CAPÍTULO 11: ÁREAS Y VOLÚMENES (I)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

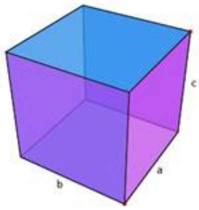
Capítulo 11: Áreas y Volúmenes (I)

A. Áreas

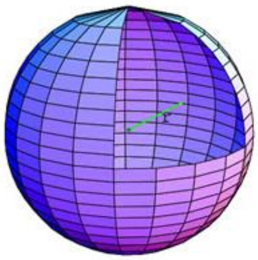
GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

20 diapositivas



CAPÍTULO XI: ÁREAS Y VOLÚMENES

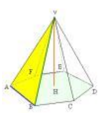


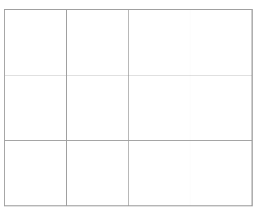
A. ÁREAS

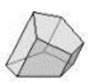
A. ÁREAS

RECTÁNGULO DE LADOS MÚLTIPLOS DE LA UNIDAD

El número de cuadrados unidad que caben es el producto del largo por el ancho:





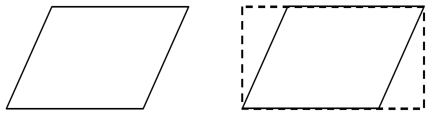


Se puede demostrar que lo mismo sucede cuando las medidas de los lados son números reales cualesquiera.

A. ÁREAS

PARALELOGRAMO

Si a un paralelogramo se le quita un triángulo y se le vuelve a añadir, en la forma indicada en la figura, se convierte en un rectángulo equivalente (de la misma área). Luego el área del paralelogramo vale:

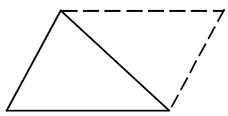


S = (base)(altura)

A. ÁREAS

TRIÁNGULO

Un triángulo se puede completar con otro triángulo congruente para formar un paralelogramo de la misma base y la misma altura.

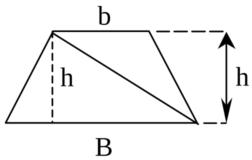


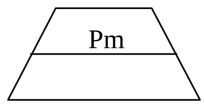
Área del triángulo: mitad de la base por la altura.

A. ÁREAS

TRAPECIO CONVEXO

Dividiéndolo en dos triángulos por una diagonal:





$S=\frac{1}{2}Bh+\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(B+b)h$ = semisuma de las bases por la altura. Pero como la paralela media es la semisuma de las bases, también: S = (paralela media)(altura).

A. ÁREAS

SECTOR CIRCULAR

El área de todo círculo es : $S=\pi.r^2$

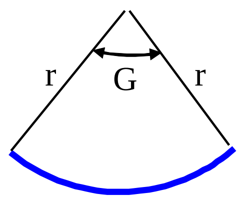
El área de un ángulo central de Gº: $S_G=\pi.r^2\left(\frac{G^\circ}{360}\right)$

Esta expresión se puede poner en forma parecida al área del triángulo. Llamando B (por “base”) al arco, y “altura” al radio:

$$S_C=\pi.r^2\left(\frac{G^\circ}{360}\right)$$

$$S_C=\frac{1}{2}\left[r.(2\pi).(\tfrac{G^\circ}{360})\right]r$$

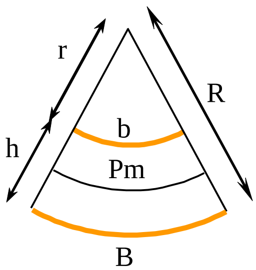
$$S_C=\frac{1}{2}Bh$$



A. ÁREAS

TRAPECIO CIRCULAR

Llamaremos así a la intersección de una corona circular (área comprendida entre dos circunferencias concéntricas) y un sector de la circunferencia mayor.



A. ÁREAS

TRAPECIO CIRCULAR

El área de la corona circular es:

$$S_C = \pi.R^2 - \pi.r^2 = \pi.\left(R^2 - r^2\right)$$

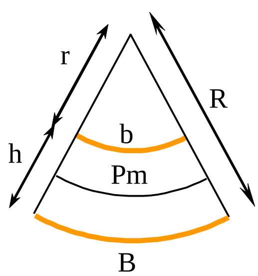
La parte comprendida en un sector que mida αº será:

$$S_t = \pi.\left(R^2 - r^2\right).\frac{\alpha}{360}$$

o también,

si el ángulo se expresa en radianes:

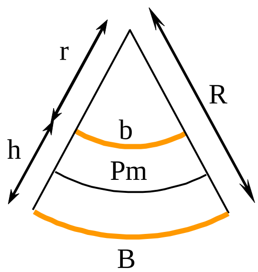
$$S_t = \pi.\left(R^2 - r^2\right).\frac{\omega}{2\pi}$$



A. ÁREAS

TRAPECIO CIRCULAR

Esta expresión se puede arreglar de forma que se convierta en análoga a la del trapecio normal. Llamando B a la “base mayor” del trapecio curvo, b a la “base menor” y h a la “altura” (diferencia de radios), se tiene:



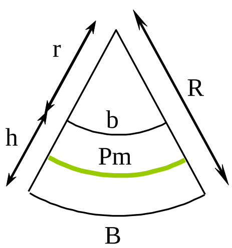
$$S_t = \pi (R^2 - r^2).\tfrac{\alpha}{360}$$
$$S_t = \pi.(R+r)(R-r).\tfrac{\alpha}{360}$$
$$S_t = \frac{1}{2}\left[(R+r).(2\pi.\tfrac{\alpha}{360}.)\right]\left[R-r\right]$$
$$S_t = \tfrac{1}{2}(B+b)h$$

A. ÁREAS

TRAPECIO CIRCULAR

$S_t = \pi.(R^2 - r^2).\tfrac{\alpha}{360} = \tfrac{1}{2}(B+b)h$, o sea, semisuma de bases por altura, como en el trapecio normal.

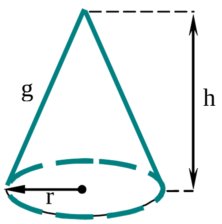
También se puede tener en la forma , siendo la “paralela media” o arco de la circunferencia de radio promedio.



A. ÁREAS

PARÁMETROS DEL CONO REGULAR

Llamando “g” a la generatriz, “h” a la altura del cono y “r” al radio de la base, el Teorema de Pitágoras dice que , que permite calcular alguna de esas variables conociendo los valores de las otras dos.

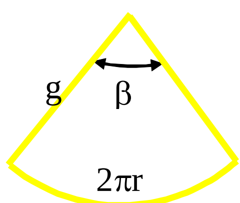


Por otra parte, al doble del ángulo que forma una generatriz con la altura se le llama “abertura” del cono (es el mayor ángulo que pueden formar entre sí dos generatrices).

A. ÁREAS

ÁREA LATERAL Y DESARROLLO DEL CONO REGULAR

Un cono regular tiene un área lateral que contiene infinitos segmentos rectilíneos, llamados generatrices, que parten del vértice y terminan en la circunferencia de la base. Quitando la base y cortando el área lateral por una generatriz, se puede desarrollar el área lateral, obteniéndose un sector circular.



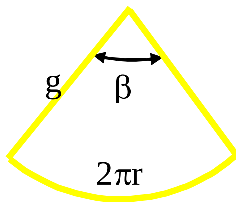
A. ÁREAS

ÁREA LATERAL Y DESARROLLO DEL CONO REGULAR

El área de ese sector se puede determinar como ya hemos visto: $S=\frac{1}{2}l.g$ Pero $l=2\pi.r$ (pues la longitud del perímetro de la base es la misma que la del extremo del área lateral), entonces $S=\pi.r.g$

Por otra parte, el ángulo del sector β, se puede obtener así:

$$\beta = 2\pi.\left(\frac{r}{g}\right)\frac{180}{\pi} = 360\frac{r}{g} = \left(\frac{l}{g}\right)\frac{180}{\pi}$$

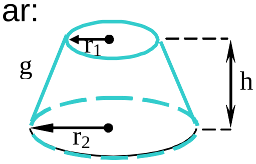


obteniendo β en grados.

A. ÁREAS

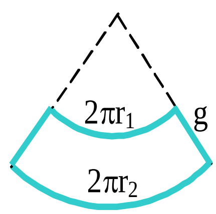
TRONCO DE CONO

Un tronco de cono con radios y en sus bases, y generatriz g se desarrolla, evidentemente, en forma de un trapecio circular:



Su área lateral es, pues, si las longitudes de los perímetros de las bases son l_1 y l_2, y la “paralela media” es l_m:

$$S_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2).g = l_m.g$$

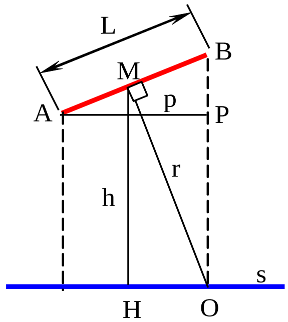


A. ÁREAS

ÁREA ENGENDRADA POR UN SEGMENTO QUE GIRA

Sea un segmento AB de longitud “L” que gira alrededor de una recta de su mismo plano, a la que no corta. La distancia del punto medio del segmento, M, a la recta es “h”, y su pie es H. Al girar barre el área lateral de un tronco de cono:

$$S = 2\pi . h . l$$



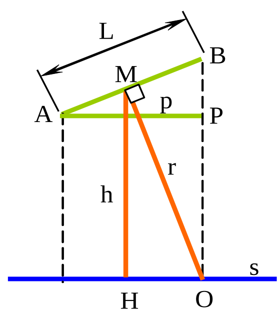
A. ÁREAS

ÁREA ENGENDRADA POR UN SEGMENTO QUE GIRA

Si se traza por el punto medio M la perpendicular al segmento hasta que corte a la recta en O, y se llama “r” a la distancia MO, se obtienen los triángulos semejantes MHO y APB, y llamando “p” a la proyección de AB sobre la recta, se obtiene: $S = 2\pi . r . p$

$$\frac{r}{h} = \frac{l}{p}$$

$$r . p = h . l$$

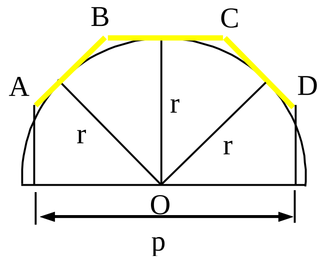


A. ÁREAS

ÁREA ENGENDRADA POR UNA POLIGONAL

Sea una línea quebrada poligonal regular, con centro en O, que gira alrededor de la recta r. La quebrada no corta a la recta.

El área será la semisuma de las engendradas por los segmentos AB, BC, CD, ...; y llamando a las proyecciones de esos segmentos sobre la recta p1, p2, p3, ...:

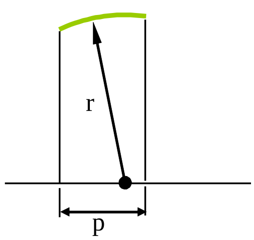


$$S = 2\pi.r.(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots) = 2\pi.r.p$$

A. ÁREAS

ÁREA ENGENDRADA POR UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA

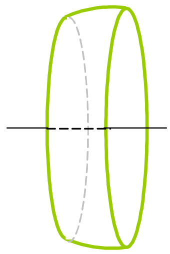
Sea un arco de circunferencia que gira alrededor de una recta que contiene a su centro O. El arco no corta a la recta. La proyección del arco sobre la recta es “p”. De lo dicho se desprende que: $S = 2\pi.r.p$, que es la expresión del área del segmento esférico.



A. ÁREAS

ÁREA DEL CASQUETE ESFÉRICO DE DOS CARAS

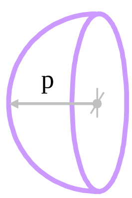
$$S = 2\pi.r.p$$



A. ÁREAS

ÁREA DE LA ESFERA

Si se hace girar media circunferencia, p =2.r y se puede obtener así el área de la esfera.



$$S = 2\pi.r(2r) = 4\pi.r^2$$