CAPÍTULO 21: FUNCIÓN DE ONDA (II)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 21: Función de Onda (II)

2. Teoremas

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

12 diapositivas

CAPÍTULO XXI: FUNCIÓN DE ONDA

B. TEOREMAS

B. TEOREMAS

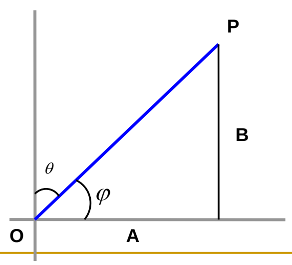
TEOREMA XXI-1

$$y = A sen\omega t + B\cos\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\, sen(\omega t + \varphi)$$ siendo

$$\varphi = arc\,tg\frac{B}{A} = arc\,sen\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = arc\,cos\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

DEMOSTRACIÓN

Si colocamos en un plano cartesiano A y B, como coordenadas de un punto P,



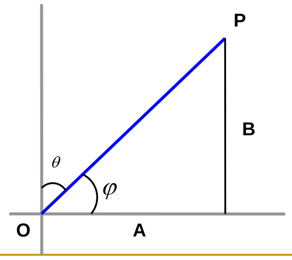
B. TEOREMAS

TEOREMA XXI-1

Y llamamos φ al argumento de OP: $\tan\varphi = \frac{B}{A}$

$$y = A(sen\omega\, t + \frac{B}{A} cos\omega\, t) = A(sen\omega\, t + \frac{sen\varphi}{cos\varphi} cos\omega\, t) =$$

$$\frac{A}{cos\varphi}(sen\omega\, t cos\varphi + cos\omega\, t sen\varphi) = \sqrt{A^2 + B^2}\, sen(\omega\, t + \varphi)$$



B. TEOREMAS

TEOREMA XXI-2

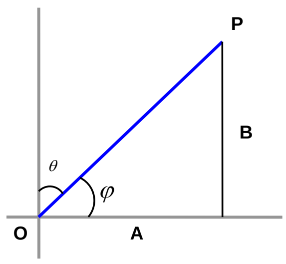
$$y = Asen\omega\, t + Bcos\omega\, t = \sqrt{A^2 + B^2}\, cos(\omega\, t - \theta) \quad \text{siendo} \quad \theta = 90^{\circ} - \varphi$$

DEMOSTRACIÓN

$$tan\theta = cot\varphi = \frac{A}{B}$$

$$sen\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$cos\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



B. TEOREMAS

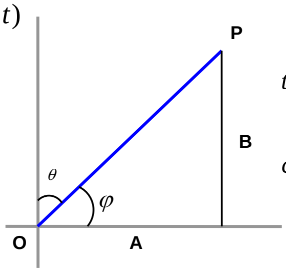
TEOREMA XXI-2

$$y = A sen\omega t + B cos\omega t$$

$$y = B(\frac{A}{B} sen\omega t + \cos\omega t) = B\left(\frac{sen\theta}{Cos\theta} sen\omega t + \cos\omega t\right)$$

$$y = \frac{B}{\cos\theta}(sen\theta\, sen\omega t + \cos\theta \cos\omega t)$$

$$y = \sqrt{A^2 + B^2} cos(\omega t - \theta)$$



$$tan\theta = cot\varphi = \frac{A}{B}$$

$$cos\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Nota: $\sqrt{A^2 + B^2}$ recibe el nombre de “amplitud” de la función de onda.

Al ángulo φ se le llama “ángulo de fase”.

B. TEOREMAS

TEOREMA XXI-3

La función de onda es periódica, con período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
y frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$

DEMOSTRACIÓN

En efecto $sen[\omega(t + T) + \varphi] = sen[(\omega t + \omega T) + \varphi]$

Si $\omega T = 2\pi\ rad$; lo que arroja $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

La frecuencia suele medirse en ciclos por segundo o hertzios; que se simbolizan como cps ó Hz; para frecuencias grandes las unidades son Kilociclos por segundos (Kcps) o Kilohetzios (KHz); y para frecuencias aún mayores Megaciclos por segundo (Mcps) o Megahertzios (MHz).

B. TEOREMAS

Representación de Funciones de Onda de la misma frecuencia

La frecuencia de la función de onda suele ser común a varias funciones en muchos problemas de orden técnico (en electrotecnia, p.e., todas las funciones que representan voltajes e intensidades tienen, en el Perú, una frecuencia de 60 Hz).

Por ello las funciones de onda quedan representadas unívocamente si se representan A y B (ó bien $a=\sqrt{A^2+B^2}$ y φ).

A y B se pueden expresar como un número complejo:

$$A+Bi=\sqrt{A^2+B^2}\angle\varphi=\sqrt{A^2+B^2}\,e^{\varphi i}=e^{\ln\sqrt{A^2+B^2}+\varphi i}$$

o por su vector asociado, que se suele llamar "**fasor**".

B. TEOREMAS

TEOREMA XXI-4

Representación de Funciones de Onda de la misma frecuencia

La suma (o composición) de varias funciones de onda de una misma frecuencia, es otra función de onda de la misma frecuencia, cuyo fasor es la suma vectorial de los fasores de los sumandos.

Demostración:

Sea

$$y_1 = A_1 sen\omega t + B_1 \cos\omega t$$
$$y_2 = A_2 sen\omega t + B_2 \cos\omega t$$
$$y_3 = A_3 sen\omega t + B_3 \cos\omega t$$

$$y_1+y_2+y_3=(A_1+A_2+A_3)sen\omega t+(B_1+B_2+B_3)cos\omega t$$

quedando demostrado que **es una función de onda de la misma frecuencia.**

B. TEOREMAS

TEOREMA XXI-4

Representación de Funciones de Onda de la misma frecuencia

La suma (o composición) de varias funciones de onda de una misma frecuencia, es otra función de onda de la misma frecuencia, cuyo fasor es la suma vectorial de los fasores de los sumandos.

Demostración:

$$y_1 + y_2 + y_3 = (A_1 + A_2 + A_3)sen\omega t + (B_1 + B_2 + B_3)cos\omega t$$

por otra parte, la suma de los números complejos

$$(A_1 + B_1 i) + (A_2 + B_2 i) + (A_3 + B_3 i) = (A_1 + A_2 + A_3) + (B_1 + B_2 + B_3)i$$

tienen **un fasor que es justamente el de la suma vectorial**, y coincide con el de la suma de funciones de onda.

B. TEOREMAS

TEOREMA XXI-5

Representación de Funciones de Onda de la misma frecuencia

Si $y = Asen\omega t + Bcos\omega t$ tiene un fasor $r\angle\varphi$, se cumple que $y' = Asen(\omega t + \alpha) + Bcos(\omega t + \alpha)$ es una función de onda cuyo fasor es $r\angle(\varphi + \alpha)$.

Demostración:

$$y' = Asen(\omega t + \alpha) + B\cos(\omega t + \alpha)$$
$$y' = Asen\omega t\cos\alpha + A\cos\omega t sen\alpha + B\cos\omega t\cos\alpha - Bsen\omega t\, sen\alpha$$
$$y' = (A\cos\alpha - Bsen\alpha)sen\omega t + (Asen\alpha + B\cos\alpha)\cos\omega t$$

y’ es pues una función de onda senoidal.

B. TEOREMAS

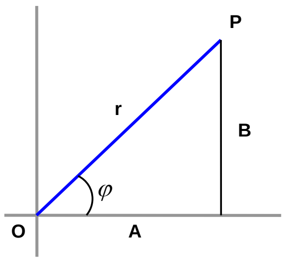
TEOREMA XXI-5

Representación de Funciones de Onda de la misma frecuencia

Si $y = Asen\omega t + Bcos\omega t$ tiene un fasor $r\angle\varphi$, se cumple que $y' = Asen(\omega t+\alpha) + Bcos(\omega t+\alpha)$ es una función de onda cuyo fasor es $r\angle(\varphi+\alpha)$.

Demostración:

$$y' = (A\cos\alpha - Bsen\alpha)sen\omega t + (Asen\alpha + B\cos\alpha)\cos\omega t$$



$$r' = \sqrt{(Acos\alpha - Bsen\alpha)^2 + (Asen\alpha + Bcos\alpha)^2} = \sqrt{A^2+B^2} = r$$

$$\sin\varphi' = \frac{Asen\alpha + Bcos\alpha}{r} = \cos\varphi\, sen\alpha + sen\varphi cos\alpha = sen(\varphi+\alpha)$$

$$cos\varphi' = \frac{Acos\alpha - Bsen\alpha}{r} = \cos\varphi cos\alpha - sen\varphi\, sen\alpha = cos(\varphi+\alpha)$$

luego φ' equivale a $\varphi+\alpha$. Lqqd.

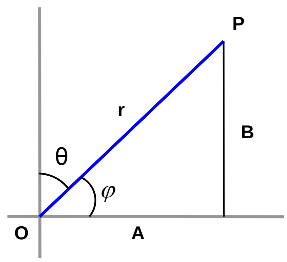
B. TEOREMAS

TEOREMA XXI-5

Representación de Funciones de Onda de la misma frecuencia

RECAPITULACIÓN

$$y = Asen\omega t + Bcos\omega t \quad \begin{cases} y = rsen(\omega t + \varphi) \\ y = rcos(\omega t - \theta) \end{cases}$$



La función de onda es periódica.

con período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y frecuencia $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$

$$y = \mathrm{A} + i\mathrm{B} \Rightarrow r\angle\varphi \Rightarrow re^{\varphi i} \Rightarrow e^{\ln r + \varphi i}$$

$$\sum y_i = \sum A_i sen\omega t + \sum B_i \cos\omega t$$

$$y' = Asen(\omega t+\alpha) + Bcos(\omega t+\alpha) \Rightarrow r\angle(\varphi+\alpha)$$