UNIVERSIDAD DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL PIRHUA

CAPÍTULO 22: INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA (III)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Esta obra está bajo una licencia
Creative Commons Atribución-
NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú

Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 22: Introducción a la Trigonometría Esférica (III)

C. Triedro polar o suplementario

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

10 diapositivas

CAPÍTULO XXII: INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

C. TRIEDRO POLAR O SUPLEMENTARIO

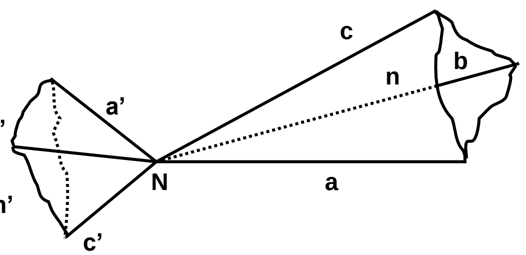
C. Triedro Polar o Suplementario

Dado un **triedro convexo n**, se llama **triedro polar** o suplementario de **n** a otro triedro convexo **n'**, cuyas aristas son 3 semirrectas que:

a) arrancan del vértice de **N**

b) son perpendiculares a las caras de **n**

c) están en distinto semiespacio que el ocupado por **n** respecto a sus caras.



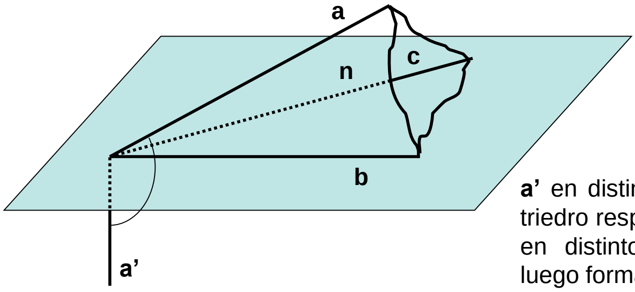
C. Triedro Polar o Suplementario

TEOREMA XXII-4

Si un triedro convexo **n’** es polar de otro **n**, también **n** es polar de **n’.**

Sean **a**, **b** y **c** las aristas de **n**; y **a’**, **b’** y **c’** las de **n’**.

a’ es perpendicular a **b** y **c**



a’ en distinto semiespacio que el triedro respecto al plano **bc** y está en distinto semiespacio que **a**: luego forma ángulo obtuso con **a**:

C. Triedro Polar o Suplementario

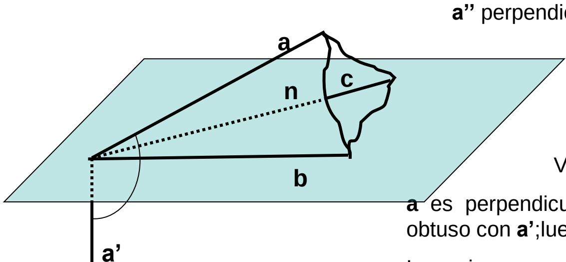
TEOREMA XXII-4

Si un triedro convexo **n’** es polar de otro **n**, también **n** es polar de **n’.**

Resumamos estas condiciones:
a’ perpendicular a: **b**, **c**, ángulo obtuso con **a**
b’ perpendicular a: **a**, **c**, ángulo obtuso con **b**
c’ perpendicular a: **a**, **b**, ángulo obtuso con **c**

Si ahora construyéramos el triedro **n’’**, polar de **n’**, y con aristas **a’’**, **b’’** y **c’’**:

a’’ perpendicular a: **b’**, **c’**, ángulo obtuso con **a’**



Vemos en el resumen anterior que:

a es perpendicular a: **b’** y **c’** y forman ángulo obtuso con **a’**;luego **a’’** coincide con **a**.

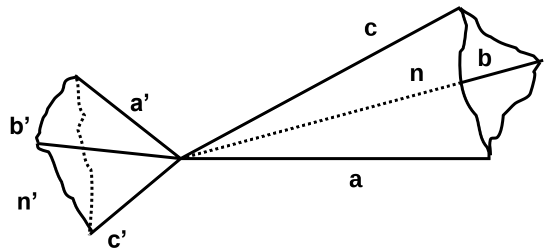
Lo mismo pasaría con **b** y **b’’**, **c** y **c’’**, quedando demostrado el teorema.

C. Triedro Polar o Suplementario

TEOREMA XXII-5

Dado un triedro convexo y su triedro polar, las caras de uno de ellos son suplementarias de los diedros del otro.

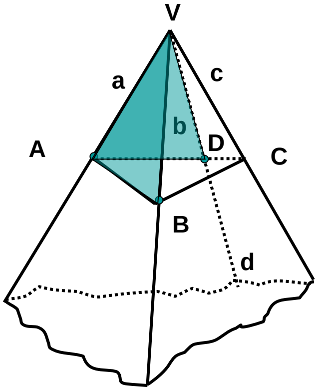
En virtud del teorema XXII-3, las caras de **n’** serán suplementarias de los diedros de **n**; y a su vez las caras de **n** lo son de los diedros de **n’**.



C. Triedro Polar o Suplementario

TEOREMA XXII-6

Una cara de un triedro convexo es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.



Sea un triedro, en que suponemos que la cara mayor es **ac**.

Si demostramos que esa cara es menor que la suma de las otra dos, quedará demostrado también para las caras más pequeñas.

En la cara **ac** trazamos **d** tal que **ad** = **ab**.

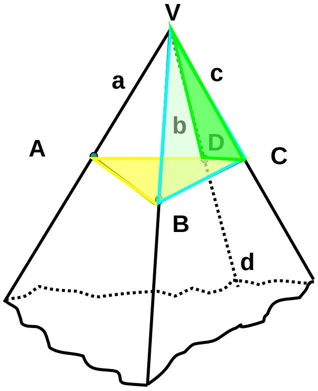
Tomamos **VB** = **VD** arbitrario; tomamos **A** y lo unimos con **B** y **D** obteniendo **C**.

Los triángulos **VAB** y **VAD** son congruentes: tienen **VA** común, **VD** = **VB** por construcción; ángulo **AVB** = **AVD** por construcción. Luego **AD** = **AB**

C. Triedro Polar o Suplementario

TEOREMA XXII-6

Una cara de un triedro convexo es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.



En el triángulo **ABC**: BC > AC – AB = AC – AD = DC.

Los triángulos **VBC** y **VDC** tienen lados: VC común;
VD = VB; BC > DC.

Según el teorema VI-5 de "Apuntes de Geometría", en 2 triángulos que tienen dos lados respectivamente iguales y el tercer lado desigual, a mayor lado se opone mayor ángulo:
Por tanto:

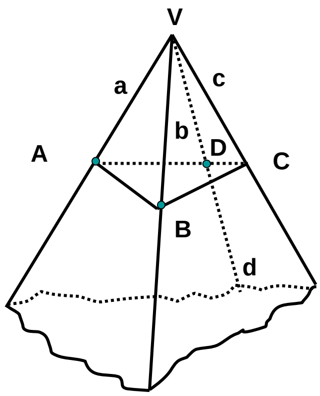
<u>bc</u>> <u>dc</u>
<u>dc</u>= <u>ac</u> – <u>ab</u>

Es decir, **<u>bc</u> > <u>ac</u> – <u>ab</u>** **ó**
<u>ac</u> < <u>ab</u> + **<u>bc</u>**

C. Triedro Polar o Suplementario

TEOREMA XXII-7

En un triedro convexo, a mayor cara se opone mayor diedro y recíprocamente, A caras iguales se oponen diedros iguales y recíprocamente (triedro isósceles).



C. Triedro Polar o Suplementario

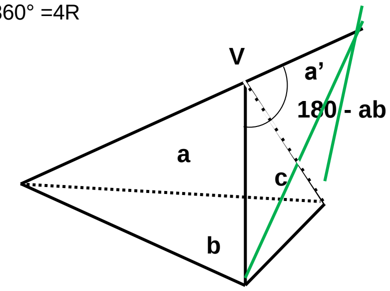
TEOREMA XXII-8

La suma de las caras de un triedro convexo es menor que 4 rectos.

Sea un triedro convexo **a b c** , y prolongamos la arista **a**

Se forma el triedro convexo **a’ b c**, en el que la cara **bc** es menor que la suma de las otras dos:

bc < 180° - **ab** + 180° - **ac** ;
ab + **bc** + **ac** < 360° =4R



C. Triedro Polar o Suplementario

TEOREMA XXII-9

La suma de los diedros de un triedro convexo está comprendida entre 2 y 6 rectos

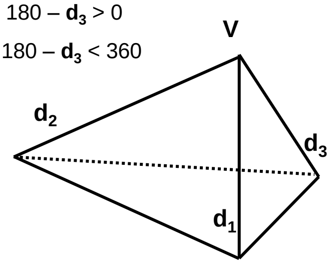
Sea un triedro convexo de diedros $\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$ y $\mathbf{d_3}$

y su diedro polar, de caras **180-**$\mathbf{d_1}$, **180-**$\mathbf{d_2}$ y **180-**$\mathbf{d_3}$.

La suma de las caras del triedro polar debe ser mayor que cero y menor que 4 rectos:

$180 - \mathbf{d_1} + 180 - \mathbf{d_2} + 180 - \mathbf{d_3} > 0$

$180 - \mathbf{d_1} + 180 - \mathbf{d_2} + 180 - \mathbf{d_3} < 360$



de donde, por transformación algebraica:

$\mathbf{d_1} + \mathbf{d_2} + \mathbf{d_3} > 180° = 2R$
$\mathbf{d_1} + \mathbf{d_2} + \mathbf{d_3} < 540° = 6R.$