CAPÍTULO 9: POTENCIA E INVERSIÓN (V)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 9: Potencia e Inversión (V)

E. Ejemplos y Ejercicios

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

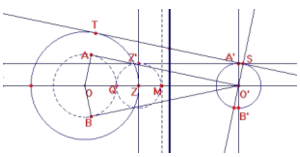
Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

20 diapositivas


Starry Night Over the Rhone
(Vincent Van Gogh)

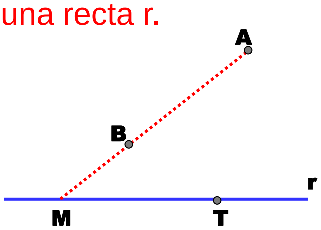
CAPÍTULO IX: POTENCIA E INVERSIÓN

EJEMPLOS Y EJERCICIOS



EJEMPLOS

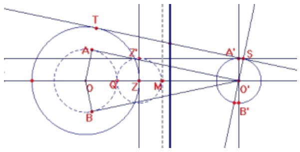
1. Trazar una circunferencia que pase por 2 puntos A y B y sea tangente a una recta r.



Uniendo **A** con **B**, **AB** corta a **r** en **M**.

Desde el punto **M** al punto de tangencia **T** va una distancia **MT** tal que:

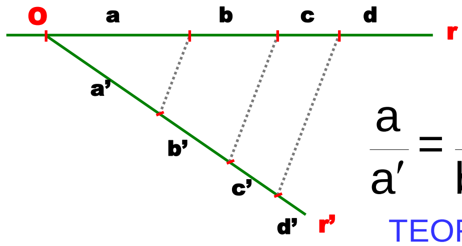
$MT^2 = MB \times MA$, lo que permite obtener **T** y trazar la circunferencia.



EJEMPLOS

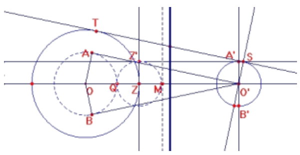
2. Obtener segmentos inversamente proporcionales a otros varios.

Sabemos obtener segmentos proporcionales a otros:



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

TEOREMA DE THALES

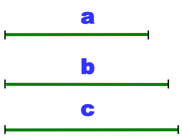


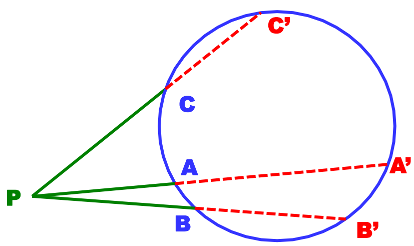
EJEMPLOS

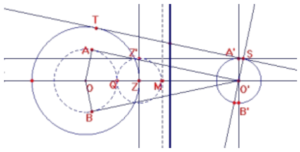
2. Obtener segmentos inversamente proporcionales a otros varios.

Para obtener segmentos inversamente proporcionales a otros varios, como : **a**, **b** y **c**, la condición que deben cumplir es:

a x **a'** = b x **b'** = c x **c'**







Nota

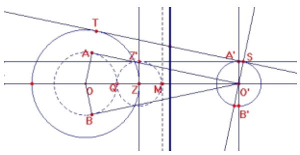
Si

$$a\,a' = b\,b' = c\,c'$$

y $$a\,a'' = b\,b'' = c\,c''$$

Entonces:

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''}$$



EJEMPLOS

3. Construir un triángulo ABC, conociendo h_a, h_b y h_c.

Podemos deducir fácilmente que las 3 alturas son inversamente proporcionales a los lados:

$$S = ½\, a\, h_a = ½\, b\, h_b = ½\, c\, h_c$$

$$\mathbf{a\, h_a = b\, h_b = c\, h_c}$$

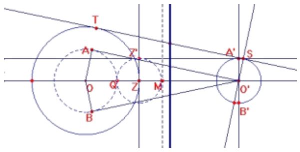
También sabemos que si construimos un triángulo Δ **A'B'C'** semejante a Δ **ABC** se verificará que sus lados son directamente proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Es decir, podemos afirmar que las alturas del Δ ABC son inversamente proporcionales a los lados de Δ A'B'C'

$$\mathbf{a'\, h_a = b'\, h_b = c'\, h_c}$$

El problema se resuelve encontrando **a', b', c'** puntos inversos de **h_a, h_b y h_c,** luego se construye Δ **A'B'C',** se identifica una de las alturas y se "ajusta" el triángulo hasta que la altura coincida con las triángulo buscado, en ese momento se conoce el Δ ABC y se da por resuelto el problema.



EJEMPLOS

4. Trazar una circunferencia x que pase por un punto P y sea tangente a dos circunferencias dadas m y n.

Una inversión de centro **P** transformaría:

a la circunferencia **x** en una recta **x'** ;

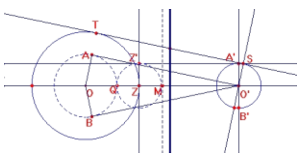
a las circunferencias **m** y **n** en otras 2 circunferencias **m'** y **n'**,

la recta **x'** sería tangente a las circunferencias **m'** y **n'** .

Con los datos proporcionados podemos encontrar las circunferencias **m'** y **n',** el problema se transforma en dibujar las rectas **x'** tangentes a las circunferencias **m'** y **n'.**

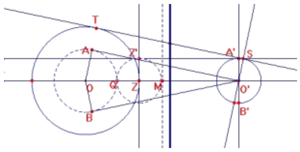
Se pueden encontrar hasta 4 soluciones; ó 2; ó ninguna.

Trazadas las rectas **x'**, buscamos las inversas, que serán las circunferencias **x.**



EJEMPLOS

1. **PROBLEMA**
2. **INVERSIÓN**
3. **RESOLVER**
4. **INVERSIÓN**
5. **SOLUCIÓN**

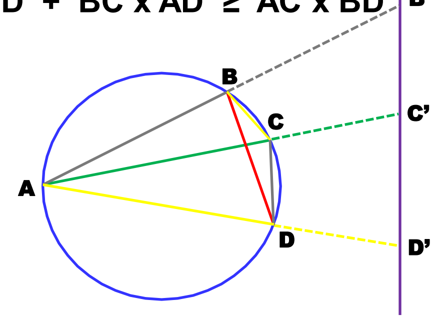


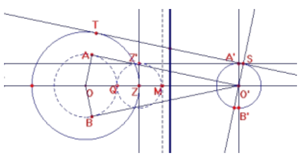
EJEMPLOS

5. Teorema de Ptolomeo:

"En todo cuadrilátero, la suma de los productos de los lados opuestos es igual o mayor que el producto de las diagonales según sea o no inscriptible".

AB x CD + BC x AD ≥ AC x BD





EJEMPLOS

5. Teorema de Ptolomeo:

"En todo cuadrilátero, la suma de los productos de los lados opuestos es igual o mayor que el producto de las diagonales según sea o no inscriptible".

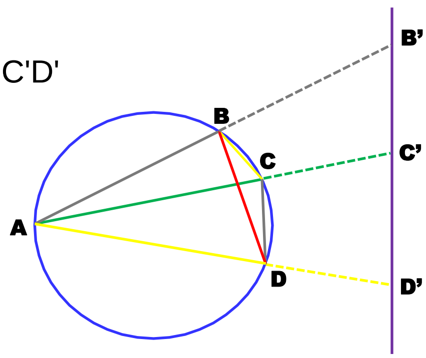
B'D' = B'C' + C'D'

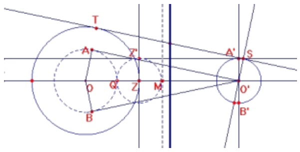
En virtud del teorema IX-12

$$B'D' = BD \times \frac{|K|}{AB \times AD}$$

$$B'C' = BC \times \frac{|K|}{AB \times AC}$$

$$C'D' = CD \times \frac{|K|}{AC \times AD}$$





EJEMPLOS

$$B'D' = B'C' + C'D'$$

$$BD \times \frac{|K|}{AB \times AD} = BC \times \frac{|K|}{AB \times AC} + CD \times \frac{|K|}{AC \times AD}$$

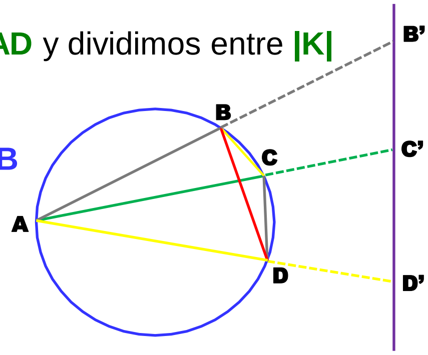
Si multiplicamos por **AB x AC x AD** y dividimos entre **|K|**

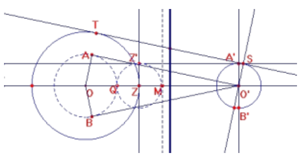
Obtenemos:

BD x AC = BC x AD + CD x AB

quedando demostrado cuando

el cuadrilátero es inscriptible.





EJEMPLOS

$$B'D' < B'C' + C'D'$$

$$BD \times \frac{|K|}{AB \times AD} < BC \times \frac{|K|}{AB \times AC} + CD \times \frac{|K|}{AC \times AD}$$

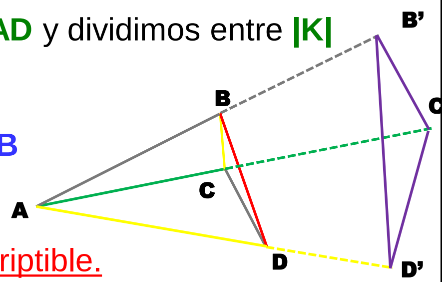
Si multiplicamos por **AB x AC x AD** y dividimos entre **|K|**

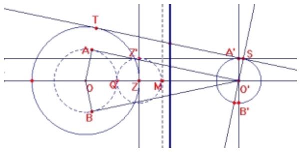
Obtenemos:

BD x AC < BC x AD + CD x AB

quedando demostrado

cuando el cuadrilátero no es inscriptible.





EJERCICIOS

1._Hallar gráficamente 2 segmentos x e y tales que:

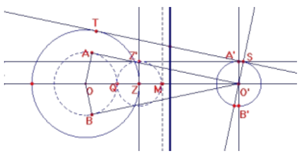
$$x - y = AB$$

$$xy = (CD)^2$$

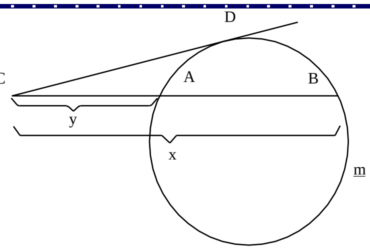
siendo AB y CD segmentos dados.

<u>Resolución</u>:

Aplicando las propiedades de la potencia de un punto C respecto a una circunferencia:

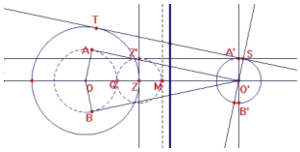


EJERCICIOS



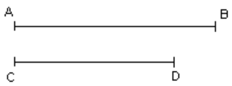
observamos que los segmentos <u>x</u> e <u>y</u> cumplen las condiciones pedidas.

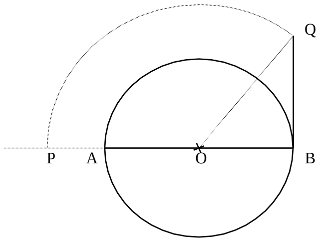
Se trata pues de construir una circunferencia cualquiera que pase por A y B, y en la recta AB determinar un punto cuya tangente a la circunferencia tenga longitud CD (desde P hasta el punto de tangencia).

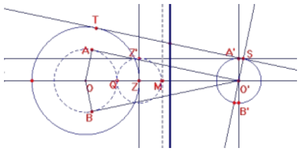


EJERCICIOS

Trazamos pues cualquier circunferencia que pase por A y B, por ejemplo, la de diámetro AB. Levantamos una tangente en B, por ejemplo, BQ = CD. El punto Q tiene una tangente igual a la buscada.

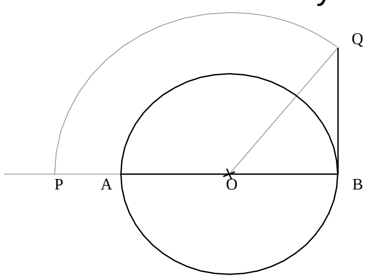


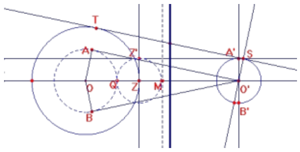




EJERCICIOS

Una rotación alrededor de O mueve Q en una circunferencia cuyos puntos tienen tangentes de igual longitud. Así encontramos P, sobre la recta AB y cuya tangente es igual a CD. Los segmentos buscados son PA y PB.



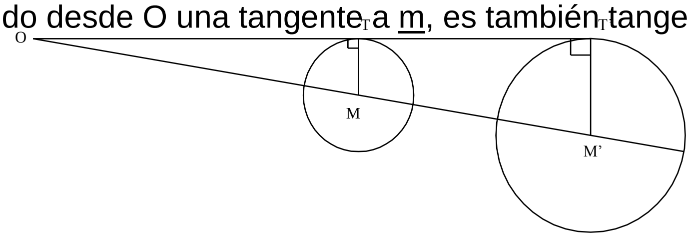


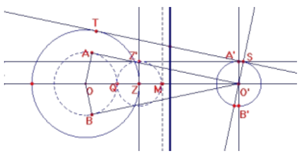
EJERCICIOS

2._Conociendo el centro de inversión O y 2 puntos homólogos A y A', hallar la figura inversa de una circunferencia m que no pasa por O.

Resolución:

m' será una circunferencia homotética de m con centro O (Teorema IX-10); por tanto su centro M' está en la recta MO'; y trazando desde O una tangente a m, es también tangente a m' :

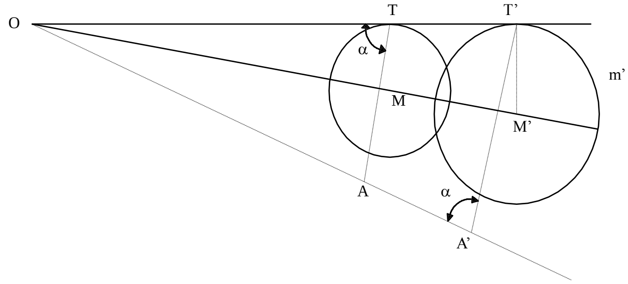




EJERCICIOS

Podemos trazar la tangente OT, la recta OM; y obtener T' mediante la propiedad del antiparalelismo de segmentos que unen puntos inversos (Teorema IX-6) ubicamos T'; y en la perpendicular T'M' a OT está el centro M'.

Aplicación:

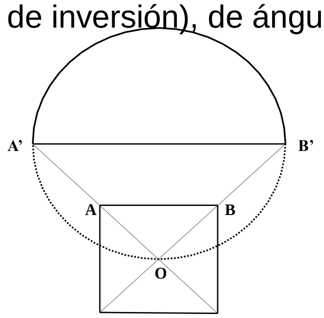


EJERCICIOS

3._Hallar la figura inversa de un cuadrado, siendo el centro de inversión el mismo centro del cuadrado.

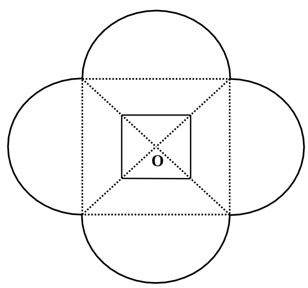
<u>Resolución</u>:

Cada lado del cuadrado dará lugar a un arco de circunferencia (que pasa por el centro de inversión), de ángulo central 180°



EJERCICIOS

Los cuatro lados del cuadrado dan:



Hemos escogido arbitrariamente la potencia de inversión, que no entraba como dato en el enunciado del problema. Una variación de la misma agrandaría o reduciría la figura inversa, que siempre sería homotética a la obtenida respecto a O.