CAPÍTULO 6: RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO (I)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 6: Relaciones Métricas en el Triángulo (I)

A. Conocimientos Previos
B. Teoremas

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

43 diapositivas

CAPÍTULO VI RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO

A. CONOCIMIENTOS PREVIOS
B. TEOREMAS

A. CONOCIMIENTOS PREVIOS

- La línea más corta que puede trazarse entre dos puntos, es el segmento de recta que los une.
- El menor segmento que une un punto P con una recta r, es la perpendicular trazada de P a r.
- Dados un punto P y una recta r, los segmentos oblicuos desde P a r que tienen sus pies equidistantes del pie de la perpendicular son iguales.
- Proyección de un segmento AB sobre una recta r es el segmento que une los pies de las perpendiculares desde A y B a r.

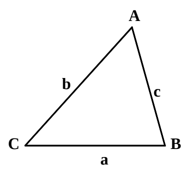
B. TEOREMAS

RELACIONES ENTRE ÁNGULOS Y LADOS

TEOREMA VI - 1

En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Demostración: **a < b + c porque a es el segmento de recta que une B y C.**



De donde a < b + c

b < a + c

c < b + a (1a. parte)

Restando b ó c de la 1a. desigualdad:

a - b < c → c > a – b

a - c < b → b > a - c

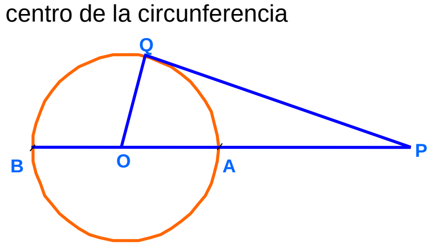
y de la misma forma obtendríamos que cualquier lado es mayor que la diferencia de los otros dos.

B. TEOREMAS

COROLARIO

Las distancias mayor y menor desde un punto P a una circunferencia, son las del punto P a los dos en que corta a la circunferencia el diámetro que pasa por P.

Q es un punto genérico de la circunferencia
O es el centro de la circunferencia



En el Δ OQP

OP < OQ + QP

OP = OA + AP

OA = OQ = OB = radio

AP < QP (AP la menor distancia)

QP < OQ + OP = BP (BP la mayor distancia)

B. TEOREMAS

RELACIONES ENTRE ÁNGULOS Y LADOS

TEOREMA VI - 2

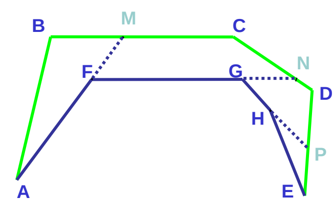
Si dos líneas quebradas convexas tienen extremos comunes, la envolvente es mayor que la envuelta.

Demostración:

Sean **ABCDE** y **AFGHE** las quebradas.

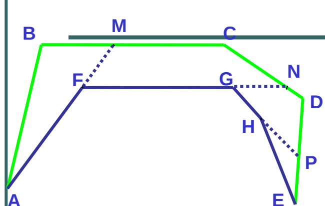
Son convexas porque, prolongando cualquier lado, toda la quebrada queda en un mismo semiplano respecto a él.

La envolvente es ABCDE.



B. TEOREMAS

TEOREMA VI - 2



AM < AB + BM
pero: AM = AF + FM → **AF + ~~FM~~ < AB + BM**

FN < FM + MC+ CN
pero: FN = FG + GN → **FG + ~~GN~~ < ~~FM~~ + MC + CN**

GP < GN + ND + DP
pero: GP = GH + HP → **GH + ~~HP~~ < ~~GN~~ + ND + DP**

HE < HP + PE → **HE < ~~HP~~ + PE**

Sumando miembro a miembro estas desigualdades

y eliminando términos comunes en los miembros,

AF + FG + GH + HE < AB + (BM + MC) + (CN + ND) + (DP + PE)

simplificando segmentos

se obtiene: **AF + FG + GH + HE < AB + BC + CD + DE**

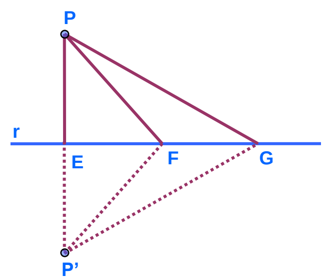
B. TEOREMAS

RELACIONES ENTRE ÁNGULOS Y LADOS

TEOREMA VI - 3

Dados una recta r y un punto P exterior, si se trazan desde P dos segmentos oblicuos desiguales, es mayor el que tiene su pie a mayor distancia del pie de la perpendicular y recíprocamente.

Demostración:



Sea **PE** la perpendicular.

Prolongando **PE** y tomando **P'** simétrico de **P**, vemos que:

PFP'<PGP' o sea:

PF < PG,

si **G** está más alejado del pie **E**.

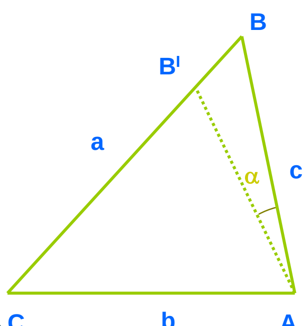
B. TEOREMAS

RELACIONES ENTRE ÁNGULOS Y LADOS

TEOREMA VI - 4

En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

Demostración:



Hipótesis: Sea **a > b**

Tesis: queremos demostrar que ∡ **A** > ∡ **B**

1. A partir de **C** tomamos **CB' = CA**
2. Por ser **CB > CA**,
   ➔ **B'** caerá en el interior del segmento **CB**.
3. Unimos **B'** con **A**,
   ➔ obtenemos el triángulo isósceles **CB'A**
   ➔ y el ∡ **B'AB** = ∡ α

B. TEOREMAS

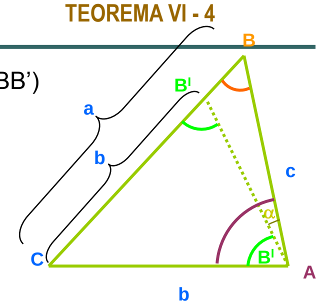
TEOREMA VI - 4

∆ ABB' { ∡B' = ∡B + ∡α (∡ exterior ∆ ABB')
∡B' > ∡B }

∡A = ∡B' + ∡α

∡A > ∡B' > ∡B

luego ∡A > ∡B (lqqd)



TEOREMA RECÍPROCO : ∡A > ∡B ➔ a > b

Vamos a demostrarlo aplicado el método de demostración llamado "por reducción al absurdo". En efecto:

Si fuese **a < b** se tendría **∡A < ∡B**, lo cual iría contra la hipótesis.

Si fuese **a = b** se tendría **∡A = ∡B**, esto también iría contra la hipótesis.

Luego debe ser **∡A > ∡B**.

B. TEOREMAS

RELACIONES ENTRE ÁNGULOS Y LADOS

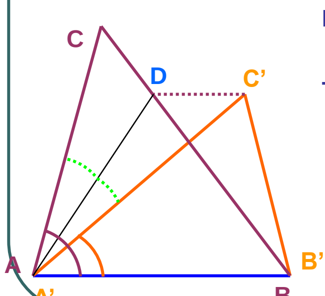
TEOREMA VI - 5

Si dos triángulos tienen dos pares de lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido desigual, los lados opuestos son también desiguales y el ángulo mayor corresponde al lado mayor.

Demostración: Sean ∆ **ABC** y ∆ **A'B'C'** tales que:

HIPÓTESIS: **AB** = **A'B'**, **AC** = **A'C'**, ∡**A** > ∡**A'**

TESIS: Queremos demostrar que **BC** > **B'C'**



1. Transportamos **A'B'** sobre **AB** (de forma que coincidan).
2. Trazamos la bisectriz de **CAC'** que corta a **CB** en **D**.
3. Por ser **D** de la bisectriz:

   ∆ **DCA** ≅ ∆ **DC'A** ➔ **DC = DC'**.
4. En el ∆ **DC'B'**

   C'B' < **C'D** + **DB** = **CD** + **DB** = **CB** lqqd

B. TEOREMAS

RELACIONES ENTRE ÁNGULOS Y LADOS

TEOREMA VI - 6

TEOREMA RECÍPROCO

Si **AB** = **A'B'**, **AC** = **A'C'**, **BC** > **B'C'** ➔ ∡ **A** > ∡ **A'**

Enunciarlo y demostrarlo

TEOREMA VI - 5

Si dos triángulos tienen dos pares de lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido desigual, los lados opuestos son también desiguales y el ángulo mayor corresponde al lado mayor.

B. TEOREMAS

RELACIONES METRICAS EN TRIANGULOS RECTANGULOS

TEOREMA VI - 7

En todo triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que la divida.

Queremos demostrar que $h^2 = m \times n$

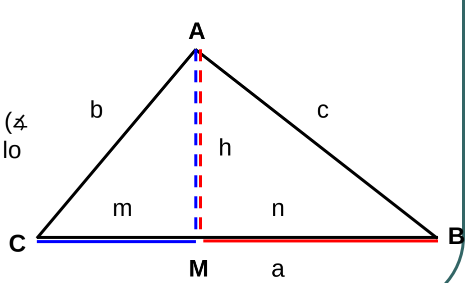
Demostración:

Los Δ **ACM** y ~ Δ **ABM**

dado que tienen tres ángulos iguales:

∡ ACM (∡ C) = ∡ BAM ; ∡ CAM = ∡ ABM (∡ B) y ∡ CMA = ∡ AMB pues son rectos, por lo tanto:

$$\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM} \qquad \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$



Luego: $h^2 = m \times n$ Lqqd

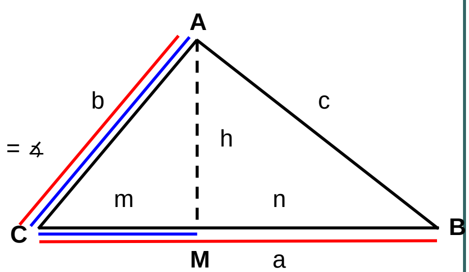
B. TEOREMAS

RELACIONES METRICAS EN TRIANGULOS RECTANGULOS

TEOREMA VI - 8

En todo triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

Demostración:



Los ∆ **ACM** ~ ∆ **BCA**

dado que tienen tres ángulos iguales:

∡ ACM = ∡ C; ∡ CAM = ∡ B y ∡ CMA = ∡ A pues son rectos, por lo tanto:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CM}{AC}$$

AC^2 = CB x CM dado que **AC = b**; **CB= a** y **CM = m** se tiene: $b^2 = a \times m$

Como los 2 catetos tienen las mismas propiedades también $c^2 = a \times n$.

B. TEOREMAS

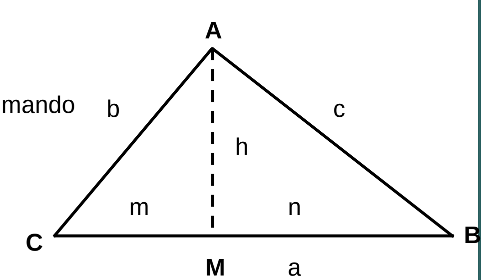
RELACIONES METRICAS EN TRIANGULOS RECTANGULOS

TEOREMA DE PITAGORAS

TEOREMA VI - 9

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Demostración:



$b^2 = a \times m$ por el teorema VI-8 ; sumando
$c^2 = a \times n$ miembro a miembro

$b^2 + c^2 = a\,(m + n)$

$b^2 + c^2 = a^2$ Lqqd

B. TEOREMAS

TEOREMA DE PITAGORAS

TEOREMA VI - 9

RELACIONES METRICAS EN TRIANGULOS RECTANGULOS

Por su interés anecdótico y por ayudar a profundizar el concepto de área, incluimos otra demostración:

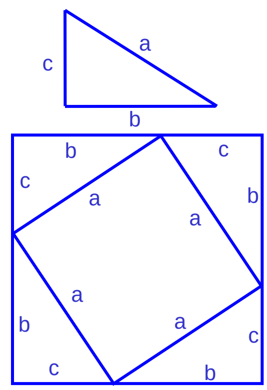
De la inspección de la figura, se deduce que el área del cuadrado grande es 4 veces el área del triángulo, más a^2.

Es decir: $A_{TOTAL} = 4\,(A_{TRIÁNGULO}) + A_{CUADRADO}$

$$(b+c)^2 = 4\,x\,\frac{1}{2}\,c\,b + a^2$$

$$b^2 + c^2 + 2bc = 4\,x\,\frac{1}{2}\,c\,b + a^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$



B. TEOREMAS

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITAGORAS

TEOREMA VI - 10

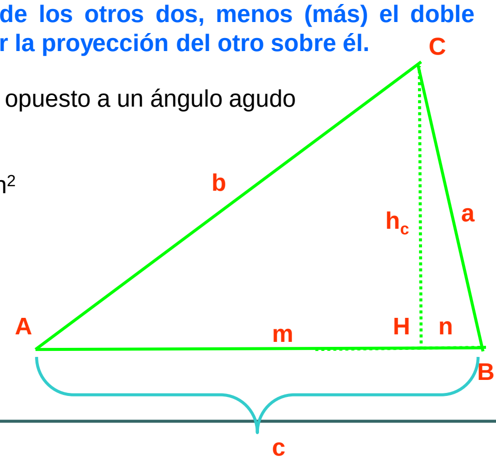
RELACIONES METRICAS EN TRIANGULOS RECTANGULOS

El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo (obtuso) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos (más) el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Demostración: Para el lado opuesto a un ángulo agudo

$$a^2 = h_c^2 + n^2 = (b^2 - m^2) + n^2$$
$$= b^2 - m^2 + (c - m)^2$$
$$= b^2 + c^2 - 2cm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$



GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITAGORAS

TEOREMA VI - 10

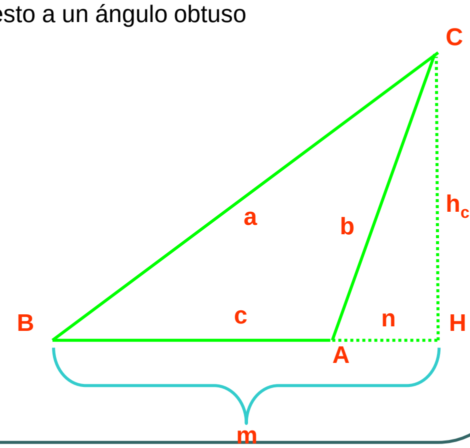
B. TEOREMAS

RELACIONES METRICAS EN TRIANGULOS RECTANGULOS

Demostración: Para el lado opuesto a un ángulo obtuso

$$a^2 = h_c^2 + m^2 = b^2 - n^2 + m^2$$
$$= b^2 - n^2 + (c + n)^2$$
$$= b^2 - n^2 + c^2 + 2cn + n^2$$
$$= b^2 + c^2 + 2cn$$

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 + 2cn}$$



RECÍPROCO DEL TEOREMA DE PITAGORAS

TEOREMA VI - 11

B. TEOREMAS

RELACIONES METRICAS EN TRIANGULOS RECTANGULOS

Si en un triángulo, el cuadrado de un lado <u>a</u> es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, el triángulo es rectángulo y el ángulo opuesto al lado <u>a</u> es el ángulo recto.

B. TEOREMAS

PROPIEDADES DE LAS BISECTRICES

TEOREMA VI - 12

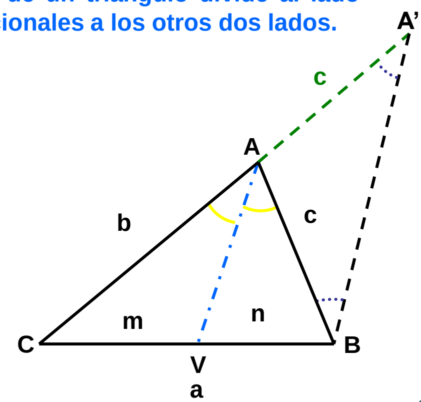
a) La bisectriz interior de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Sea el Δ ABC

Si **AV** es la bisectriz de ∡ A, queremos demostrar que

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

Prolongamos CA y llevamos sobre él el lado **c**, obteniendo el triángulo isósceles AA'B.



B. TEOREMAS

PROPIEDADES DE LAS BISECTRICES

TEOREMA VI - 12

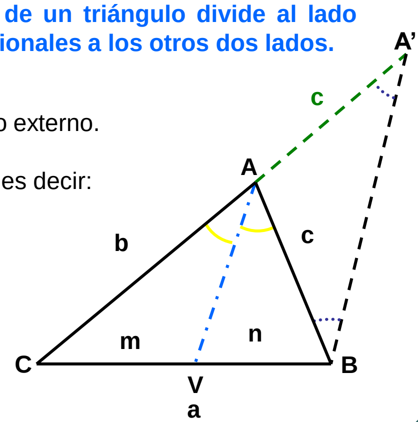
a) La bisectriz interior de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Los ángulos ∡ AA’B y ∡ ABA’ son iguales
Y suman ∡ CAB = ∡ A , por ser ∡ A ángulo externo.

Como son iguales, cada uno mide ∡ A/2, es decir:
∡ AA’B = ∡ ABA’ = ∡ A/2

También son iguales al ∡ CAV , lo que indica que A'B es paralela a AV.

Aplicando el teorema de Thales, se obtiene: $\frac{b}{m} = \frac{c}{n}$ $\quad \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$



B. TEOREMAS

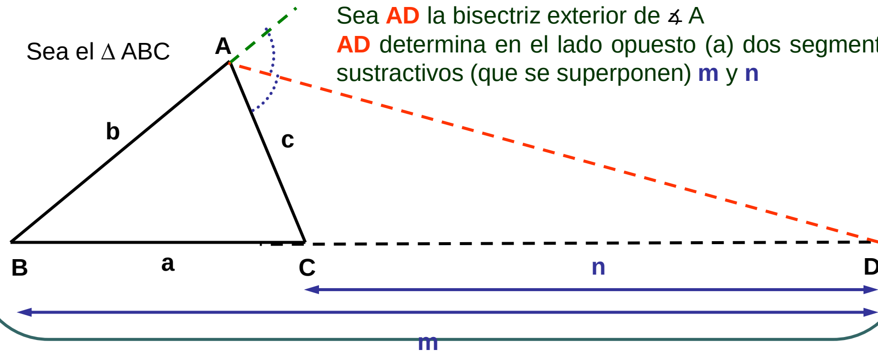
PROPIEDADES DE LAS BISECTRICES

TEOREMA VI - 12

b) La bisectriz exterior de un ángulo de un triángulo con lados desiguales corta al lado opuesto, determinando sobre él dos segmentos sustractivos proporcionales a los otros 2 lados

Sea el Δ ABC

Sea **AD** la bisectriz exterior de ∡ A
AD determina en el lado opuesto (a) dos segmentos sustractivos (que se superponen) **m** y **n**



B. TEOREMAS

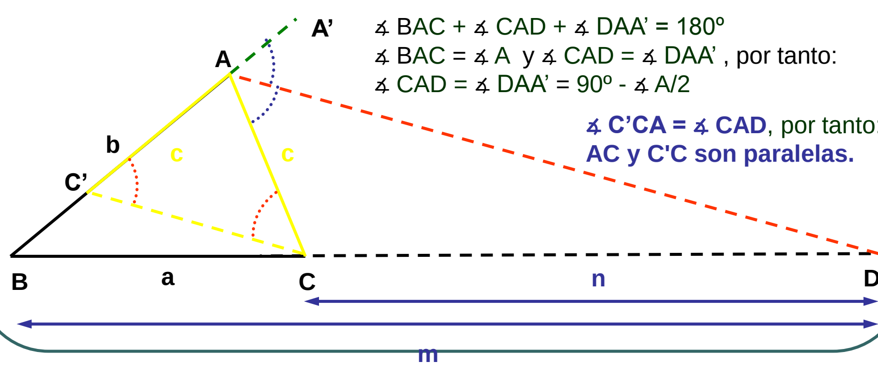
PROPIEDADES DE LAS BISECTRICES

TEOREMA VI - 12

Tomando AC' = AC = c , se forma el triángulo isósceles ACC', verificándose que: ∡ **AC'C** = ∡ **C'CA** = 90º - ∡ A/2

∡ BAC + ∡ CAD + ∡ DAA' = 180º
∡ BAC = ∡ A y ∡ CAD = ∡ DAA' , por tanto:
∡ CAD = ∡ DAA' = 90º - ∡ A/2

∡ C'CA = ∡ CAD, por tanto:
AC y C'C son paralelas.



B. TEOREMAS

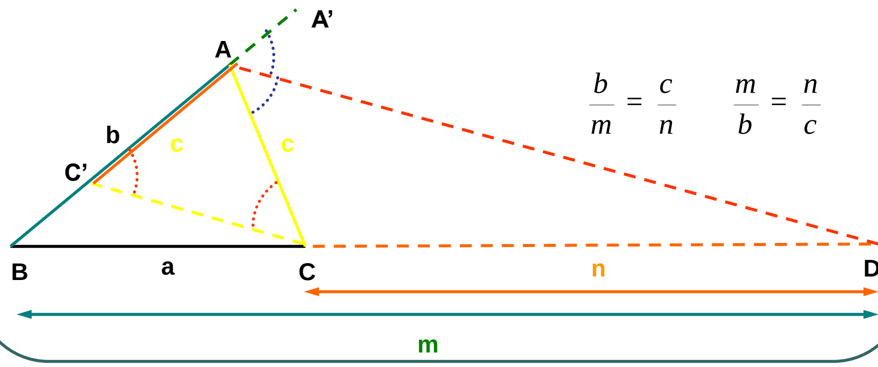
PROPIEDADES DE LAS BISECTRICES

TEOREMA VI - 12

Aplicando el teorema de Thales:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{C'A}{CD}$$

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{n} \qquad \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$



B. TEOREMAS

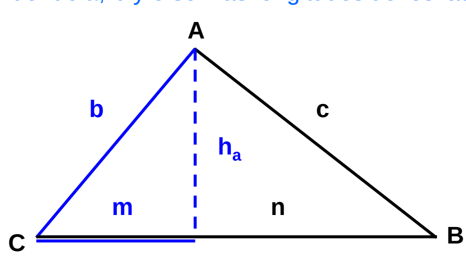
CÁLCULO DE LA ÁLTURA Y LA MEDIANA

TEOREMA VI - 13

La altura correspondiente al lado <u>a</u> de un triángulo tiene una longitud dada por la fórmula:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p = \frac{(a+b+c)}{2}$$

En donde **a**, **b** y **c** son las longitudes de los lados y **p** es el semiperímetro.



$h_a^2 = b^2 - m^2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2am$

$m = (a^2 + b^2 - c^2) / 2a$

$m^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 / 4a^2$

B. TEOREMAS

CÁLCULO DE LA ÁLTURA Y LA MEDIANA

TEOREMA VI - 13

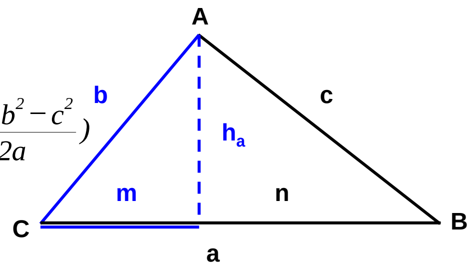
$$h_a^2 = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = (b + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}) \text{ x } (b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a})$$

$$h_a^2 = \frac{(a+b)^2-c^2}{2a} \text{ x } \frac{c^2-(a-b)^2}{2a}$$

$$h_a^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}$$

$$a+b+c = 2p \Rightarrow a+b-c = 2(p-c)$$



B. TEOREMAS

CÁLCULO DE LA ÁLTURA Y LA MEDIANA

TEOREMA VI - 13

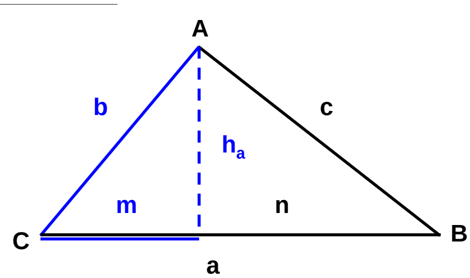
$$h_a^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}$$

$$a+b+c = 2p$$

$$a+b-c = 2(p-c)$$

$$a+c-b = 2(p-b)$$

$$b+c-a = 2(p-a)$$



$$\boxed{h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

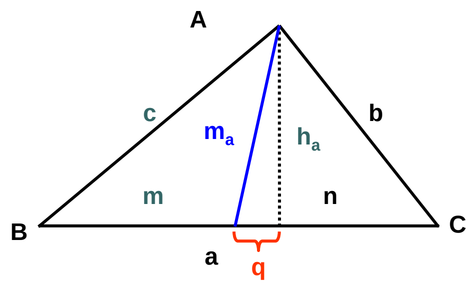
B. TEOREMAS

CÁLCULO DE LA ÁLTURA Y LA MEDIANA

TEOREMA VI - 14

La mediana correspondiente al lado a de un triángulo tiene una longitud dada por la fórmula:

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$$



B. TEOREMAS

CÁLCULO DE LA ÁLTURA Y LA MEDIANA

TEOREMA VI - 14

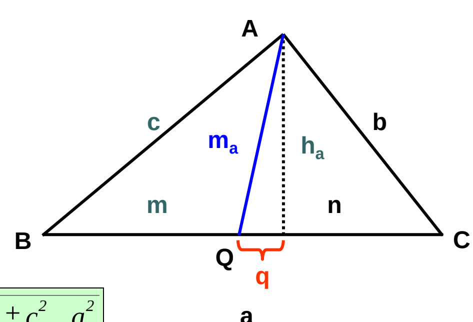
Por el teorema VI-10, generalización del Teorema de Pitágoras

En el Δ AQC, para un ángulo agudo y Δ AQB, para un ángulo obtuso, tenemos:

$$b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{a}{2}q$$

$$c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\frac{a}{2}q$$

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$



Despejando m_a : $\boxed{m_a = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}}$

B. TEOREMAS

ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE LOS LADOS — **TEOREMA VI - 15**

Fórmula de HERÓN:

$$S = \frac{1}{2} a\, h_a$$

Sustituyendo h_a por su valor (teorema VI-13), obtenemos:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

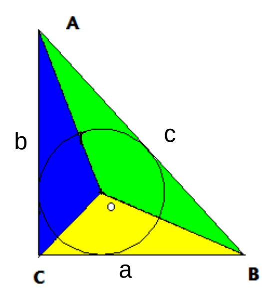
B. TEOREMAS

TEOREMA VI - 16

ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA INSCRITA

El área del triángulo es igual al semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita.

El área del triángulo es la suma de las de los triángulos **AOB**, **BOC** y **COA**; cuyas bases son los lados del triángulo ABC y sus alturas son el radio r de la circunferencia inscrita.



Luego:

$$S = \frac{1}{2} a\, r + \frac{1}{2} b\, r + \frac{1}{2} c\, r$$

$$S = r\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\boxed{S = r\, p}$$

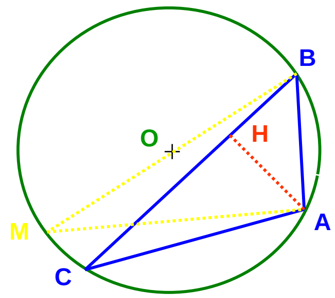
Donde p = semiperímetro

B. TEOREMAS

TEOREMA VI - 17

ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE LOS LADOS Y DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA

El área de un triángulo es igual al producto de los otros tres lados divididos por cuatro veces el radio de la circunferencia circunscrita.



Sea el triángulo **ABC** y su **circunferencia circunscrita**.

Trazamos **AH**, altura de **a**.

Uniendo **B** con el centro **O** de la Circunferencia, obtenemos **M**.

Los ∆s **CHA** y **MAB** son semejantes

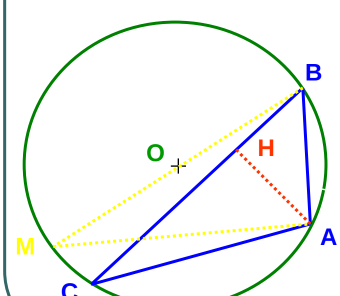
B. TEOREMAS

TEOREMA VI - 17

ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE LOS LADOS Y DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA

Los ∆s **CHA** y **MAB** son semejantes:

- ∡ **M** y ∡ **C** son ∡s inscritos que abarcan el mismo arco
- **∡ MAB = ∡CHA**



$$\frac{CH}{MA} = \frac{CA}{MB} = \frac{HA}{AB}$$

- **HA** = h_a
- **AB** = c
- **CA** = b
- **MB** = 2R

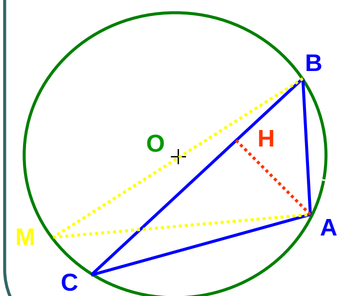
$$\Rightarrow \frac{b}{2R} = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = \frac{bc}{2R}$$

B. TEOREMAS

TEOREMA VI - 17

ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE LOS LADOS Y DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA

El área de un triángulo es igual al producto de los otros tres lados divididos por cuatro veces el radio de la circunferencia circunscrita.



$$h_a = \frac{bc}{2R}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a\, h_a = \frac{abc}{4R}}$$

Sustituyendo S por su valor dado en la fórmula de Herón, se obtiene:

$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

B. TEOREMAS

TEOREMA VI - 18

LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

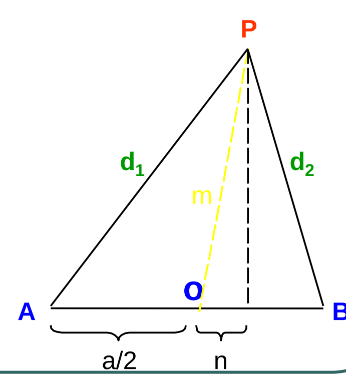
El lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos A y B es constante, es una circunferencia con centro en el punto medio de AB.

DEMOSTRACIÓN:

Sea un punto **P** que cumple la condición buscada. Llamando **a** a la distancia **AB**

En el Δ **AOP** : $d_1^2 = (\frac{a}{2})^2 + m^2 + 2(\frac{a}{2})n$

En el Δ **BOP** : $d_2^2 = (\frac{a}{2})^2 + m^2 - 2(\frac{a}{2})n$



B. TEOREMAS

LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

TEOREMA VI - 18

El lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos A y B es constante, es una circunferencia con centro en el punto medio de AB.

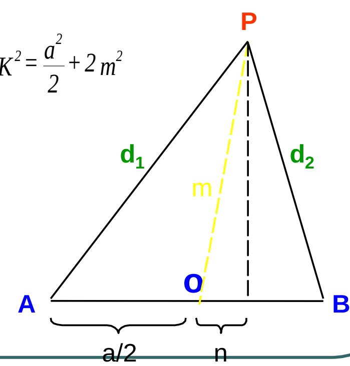
$$\left.\begin{aligned} d_2^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)n \\ d_1^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)n \end{aligned}\right\}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = K^2 = \frac{a^2}{2} + 2m^2$$

$$m^2 = \frac{K^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

O sea: m^2 debe ser constante; y también m

Por tanto P está en una circunferencia de centro O y radio m.



B. TEOREMAS

LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

TEOREMA VI - 19

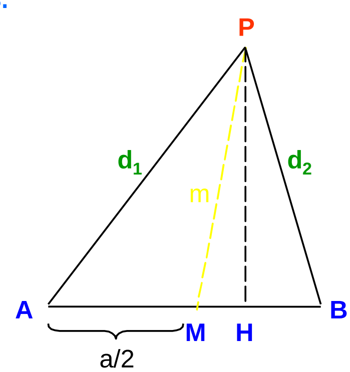
El lugar geométrico de puntos del plano cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos del mismo A y B (tomadas en ese orden) es constante, es una recta perpendicular a AB.

DEMOSTRACIÓN:

Sea P un punto que cumple: $d_1^2 - d_2^2 = K$

En el Δ PBM : $d_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)MH$

En el Δ PMA : $d_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)MH$



B. TEOREMAS

LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

TEOREMA VI - 19

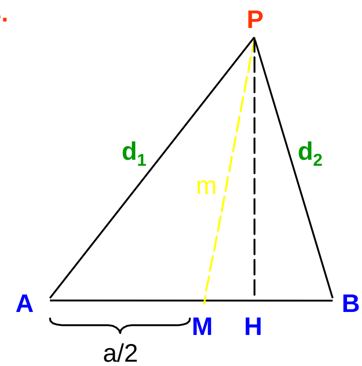
El lugar geométrico de puntos del plano cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos del mismo A y B (tomadas en ese orden) es constante, es una recta perpendicular a AB.

$$d_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 - 2\frac{a}{2} x\, MH$$

$$d_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 + 2\frac{a}{2} x\, MH$$

$$d_1^2 - d_2^2 = K = 2\, a\, x\, MH$$

$$MH = \frac{K}{2a} = cte$$



Luego **P** está sobre la perpendicular a **AB** en el punto **H**, o sea **HP**.

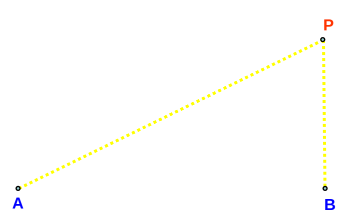
B. TEOREMAS

LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

TEOREMA VI - 20

El lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a 2 puntos fijos del mismo, A y B, es una constante K, es:

1. **Una circunferencia (circunferencia de Apolonio) cuyo centro se halla en la recta AB, si K ≠ 1.**
2. **La mediatriz de AB, si K = 1.**



$$\frac{PA}{PB} = K$$

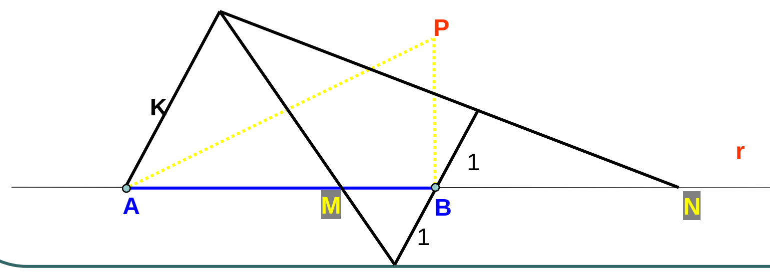
B. TEOREMAS

LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

TEOREMA VI - 20

Trazamos la recta **r** que pasa por los puntos **A** y **B**
Unimos los puntos **A** y **B** con un segmento
Obtenemos los puntos **M** y **N**, de tal forma que se verifica:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$$



B. TEOREMAS

LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

TEOREMA VI - 20

Se unen los puntos **ABP**, para formar el Δ ABP

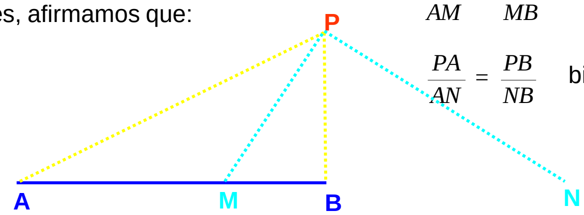
Proyectamos los segmentos **AP** y **AB**

En el ∡ **APB** trazamos la bisectriz interior **PM** y bisectriz exterior **PM**

De acuerdo con el teorema de las bisectrices, afirmamos que:

$$\frac{PA}{AM} = \frac{PB}{MB}$$ bisectriz interior

$$\frac{PA}{AN} = \frac{PB}{NB}$$ bisectriz exterior



B. TEOREMAS

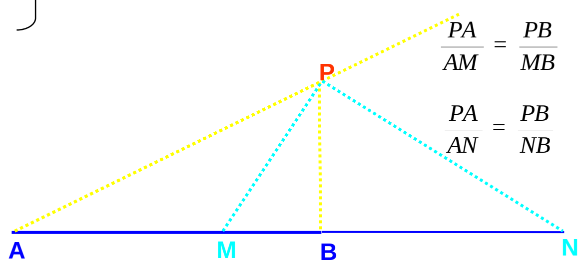
LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

TEOREMA VI - 20

$$\left.\begin{aligned} \frac{PA}{PB} &= \frac{MA}{MB} \\ \frac{PA}{PB} &= \frac{NA}{NB} \end{aligned}\right\} \quad \frac{PA}{PB} = \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$$

$$\frac{PA}{AM} = \frac{PB}{MB}$$ bisectriz interior

$$\frac{PA}{AN} = \frac{PB}{NB}$$ bisectriz exterior



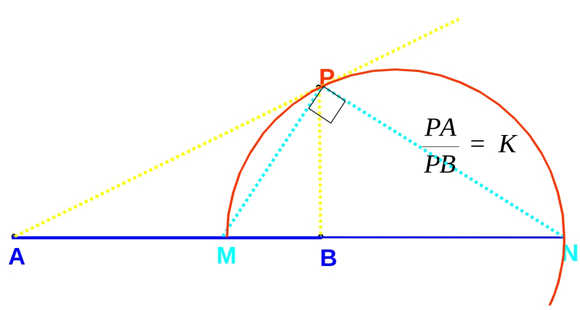
B. TEOREMAS

LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

TEOREMA VI - 20

Sabemos que las bisectrices interior y exterior forman un ángulo de 90°

Por tanto el arco MPN es una semicircunferencia de diámetro MN y el lugar geométrico de los puntos P que verifican la condición PA/PB = K es una circunferencia de diámetro MN



B. TEOREMAS

LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES **TEOREMA VI - 20**

El lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a 2 puntos fijos del mismo, A y B, es una constante K, es:

1. **Una circunferencia (circunferencia de Apolonio) cuyo centro se halla en la recta AB, si K ≠ 1.**
2. **La mediatriz de AB, si K = 1.**