



UNIVERSIDAD  
DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL  
PIRHUA

# CAPÍTULO 24: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS (IV)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas



Esta obra está bajo una [licencia](#)  
[Creative Commons Atribución-](#)  
[NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú](#)

Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura



# **UNIVERSIDAD DE PIURA**

---

## **Capítulo 24: Resolución de Triángulos Esféricos (IV)**

### **D. Ejemplos de aplicación de triángulos esféricos**

## **GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA CLASES**

---

---

## CAPÍTULO XXIV: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

---

### D. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

---

#### EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

**Calcular la distancia entre Piura y Buenos Aires, sabiendo que sus coordenadas son:**

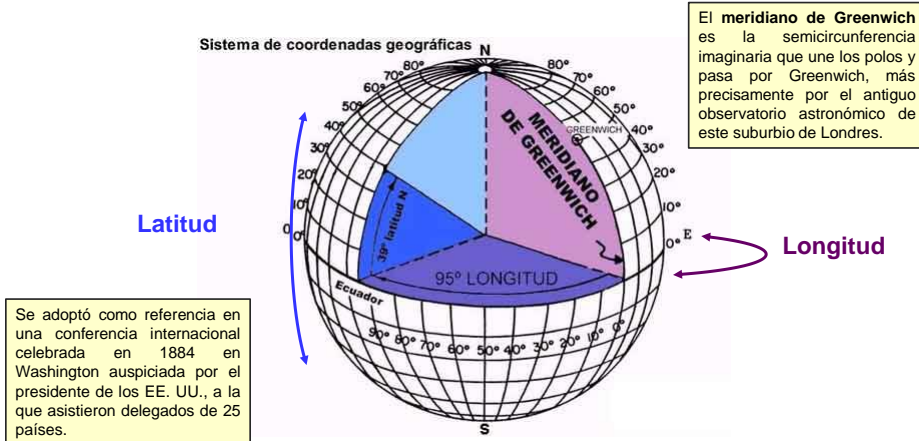
Piura:	latitud $5^{\circ}11'$ sur longitud $80^{\circ}36'$ oeste
Buenos Aires:	latitud $34^{\circ}35'$ sur longitud $58^{\circ}29'$ oeste.

Se supondrá (de acuerdo con la definición del metro) que la circunferencia máxima terrestre mide 40000 km.

---

## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

Recordemos el sistema de coordenadas geográficas



## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

El triángulo formado por el Polo Norte (N) - Piura (P) -Buenos Aires (B.A.), que llamaremos triángulo esférico ACB tiene:

**En el P. Norte**

$$\sphericalangle A = \text{longitud } 80^{\circ}36' \text{ oeste} - \text{longitud } 58^{\circ}29' \text{ oeste}$$

$$\sphericalangle A = 80^{\circ}36' - (58^{\circ}29') = 22^{\circ}7'$$

$$\sphericalangle A = 22^{\circ}7'$$

**Lado P. Norte – Piura.**

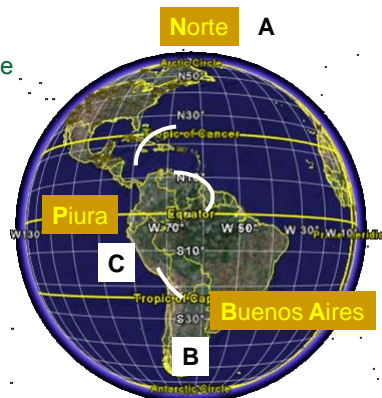
$$b = 90^{\circ} + \text{latitud } 5^{\circ}11' \text{ sur}$$

$$b = 90^{\circ} + 5^{\circ}11' = 95^{\circ}11'$$

**Lado P. Norte – Buenos Aires**

$$c = 90^{\circ} + \text{latitud } 34^{\circ}35' \text{ sur}$$

$$c = 90^{\circ} + 34^{\circ}35' = 124^{\circ}35'$$



## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

El lado **a** representa la distancia buscada.

$$\sphericalangle A = 80^{\circ}36' - (58^{\circ}29') = 22^{\circ}7'$$

$$b = 90^{\circ} + 5^{\circ}11' = 95^{\circ}11'$$

$$c = 90^{\circ} + 34^{\circ}35' = 124^{\circ}35'$$

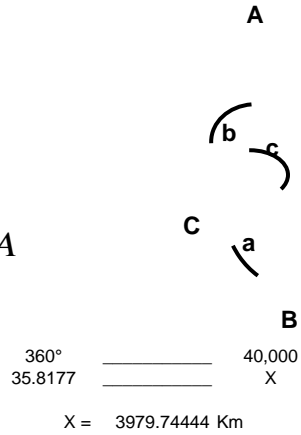
**Caso 1 (dos lados y el ángulo comprendido)**

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

	$\sphericalangle A$	b	c
	22°7'	95°11'	124°35'
cos	0.92641915	-0.09034289	-0.56760428
sen	0.37649376	0.99591072	0.82330151

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

cos a	0.81088231
a°	35.8177744
a° ''	35°49'03.98"



**Distancia Piura – BB. AA. : 3979.74 Km**

## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

**Distancia en línea recta**

$$r \quad a^{\circ} \quad r$$

$$d^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(a^{\circ})$$

$$d = \sqrt{2r^2(1 - \cos a^{\circ})}$$

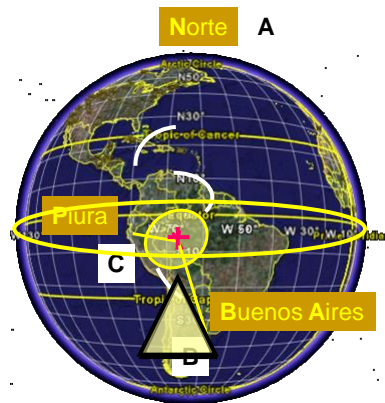
$$r = 40,000/2\pi = 6,366$$

$$a^{\circ} = 35.8177744$$

$$d = 3915.26529$$

**Distancia (línea recta) Piura – BB. AA. : 3915.26 Km**

**Distancia (Sup. Esférica) Piura – BB. AA. : 3979.74 Km**





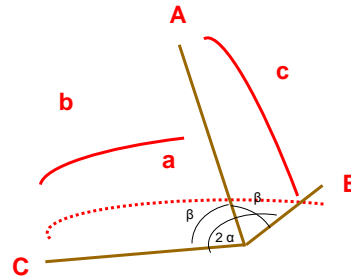
## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

∠ A: Ángulo diedro cara - cara

$$a = 2\alpha = 135^\circ$$

$$b = c = \beta = 80^\circ$$

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\text{sen}b \cdot \text{sen}c}$$



$$\cos A = \frac{\cos 135^\circ - \cos 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\text{sen}80^\circ \cdot \text{sen}80^\circ} = -0.760182$$

$$A = 139.480315^\circ = 139^\circ 28' 49.13''$$

## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

### Ángulo sólido en el vértice de la pirámide

La superficie de un triángulo rectángulo vale:

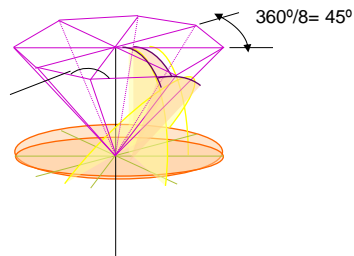
$$S_t = \frac{A + B + C - 180^\circ}{180^\circ} \times \pi \times r^2 = \frac{69.740^\circ + 69.740^\circ + 45^\circ - 180}{180^\circ} \times \pi \times r^2 = \frac{4.4806}{180} \times \pi \times r^2$$

Los 8 triángulos esféricos que forman el octógono tienen:

$$S_p = 8 \times \frac{4.4806}{180} \times \pi \times r^2$$

El ángulo sólido en el vértice de la pirámide vale:

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = 8 \times \frac{4.4806}{180} \times \pi = 0.6256 \text{ esterorradianes}$$



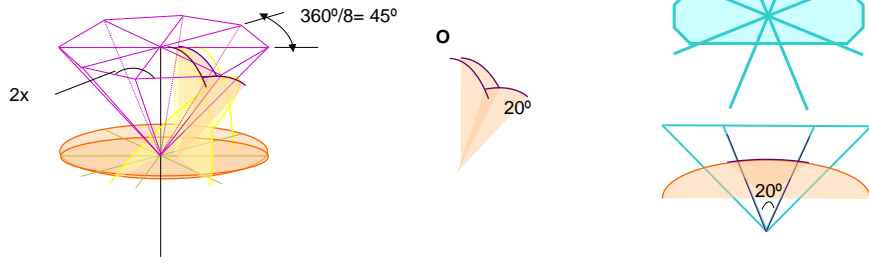


## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

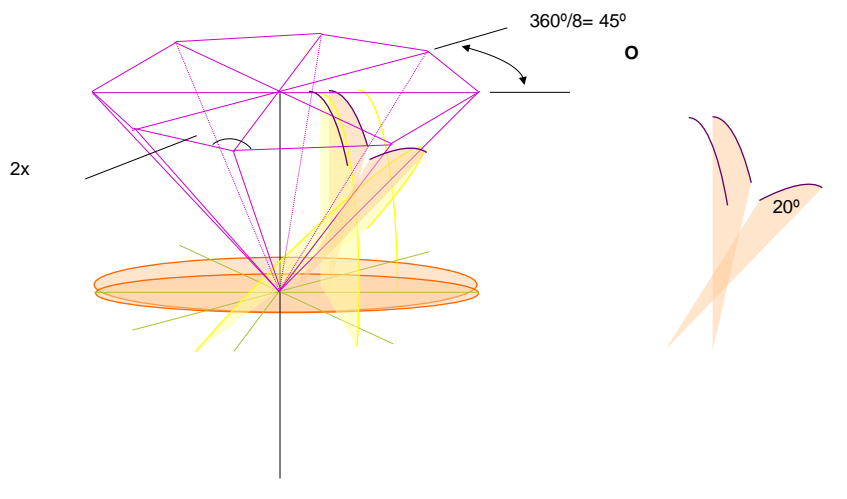
**El ángulo que forman dos aristas laterales contiguas de una pirámide octogonal regular es  $20^\circ$ . Calcular los diedros laterales de dicha pirámide y el ángulo sólido en el vértice.**

Cortando dicha pirámide por una esfera de centro en el vértice y radio  $r$ , obtenemos un octógono regular esférico:

Segundo Método

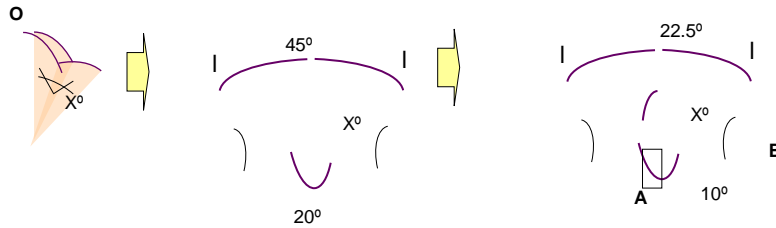


## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA



## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

Uniendo el centro O con los vértices se forman 8 triángulos isósceles.  
 Tomamos uno cualquiera de ellos: \_\_\_\_\_



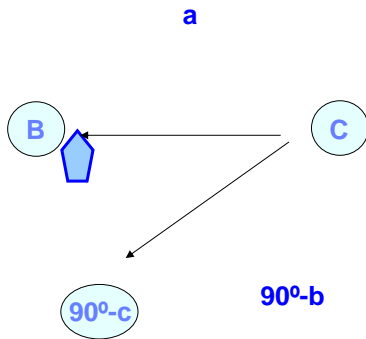
Buscamos el **ángulo diedro (2x)**, por tanto interesa encontrar **∠ B** en el triángulo esférico rectángulo.

También buscamos el **ángulo sólido (Ω=S/r²)**, en el vértice de la pirámide, es decir, nos interesa calcular la superficie octogonal esférica.

## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

### Ángulo diedro de las áreas laterales

Descomponiendo el triángulo en 2 triángulos rectángulos,  $x=B$  buscando; según la regla mnemotécnica de Néper:



$$\cos C = \text{sen } B \cdot \text{sen}(90^\circ - c) = \text{sen } B \cdot \cos c$$

$$\text{sen } B = \frac{\cos C}{\cos c}$$

	$\angle C$	$c$
	$22.5^\circ$	$10^\circ$
cos	0.92387953	0.98480775

$$\text{sen } B = (\cos C) / (\cos c)$$

sen B	0.93813186
B°	69.7401573
(2x)°	139.480315
(2x)° ' "	139°28'49.13"

**Ángulo diedro (2x) = 139°28'49.13"**

## EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE T. ESFÉRICA

### Ángulo sólido en el vértice de la pirámide

La superficie de un triángulo rectángulo vale:

$$S_t = \frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ} \times \pi \times r^2 = \frac{90^\circ + 69.740 + 22^\circ.5 - 180}{180^\circ} \times \pi \times r^2 = \frac{2.2403}{180} \times \pi \times r^2$$

Los 16 triángulos rectángulos que forman el octógono tienen:

$$S_p = 16 \times \frac{2.2403}{180} \times \pi \times r^2$$

El ángulo sólido en el vértice de la pirámide vale:

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = 16 \times \frac{2.2403}{180} \times \pi = 0.6256 \text{ esterorradianes}$$