CAPÍTULO 20: NÚMEROS COMPLEJOS (V)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 20: Números Complejos (V)

Misceláneas

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

10 diapositivas

CAPÍTULO XX

NUMEROS COMPLEJOS

MISCELÁNEAS

¿Qué significa un número complejo?

Jhon Wallis (1616 - 1703)
"*Algebra*"(1673)

Anteriores a Gauss:

Caspar Wessel
(1745 - 1818)
Primera representación geométrica en 1797.

Jean Argand
(1768 - 1822)
Idem y además consideró *i* como una rotación de 90º.

¿Qué significa un número complejo?

Bus parado en el semáforo (arrancando)

x = 0 d

Tú corriendo para alcanzarlo

a v

$t=0 \quad x_b=0 \qquad x_p=-d$

$t\geq 0 \quad x_b=\frac{1}{2}at^2 \qquad x_p=-d+vt$

Alcanzar el bus en T:

$$x_b(T)=x_p(T) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}aT^2=-d+vT \;\Rightarrow\; T=\frac{v}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)^2-2\frac{d}{a}} \quad \text{si} \quad d>\frac{v^2}{2a}$$

¿Qué significan T+ y T-?

T es un tiempo complejo y no alcanzarás el bus. Pero además tiene significado físico.
Supongamos que perdemos el bus, pero que queremos saber en que momento estuvimos más cerca.

¿En que tiempo s es mínimo?

$$s\equiv x_b-x_m \quad\Rightarrow\quad s=\frac{1}{2}at^2+d-vt \;\Rightarrow\; \frac{ds}{dt}=0 \;\Rightarrow\; t=\frac{v}{a}$$

Es decir: el tiempo correspondiente a la parte real del tiempo complejo T.

Relatividad : la importancia de i

Albert Einstein
(1879 – 1955)

Distancia espacial
(teorema de Pitágoras)

$$s^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

$$(ds)^2=(ds')^2=(dx')^2+(dy')^2+(dz')^2$$

Métrica euclidiana

Invariancia frente a rotaciones
y/o translaciones

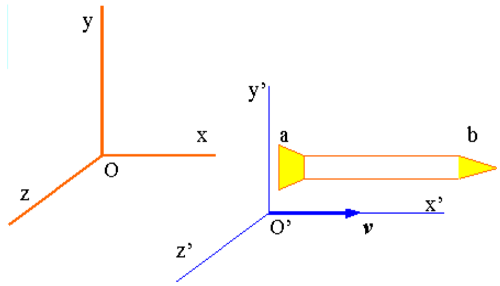
Relatividad : la importancia de i

Transformaciones de Galileo

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Transformaciones de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$



Relatividad : la importancia de i

En vez de hablar de distancia entre eventos (posiciones) en el espacio tridimensional, los físicos hablan de intervalos entre eventos en el espacio de cuatro-dimensional espaciotiempo. Parece razonable definir la métrica de ese espaciotiempo como:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

¡Pero es incorrecto! La métrica así definida no es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Para comprobarlo, supón que el movimiento es solo en el eje x, y calcula:

$$(ds)^2 \neq (ds')^2 = (cdt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$

Por ejemplo:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad dt' = \frac{\partial t'}{\partial x} dx + \frac{\partial t'}{\partial t} dt$$

$$dt' = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} dx + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} dt$$

Relatividad : la importancia de i

¿Cómo hacer *(ds)²* invariante? Lo que Minkowski descubrió es que en vez de usar *c(dt)* debemos tomar *ic(dt)*.

$$(ds)^2 = -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

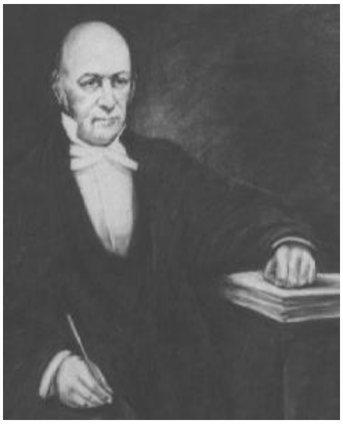
Demostrar que de esta manera $(ds)^2$ es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Observa que usando *ic(dt)* o lo que es lo mismo *c(idt)*, ¡tenemos un "tiempo imaginario"!

"Las consideraciones sobre el espacio y el tiempo que quisiera presentarles surgieron en el seno de la física experimental, y en ello radica su fuerza. Son radicales. De ahora en adelante el espacio en sí mismo y el tiempo en sí mismo están condenados a ser sombras; sólo un tipo de unión entre los dos conservará una realidad independiente".

Hermann Minkowski

(1864 – 1909)

Cuaterniones e hipercomplejos



Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865)

Los ***cuaterniones*** son números complejos en cuatro dimensiones en lugar de dos (Hamilton 1843). Así un ***cuaternión*** q se expresa como: $q = a+ib+jc+kd$ donde a,b,c,d son números reales. $\{1, i, j, k\}$ hacen de base en el ***hiperespacio de los cuaterniones***. $\{1, i\}$ era la base estándar para los números complejos, simplemente se añaden dos vectores unitarios, j y k, perpendiculares entre sí. La propiedad conmutativa para el producto de cuaterniones no rige.

Cuaterniones

Es el precio que pagamos por obtener un álgebra consistente.
Así que en general, el producto $q \cdot q'$ de dos ***cuaterniones*** no es igual que el producto $q' \cdot q$ (como ocurre con el producto matricial estándar, por ejemplo).
Las reglas de Hamilton para la base de ***cuaterniones*** son:

$i\,j = k, \quad j\,k = i, \quad k\,i = j$

$j\,i = -k, \quad k\,j = -i, \quad i\,k = -j$

$i\,i = j\,j = k\,k = -1, \quad i\,j\,k = -1$

Los *cuaterniones* se emplean para describir dinámicas en 3 dimensiones.

El software de vuelo del *Space Shuttle* usaba cuaterniones para el control de navegación y vuelo. Su uso conseguía compacidad de código, velocidad de cómputo y evitaba aparición de singularidades en los cálculos.

Hipercomplejos

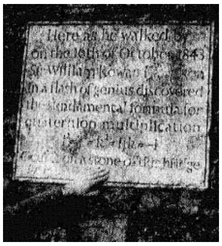
Hamilton desarrolló también otra álgebra alternativa: la de los números hipercomplejos. En vez de sacrificar la conmutatividad, sacrificó la existencia de inverso. En el álgebra hipercompleja no todo elemento *h* distinto de *0* posee inverso *1/h*. La base de cuatro elementos posee la misma notación que la de cuaterniones, pero las reglas de multiplicación son distintas:

$i\,j = k, \quad j\,k = -i, \quad k\,i = -j$

$j\,i = k, \quad k\,j = -i, \quad i\,k = -j$

$i\,i = j\,j = -k\,k = -1 \quad i\,j\,k = 1$

Los números hipercomplejos son una extensión de los números complejos construidos mediante herramientas del álgebra abstracta, tales como cuaterniones, tessarines, cocuaterniones, octoniones, bicuaterniones y sedeniones.



El puente de Brougham sobre el Canal Real, donde Hamilton inscribió sus famosas reglas para los cuaterniones.