CAPÍTULO 19: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS (III)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 19: Resolución de Triángulos Planos (III)

3. Ejercicios

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

9 diapositivas

CAPITULO XIX

TRIGONOMETRIA

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

3. EJERCICIOS

3. EJERCICIOS

RESOLVER UN TRIÁNGULO EN OTROS CASOS

A veces convendrá resolver un triángulo analíticamente o sea mediante el cálculo conociendo de él algún valor distinto de los lados y ángulos. No daremos en este caso reglas generales, pero la intuición, el tanteo o el estudio de la solución gráfica pueden llevarnos a resolverlo.

Ejemplo 1: Resolver un triángulo conociendo sus tres medianas.

De la fórmula que de las medianas : apuntes de geometría “Teorema VI-14”

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

Obtenemos:

$$\begin{cases} 4m_a^2 = 2b^2+2c^2-a^2 \text{........}(I) \\ 4m_b^2 = 2a^2+2c^2-b^2 \text{........}(II) \\ 4m_c^2 = 2a^2+2b^2-c^2 \text{........}(III) \end{cases}$$

3. EJERCICIOS

Sumando I , II , III :

$$4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=3(a^2+b^2+c^2)........I+II+III$$

$$2a^2+2b^2+2c^2=\frac{8}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)........(IV)$$

$$-a^2+2b^2+2c^2=4m_a^2........(I)$$

$$3a^2=\frac{8}{3}(m_b^2+m_c^2)-\frac{4}{3}m_a^2........IV+(-1)*I$$

$$b=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_a{}^2+m_c{}^2)-m_b{}^2}$$

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b{}^2+m_c{}^2)-m_a{}^2}$$

$$c=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b{}^2+m_a{}^2)-m_c{}^2}$$

Análogamente se obtienen fórmulas para **b** y **c**.

Obtenidas **a**, **b** y **c** estaríamos en el caso 4º visto anteriormente.

3. EJERCICIOS

Ejemplo 2: Resolver un triángulo conociendo ∡ A, a y b/c= k

$$\frac{senB}{senC}=\frac{b}{c}=K=\frac{K}{1} \Longrightarrow \frac{senB+senC}{senB-senC}=\frac{k+1}{k-1}$$

$$tg\,\frac{B-C}{2}=\frac{K-1}{K+1}\cot\frac{A}{2} \Longrightarrow \begin{cases} B-C=2arctg\left[\left(\dfrac{k-1}{k+1}\right)\cot\left(\dfrac{A}{2}\right)\right] \\ \text{∡ B + ∡ C = 180° – ∡ A} \end{cases}$$

con ambas expresiones hallamos **∡ B y ∡ C**;

y como estaríamos ya en el caso 2.

3. EJERCICIOS

Ejemplo 3: Resolver un triángulo conociendo a, ∡ A y b+c.

$$\frac{senA}{a}=\frac{senB}{b}=\frac{senC}{c}=\frac{senB+senC}{b+c}=\frac{2sen\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{b+c}$$

$$sen\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$$ considerando que $\boxed{\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}}$

$$\frac{2sen\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{a}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{b+c}$$

$$\frac{sen\frac{A}{2}}{a}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{b+c}$$

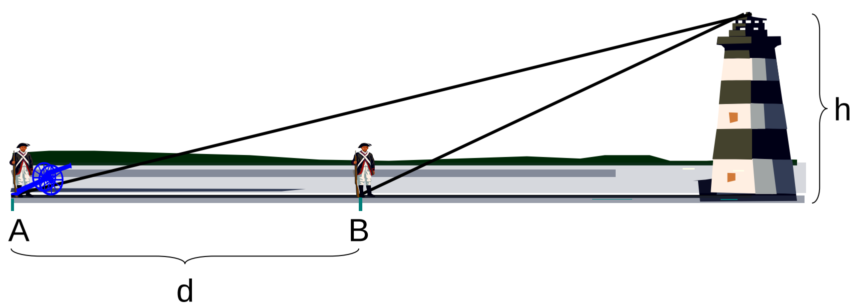
$$\boxed{\frac{B-C}{2}=\arccos\left(\frac{b+c}{a}sen\frac{A}{2}\right)}$$

lo que nos permite obtener ∡ **B** y ∡ **C** y situarnos en el caso 2.

3. EJERCICIOS

Ejemplo 4: Desde dos puntos A y B de un camino horizontal, alineados con el pie de una torre, se ve dicha torre bajo ángulos ∡ A y ∡ B.

Si la distancia AB = d es conocida, averiguar la altura h de la torre.



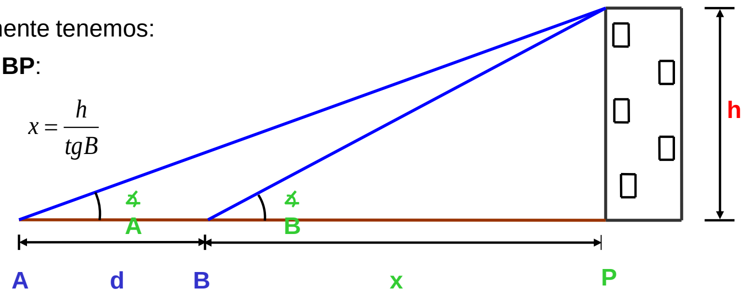
3. EJERCICIOS

Esquemáticamente tenemos:

Llamamos **x** a **BP**:

$$tgB = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{tgB}$$

$$tgA = \frac{h}{x+d}$$



$$tgA = \frac{h}{\frac{h}{tgB} + d} = \frac{h(tgB)}{h + d(tgB)}$$

$$h(tgA) + d(tgA)(tgB) = h(tgB)$$

$$h(tgB - tgA) = d(tgA)(tgB)$$

$$\boxed{h = \frac{d(tgA)(tgB)}{(tgB - tgA)}}$$

RESUMEN de casos de resolución de triángulos

CASO	DATOS	SOLUCIÓN
1	**a, ∡ B y ∡ C**	**∡ A** = 180º - (∡ B + ∡ C) T. seno: calcular **b** y **c**
2	**a, b y ∡ C**	**∡ A** y **∡ B:** T. tangentes y ½(∡ A+∡ B)=90º- ½ ∡ C T. seno: calcular **c**
		T. coseno: calcular **c** y luego **∡ A** y **∡ B** Comprobar: ∡ A + ∡ B +∡ C=180º
3	**a, b y ∡ A**	T. seno: calcular **∡ B**, luego **∡ C** = 180º - (∡ B + ∡ A) T. seno: calcular **c**
4	**a, b y c**	T. coseno: calcular **∡ A** y **∡ B** y **∡ C** Comprobar: ∡ A + ∡ B +∡ C=180º

RESUMEN de otros casos de resolución de Δ

CASO	DATOS	SOLUCIÓN
1	**m_a, m_b, m_c**	Obtener **a, b y c** Se reduce al caso 4 $a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^{\,2}+m_c^{\,2})-m_a^{\,2}}$
2	**∡ A, a, b/c=k**	**∡ A** y **∡ B:** T. tangentes (se usa K) y ½(∡ A+∡ B)=90º- ½ ∡ C Se reduce al caso 2
3	**a, ∡ A y b+c**	**∡ B** y **∡ C:** Con ½(∡ B+∡ C)=90º- ½ ∡ A y $\frac{B-C}{2}=\arccos\left(\frac{b+c}{a}\,sen\,\frac{A}{2}\right)$ Se reduce al caso 2
4	**∡ A, ∡ B, d**	$h=\frac{d(tgA)(tgB)}{(tgB-tgA)}$