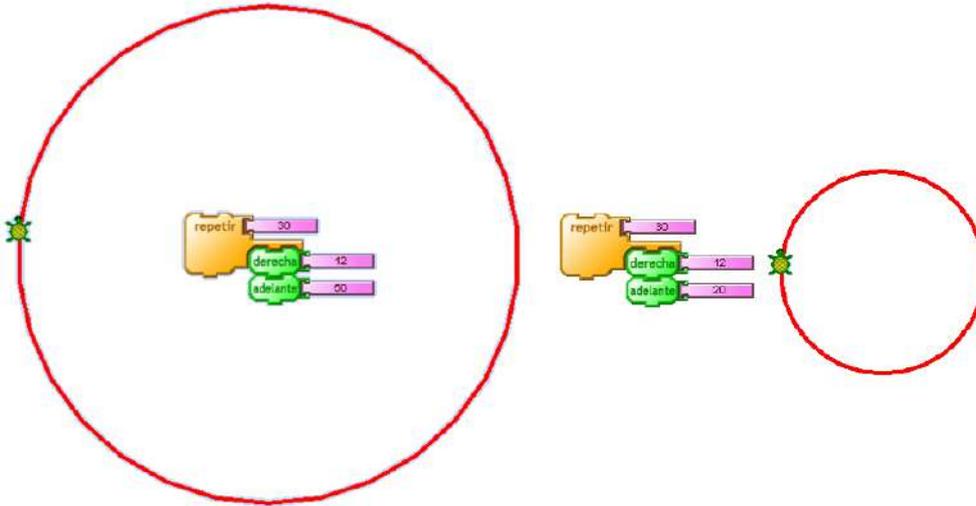
Programa computacional y polígono de 20 lados



El programa computacional para el polígono regular de 30 lados es correcto. Las limitaciones del área gráfica, para su visualización, son previstas por el Estudiante 3, al respecto sugiere: “... le bajamos el 50 o movemos la tortuguita ...”.

Figura 123

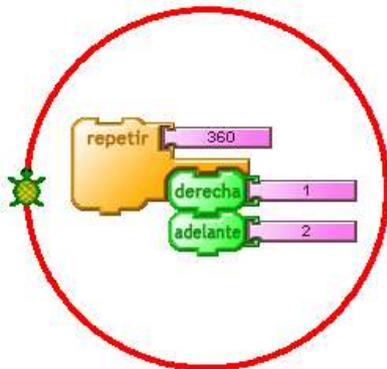
Polígonos regulares de 30 lados y de lado, 50 y 20 pasos, respectivamente



De manera autónoma, el Estudiante 3 elabora un programa computacional para un polígono de 360 lados y lado igual a 2 pasos.

Figura 124

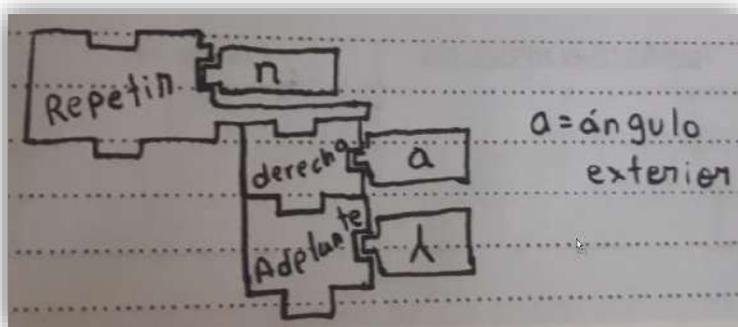
Programa computacional y polígono regular de 360 lados y lado 2 pasos



En relación con el proceso de generalización del programa computacional, que permite construir polígonos regulares de cualquier número de lados, el equipo esboza un esquema de programa computacional, donde muestra los elementos de programación del TortugArte y sus parámetros genéricos respectivos, a tener en cuenta para su elaboración.

Figura 125

Esquema del programa computacional para un polígono regular de n lados y lado l



- **Análisis a posteriori**

En las acciones individuales del Estudiante 1, Estudiante 2 y las acciones del Equipo, como sujetos de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración de los programas computacionales que permiten la construcción de polígonos regulares.

Tabla 22

Construcción de Polígonos regulares II (Modelo SAI) – Estudiante 1, Estudiante 2 y Equipo

Modelo SAI. Construcción de polígonos regulares			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando "adelante"	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando "derecha"	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando "repetir"	Selección/ensamble	Patrón geométrico
IV	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Polígono regular
V	El arrastre	Desplazamiento con el cursor	Programa y/o la tortuga

Las tareas correspondientes a la sección Polígonos regulares II, han sido desarrolladas de forma satisfactoria. Tanto el Estudiante 1, el Estudiante 2 y el Equipo han movilizado con éxito esquemas de uso de los comandos "adelante", "derecha" y "repetir". Observamos que el esquema de acción instrumentada movilizado para elaborar el programa computacional que construye cualquier polígono regular ha adquirido el nivel de esquema de uso.

Las limitaciones del software TortugArte, para construir un polígono regular de 7 lados o heptágono regular, no fueron percibidas por ninguno de los estudiantes. La medida del ángulo exterior de un heptágono regular es el número decimal periódico puro: $\frac{360}{7} = 51,428571$. Algunos valores

asignados al ángulo exterior, que favorecieron la construcción de una figura muy semejante a un heptágono regular, fueron: 51, 51.4, 51.428 y 52. Asimismo, las limitaciones del espacio gráfico del TortugArte, para la visualización de los programas computacionales y sus respectivas construcciones geométricas, fueron resueltas mediante la instrumentalización de la propiedad de arrastre.

A partir de los resultados, podemos concluir que en la ACTIVIDAD 2, ha ocurrido la transformación del artefacto TortugArte en instrumento, aspecto característico de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995), el cual media entre los sujetos y el objeto, en este caso, los estudiantes y el programa computacional que permite la construcción de polígonos regulares de cualquier número de lados.

4.2.3 Actividad 3. Diseños geométricos con polígonos regulares de un solo tipo

El objetivo de la Actividad 3 fue que los estudiantes movilizaran y/o crearan sus esquemas de utilización del software TortugArte para resolver un problema que involucra polígonos regulares. Específicamente, los estudiantes deberán elaborar programas computacionales con el TortugArte, para construir diseños geométricos compuestos con un solo tipo de polígono regular, que les permitan visualizar el cubrimiento o teselado de una determinada área del plano, sin dejar espacios vacíos entre los polígonos ni superponerse uno al otro.

- **Análisis a priori**

Los estudiantes deberán movilizar esquemas de utilización del software TortugArte, para elaborar programas computacionales, que permitan construir diseños geométricos con polígonos regulares tales como cuadrados, triángulos, pentágonos, hexágonos, ... y, además, dichos polígonos deberán estar dispuestos de tal manera que cubran una determinada área del plano, sin dejar espacios vacíos entre ellos ni superponerse uno al otro.

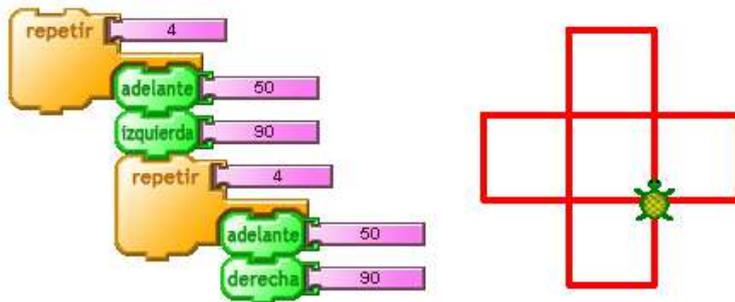
Consideramos que los estudiantes estarán instrumentados para resolver el problema propuesto, movilizando esquemas de acción instrumentada, así como también, esquemas de uso que fueron desarrollados y utilizados en la elaboración de programas computacionales que permiten la construcción de polígonos regulares de cualquier número de lados.

- **Descripción del trabajo del Estudiante 1**

Diseño geométrico con cuadrados: El estudiante moviliza un esquema de acción instrumentada que combina dos subprogramas computacionales asociados a la construcción de cuadrados. La **Figura 126**, muestra el programa computacional y el diseño geométrico construido con cuadrados.

Figura 126

Diseño geométrico simple con cuadrados

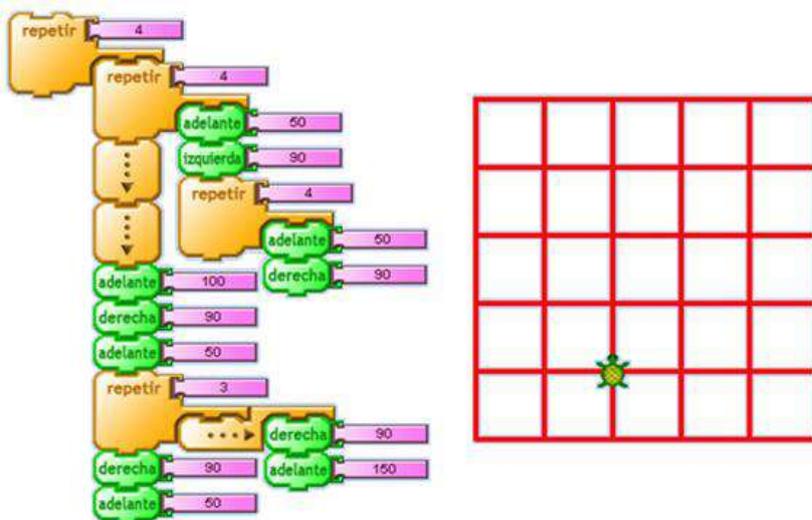


El programa computacional es ampliado movilizándolo un esquema de acción instrumentada más complejo. El estudiante moviliza esquemas de uso para los subprogramas computacionales y para los comandos: “adelante”, “derecha”, “izquierda” y “repetir”.

La **Figura 127**, muestra el programa computacional ampliado y el diseño geométrico correspondiente.

Figura 127

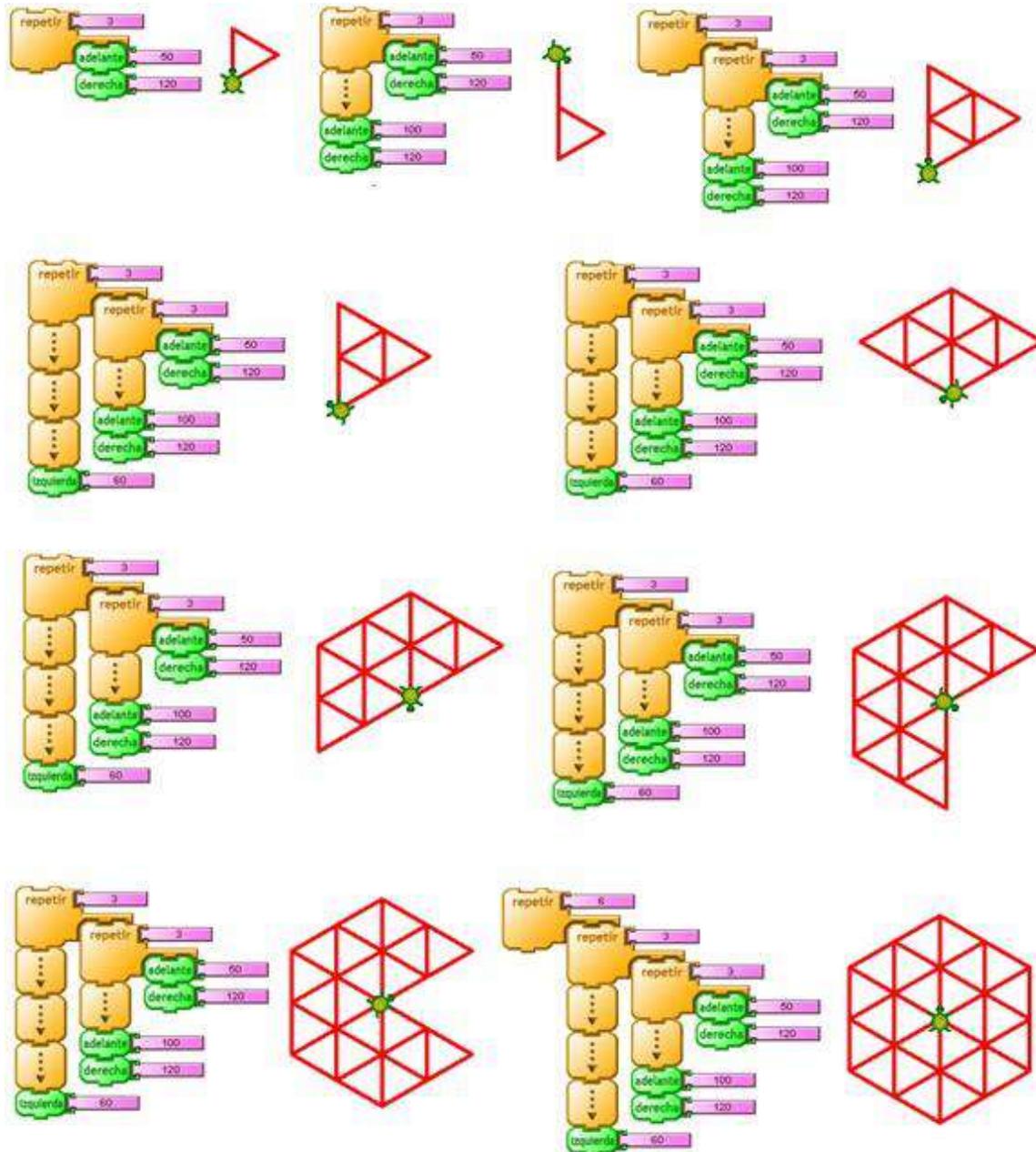
Diseño geométrico con cuadrados



Diseño geométrico con triángulos equiláteros: En la elaboración del programa computacional que construye un diseño geométrico con triángulos equiláteros, el estudiante moviliza esquemas de uso tanto para los subprogramas computacionales que construyen triángulos equiláteros como para los comandos “izquierda” y “repetir”. Observamos que el esquema de acción instrumentada correspondiente al programa computacional es estructurado de manera sistemática; muy diferente del caso anterior, donde la combinación de comandos fue poco deliberada.

Figura 128

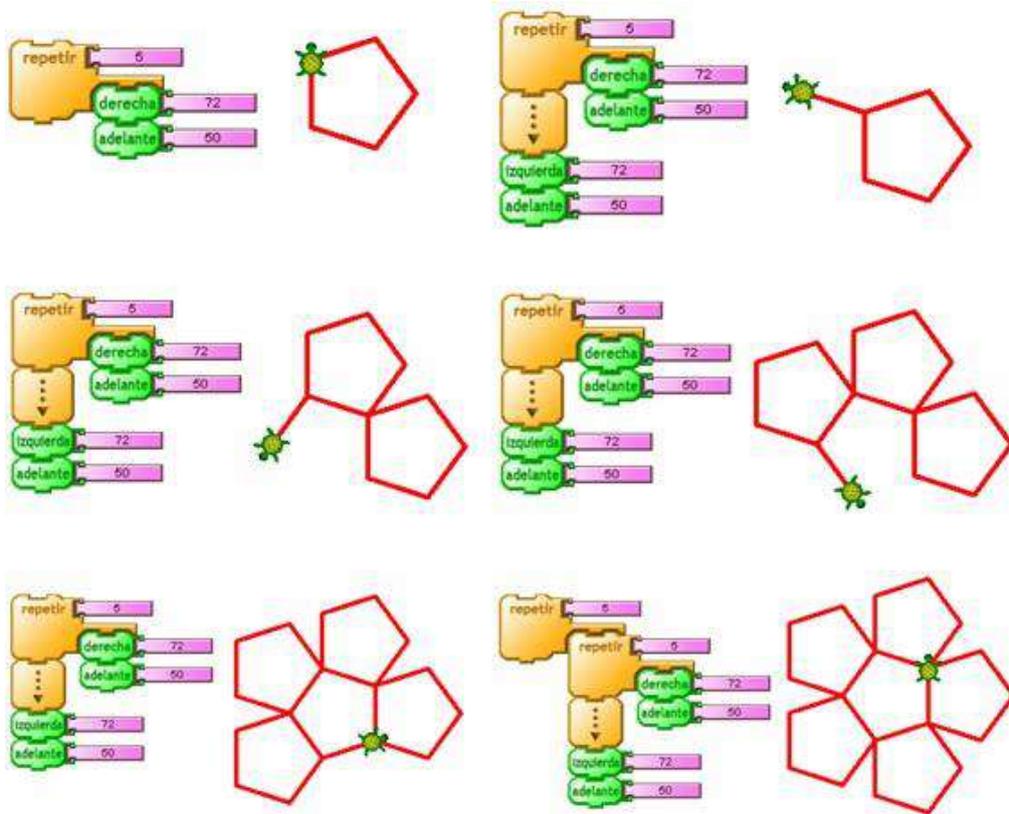
Diseños geométricos con triángulos equiláteros



Diseño geométrico con pentágonos regulares: Para el programa computacional que construye un diseño con pentágonos regulares, el estudiante moviliza un esquema de uso para el subprograma computacional que construye un pentágono regular y luego, instrumentaliza los comandos “izquierda”, “adelante” y “repetir”. El resultado final de sus acciones es un cubrimiento del plano imperfecto, se muestran espacios libres entre los pentágonos.

Figura 129

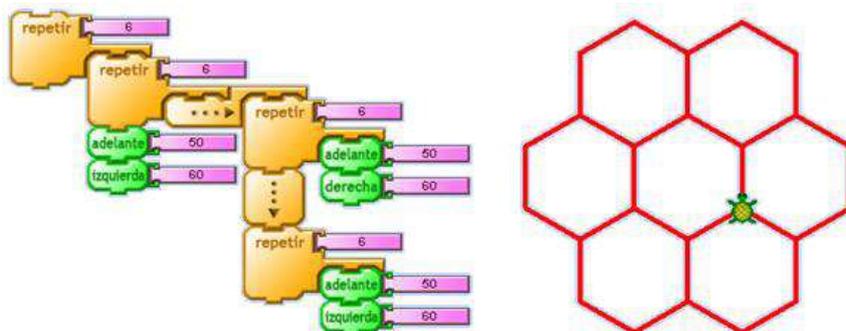
Diseños geométricos con pentágonos regulares



Diseño geométrico con hexágonos regulares: El estudiante empieza a movilizar esquemas de acción instrumentada cada vez más efectivos. Observamos que para elaborar el programa computacional que construye un diseño con hexágonos regulares, el estudiante moviliza esquemas de uso para subprogramas computacionales que construyen hexágonos. Sin embargo, no es consciente de la necesidad de optimizar el programa computacional, es decir, obtener un programa con la menor cantidad de comandos TortugArte. La **Figura 130**, muestra el resultado de sus acciones.

Figura 130

Diseño geométrico con hexágonos regulares

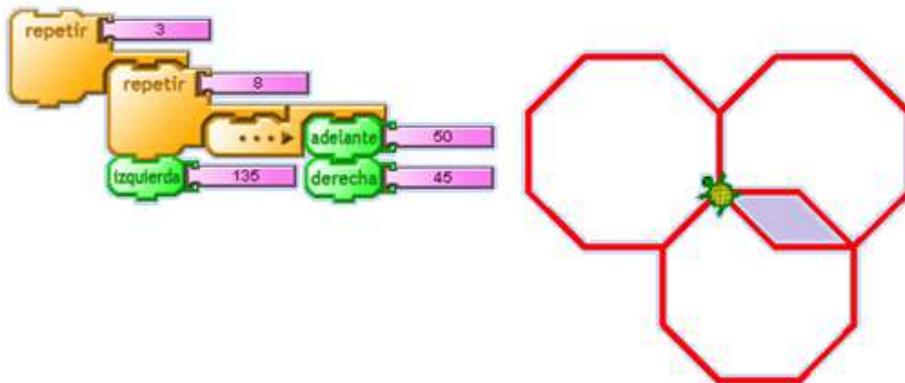


Diseño geométrico con octógonos regulares: El estudiante elabora un programa computacional que construye diseños con octógonos regulares, movilizando un esquema de acción instrumentada, así como también, esquemas de uso respecto a los comandos “izquierda”, “repetir” y al subprograma computacional que construye un octógono regular.

La **Figura 131**, muestra el programa computacional y su diseño geométrico respectivo. Al respecto el estudiante comenta: “... no se puede introducir un octógono más... se cruzan...”

Figura 131

Diseño geométrico con octógonos regulares



Diseños geométricos con polígonos regulares de 9, 10, 15 y 20 lados: En lo que sigue, observamos algunos programas computacionales con los diseños geométricos correspondientes a polígonos regulares de nueve, diez, quince y veinte lados.

Figura 132

Diseño geométrico con nonágonos regulares

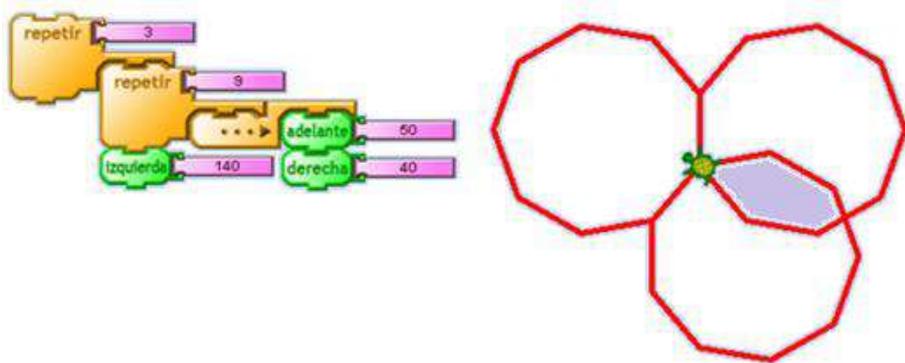
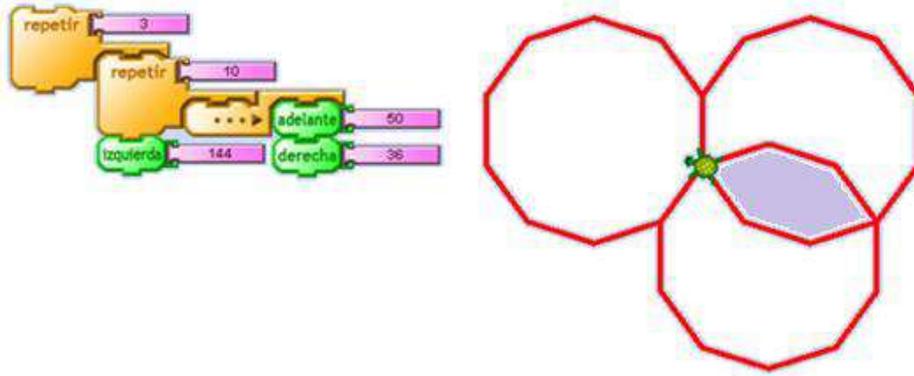
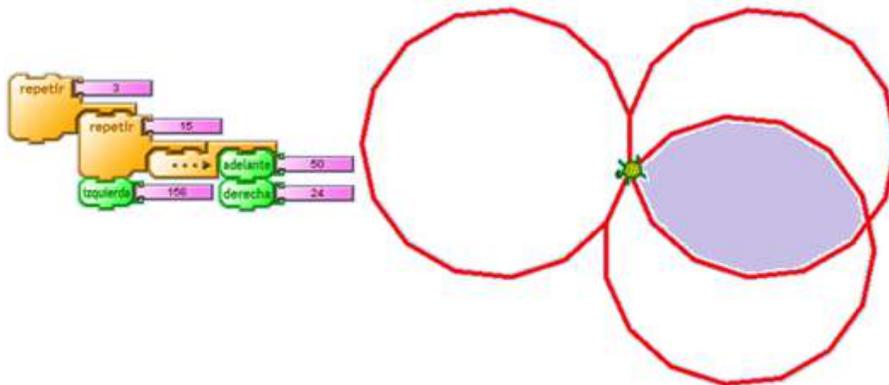
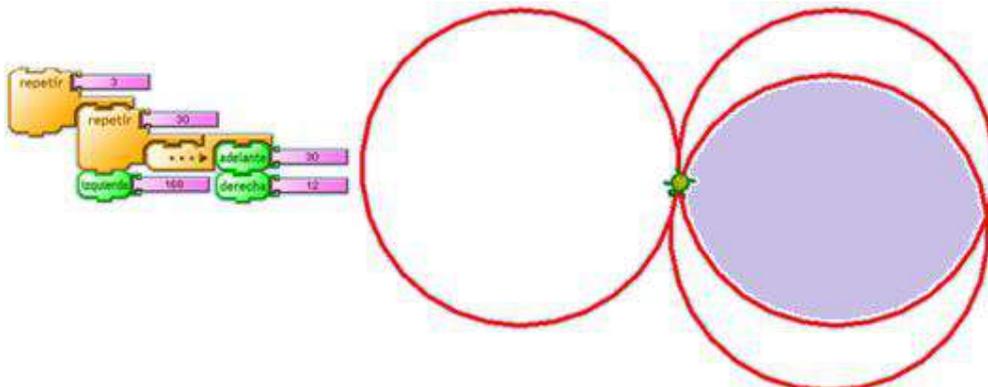


Figura 133*Diseño geométrico con decágonos regulares***Figura 134***Diseño geométrico con polígonos regulares de 15 lados***Figura 135***Diseño geométrico con polígonos regulares de 30 lados*

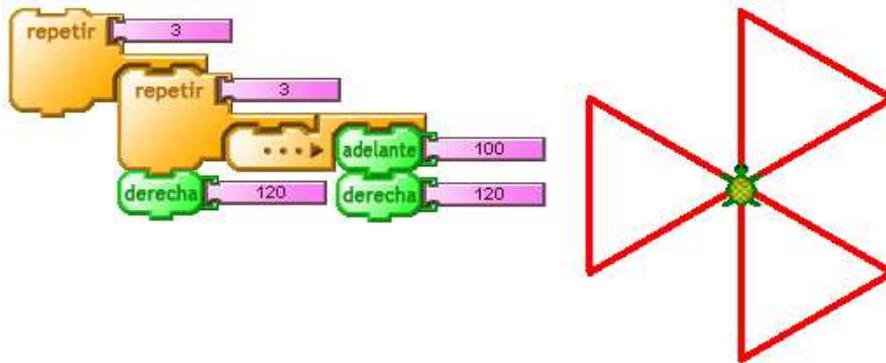
Sobre los resultados, el estudiante comenta: “... como con el octógono... no se puede introducir un polígono más... solo se puede cubrir el plano completamente con cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares... el espacio se va cerrando...”

- **Descripción del trabajo del Estudiante 2**

Diseño geométrico con triángulos equiláteros: El estudiante moviliza un esquema de acción instrumentada combinando un subprograma computacional para construir triángulos equiláteros con los comandos “*repetir*” y “*derecha*”. La **Figura 136**, muestra un diseño geométrico con triángulos, pero no es el requerido.

Figura 136

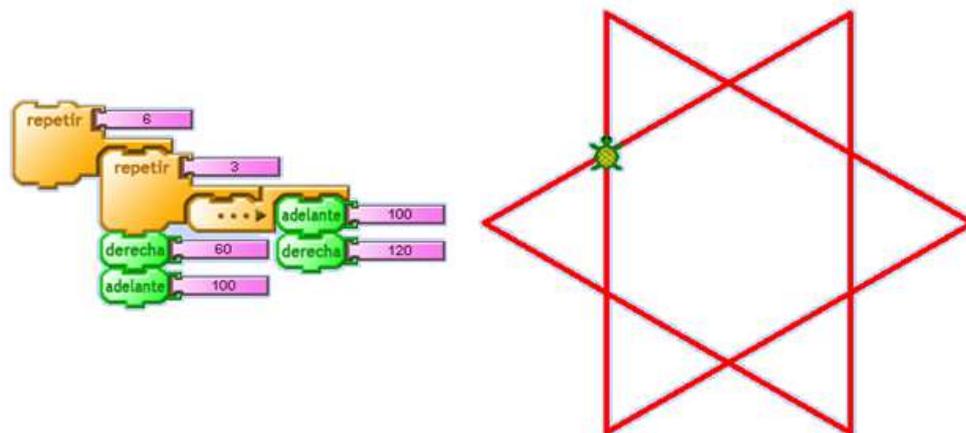
Diseño geométrico con triángulos equiláteros



El estudiante amplía el programa computacional, movilizando un esquema de uso respecto al comando “*adelante*”. El resultado es el siguiente diseño geométrico.

Figura 137

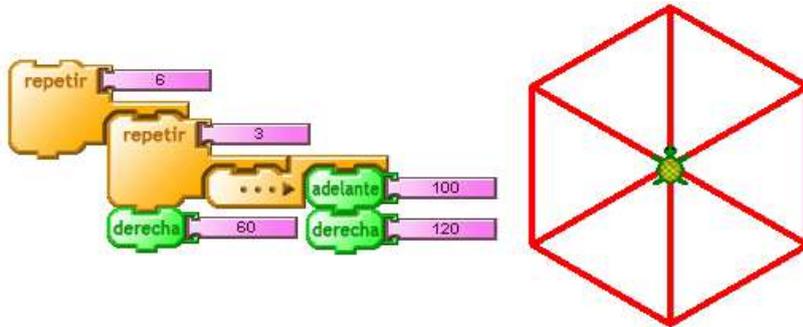
Diseño geométrico con triángulos equiláteros y un hexágono regular



Utilizando como estrategia el ensayo y error, el estudiante logra un diseño con seis triángulos equiláteros conectados alrededor de un vértice común. La **Figura 138**, muestra el programa computacional y el respectivo diseño geométrico.

Figura 138

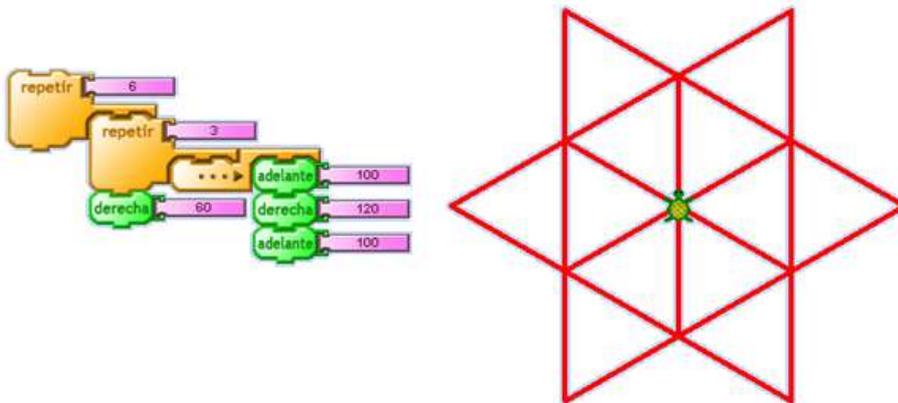
Diseño geométrico simple con triángulos equiláteros



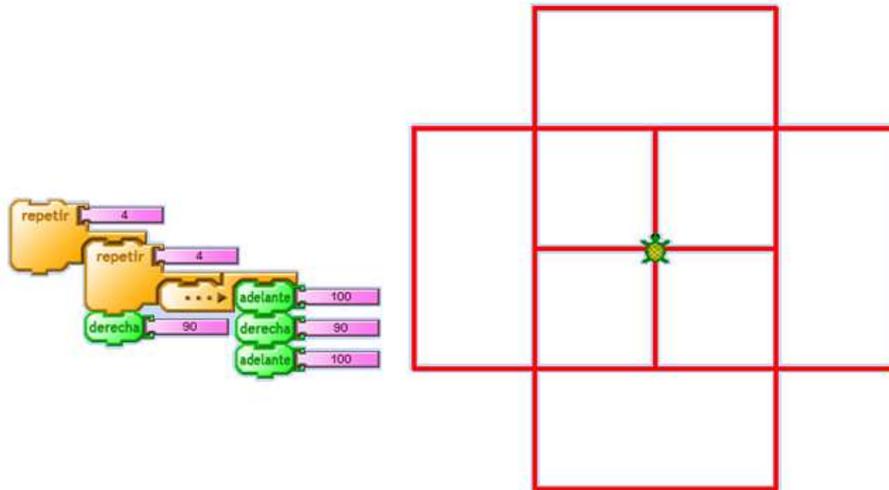
En una nueva acción, el estudiante elabora un programa computacional que produce una malla de triángulos equiláteros más amplia; sin embargo, en su elaboración moviliza un esquema de uso del subprograma computacional que construye triángulos equiláteros, pero no tiene en cuenta la necesidad de optimizar el programa computacional.

Figura 139

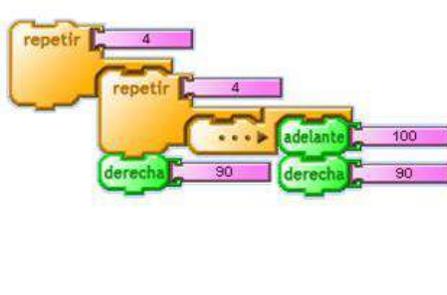
Diseño geométrico con triángulos equiláteros



Diseño geométrico con cuadrados: El estudiante elabora un programa computacional instrumentalizando algunos comandos del programa anterior. Observamos que moviliza un esquema de uso para modificar los parámetros numéricos del comando “derecha”: 60 y 120 por 90 y 90. El resultado es el siguiente diseño geométrico.

Figura 140*Diseño geométrico con cuadrados y rectángulos*

En la elaboración del siguiente programa computacional, el estudiante considera movilizar el esquema de uso del subprograma computacional que construye un cuadrado.

Figura 141*Diseño simple con cuadrados*

El siguiente programa muestra un cubrimiento o teselado del plano con cuadrados, pero tienen diferentes tamaños.

Figura 142

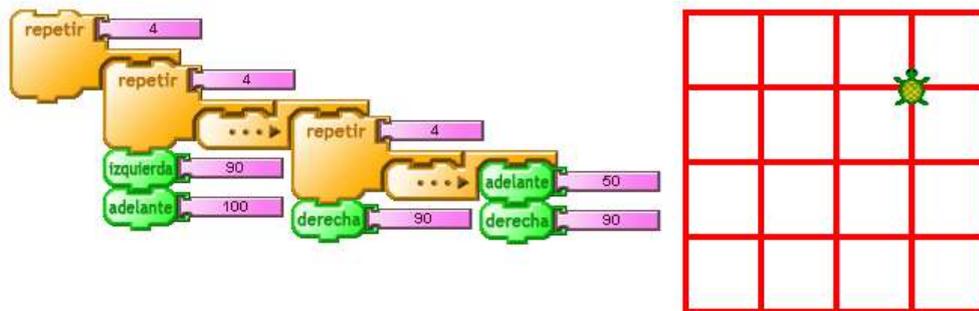
Diseño geométrico con cuadrados de diferente tamaño



Utilizando la estrategia del ensayo y error, el estudiante logra un programa computacional que muestra un diseño con cuadrados del mismo tamaño y más amplio.

Figura 143

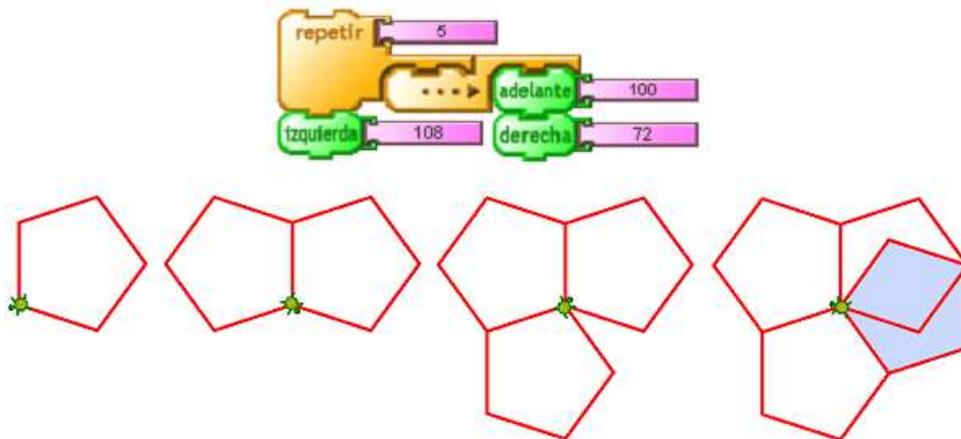
Diseño geométrico con cuadrados



Diseño geométrico con pentágonos regulares: Observamos que el estudiante moviliza un esquema de acción instrumentada, combinando el subprograma computacional que construye un pentágono regular con el comando “*izquierda:108*”; luego, ejecuta el programa computacional una, dos, tres y cuatro veces. La **Figura 144**, muestra los resultados correspondientes.

Figura 144

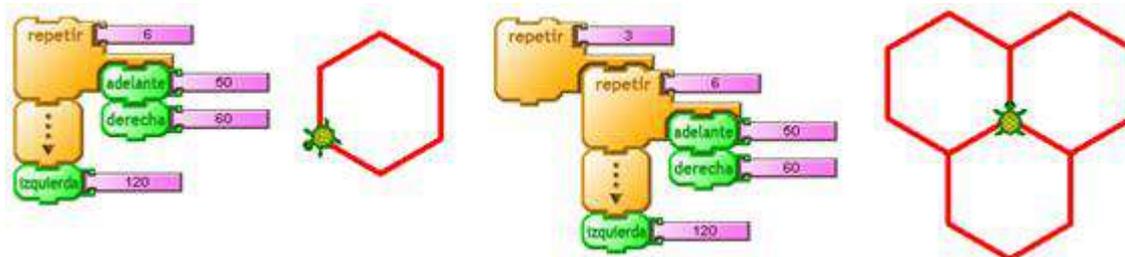
Programa computacional y diseños geométricos con uno, dos, tres y cuatro pentágonos regulares



Diseño geométrico con hexágonos regulares: Como parte de su estrategia, el estudiante instrumentaliza el programa computacional anterior, modificando los parámetros relacionados a los ángulos de giro y a la longitud del lado. También moviliza un esquema de uso para el comando “repetir:3”. La **Figura 145** muestra los resultados correspondientes.

Figura 145

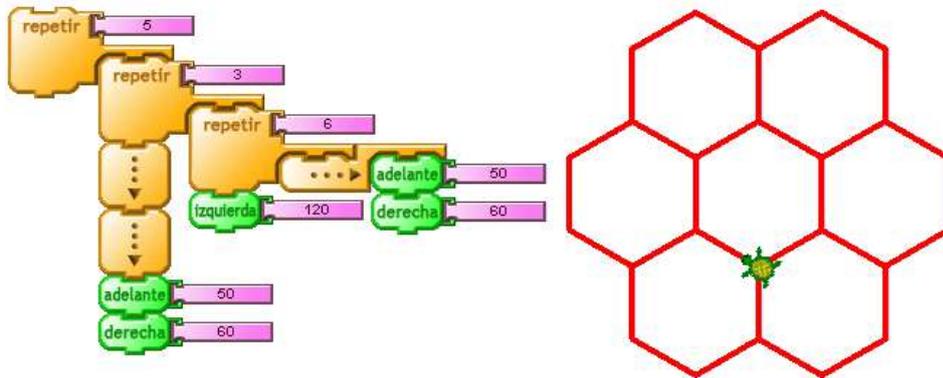
Diseños geométricos con hexágonos regulares



A partir de los resultados obtenidos, el estudiante desarrolla el programa computacional, hasta obtener un diseño más extenso, que le permite una mejor visualización del cubrimiento del plano. El resultado es un diseño geométrico con siete hexágonos regulares.

Figura 146

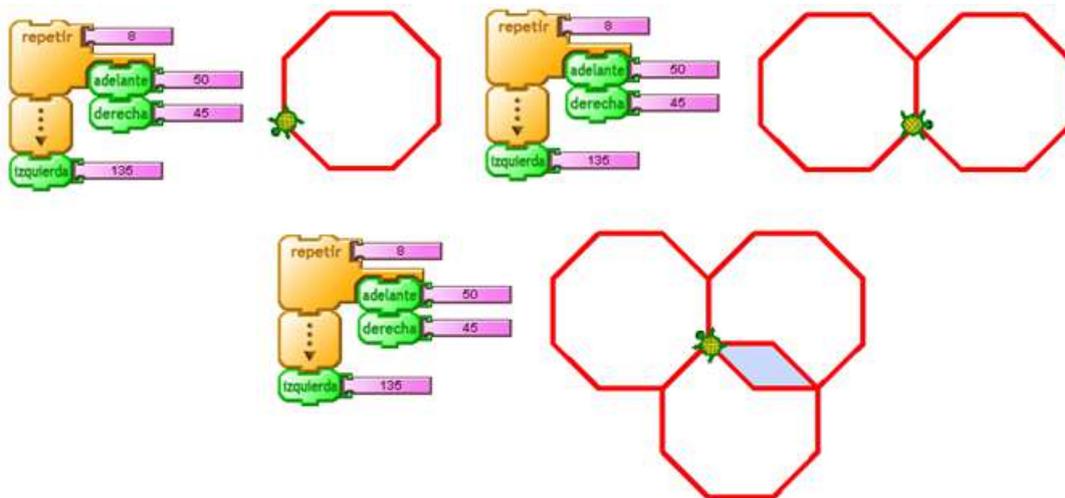
Programa computacional y diseño geométrico con hexágonos regulares



Diseño geométrico con octógonos regulares: Utilizando la misma estrategia de la tarea anterior, el estudiante instrumentaliza los comandos correspondientes a los ángulos de giro y el comando “*repetir: 8*”, para elaborar un programa computacional incompleto. Después de ejecutar 1, 2 y 3 veces, el programa computacional, comenta: “... cuando doy tres veces clic al programa, ... el tercer octógono se pinta encima ... no alcanza otro”. Le basta ejecutar tres veces, para percibir que no es posible cubrir el plano con octógonos regulares.

Figura 147

Diseños geométricos con 1, 2 y 3 octógonos regulares



Diseños geométricos con polígonos regulares de 9, 10, 15 y 20 lados: Para el desarrollo de esta tarea, el estudiante moviliza un esquema de uso para elaborar un programa computacional que le permite visualizar la posibilidad de cubrimientos con polígonos regulares de 9, 10, 15 y 20 lados.

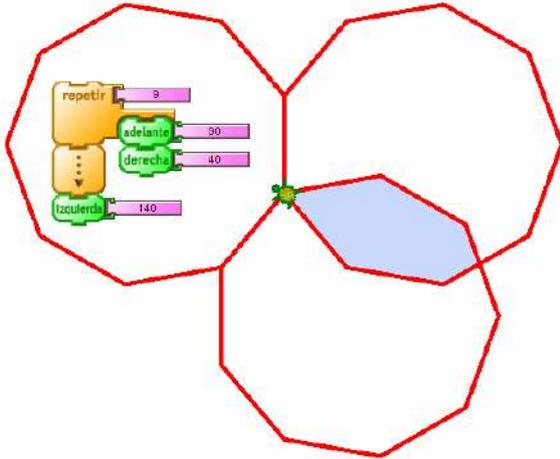
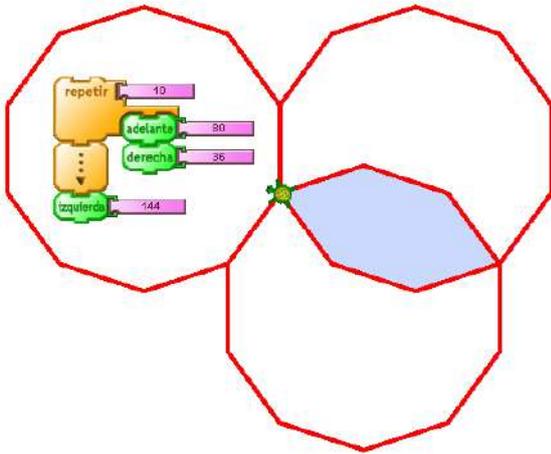
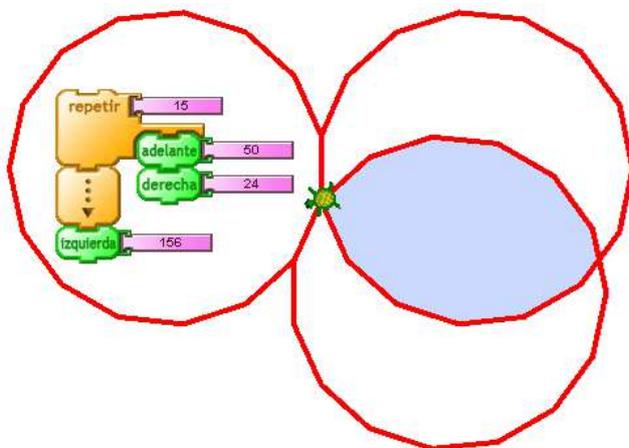
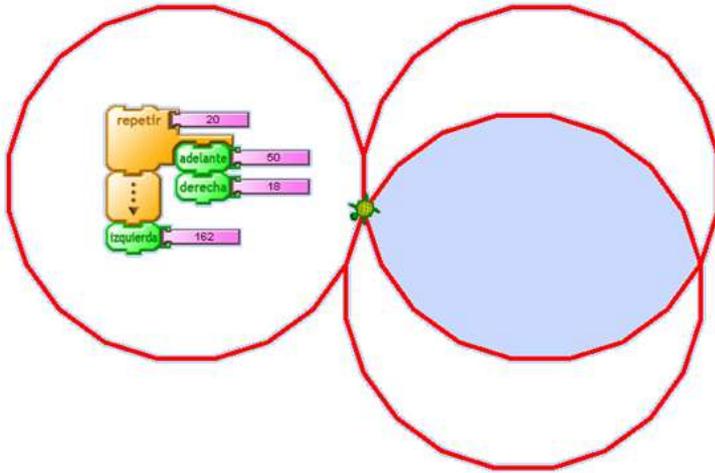
Figura 148*Diseño geométrico con polígonos regulares de 9 lados***Figura 149***Diseño geométrico con polígonos regulares de 10 lados***Figura 150***Diseño geométrico con polígonos regulares de 15 lados*

Figura 151

Diseño geométrico con polígonos regulares de 20 lados



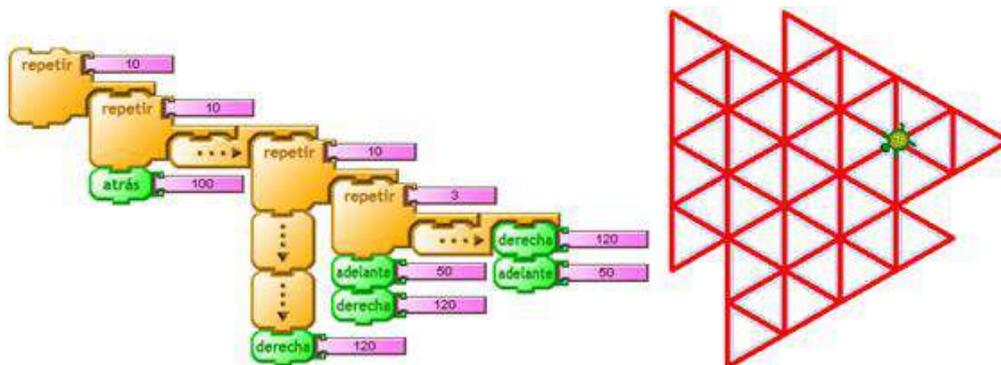
Respecto a los resultados, el estudiante comenta: “... solo se puede cubrir el plano con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos... con los otros no se puede, se cruzan...”

- **Descripción del trabajo del Equipo**

Diseño geométrico con triángulos equiláteros: El equipo configura un programa computacional que construye un cubrimiento del plano con triángulos equiláteros. Observamos que siguen una estrategia de ensayo y error; además, percibimos que el parámetro del comando “repetir” no es optimizado, utilizan el valor por defecto. Sin embargo, el diseño obtenido les permite afirmar que si es posible cubrir el plano con triángulos equiláteros.

Figura 152

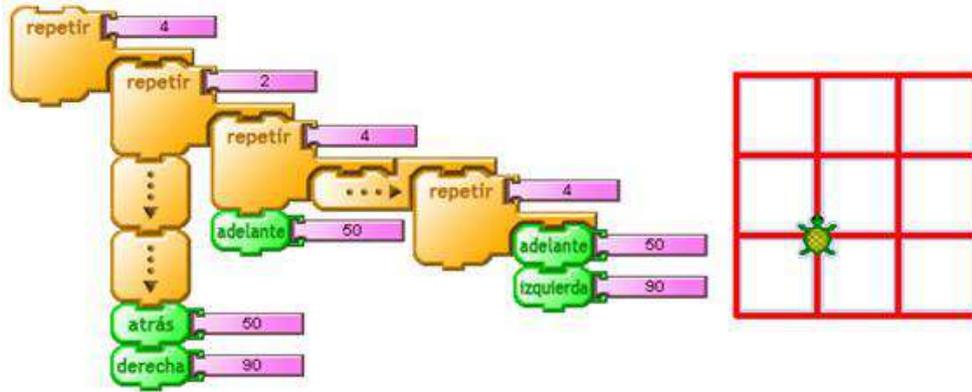
Programa computacional y diseño geométrico con triángulos equiláteros



Diseño geométrico con cuadrados: El equipo elabora un programa que construye un diseño con cuadrados. Continúan con la estrategia de ensayo y error; no percibimos una configuración sistemática.

Figura 153

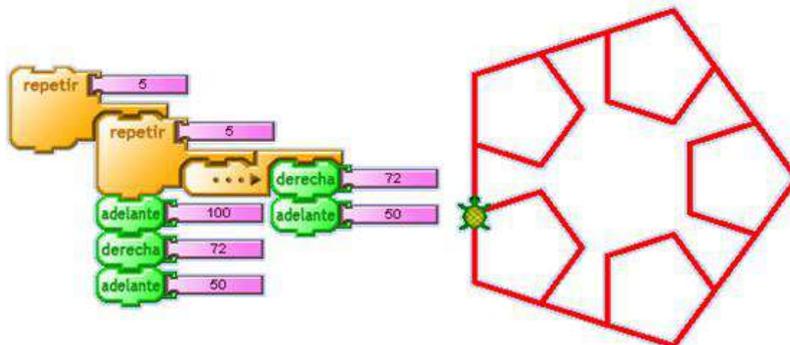
Diseño geométrico con cuadrados



Diseño con pentágonos regulares: El equipo elabora un programa computacional que construye el diseño geométrico mostrado en la **Figura 154**.

Figura 154

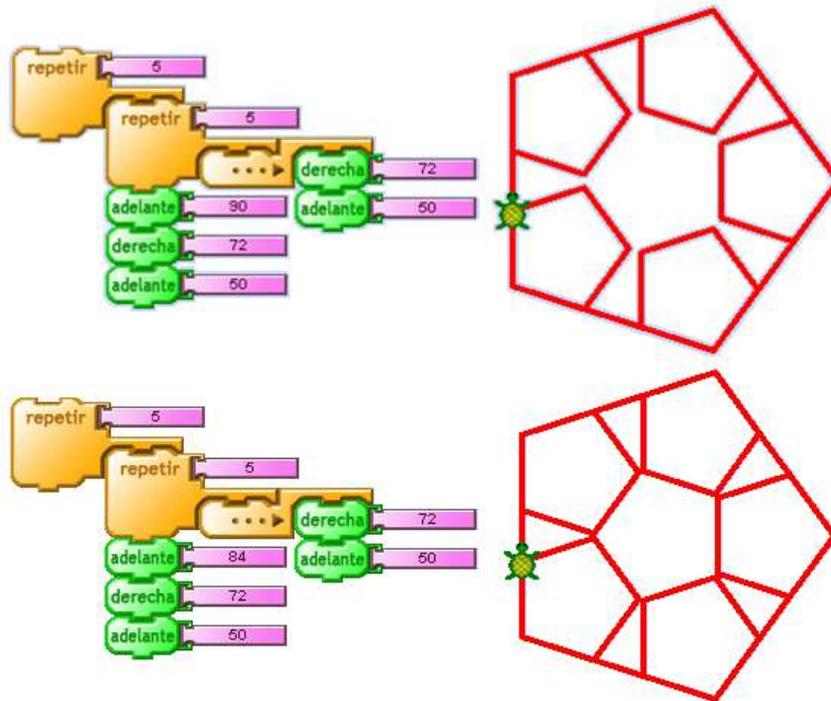
Programa computacional y diseño geométrico



Las características particulares del diseño geométrico obtenido, les induce a cambiar el parámetro 100 del comando “*adelante: 100*”, para mejorar el resultado. Sin embargo, el resultado final es un cubrimiento del plano con pentágonos regulares y triángulos isósceles. La **Figura 155**, muestra los resultados para los cambios: “*adelante: 90*” y “*adelante: 84*”, respectivamente.

Figura 155

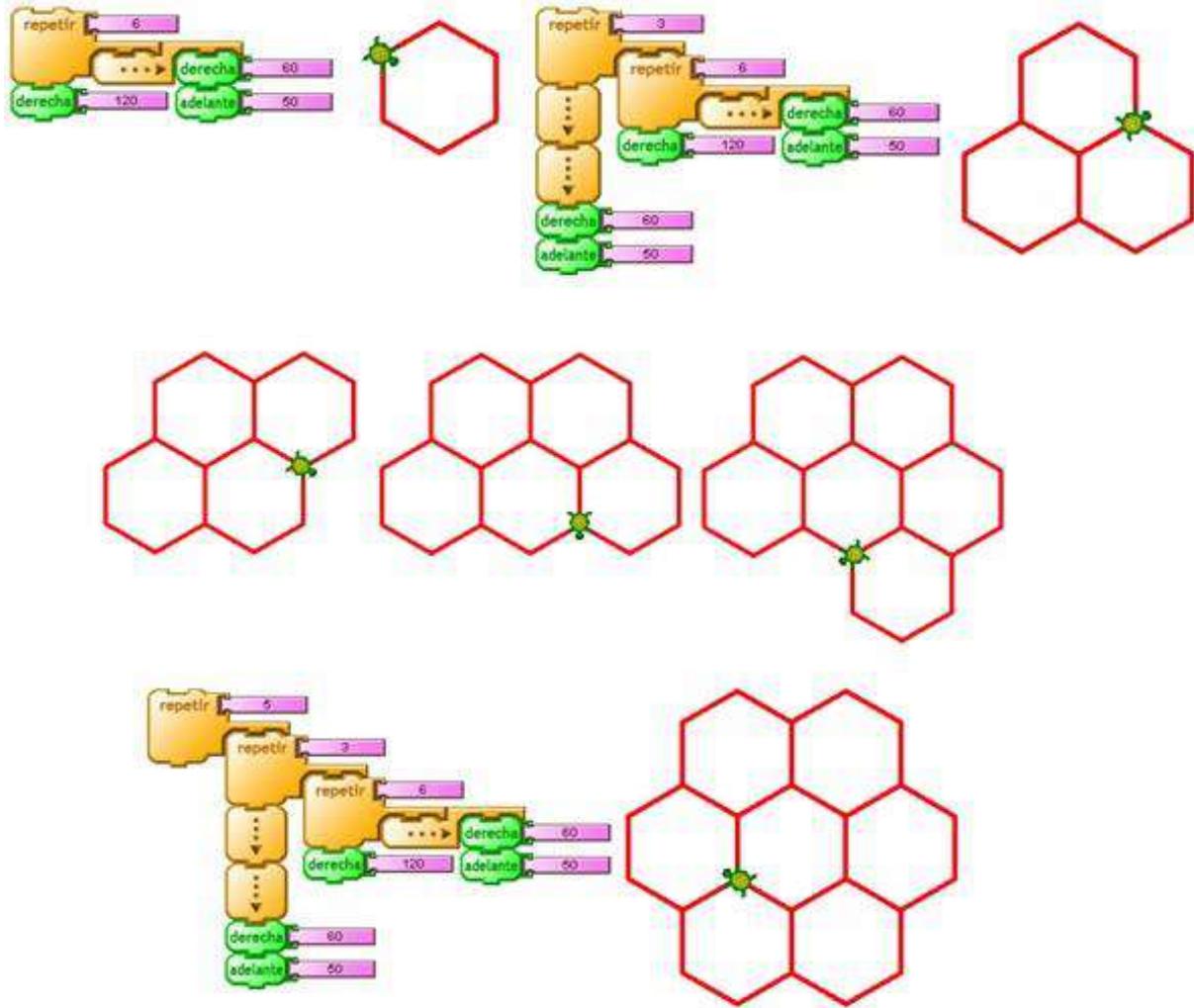
Diseños geométricos con pentágonos y triángulos



Diseño con hexágonos regulares: El equipo elabora un programa computacional que construye un diseño con hexágonos regulares, de manera sistemática. La **Figura 156**, muestra los respectivos resultados.

Figura 156

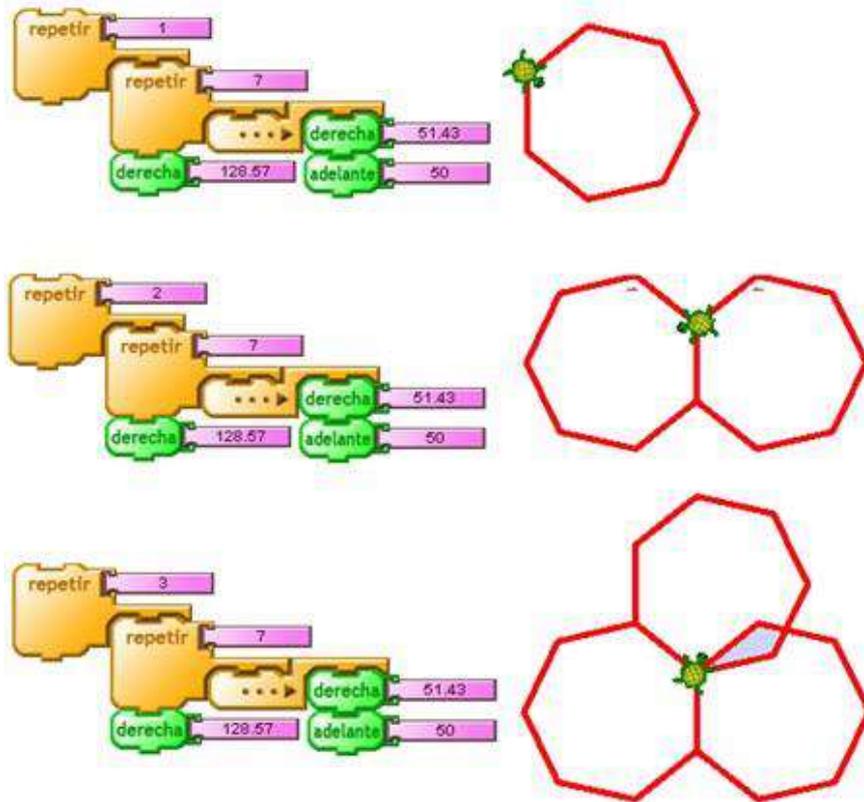
Diseños geométricos con hexágonos regulares



Diseño con heptágonos regulares: El programa computacional que construye un diseño con heptágonos es elaborado con éxito y de manera sistemática. El Estudiante 3, comenta: “...en la figura con tres polígonos ... dos se cortan ...”. La **Figura 157**, muestra los resultados correspondientes.

Figura 157

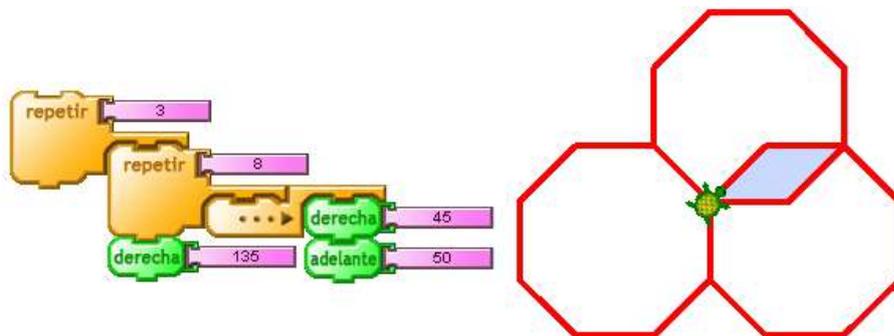
Diseños geométricos con “heptágonos regulares”



Diseño con octógonos regulares: El equipo instrumentaliza el programa anterior y elabora un programa computacional que construye octógonos regulares. Al respecto, comentan: “... igual como en el anterior... también se cortan los polígonos...”

Figura 158

Diseño geométrico con octógonos regulares



Diseños geométricos con polígonos regulares de 9, 10, 15 y 20 lados: El equipo no tiene dificultades para elaborar los programas computacionales, correspondientes a diseños geométricos con polígonos regulares de 9, 10, 15 y 20 lados. Su estrategia consiste en instrumentalizar el programa

anterior. Además, percibimos que las limitaciones del área de visualización del TortugArte, lo resuelven instrumentalizando el comando “adelante”, con la finalidad de reducir la longitud del lado del polígono.

En lo que sigue, mostramos los programas computacionales y sus diseños geométricos respectivos. Al respecto, el Estudiante 4, comenta: “... mientras más lados tiene el polígono, ... los polígonos se cruzan más...”

Figura 159

Diseño geométrico con nonágonos regulares

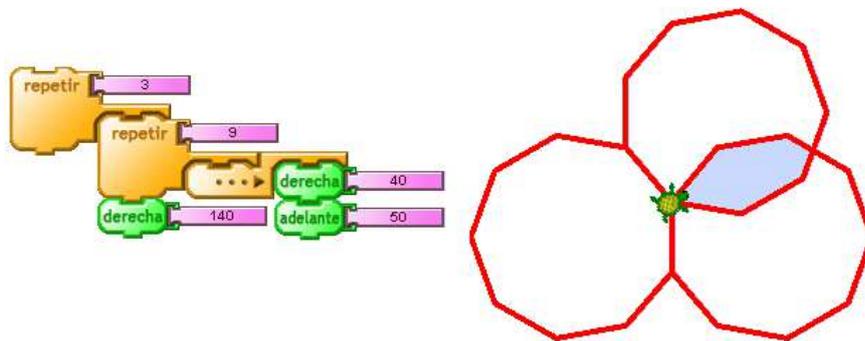


Figura 160

Diseño geométrico con decágonos regulares

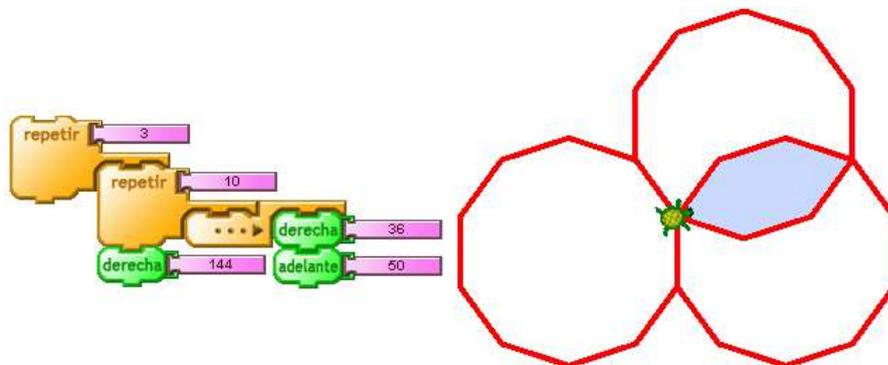


Figura 161

Diseño geométrico con polígonos regulares de 15 lados

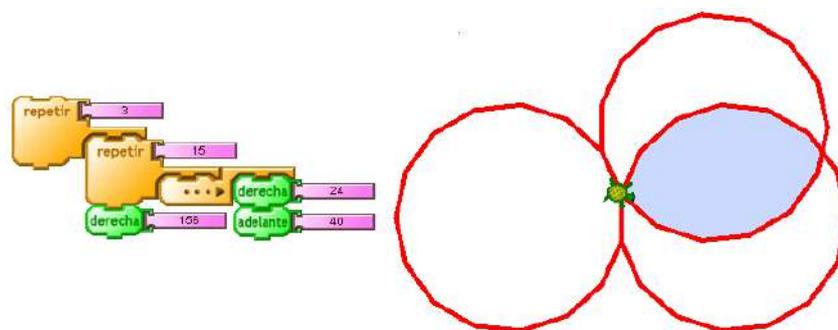
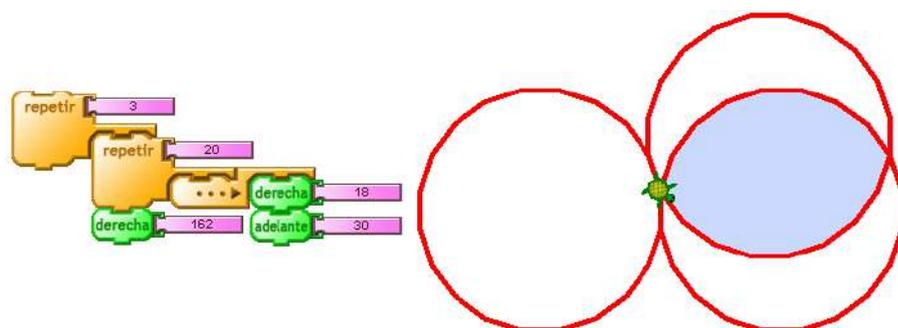


Figura 162

Diseño geométrico con polígonos regulares de 20 lados



A partir de los diseños geométricos construidos con polígonos regulares, el equipo sugiere: “... *Mathías debe usar solo cerámicas en forma de triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos...*”

- **Análisis a posteriori**

En las acciones del Estudiante 1, del Estudiante 2 y del Equipo, como sujetos de la triada característica del modelo SAI, tomaremos en cuenta los siguientes estatus de los elementos que interactúan en la elaboración de los programas computacionales que permiten la construcción de los diferentes diseños geométricos con polígonos regulares.

Tabla 23

Construcción de diseños geométricos con polígonos regulares. (Modelo SAI) Estudiante 1, Estudiante 2 y Equipo

Modelo SAI. Construcción de diseños geométricos con polígonos regulares			
	Instrumento	Acción	Objeto
I	Comando “ <i>adelante</i> ”	Selección/ensamble	Segmento en el plano
II	Comando “ <i>derecha</i> ”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
III	Comando “ <i>izquierda</i> ”	Selección/ensamble	Ángulo en el plano
IV	Comando “ <i>repetir</i> ”	Selección/ensamble	Patrón geométrico
V	El arrastre	Desplazamiento con el cursor	Programa y/o la tortuga
VI	Programa TortugArte	Doble clic sobre el programa	Diseño geométrico

En las acciones de los estudiantes podemos observar la fluidez con que utilizan el TortugArte. Movilizan, sin dificultad, un esquema de uso para elaborar los subprogramas computacionales correspondientes a la construcción de polígonos regulares de cualquier número de lados. El éxito de los estudiantes pone de manifiesto la ocurrencia del proceso de instrumentalización de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995). Observamos que dicho esquema de uso, en gran medida, orienta sus desempeños sobre lo que resta del programa computacional, al permitirles movilizar con éxito, un

esquema de acción instrumentada orientado a la elaboración del programa computacional que construye diseños geométricos con polígonos regulares; hecho que caracteriza la ocurrencia del proceso de instrumentación de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995).

Los resultados obtenidos nos permiten concluir que en las tareas de la ACTIVIDAD 3, la transformación del artefacto TortugArte en instrumento, en la mediación entre el sujeto y el objeto (estudiante(s) – programa computacional que construye diseños geométricos con polígonos regulares) ha ocurrido con éxito.



Conclusiones

La investigación presentada surgió de la reflexión sobre la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en la Educación Básica y en particular, de los polígonos regulares. Dicho proceso reflexivo, en el ejercicio de la docencia en la formación inicial de profesores, ha permitido identificar: la falta de investigaciones sobre los fenómenos cognitivos que emergen en las interacciones de los estudiantes cuando utilizan un ambiente de Geometría Dinámica como el TortugArte, y la necesidad de conectar a los estudiantes con su entorno. Lo anterior justifica haber elegido como sujetos de esta investigación, a estudiantes para profesor de Educación Primaria puesto que, al permitirles que experimenten el desarrollo de una secuencia didáctica que busca la generación de conocimiento geométrico mediado por instrumentos, tienen la posibilidad de elaborar construcciones geométricas y, desarrollar la visualización y el razonamiento inductivo, en relación con los polígonos regulares. El desarrollo de dichos conocimientos y habilidades contribuye a la consolidación de su competencia docente.

Como marco teórico, elegimos al Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), específicamente la Génesis Instrumental, para analizar en las acciones de los sujetos, los procesos de instrumentalización e instrumentación, cuando aprenden sobre los polígonos regulares a través de una secuencia didáctica diseñada para este fin, y con mediación del TortugArte. Para el estudio de los procesos de instrumentalización, observamos en las acciones de los sujetos, los esquemas de utilización movilizados y/o contruidos, considerando que esos esquemas pueden ser de tres tipos: *esquemas de uso*, *esquemas de acción instrumentada* y *esquemas de acción colectiva instrumentada*. Asimismo, utilizamos el modelo SAI (Situaciones de la Actividad Instrumentada) propuesto por Rabardel (1995), para identificar en las acciones de los sujetos, el instrumento y el objeto. Los aspectos que podemos considerar en el modelo SAI son la identificación del tipo de restricciones, tipo de estadio y la suficiencia o insuficiencia de la transparencia de los objetos observados, todos estos aspectos relacionados con las dificultades que tuvieron los sujetos en el aprendizaje de los polígonos regulares mediado por el TortugArte. Finalmente, de acuerdo con Rabardel (1995), se establecieron los niveles de instrumentalización alcanzados por el instrumento producto de su transformación en la secuencia de aprendizaje diseñada.

Para orientar la investigación, utilizamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). En ese sentido, desarrollamos las cuatro fases de la metodología de la Ingeniería Didáctica, donde describimos cómo están desarrollándose los conceptos que aborda nuestra investigación, de manera que la propuesta de intervención impacte positivamente en la práctica del aula. Analizamos el impacto de la enseñanza tradicional, las concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que limitan el desarrollo de dichos conceptos. Asimismo, en los antecedentes de nuestra investigación

hemos podido constatar las ventajas del uso de ambientes de Geometría Dinámica como el GeoGebra y el SuperLogo, para la construcción de conocimiento geométrico, particularmente en el estudio de los polígonos regulares.

Es pertinente recuperar en este punto, la pregunta que guía este trabajo de investigación, y dar cuenta de la forma en que fue respondida: **¿cómo ocurre la Génesis Instrumental de los polígonos regulares, en estudiantes para profesor de Educación Primaria, por medio de una secuencia didáctica que involucra el uso del software TortugArte?**

Con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación, se trazaron tres objetivos específicos.

- **Identificar la construcción y/o movilización de los esquemas de uso y de acción instrumentada durante el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta.**

Los sujetos empiezan el desarrollo de la secuencia didáctica desconociendo las herramientas y el funcionamiento del software TortugArte, por lo tanto, según la perspectiva del Enfoque Instrumental (Rabardel, 1995), el TortugArte era un artefacto para ellos.

Los primeros esquemas de uso (EU) que hemos podido identificar en la Actividad 1 corresponden a tareas secundarias de esta actividad y comprende la instrumentalización de los comandos básicos del TortugArte, en la construcción de un segmento y del ángulo de giro, necesario para orientar el sentido del desplazamiento de la tortuga. Los esquemas de acción instrumentada (EAI) para esta actividad, corresponden a tareas primarias y comprenden la elaboración de programas computacionales que permiten construir figuras geométricas: líneas poligonales abiertas y líneas poligonales cerradas (polígonos). Igualmente, los sujetos crean un EAI específico en la elaboración del programa computacional que permite la construcción del patrón geométrico de una figura (parte de la figura, que se repite).

En la Actividad 2, identificamos esquemas de acción instrumentada para las tareas primarias, correspondientes a la elaboración de programas computacionales que permiten la creación de polígonos regulares de cualquier número de lados. Durante el desarrollo de las tareas de esta actividad, percibimos el primer caso de un esquema de acción instrumentada que evoluciona o se convierte en un esquema de uso, se trata del EAI correspondiente a la elaboración del programa computacional que construye la figura del patrón geométrico de un polígono regular.

Los esquemas de acción instrumentada, identificados en la Actividad 3, corresponden a tareas primarias asociadas a la elaboración de programas computacionales que favorecen la construcción de diseños geométricos compuestos por polígonos regulares de un solo tipo. Asimismo, en el desarrollo de las tareas de esta actividad, percibimos que el EAI correspondiente a la elaboración de un programa

computacional que construye un polígono regular de cualquier número de lados, adquiere el nivel de EU.

Observamos que los sujetos, al realizar la misma acción en diferentes situaciones, logran apropiarse del EAI, el cual progresivamente va tomando la forma de técnica y permite, de manera efectiva, responder a las tareas propuestas. Esto nos lleva a comprender que los esquemas de utilización tienen un carácter asimilador, provocado por su repetición en las tareas, así como de acomodación. Según Rabardel (1995), en este nivel, la instrumentalización es durable o permanente y el EAI se percibe como una función adquirida por el artefacto en relación con un conjunto de acciones. Igualmente aquellos esquemas de acción instrumentada que alcanzan el nivel de esquema de uso, son factibles de ser reutilizables, pueden organizarse como invariantes operativos y ser adaptados a nuevas situaciones.

- **Identificar cómo ocurre el proceso de instrumentación durante las acciones de los estudiantes para profesor de Educación Primaria, en el desarrollo de la secuencia didáctica y de instrumentalización respecto al software TortugArte.**

Según Rabardel (1995), la apropiación de nuevos artefactos, la creación de esquemas de uso o la utilización de esquemas de uso preestablecidos se dan en el proceso de instrumentación o apropiación del artefacto por parte del sujeto.

La falta de experiencia con el software TortugArte no fue una barrera para que los sujetos trabajaran con éxito las tareas iniciales. Observamos que la actividad lúdica, desarrollada al inicio de la Actividad 1, jugó un rol importante en la adquisición de la lógica interna del software. En esta etapa introductoria al TortugArte, percibimos que logramos nuestro objetivo, que era instrumentar a los sujetos con los comandos básicos del TortugArte, así como también, instrumentarlos en la combinación de comandos, para favorecer la elaboración de programas computacionales que construyen figuras geométricas específicas.

En la Actividad 2 observamos que la configuración de los programas computacionales que permiten la construcción de polígonos regulares de cualquier número de lados, tiene como base, la movilización de dos esquemas de uso, uno asociado al patrón geométrico del polígono regular y otro asociado al comando “repetir”. Los programas computacionales correspondientes a patrones geométricos favorecen la simplificación de procesos iterativos en programas computacionales más complejos y, por tanto, su optimización; sin embargo, la optimización de un programa computacional no ha sido prioridad en esta investigación.

En la Actividad 3 observamos, en las acciones de los sujetos, fluidez con el software TortugArte, movilizan EU para elaborar los programas computacionales que construyen polígonos

regulares y crean EAI para elaborar programas computacionales más complejos, como aquellos que permiten la construcción de diseños geométricos con polígonos regulares de un solo tipo. Este proceso es desarrollado de manera inductiva, primero con triángulos equiláteros, luego con cuadrados y así sucesivamente. Los sujetos apelan a la estrategia de ensayo y error, en el desarrollo de las primeras tareas, luego percibimos que se apropian de EAI y desarrollan procesos sistemáticos: primero movilizan un EU para elaborar un programa que construye un polígono regular y luego, crean EAI combinando paletas de programación del TortugArte para replicar la construcción inicial alrededor del polígono inicial. Este proceso sistemático requiere que los sujetos movilicen esquemas de utilización (EU y EAI) de las nociones de ángulo exterior y ángulo interior de un polígono regular. Por lo tanto, podemos concluir que, en esta última etapa de la secuencia didáctica, los sujetos movilizan con éxito un EU para elaborar un programa computacional que construye polígonos regulares de cualquier número de lados, lo cual pone de manifiesto la ocurrencia del proceso de instrumentalización de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995). De otro lado, observamos que dicho EU, orienta sus desempeños en lo que resta del programa, al permitirles crear con éxito, EAI para elaborar programas computacionales más complejos que construyen diseños geométricos con polígonos regulares de un solo tipo; este hecho caracteriza la ocurrencia del proceso de instrumentación de la Génesis Instrumental. Por lo tanto, la transformación del artefacto TortugArte en instrumento, en la mediación entre los sujetos y el objeto (estudiantes para profesor de Educación Primaria – programa computacional que construye diseños geométricos con polígonos regulares de un solo tipo) ha ocurrido satisfactoriamente.

- **Analizar las dificultades encontradas por los estudiantes para profesor de Educación Primaria al movilizar las propiedades matemáticas inherentes a los polígonos regulares.**

La instrumentalización del ángulo de giro, necesario para orientar el sentido de desplazamiento de la tortuga, aparece como la primera dificultad y está relacionada al concepto matemático de ángulo exterior de un polígono. Esta noción es un aspecto tratado superficialmente y hasta ignorado, cuando se aborda el estudio de los polígonos, no sucede lo mismo con la noción de ángulo interior. Las respuestas de los sujetos que participan de esta investigación, sobre dicha problemática, pone en evidencia que poseen un esquema conceptual incompleto respecto a la noción de ángulo exterior de un polígono y, además, son conscientes de su importancia para continuar con las tareas propuestas, mediadas por el TortugArte. Esta problemática se ha presentado, tanto en el trabajo individual de los sujetos como en el trabajo colectivo y fue superada de manera progresiva, utilizando la estrategia del ensayo y error. Concluimos que el éxito en las tareas depende fuertemente del conocimiento matemático sobre las nociones de ángulo exterior y de ángulo interior de un

polígono, así como también, de sus propiedades. Las entrevistas a los sujetos durante el desarrollo de las tareas, nos permite conocer que dicha problemática también es percibida por ellos.

Otra dificultad que observamos en el desarrollo de las tareas fue la medida del ángulo de giro. La instrumentalización inadecuada del transportador, al parecer motivado por la doble disposición (en sentido horario y antihorario) de la escala de medida de los ángulos en la herramienta, generó conflictos cognitivos. Esta situación los obligó a trabajar conectando dos escenarios posibles el papel y la pantalla: midiendo el ángulo en la guía de trabajo y verificando si el ángulo de giro obtenido produce la figura correcta, al ejecutar el programa computacional mostrado en la pantalla.

En relación a la noción de polígono regular no se presentaron dificultades conceptuales, esto ha facilitado la movilización de EAI para la elaboración de programas computacionales que permiten construir polígonos regulares de cualquier número de lados; el proceso tuvo un carácter inductivo, se empezó con la elaboración de programas computacionales para polígonos regulares de tres lados, cuatro lados, ... , treinta lados, permitiendo que los sujetos, esbocen un esquema de programa computacional genérico o algoritmo computacional, para construir un polígono regular de " n " lados y longitud de lado " l ". Sin embargo, debemos resaltar que la noción de patrón geométrico de una figura geométrica era algo nuevo y es un aspecto no abordado en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría; la asimilación conceptual de dicha noción no fue difícil.

Las dificultades concernientes a las limitaciones del espacio gráfico del TortugArte, para la visualización de los programas computacionales y sus respectivas construcciones geométricas, son resueltas mediante la instrumentalización de la propiedad de arrastre, conocimiento adquirido probablemente en el uso de otra tecnología. La tortuga y los programas computacionales son reubicados adecuadamente en la pantalla y el tamaño de la figura, reducida mediante la modificación del número de pasos de la tortuga.

Finalmente, creemos haber respondido a la pregunta de investigación, ya que el éxito en las tareas nos ha permitido observar el proceso de Génesis Instrumental en los estudiantes para profesor de Educación Primaria, es decir, se ha producido la apropiación tanto de las herramientas y recursos del TortugArte como de los contenidos matemáticos movilizados. Asimismo, para los sujetos de esta investigación, creemos que ha sido una oportunidad para ver, visualizar, manipular, conjeturar y representar objetos geométricos planos en un ambiente virtual. También, al desarrollar las tareas propuestas en la secuencia didáctica han podido experimentar que el software TortugArte puede contribuir a la enseñanza "dinámica" de los polígonos regulares y además, en situaciones de contexto.



Recomendaciones

De manera general, a partir de los resultados de esta investigación, creemos que se podrían desarrollar investigaciones sobre otras temáticas de la Geometría Plana, basadas en el Enfoque Instrumental de Rabardel y la interacción con ambientes virtuales de Geometría Dinámica.

Los resultados de esta investigación pueden servir para profundizar el estudio de los polígonos regulares en contexto, considerando teselaciones irregulares, las cuales incluyen más de un polígono regular.

Considerar otros estudios que utilicen el software TortugArte como un ambiente de Geometría Dinámica, cuya ventaja está en las posibilidades que el alumno tiene para elaborar conjeturas libremente y experimentarlas, identificar sus aciertos y errores de manera autónoma, luego reflexionar sobre su solución.

El TortugArte es un lenguaje de programación para niños, su aprendizaje puede servir para comprender la lógica de otros lenguajes como el WEDO, utilizado en robótica educativa.





Lista de referencias

- Artigue, M. (1995) Ingeniería didáctica. En P. Gómez. (Ed). Ingeniería didáctica en educación matemática. (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), En amont et en aval des ingénieries didactiques (pp. 225-237). Grenoble: La pensée sauvage.
- Bairral, M. (29 de setiembre-2 de octubre de 2013). Do clique ao touchscreen: Novas formas de interação e de aprendizado matemático. 36ª Reunião anual da APÊNd. http://36reuniao.anped.org.br/pdfs_trabalhos_aprovados/gt19_trabalhos_pdfs/gt19_2867_texto.pdf
- Barrantes, M. (2003). Concepciones sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. Un estudio en la formación inicial de los maestros. Campo abierto, 24, 47-67.
- Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo abierto, 27(1), 55-71. <https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985/1273>
- Barrantes, M., Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales, 8(1), 25-42.
- Barrantes, M., Balletbo, I. y Fernández, A. (2013). Enseñar Geometría en Secundaria. Academicus, 1(3), 26-33. http://www.ice.uabjo.mx/media/15/2017/04/Art3_3.pdf
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. PNA, 9(2), 107-127. <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6105/5424>
- Bellemain, F. y Trouche, L. (2016). Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online, 9(1) 105-144. https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/300
- Bittar, M. (2011). A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. Educar em Revista. N. Especial 1/2011, 157-171. <https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/22615/14845>

- Camarda, P. (2016). Ruralidades, educación y TIC: Desafíos urgentes para las políticas públicas educativas de integración de TIC. Sistema de Información de Tendencias Educativas en América Latina – SITEAL. <https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/5102>
- Carneiro, G. (2005). Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. *Zetetike*, 13(23), 87-120. <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981/13882>
- Do Amaral, J. (2013). O ensino de polígonos com o auxílio do GeoGebra no ensino Médio. (Trabalho apresentado para obtenção do título de mestre). Universidade Federal Do Vale Do São Francisco. Juazeiro. BA. https://portais.univasf.edu.br/profmat/dissertacoes/jose_rutenio_do_amaral_junior_turma_2011.pdf
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 213-234.
- Duval, R. (1995), Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland and J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a Cognitive Point of View. In C Mammana and V Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- García Cuéllar, D. (2014). Simetría axial mediado por el Geogebra: un estudio con alumnos de primer grado de Educación Secundaria (Tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/5651>
- Gomes, T. (2007). Ladrilhamento no plano com uso do software GeoGebra. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica). Universidade do Grande Rio “Prof. Jossé de Souza Herdy”. Rio do Janeiro, Brasil.
- Gonçalves, M. (2014). Uma abordagem para a construção de triângulos e do Teorema de Pitágoras mediada pelo software SuperLogo. Dissertação (Mestrado em Educação). Pontificia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. Brasil. <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11004/1/Mariana%20Dias%20Goncalves.pdf>

- Gumiere, A. (2018). Aplicação da técnica de ladrilhamento com polígonos regulares nos anos finais do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos. Brasil. <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/10191>
- Henrique, M. (2017). GeoGebra no Clique e na palma das mãos: Contribuições de uma dinâmica de aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro: Instituto Multidisciplinar Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Brasil
- Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica [IPEBA]. (2013). Mapas de progreso del aprendizaje. Matemática: Geometría. Ministerio de Educación del Perú. <http://disde.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/4425>
- Jesus, G. B. (2008). Construções geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11316>
- Laura C. (2015). Maestros y computadoras portátiles en el Perú: ¿por qué no se usan las computadoras portátiles? *Apertura*, 7(1), 1-18.
- Ministerio de Educación. (2007). Aplicando las tecnologías de la información y comunicación (TIC): El programa “Una Laptop por Niño”. <http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/4745>
- Ministerio de Educación. (2017). Currículo Nacional de la Educación Básica. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>
- Ministerio de Educación. (2005). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular. Perú
- Ministerio de Educación. (2008). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular. Perú
- Ministerio de Educación. (2010). Actividad TortugArte. Instructivo. Perú.
- Ministerio de Educación. (2012). Marco de Buen Desempeño Docente. Para mejorar tu práctica como maestro y guiar el aprendizaje de tus estudiantes. Perú
- Ministerio de Educación. (2015). Rutas del Aprendizaje. ¿Qué y cómo aprenden nuestros niños y niñas? Perú
- Ministerio de Educación. (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica. Perú
- Ministerio de Educación. (2017). Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Perú
- Motta, M. Silveira, I. (2010). Contribuições do SuperLogo ao ensino de geometria. *Informática na Educação: teoria & prática*, 13(1), 115-127. <https://doi.org/10.22456/1982-1654.9142>

- National of Council of Teacher of Mathematics. (2003). Principios y estándares para la educación matemática (Trad.M. Fernández). Sociedad Andaluza de Educación Matemática (Trabajo original publicado en 2000).
- Oliveira, G. (2013). Mídias e Formação Continuada de Professores de Matemática: da “fluência digital” ao “pensar com tecnologias” – uma trajetória.
- Oliveira, G., Dias, M. y Marquetti, C. (2015). Reflexões acerca da tecnologia e sua inserção na pesquisa em educação matemática. III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. *Educação Matemática pesquisa*, 17(3), 472-489. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25665/pdf>
- One Laptop per Child (2005). OLPC. Worldwide over 2.4 million children and teachers have XO laptops. <http://one.laptop.org>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Coli. Paris.
- Robert, A y Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher’s activity. An example in a french 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics*, 59 (pp. 269-298). Berling: Springer
- Salazar, J. y Gaita, R. (2015). Educación matemática en el Perú: avances y perspectivas. En: *La Educación Matemática en el Siglo XXI*. (pp. 257-276) Distrito Federal: secretaria académica del Instituto Politécnico Nacional. Brasil
- Salazar, J. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. Tese (Doutorado em Educação). Pontificia Universidade de São Paulo, Brasil.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: a theory of mathematics education*. Academic Press.
- Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology in Education*, 9(3), 77-101.
- Zuchi, I. (2008). A integração dos ambientes tecnológicos em sala: Novas potencialidades e novas formas de trabalho. 2° Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasil.

Apéndices





Apéndice A. Actividad 1: Introducción al TortugArte

ACTIVIDAD 1. Introducción al TortugArte

Nombres y apellidos:

PARTE I. Introducción a la lógica del software TortugArte

Participan todos los estudiantes. Empiecen por elegir dos personas de entre ustedes, un hombre y una mujer para vendarlos.

Objetivo



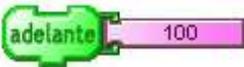
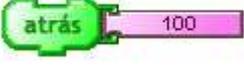
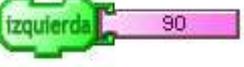
Con la mujer vendada, los demás estudiantes deberán indicar la dirección y la cantidad de pasos que debe ejecutar para llegar a un determinado lugar. Repetir la actividad con la otra persona vendada. Luego, escribir la secuencia de órdenes dadas a las personas vendados para llegar a la meta establecida después de superar los obstáculos.

E1 (mujer)	E2 (hombre)
.....
.....
.....

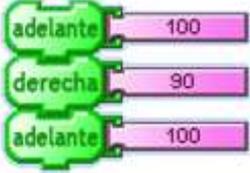
PARTE II. Exploración de los comandos básicos del TortugArte y construcción de figuras geométricas.

En la computadora, localiza el ícono  del software TortugArte, luego explora y ejecuta los comandos básicos «adelante», «atrás», «derecha», «izquierda», «limpiar», disponibles como paletas en el bloque **TORTUGA**. Haz clic sobre cada comando y arrástralo a la zona donde está la tortuga, luego, haciendo doble clic sobre el comando podrás visualizar la figura o camino recorrido por la tortuga. Para borrar el camino, haz doble clic sobre el comando «limpiar» o el ícono del **borrador**. El número mostrado en los comandos indica el número de pasos que da la tortuga o el número de grados que gira; este valor numérico aparece por defecto, se puede modificar haciendo clic sobre el número y luego, reescribiendo el nuevo valor.

a) COMANDOS BÁSICOS: «adelante», «atrás», «derecha», «izquierda», «limpiar»

Comando	Describe con tus propias palabras qué acción realiza la tortuga, cuando usas un comando TortugArte.
	<p>.....</p> <p>.....</p>
	<p>.....</p> <p>.....</p>
	<p>.....</p> <p>.....</p>
	<p>.....</p> <p>.....</p>
	<p>.....</p> <p>.....</p>
	<p>.....</p> <p>.....</p>

b) **COMBINACIÓN DE COMANDOS.** Puedes combinar comandos, uniéndolos como un puzle o rompecabezas.

Secuencia de comandos o programa	Figura o camino recorrido por la tortuga
	

¿Escribe con tus propias palabras, cómo se mueve la tortuga cuando ejecutas el programa TortugArte?

.....

.....

Secuencia de comandos o programa	Figura o camino recorrido por la tortuga
	

¿Escribe con tus propias palabras, cómo se mueve la tortuga cuando ejecutas el programa TortugArte?

.....

.....

Ahora, construye la secuencia de comandos o programa, según la siguiente descripción del camino a recorrer por la tortuga: ***“45 hacia la derecha + 100 hacia arriba, 60 hacia la izquierda + 50 hacia adelante y 130 hacia la izquierda + 100 hacia abajo”***.

Secuencia de comandos o programa	Figura o camino recorrido por la tortuga

c) **COMANDO: «repetir».** Explora el bloque FLUJO del TortugArte, selecciona la paleta «repetir» y arrástralo a la zona de la tortuga. Luego, utilizando el programa construido en el ejercicio anterior, combínalo con el comando «repetir» para obtener un nuevo programa.

Visualiza los siguientes casos: «repetir: 2», «repetir: 3», «repetir: 5», «repetir: 10», «repetir: 15», «repetir: 20».

	Programa	Figura o camino recorrido por la tortuga
«repetir 2»		
«repetir 3»		
«repetir 5»		
«repetir 10»		
«repetir 20»		

¿Explica con tus propias palabras, qué acciones realiza la tortuga cuando utilizas el comando «repetir» y ejecutas el programa TortugArte? ¿Qué sucede con el camino inicial de la tortuga?

.....

d) CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS. Utilizando los comandos básicos del TortugArte construye las figuras: **A, B, C, D** y **E**. Recuerda que los números indicados al lado de cada segmento indican el número de pasos de la tortuga. Antes de empezar a elaborar el programa, describe con tus propias palabras los comandos que debes proporcionarle a la tortuga para realizar la figura.

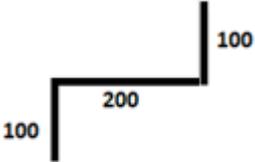
Figura A	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
		

Figura A:

.....

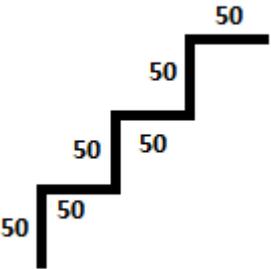
Figura B	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
		

Figura B:

.....

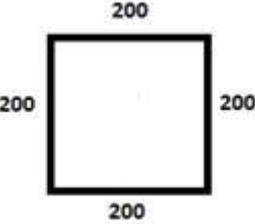
Figura C	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
		

Figura C:

.....

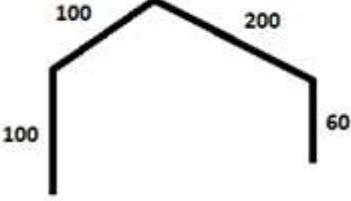
Figura D	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
		

Figura D:

.....

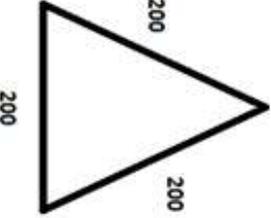
Figura E	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
		

Figura E:

.....

¿Cuáles de las figuras fueron fáciles de construirlas y cuáles fueron las más difíciles? ¿Por qué?

.....

.....

Explica cómo resuelves el problema de los ángulos, en la construcción de líneas poligonales tanto abiertas como cerradas:

.....

¿Observas algún concepto geométrico ya estudiado y que está presente en las actividades propuestas? ¿Cuál(es)?

.....

Apéndice B. Actividad 2: Construcción de polígonos regulares con el TortugArte

ACTIVIDAD 2. Construcción de polígonos regulares con el TortugArte

Nombres y apellidos:

a) Polígonos regulares I. Utiliza los comandos básicos del TortugArte: «adelante», «atrás», «derecha», «izquierda», «repetir» para construir un cuadrado, un triángulo equilátero, un pentágono regular y un hexágono regular.

CUADRADO	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
-----------------	--------------------------------------	-----------------

TRIÁNGULO EQUILÁTERO	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
-----------------------------	--------------------------------------	-----------------

PENTÁGONO REGULAR	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
--------------------------	--------------------------------------	-----------------

HEXÁGONO REGULAR	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
-------------------------	--------------------------------------	-----------------

b) Polígonos regulares II. Construir polígonos regulares de 7 lados, 8 lados, 9 lados, 10 lados, 12 lados, 20 lados, 30 lados, ...

HEPTÁGONO REGULAR	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
--------------------------	--------------------------------------	-----------------

OCTÓGONO REGULAR	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
-------------------------	--------------------------------------	-----------------

NONÁGONO REGULAR	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
POLIGONO REGULAR DE 10 LADOS	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
POLÍGONO REGULAR DE 12 LADOS	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
POLIGONO REGULAR DE 20 LADOS	Dibujo o camino de la tortuga	Programa
POLIGONO REGULAR DE 30 LADOS	Dibujo o camino de la tortuga	Programa

Finalmente, utilizando los elementos gráficos del TortugArte, deberá esbozar un programa computacional generalizado que le permita construir un polígono regular de “ n ” lados y de lado igual a “ l ”.

.....

Apéndice C. Actividad 3: Diseños geométricos con polígonos regulares de un solo tipo

ACTIVIDAD 3. Diseños geométricos con polígonos regulares

Nombres y apellidos:

Mathías quiere cubrir el piso de su dormitorio, con cerámicas que tienen formas de polígonos regulares: *triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, ...* Pero, antes de comprarlas, necesita saber cuáles son las formas de las cerámicas que le sirven para cubrir el piso, sin dejar espacios vacíos ni superponerse una a la otra. Además, el cubrimiento debe ser con cerámicas de un solo tipo.



¿Puedes ayudar a Mathías a seleccionar las cerámicas?

¿Qué formas de cerámicas le recomendarías? ¿Cuáles?

¿Le sirve cualquier forma de cerámica?

Utilizando el lenguaje de programación visual TortugArte, elabora programas computacionales para construir diseños geométricos con polígonos regulares del mismo tipo, que muestren el cubrimiento o teselado de una determinada área del plano, sin dejar espacios vacíos entre los polígonos ni superponerse uno al otro.

Tipos de cerámicas	Programa	Teselado
TRIANGULARES		
CUADRADOS		
PENTAGONALES		
HEXAGONALES		
HEPTAGONALES		
...		