CAPÍTULO 11: ÁREAS Y VOLÚMENES (II)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

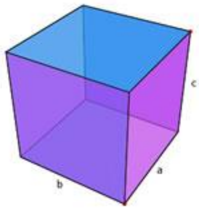
Capítulo 11: Áreas y Volúmenes (II)

B. Volúmenes

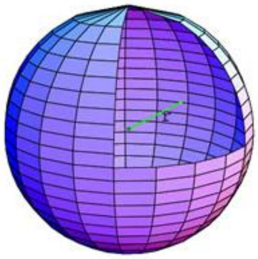
GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

22 diapositivas



CAPÍTULO XI: ÁREAS Y VOLÚMENES

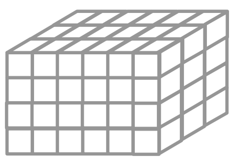


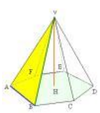
B.VOLÚMENES

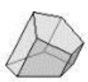
VOLUMEN DEL PARALEPÍPEDO RECTO RECTANGULAR U ORTOEDRO

Si sus caras son múltiplos de la unidad de longitud, el número de cubos unitarios que contiene es:

V=(ancho)(largo)(alto).







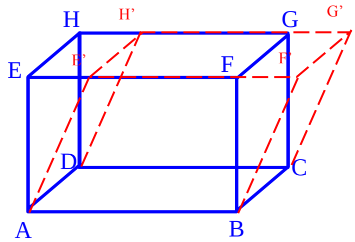
Cuando no son múltiplos enteros, puede demostrarse que la anterior fórmula se sigue cumpliendo. Otra expresión de la misma fórmula es:

Volumen = (área de la base)(altura)

VOLUMEN DEL PRISMA RECTANGULAR OBLICUO

Si en un ortoedro ABCDEFGH, de base b y altura h, hacemos una traslación de la base superior con un vector paralelo a EF, E pasa a E’, F a F’, G a G’, y H a H’.

El nuevo prisma ABCDE’F’G’H’ tiene el mismo volumen que el ortoedro (le hemos quitado la cuña ADHH’E’E y le hemos añadido la BCG’F’FG, congruentes entre sí).

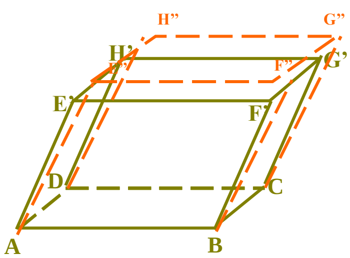


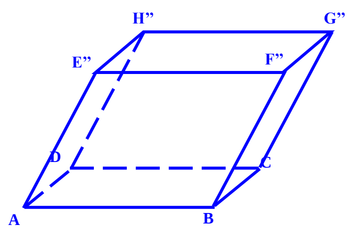
B.VOLÚMENES

VOLUMEN DEL PRISMA RECTANGULAR OBLICUO

Haciendo otra traslación de la base superior, con vector paralelo EH, se obtiene el prisma oblicuo ABCDE”F’G”H”, que tiene también el mismo volumen, o sea:

Volumen = Área de la base por altura



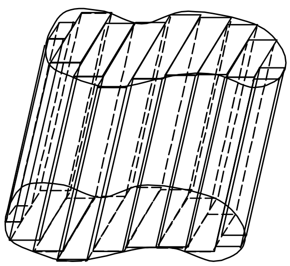


B.VOLÚMENES

VOLUMEN DEL PRISMA RECTANGULAR OBLICUO

Un prisma de base cualquiera se puede dividir en prismas de base rectangular. Si son muchos y muy estrechos, la suma de sus volúmenes da el volumen del prisma.

$$(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n).h = B.h$$



B.VOLÚMENES

PRINCIPIO DE CAVALIERI

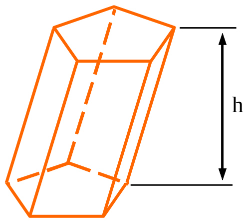
“Si dos sólidos están comprendidos entre un par de planos paralelos, y si las dos secciones intersectadas por los sólidos sobre un plano secante paralelo a dichos planos son de igual área, entonces los volúmenes de dichos sólidos son iguales”.

(1598 - 1647)
Jesuita, matemático y astrónomo italiano, nacido en Milán. Llamado "nuevo Arquímedes" por su maestro Galileo. Desde 1629 fue catedrático de astronomía en Bolonia.
Fue el primero en introducir en Italia el cálculo logarítmico (gracias a la publicación en 1632 de su obra *Un directorio general de uranometría*), pero debe su celebridad a su teoría de los indivisibles, que aplica sobre todo a la geometría: longitudes, áreas y volúmenes.
Aparece con su ***Geometría*** (1635) como precursor de Newton y Leibniz.

B.VOLÚMENES

PRINCIPIO DE CAVALIERI

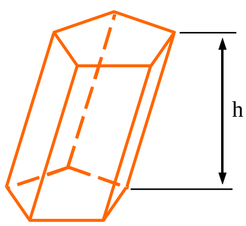
Se puede comprender imaginando las dos figuras cortadas por infinitos planos paralelos muy próximos. Al ser las figuras intersección de áreas iguales, los volúmenes entre uno de los planos y su inmediato superior en las dos figuras serán iguales (muy aproximadamente). En realidad, para fundamentar en forma rigurosa este principio hay que acudir al cálculo integral.



B.VOLÚMENES

PRINCIPIO DE CAVALIERI

Aplicándolo, se comprende que un prisma cualquiera tiene por volumen el área de la base por la altura, igual que uno de base rectangular.

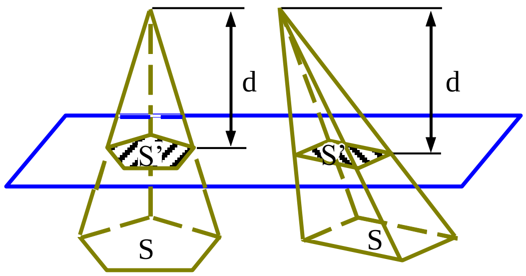


B.VOLÚMENES

VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

Teorema:

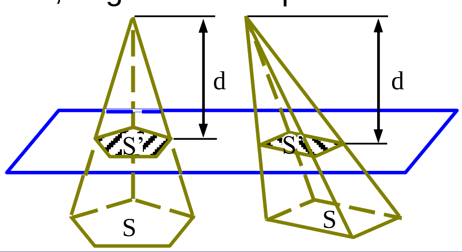
“Dos pirámides que tengan áreas de igual base y la misma altura, tienen el mismo volumen”. Se puede demostrar partiendo del Principio de Cavalieri:



B.VOLÚMENES

VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

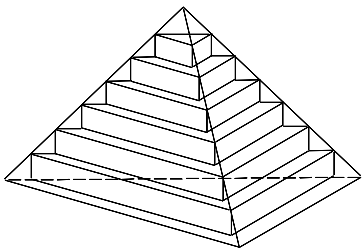
Si se las coloca sobre un mismo plano, las áreas determinadas por la intersección con un plano paralelo a las bases y a la distancia “d” del vértice, son en ambas pirámides (S = área de cada base, h = altura común): , puesto que se obtienen áreas semejantes a la base de cada una. Luego al ser iguales las intersecciones, tienen igual volumen, según el Principio de Cavalieri.



B.VOLÚMENES

VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

Podemos ilustrarlo mediante dos pirámides de bases equivalentes y de igual altura, cortadas por muchos planos paralelos a las bases. Entre cada dos planos, podemos construir prismas rectos de igual volumen, cuya suma será el volumen de cada una de las pirámides, y por tanto un mismo valor.



B.VOLÚMENES

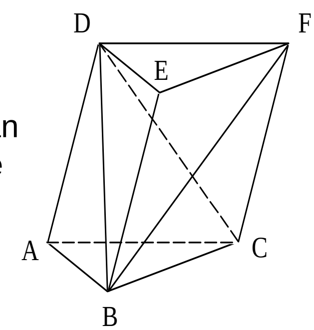
VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

Teorema:

“Un prisma triangular se puede descomponer en tres pirámides del mismo volumen”.

Demostración:

Sea un prisma triangular ABCDEF. En sus caras se trazan las diagonales CD, BF y BD. Se obtienen tres tetraedros:



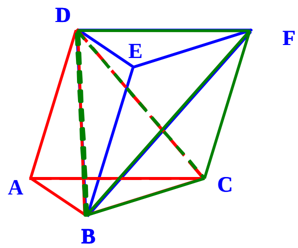
B.VOLÚMENES

VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

La de base ABC y vértice D

La de base DEF y vértice B

La de base CDF y vértice B



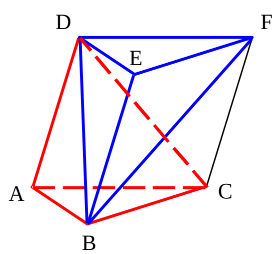
B.VOLÚMENES

VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

Entre las tres, que son tetraedros, llenan el prisma.Las dos primeras tienen áreas de bases y alturas iguales, luego son de igual volumen.

La de base ABC y vértice D

La de base DEF y vértice B

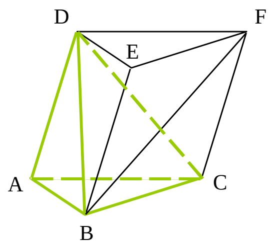


B.VOLÚMENES

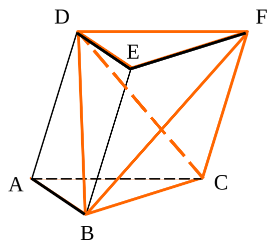
VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

La primera y la tercera se pueden reordenar así:

Base ADC, vértice B; base CDF, vértice B. Pero ADC y CDF son de igual área (por ser la mitad de un paralelogramo), y la altura es la misma (distancia de B al plano de ACFD). Luego los tres tetraedros tienen el mismo volumen, que es para cada uno:



$$V = \frac{1}{3}B.h$$



B.VOLÚMENES

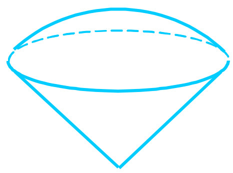
VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

Según el Principio de Cavalieri, tanto una pirámide cualquiera como un cono (que es una pirámide de infinitas caras laterales) tienen el mismo volumen que un tetraedro de la misma área de la base y de la misma altura.

B.VOLÚMENES

VOLUMEN DEL SECTOR ESFÉRICO

Un sector esférico está limitado por la superficie esférica contenida dentro de una circunferencia (casquete esférico), y la superficie cónica que une esa circunferencia con el centro.



Podemos considerar el volumen como la suma de innumerables pirámides de vértice en el centro de la esfera, y bases en la superficie esférica del casquete, a la que llenan completamente.

B.VOLÚMENES

VOLUMEN DEL SECTOR ESFÉRICO

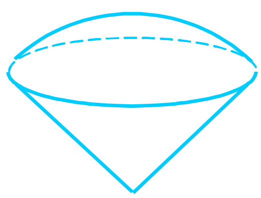
El volumen de cada una de las pirámides es:

⅓ (área de la base)*(radio de la esfera)

Luego, el volumen del sector será:

$$V = \tfrac{1}{3} S.r$$

(S = superficie del casquete, R = radio de la esfera).

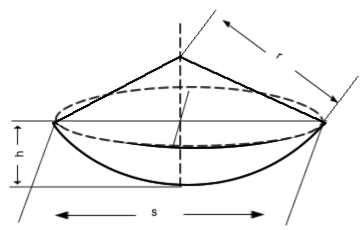


B.VOLÚMENES

VOLUMEN DEL SECTOR ESFÉRICO

$$V = \tfrac{2}{3}\pi.r^2 h$$

$$S = \tfrac{1}{2}\pi.r.(4.h + s)$$

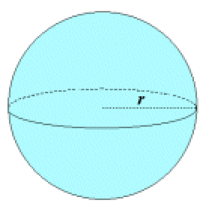


B.VOLÚMENES

VOLUMEN DE LA ESFERA

Repitiendo el razonamiento anterior para un casquete que comprenda toda la esfera:

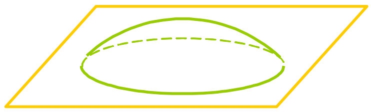
$$V = \tfrac{1}{3}S.R = (\tfrac{1}{3}).4\pi.R^2.R = \tfrac{4}{3}\pi.R^3$$



B.VOLÚMENES

VOLUMEN DEL SEGMENTO ESFÉRICO

El segmento esférico es la intersección de la esfera y un semiplano de un plano secante.



Su volumen será pues el del sector esférico, quitándole el volumen del cono.

B.VOLÚMENES

VOLUMEN DEL SEGMENTO ESFÉRICO

$$V = \tfrac{1}{6}\pi.h.(\tfrac{3}{4}s^2 + h^2) = \pi.h^2.(r - \tfrac{1}{3}h)$$

$$S = 2.\pi.r.h = \frac{\pi}{4}(s^2 + 4h^2)$$