CAPÍTULO 19: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS (II)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 19: Resolución de Triángulos Planos (II)

2. **Resolución de triángulos planos**

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

13 diapositivas

CAPITULO XIX

TRIGONOMETRIA

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

Resolver un triángulo consiste en hallar los ángulos y los lados desconocidos.

Con ayuda de los teoremas de los senos, del coseno, y de las tangentes, pueden resolverse los casos corrientes.

Resolver un triángulo conociendo algunos lados y ángulos.

Los casos que pueden presentarse, con datos suficientes para que haya alguna solución concreta (o se pueda averiguar que no hay solución) son los siguientes:

Caso 1: **Se conoce un lado y dos ángulos.**

Caso 2: **Se conoce dos lados y el ángulo comprendido.**

Caso 3: **Se conoce 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.**

Caso 4: **Se conoce los 3 lados.**

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

CASO 1 : SUPONGAMOS CONOCIDO a, ∡ B y ∡ C

Inmediatamente podemos hallar **∡ A = 180º - (∡ B + ∡ C)**

y luego, el teorema de los senos nos permite calcular **b** y **c**.

Este caso tiene, pues, solución, una sola solución (con tal de que los 2 ángulos conocidos sumen menos de 180º).

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

Ejemplo 1: Resolver un triángulo conociendo

$$A = 29^{o}13'28''$$

$$B = 53^{o}25'12''$$

$$c = 37.446m$$

Resolución: $A + B + C = 180^{o}$ ➡ $\boxed{C = 180 - (A + B) = 97^{o}21'20''}$

Por el teorema de los senos, $\dfrac{senA}{a} = \dfrac{senB}{b} = \dfrac{senC}{c}$

Hallamos el lado a : $a = \dfrac{c\,senA}{senC}$ ➡ $\boxed{a = 18.4340}$

Hallamos el lado b : $b = \dfrac{c\,senB}{senC}$ ➡ $\boxed{b = 30.3196}$

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

CASO 2 : SUPONGAMOS CONOCIDO a, b y ∡ C

El teorema de las tangentes $tg\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ nos permite obtener $\frac{A-B}{2}$

Como ya conocemos C, entonces: $\frac{A+B}{2}=90^{\circ}-\frac{C}{2}$

Conociendo la semisuma y la semidiferencia de **∡ A** y **∡ B**, podemos calcularlos;

y luego el teorema de los senos: $\frac{senA}{a}=\frac{senC}{c}$ nos permitirá encontrar **c**

Este caso tiene siempre, pues, una y sólo una solución.

Otra forma más sencilla: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ que permite hallar **c**

y por el mismo teorema del coseno permite encontrar **∡ A** y **∡ B**

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ y comprobar que: **∡ A+ ∡ B+ ∡ C= 180º**

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

Ejemplo 2**:** Resolver un triángulo conociendo $a=1.342\ km$, $b=1.543\ km$, $\hat{C}=87^{\circ}14'15''$

Resolución:

$$A+B=180^{\circ}-C$$
$$A+B=92^{\circ}45'45''..........(1)$$

$$tg\frac{B-A}{2}=\frac{b-a}{b+a}\cot\frac{C}{2}\Rightarrow tg\frac{B-A}{2}=0.073112$$
$$\frac{B-A}{2}=4.1816\Rightarrow B-A=8.3632$$
$$B-A=8^{\circ}21'47.6''....................(2)$$

de (1) y (2) tenemos que:

$$\begin{cases}A+B=92^{\circ}45'45''\\ B-A=8^{\circ}21'47.6''\end{cases}\quad\begin{cases}\boxed{\hat{A}=42^{\circ}11'58.7''}\\ \boxed{\hat{B}=50^{\circ}33'46.6''}\end{cases}$$

Hallamos el lado **c** Por el teorema de los senos:

$$\frac{senC}{c}=\frac{senB}{b}\qquad c=\frac{b\,senC}{senB}\quad\Big\{\ \boxed{c=1.9956km}$$

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

CASO 3 : SUPONGAMOS CONOCIDO a, b y ∡ A

Por el teorema de los senos: $\frac{senA}{a}=\frac{senB}{b}$ Podemos obtener sen B y **∡ B**

Obtenemos **∡ C** por diferencia entre 180° y ∡ A y ∡ B.

Obtenido ∡ C, aplicando de nuevo el teorema de los senos obtenemos **c**.

DISCUSIÓN DEL CASO 3:

a) Sea ∡ A < 90º

b) Sea ∡ A ≤ 90°

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

a) Sea ∡ A < 90º

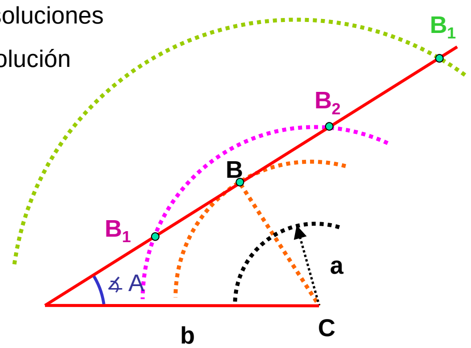
Por inspección de la construcción geométrica deducimos:

Si **a < b Sen A**, no hay solución (Cuando a sea menor que CB no hay solución).

Si **a = b Sen A**, hay 1 solución (triangulo rectángulo).

Si **a > b Sen A**, y **a < b**, hay 2 soluciones

Si **a > b Sen A**, y **a ≥ b**, hay 1solución



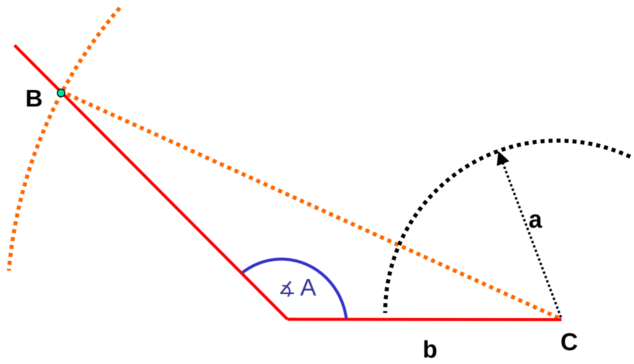
2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

b) Sea ∡ A ≥ 90º

Evidentemente:

Si **a ≤ b**, no hay solución.

Si **a > b**, hay una sola solución.



2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

A los mismos resultados llegaríamos analizando este caso con métodos trigonométricos.

A efectos prácticos, podemos limitarnos a lo siguiente:

1. Obtener **sen B**
2. Hallar los dos ángulos **∡ B_1 < 90º** y **∡ B_2 > 90º** que tienen ese seno.
3. Ver si **∡ A + ∡ B_1** es menor que 180º de ser así hay una solución, al menos;
4. Ensayar si **∡ A + ∡ B_2** es también menor que 180º si es así, hay una segunda solución.

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

Ejemplo 3: Resolver un triángulo conociendo $a = 18.434m$ $b = 30.3195m$ $\hat{A} = 29º13'28''$

Resolución: Por el teorema de los senos:

Hallamos ∡ **B** : $senB = \frac{b\ senA}{a} \longrightarrow senB = 0{,}803024 \longrightarrow \begin{cases} \boxed{\hat{B}_1 = 53º25'11.59''} \\ \boxed{\hat{B}_2 = 126º34'48.4''} \end{cases}$

Hallamos ∡ **C** : $\begin{cases} \boxed{\hat{C}_1 = 180 - (\hat{A} + \hat{B}_1) = 97º21'20.4''} \\ \boxed{\hat{C}_2 = 180 - (\hat{A} + \hat{B}_2) = 24º11'43.6''} \end{cases}$

Hallamos el lado **c** (hay dos soluciones)

$$\frac{senC_1}{c_1} = \frac{senB_1}{b} \qquad c_1 = \frac{b\ senC_1}{senB_1} \qquad \boxed{c_1 = 37.4459\ \mathrm{m}}$$

$$\frac{senC_2}{c_2} = \frac{senB_2}{b} \qquad c_2 = \frac{b\ senC_2}{senB_1} \qquad \boxed{c_2 = 15.4746\ \mathrm{m}}$$

Obtenemos dos soluciones, una formada por B_1, C_1 y c_1 ; y la otra por B_2, C_2 y c_2

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

CASO 4 : SUPONGAMOS CONOCIDO a, b y c

Por el teorema del coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Podemos calcular **∡ A, ∡ B, ∡ C**; tienen que sumar 180°.

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS PLANOS

Ejemplo 3: Resolver un triángulo conociendo

$a = 36.868\ m$

$b = 60.640\ m$

$c = 30.95\ m$

Resolución:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$\boxed{\hat{A} = 29º13'24''}$ $\boxed{\hat{B} = 126º34'52''}$ $\boxed{\hat{C} = 24º11'43.4''}$