CAPÍTULO 20: NÚMEROS COMPLEJOS (IV)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 20: Números Complejos (IV)

4. Ejercicios propuestos

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

13 diapositivas

CAPÍTULO XX

NUMEROS COMPLEJOS

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

RESUMEN
Números Complejos

Teorema		
XX-1	La suma de dos o más complejos tiene un vector que es la suma vectorial de los vectores de los sumandos.	$S=(a+c)+(b+d)i$
XX-2	El producto de dos o más complejos tiene como módulo el producto de los módulos de los factores; y como argumento, la suma de argumentos de los factores (o un valor equivalente).	$N_1 x N_2 = (r_1 x r_2)\angle(\theta_1+\theta_2)$
XX-3	La potencia *n-ésima* de un complejo (*n* real) es otro complejo, cuyo módulo es la potencia enésima del módulo de la base, cuyo argumento es n veces el argumento de la base (u otro equivalente).	$(a+bi)^n = r^n \angle n\theta$
XX-4	Si **n** es un complejo natural, hay raíces enésimas diferentes de un número complejo.	$\theta_k = \frac{\theta+2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n}+2\pi\frac{k}{n}$
XX-5	Las n raíces enésimas del número real a (considerado como complejo a+oi), se pueden obtener multiplicando la raíz enésima real del valor absoluto de a , por cada una de las raíces enésimas de +/-1 (mas ó menos según el signo de a).	$\sqrt[n]{a} = r\sqrt[n]{1}$
XX-6	Fórmula de Moivre	$(\cos x + i\,sen x)^m = \cos mx + i\,sen\,mx$
XX-7	Fórmula de Euler	$e^{xi} = \cos x + i\,sen\,x$
XX-8	Complejo elevado a Complejo	$(a+bi)^{c+di} = \left(e^{\ln r + xi}\right)^{(c+di)} = e^{(\ln r+xi)(c+di)} = e^{m+ni} = M+Ni$

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar las raíces sextas de 64 y de –64.
   (R. de 64: $\pm 2;\ 1\pm\sqrt{3}\,i;\ -1\pm\sqrt{3}\,i$;
   de –64: $\pm 2i;\ \sqrt{3}\pm i;\ -\sqrt{3}\pm i$)

2. Haga los diagrama polares de las soluciones anteriores.

3. Hallar todas las raíces de la ecuación $x^4-4x^2+16=0$ y representarlas en el plano complejo.

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1a. Hallar las raíces sextas de 64 Z = 64 + i0 = 64∠0º

$$\sqrt[6]{z}=\sqrt[6]{64}\angle\left(\frac{\theta+360k}{6}\right)=2\angle\left(\frac{\theta}{6}+360°\frac{k}{6}\right)=2\angle 60k$$

Módulo de la raíz: $\sqrt[6]{64}=2$

Argumentos de la raíz:

$$\frac{\theta}{n}+360^{o}\frac{k}{n}=\frac{0}{6}+360^{o}\frac{k}{6}=60k$$

$\theta=0$

$n=6$

$k=0,1,2,3,4y5$

$$\begin{cases} 1^{o})k=0\rightarrow 0^{o}\\ 2^{o})k=1\rightarrow 60^{o}\\ 3^{o})k=2\rightarrow 120^{o}\\ 4^{o})k=3\rightarrow 180^{o}\\ 5^{o})k=4\rightarrow 240^{o}\\ 6^{o})k=5\rightarrow 300^{o}\end{cases}$$

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\,sen\theta)$$

$$RAIZ\,1^{a} \ldots\ldots\ldots 2\angle 0^{o} = 2$$

$$RAIZ\,2^{a} \ldots\ldots\ldots 2\angle 60^{o} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$RAIZ\,3^{a} \ldots\ldots\ldots 2\angle 120^{o} = -1 + i\sqrt{3}$$

$$RAIZ\,4^{a} \ldots\ldots\ldots 2\angle 180^{o} = -2$$

$$RAIZ\,5^{a} \ldots\ldots\ldots 2\angle 240^{o} = -1 - i\sqrt{3}$$

$$RAIZ\,6^{a} \ldots\ldots\ldots 2\angle 300^{o} = 1 - i\sqrt{3}$$

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1b. Hallar las raíces sextas de - 64

Z = -64 + i0 = 64∠180º

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{64}\angle\left(\frac{\theta + 360k}{6}\right) = 2\angle\left(\frac{\theta}{6} + 360^{\circ}\frac{k}{6}\right) = 2\angle 30 + 60k$$

Módulo de la raíz: $\sqrt[6]{64} = 2$

Argumentos de la raíz:

$$\frac{\theta}{n} + 360^{o}\frac{k}{n} = \frac{180}{6} + 360\frac{k}{6} = 30 + 60k$$

$\theta = 180$

$n = 6$

$k = 0,1,2,3,4\,y\,5$

$$\begin{cases} 1^{o})\,k = 0 \rightarrow 30^{o} \\ 2^{o})\,k = 1 \rightarrow 90^{o} \\ 3^{o})\,k = 2 \rightarrow 150^{o} \\ 4^{o})\,k = 3 \rightarrow 210^{o} \\ 5^{o})\,k = 4 \rightarrow 270^{o} \\ 6^{o})\,k = 5 \rightarrow 330^{o} \end{cases}$$

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\,sen\theta)$$

$$RAIZ\,1^{a}\,.........\,2\angle 30^{o} = \sqrt{3} + i$$

$$RAIZ\,2^{a}\,.........\,2\angle 90^{o} = 2i$$

$$RAIZ\,3^{a}\,.........\,2\angle 150^{o} = -\sqrt{3} + i$$

$$RAIZ\,4^{a}\,.........\,2\angle 210^{o} = -\sqrt{3} - i$$

$$RAIZ\,5^{a}\,.........\,2\angle 270^{o} = -2i$$

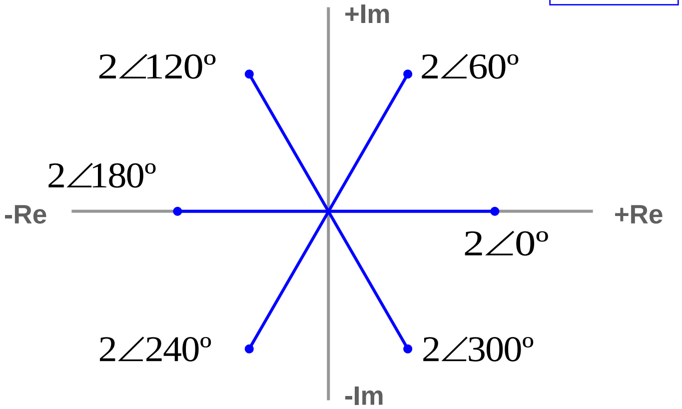
$$RAIZ\,6^{a}\,.........\,2\angle 330^{o} = \sqrt{3} - i$$

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

2. **Haga los diagrama polares de las soluciones anteriores.**

Las raíces sextas de 64

$\boxed{2\angle 60k^{o}}$

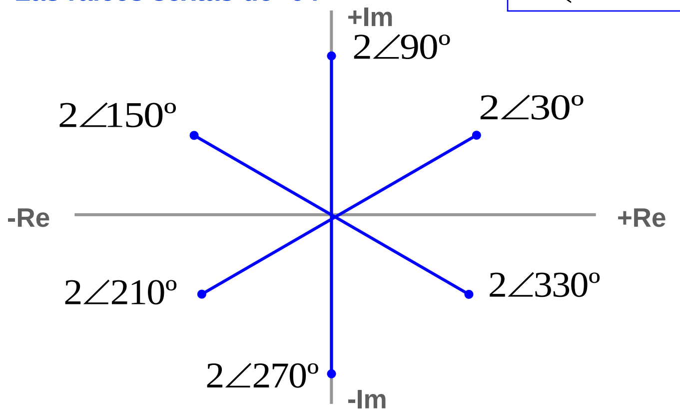


4. EJERCICIOS PROPUESTOS

2. Haga los diagrama polares de las soluciones anteriores.

Las raíces sextas de -64

$$\boxed{2\angle(30+60k)^{o}}$$



4. EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Hallar todas las raíces de la ecuación $x^4-4x^2+16=0$ y representarlas en el plano complejo.

Se realiza el siguiente cambio de variable $y=x^2$

El polinomio de grado 4to se reduce a una cuadrática de solución conocida:

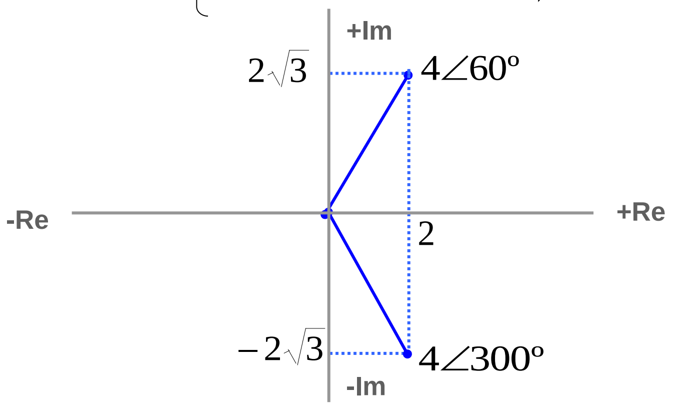
$$y^2-4y+16=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$y=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4(16)}}{2}=\frac{4\pm4\sqrt{1-4}}{2}=2\pm i2\sqrt{3}$$

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

Las soluciones de la ecuación cuadrática son:

$$y = 2 \pm i2\sqrt{3} \quad \begin{cases} y_1 = 2 + i2\sqrt{3} \Rightarrow 4\angle 60^o \\ y_2 = 2 - i2\sqrt{3} \Rightarrow 4\angle 300^o \end{cases}$$



4. EJERCICIOS PROPUESTOS

Hemos hecho un cambio de variable: $y = x^2$

Estamos buscando: $x = \sqrt{y}$

$$4\angle 60^o \Rightarrow 2\angle(30+180k)^o \begin{cases} 1^o)\, k = 0 \rightarrow 30^o & 2\angle 30^o \\ 2^o)\, k = 1 \rightarrow 210^o & 2\angle 210^o \end{cases}$$

$$4\angle 300^o \Rightarrow 2\angle(150+180k)^o \begin{cases} 1^o)\, k = 0 \rightarrow 150^o & 2\angle 150^o \\ 2^o)\, k = 1 \rightarrow 330^o & 2\angle 330^o \end{cases}$$

4. EJERCICIOS PROPUESTOS