CAPÍTULO 23: ESFERA Y TRIÁNGULOS ESFÉRICOS (II)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 23: Esfera y Triángulos Esféricos (II)

E. Propiedades del triángulo esférico

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

13 diapositivas

CAPÍTULO XXIII: ESFERA Y TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

E. PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

E. PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

Dado que cada triángulo esférico tiene su triedro asociado,podemos deducir de las propiedades del triedro convexo, otras análogas para el triángulo.

http://www.walter-fendt.de/m11s/sphertriangle_s.htm

http://mathworld.wolfram.com/SphericalTriangle.html

E. PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

TEOREMA XXIII-3

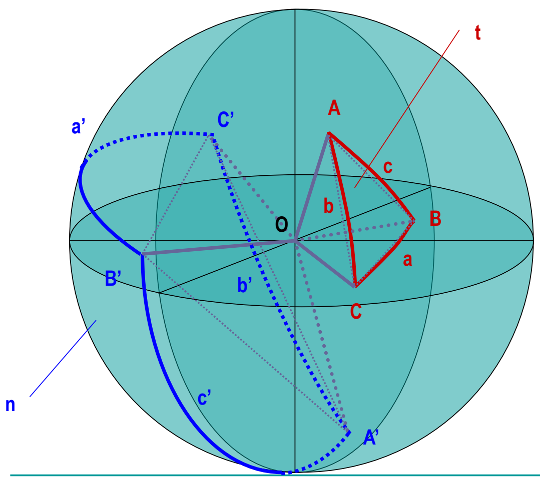
A todo triángulo esférico convexo corresponde otro triángulo, también convexo, llamado polar o suplementario del primero. Los lados y ángulos de un triángulo son, respectivamente, suplementarios de los ángulos y lados del triángulo polar.

Demostración:

A un triángulo **t** corresponde un triedro asociado **n**; y éste tiene un triedro polar n´, al cual corresponde un triángulo t'. El resto se deduce en forma inmediata de los teoremas XXII-5: "Dado un triedro convexo y su triedro polar, las caras de uno de ellos son suplementarias de los diedros del otro". y XXIII-2.

E. PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

TEOREMA XXIII-4



OA' ⊥ - BOC

OB' ⊥ - AOC

OC' ⊥ - AOB

∡A'OB' +∡C= 180º

∡B'OC' +∡A= 180º

∡C'OA' +∡B= 180º

∡c' +∡C= 180º

∡a' +∡A= 180º

∡b' +∡B= 180º

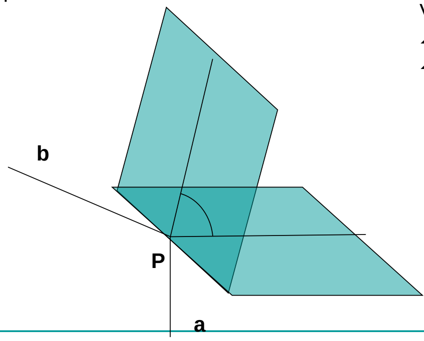
Ángulos de rectas y planos

Capítulo XXII

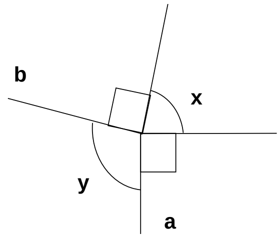
TEOREMA XXII-3

Si por un punto P de la arista de un diedro convexo trazamos 2 semirrectas perpendiculares a las caras en distintos semiespacios que los que contienen al diedro, el ángulo que forman es suplementario del diedro.

Trazamos por **P** el rectilíneo del diedro y las semirrectas **a** y **b** están en el plano perpendicular a la arista.



Vistos en este plano, se observa que:
∡x + 90° + 90°+ ∡y = 360°
∡x + ∡y = 180°.

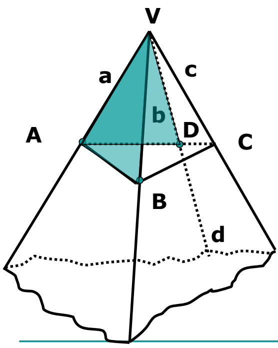


E. PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

TEOREMA XXIII-4

Un lado de un triángulo esférico convexo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Demostración: Se deduce del teorema XXII-6 : "Una cara de un triedro convexo es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia".



Sea un triedro, en que suponemos que la cara mayor es **ac**.
Si demostramos que esa cara es menor que la suma de las otra dos, quedará demostrado también para las caras más pequeñas.

En la cara **ac** trazamos **d** tal que **ad** = **ab**.

Tomamos **VB** = **VD** arbitrario; tomamos **A** y lo unimos con **B** y **D** obteniendo **C**.

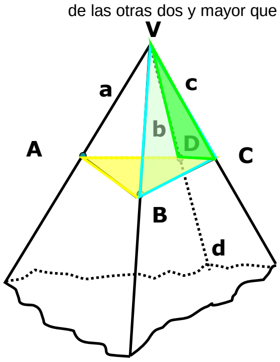
Los triángulos **VAB** y **VAD** son congruentes: tienen **VA** común, **VD** = **VB** por construcción; ángulo **AVB** = **AVD** por construcción. Luego **AD** = **AB**

E. PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

TEOREMA XXIII-4

Un lado de un triángulo esférico convexo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Demostración: Se deduce del teorema XXII-6 : "Una cara de un triedro convexo es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia".



En el triángulo **ABC**: BC > AC – AB = AC – AD = DC.

Los triángulos **VBC** y **VDC** tienen lados: VC común; VD = VB; BC > DC.

Según el teorema VI-5 de "Apuntes de Geometría", en 2 triángulos que tienen dos lados respectivamente iguales y el tercer lado desigual, a mayor lado se opone mayor ángulo:

Por tanto:

bc> **dc**
dc= **ac** – **ab**

Es decir, **bc > ac – ab** ó
ac < ab + bc

E. PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

TEOREMA XXIII-5

En un triángulo esférico convexo, a mayor ángulo se opone mayor lado y recíprocamente. A lados iguales se oponen ángulos iguales y recíprocamente (triángulos isósceles y equiláteros).

Demostración:

Se deduce del teorema XXII-7 : "En un triedro convexo, a mayor cara se opone mayor diedro y recíprocamente, A caras iguales se oponen diedros iguales y recíprocamente (triedro isósceles)".

E. PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

TEOREMA XXIII-6

La suma de los lados de un triángulo esférico convexo es menor que 4 rectos.

Demostración:

Se deduce del teorema XXII-8 : “La suma de las caras de un triedro convexo es menor que 4 rectos”.

Triedro Polar o Suplementario

Capítulo XXII

TEOREMA XXII-8

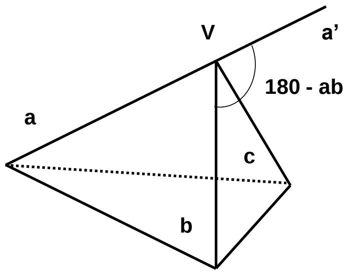
La suma de las caras de un triedro convexo es menor que 4 rectos.

Sea un triedro convexo **a b c** , y prolongamos la arista **a**

Se forma el triedro convexo **a’ b c**, en el que la cara **bc** es menor que la suma de las otras dos:

bc < 180° - **ab** + 180° - **ac** ;

ab + **bc** + **ac** < 360° =4R



E. PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

TEOREMA XXIII-7

La suma de los ángulos de un triángulo convexo está comprendida entre 2 y 6 rectos.

Demostración:

Se deduce del teorema XXII-9 : "La suma de los diedros de un triedro convexo está comprendida entre 2 y 6 rectos".

Triedro Polar o Suplementario

Capítulo XXII

TEOREMA XXII-9

La suma de los diedros de un triedro convexo está comprendida entre 2 y 6 rectos

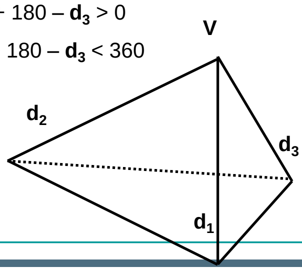
Sea un triedro convexo de diedros $\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$ y $\mathbf{d_3}$

y su diedro polar, de caras $\mathbf{180\text{-}d_1}$, $\mathbf{180\text{-}d_2}$ y $\mathbf{180\text{-}d_3}$.

La suma de las caras del triedro polar debe ser mayor que cero y menor que 4 rectos:

$180 – \mathbf{d_1} + 180 – \mathbf{d_2} + 180 – \mathbf{d_3} > 0$

$180 - \mathbf{d_1} + 180 – \mathbf{d_2} + 180 – \mathbf{d_3} < 360$



de donde, por transformación algebraica:

$\mathbf{d_1} + \mathbf{d_2} + \mathbf{d_3} > 180° = 2R$
$\mathbf{d_1} + \mathbf{d_2} + \mathbf{d_3} < 540° = 6R.$

RESUMEN DE TEOREMAS

Teorema		
XXIII-1	El ángulo que forman dos círculos máximos que se cortan en V, es igual al arco que abarca en un círculo máximo cuyo polo sea V.	∡ A = arco MN
XXIII-2	Los lados (a, b y c) y ángulos (A, B y C) de un triángulo esférico son iguales -a los ángulos- de las caras y -a los ángulos de- los diedros de su triedro asociado, respectivamente .	Lado a = ∡ COB ∡ A = ∡ diedro CAO - BAO
XXIII-3	A todo triángulo esférico convexo corresponde otro triángulo, también convexo, llamado polar o suplementario del primero. Los lados y ángulos de un triángulo son, respectivamente, suplementarios de los ángulos y lados del triángulo polar.	∡c' +∡C= 180º ∡a' +∡A= 180º ∡b' +∡B= 180º
XXIII-4	Un lado de un triángulo esférico convexo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.	∡a < ∡b + ∡c
XXIII-5	En un triángulo esférico convexo, a mayor ángulo se opone mayor lado y recíprocamente. A lados iguales se oponen ángulos iguales y recíprocamente (triángulos isósceles y equiláteros).	Si ∡A > ∡B entonces ∡a > ∡b
XXIII-6	La suma de los lados de un triángulo esférico convexo es menor que 4 rectos.	∡a + ∡b + ∡c < 360° =4R
XXIII-7	La suma de los ángulos de un triángulo convexo está comprendida entre 2 y 6 rectos.	∡A+ ∡B + ∡C > 180° = 2R ∡A+ ∡B + ∡C < 540° = 6R