CAPÍTULO 16: FUNCIONES – TRIGONOMETRÍA (I)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 16: Funciones – Trigonometría (I)

A. Funciones de Suma y Diferencia de Ángulos

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

8 diapositivas

CAPÍTULO 16

TRIGONOMETRÍA

A. Funciones de Suma y Diferencia de Ángulos

A. Funciones de Suma y Diferencia de Ángulos

TEOREMA XVI-1 y XVI-2	Funciones suma y diferencia de ángulos
TEOREMA XVI-3	Funciones del ángulo doble
TEOREMA XVI-4	Transformación de sumas en productos

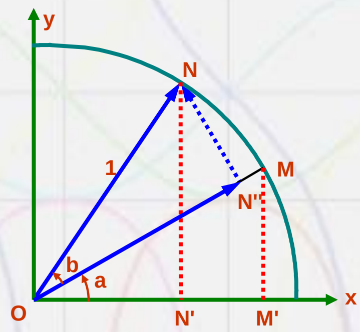
A. Funciones de Suma y Diferencia de Ángulos

TEOREMA XVI-1

1. cos (a + b) = cos (a) x cos (b) – sen (a) x sen (b)
2. cos (a - b) = cos (a) x cos (b) + sen (a) x sen (b)
3. sen (a + b) = sen (a) x cos (b) + cos (a) x sen (b)
4. sen (a - b) = sen (a) x cos (b) - cos (a) x sen (b)

DEMOSTRACIÓN

Sean a y b dos ángulos positivos cuya suma sea menor que 90º. Trazamos la circunferencia trigonométrica y colocamos a y b uno a continuación del otro de forma que se sumen.

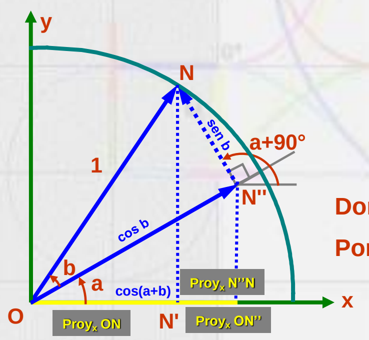


A. Funciones de Suma y Diferencia de Ángulos

DEMOSTRACIÓN **cos (a + b) = cos (a) . cos (b) – sen (a) . sen (b)**

Considerando como **vectores ON''** y **N''N**, suman el **vector ON** de módulo 1.

Aplicamos el teorema XV-4, proyectando sobre el eje x:



$Proy_x$ ON'' + $Proy_x$ N''N = $Proy_x$ ON

$Proy_x$ ON'' = |ON''| cos (a)

$Proy_x$ N''N = |N''N| cos (a + 90°)

$Proy_x$ ON = |ON| cos (a+b)

Donde: |ON| = 1 **;** |ON''| = cos (b) **y** |N''N| = sen (b)

Por tanto:

$Proy_x$ ON'' + $Proy_x$ N''N = $Proy_x$ ON

|ON''| cos (a) + |N''N| cos (a + 90) = cos (a + b)

cos (b) . cos (a) + sen (b) . (- sen (a)) = cos (a + b)

cos (a + b) = cos (b) . cos (a) – sen (b) . sen (a)

A. Funciones de Suma y Diferencia de Ángulos

DEMOSTRACIÓN **sen (a + b) = cos (b) . sen (a) + sen (b) . cos (a)**

Considerando como **vectores ON''** y **N''N**, suman el **vector ON** de módulo 1.
Aplicamos el teorema XV-4, pero ahora proyectamos sobre el eje y:

$Proy_y$ ON'' + $Proy_y$ N''N = $Proy_y$ ON

$Proy_y$ ON'' = |ON''| cos (90 - a) = |ON''| sen (a)

$Proy_y$ N''N = |N''N| sen (a + 90) = |N''N| cos (a)

$Proy_y$ ON = |ON| sen (a+b)

Donde:

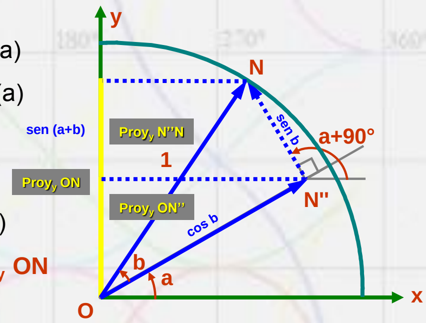
|ON| = 1 **;** |ON''| = cos (b) **y** |N''N| = sen (b)

Por tanto: $Proy_y$ ON'' + $Proy_y$ N''N = $Proy_y$ ON

|ON''| sen (a) + |N''N| cos (a) = sen (a + b)

cos (b) . sen (a) + sen (b) . cos (a) = sen (a + b)

sen (a + b) = cos (b) . sen (a) + sen (b) . cos (a)



A. Funciones de Suma y Diferencia de Ángulos

DEMOSTRACIÓN **cos (a - b) = cos (a) . cos (b) + sen (a) . sen (b)**

En cos (a + b) = cos (a) . cos (b) – sen (a) . sen (b) **sustituimos (b) por (- b)**

cos (a + (- b)) = cos (a) . cos (- b) - sen (a) . sen (- b)

cos (a - b) = cos (a) . cos (b) + sen (a) . sen (b)

DEMOSTRACIÓN **sen (a - b) = sen (a) . cos (b) - cos (a) . sen (b)**

En sen (a + b) = sen (a) . cos (b) + cos (a) . sen (b) **sustituimos (b) por (- b)**

sen (a + (- b)) = sen (a) . cos (- b) + cos (a) . sen (- b)

sen (a - b) = sen (a) . cos (b) - cos (a) . sen (b)

A. Funciones de Suma y Diferencia de Ángulos

TEOREMA XVI-2 a

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$

DEMOSTRACIÓN

Dividiendo sen (a+b) entre cos (a+b) y desarrollándolos según el teorema XVI-1:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)-\operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)}=$$

dividiendo numerador y denominador por cos (a) . cos (b)

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)}{1-\operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)}\;.$$

A. Funciones de Suma y Diferencia de Ángulos

TEOREMA XVI-2 b

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$

DEMOSTRACIÓN

Dividiendo sen (a-b) entre cos (a-b) y desarrollándolos según el teorema XVI-1:

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b)}=\frac{\operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b)-\cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)+\operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)}=$$

dividiendo numerador y denominador por cos (a) . cos (b)

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}(a)-\operatorname{tg}(b)}{1+\operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)}\;.$$