CAPÍTULO 4: RELACIÓN ENTRE ÁNGULOS Y ARCOS DE CIRCUNFERENCIA (II)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 4: Relación entre Ángulos y Arcos de Circunferencia (II)

B. Teoremas

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

12 diapositivas

CAPÍTULO IV: RELACIÓN ENTRE ÁNGULOS Y ARCOS DE CIRCUNFERENCIA

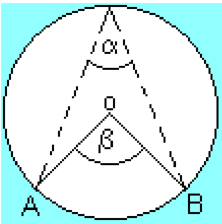
B. TEOREMAS

B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 1

Un ángulo inscrito en una circunferencia *-aquél que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados pasan por los extremos de un arco de la misma-* vale la mitad del arco que abarca.

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$



Demostraciones

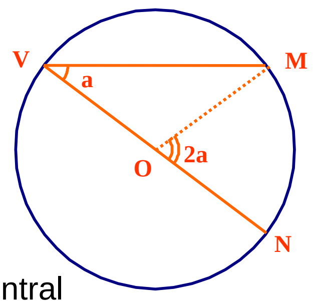
Consideremos 3 posibilidades:

B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 1

a) Un lado pasa por el centro O de la circunferencia:

El ∡ *MVN* vale ∡ a



El ∡ *VMO* vale ∡ a(Δ *VOM* isósceles).

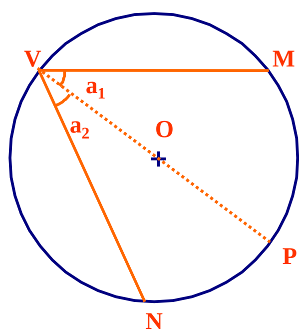
∡ MON vale ∡ a + ∡ a = 2 ∡ a
(por ser ángulo exterior al Δ VOM)

Luego ∡ *MVN* vale la mitad del ∡ central *MON* que abarca el mismo arco.

B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 1

b) El centro O es interior al ángulo:



Descomponiendo el ángulo en suma de dos se obtiene el mismo resultado:

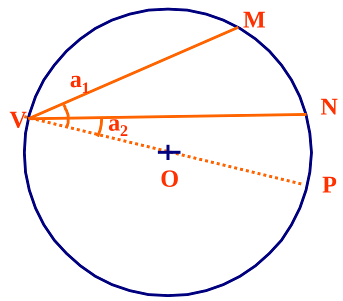
$$\hat{a} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 = \frac{1}{2}\,arco\,MP + \frac{1}{2}\,arco\,PN = \frac{1}{2}\,arco\,MN$$

B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 1

c) El centro O es exterior al ángulo.

Corolario:
El ángulo inscrito vale la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

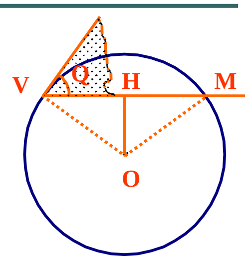


$$\hat{a} = \hat{a}_1 - \hat{a}_2 = \frac{1}{2} arco\ MP - \frac{1}{2} arco\ NP = \frac{1}{2} arco\ MN$$

B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 2

Un ángulo seminscrito en una circunferencia (aquél que tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es tangente y el otro secante a la misma) vale la mitad del arco que abarca.



Demostración

Trazando la perpendicular OH desde O a VM y uniendo O con V y M se observa que los ángulos VOH y HOM son iguales; luego cada uno vale la mitad del arco VM.

El ángulo semi inscrito vale lo mismo que VOH, porque los dos tienen el mismo complemento HVO, ya que el radio OV es perpendicular a la tangente en V.

B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 3

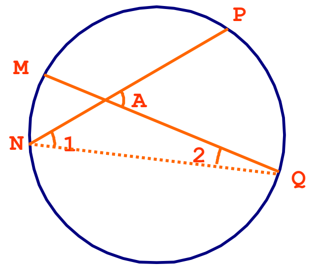
El ángulo interior a una circunferencia, vale la semisuma de los arcos que abarca.

Demostración

Por ser exterior del triángulo ANQ:

$$\hat{1} = \frac{1}{2} arco\ PQ \qquad \hat{2} = \frac{1}{2} arco\ MN$$

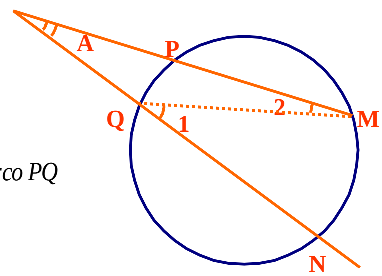
$$\hat{A} = \frac{arco\ PQ + arco\ MN}{2}$$



B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 4

El ángulo exterior a una circunferencia, cuyos lados la cortan o son tangentes a ella, vale la semidiferencia de los arcos que abarca.



Demostración

$$\hat{1} = \hat{A} + \hat{2} \quad ; \quad \hat{A} = \hat{1} - \hat{2} = \frac{1}{2} arco\ MN - \frac{1}{2} arco\ PQ$$

$$\hat{A} = \frac{arco\ MN - arco\ PQ}{2}$$

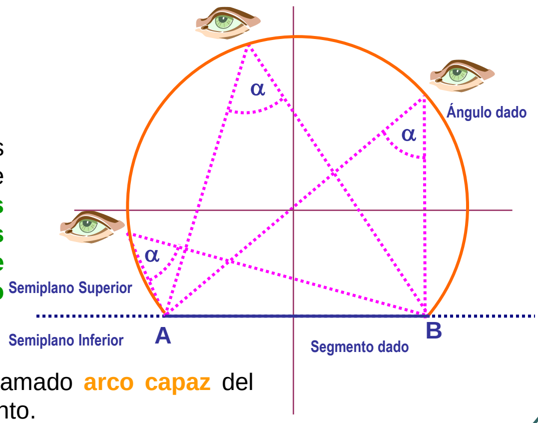
TEOREMA DEL ARCO CAPAZ

B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 5

El lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve un segmento dado bajo un ángulo dado,

es una figura formada por dos **arcos de circunferencia**, que tienen los **mismos extremos** que el segmento, **radios iguales**, estando **cada uno de ellos en cada semiplano** definido por el segmento.



Cada uno de estos arcos es llamado **arco capaz** del ángulo dado respecto al segmento.

TEOREMA DEL ARCO CAPAZ

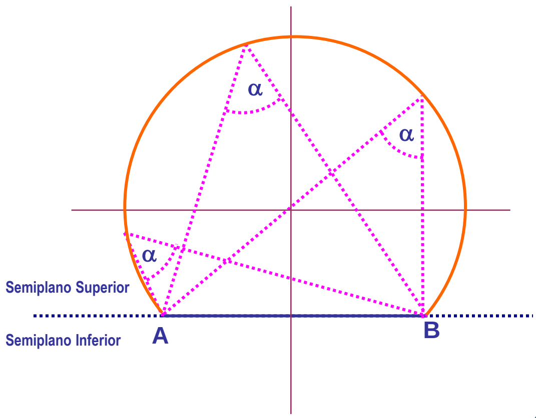
B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 5

Explicación:

Recordemos que "**lugar geométrico**" es el conjunto de puntos que cumplen una determinada condición.

En nuestro caso, dicha condición es "**ver un segmento dado bajo un ángulo dado**", lo cual expresa que las semirrectas trazadas desde el punto a los extremos del segmento han de formar el ángulo dado (El segmento está en el interior de dicho ángulo).



TEOREMA DEL ARCO CAPAZ

B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 5

Demostración

Sea el segmento **AB** y el ángulo **α**

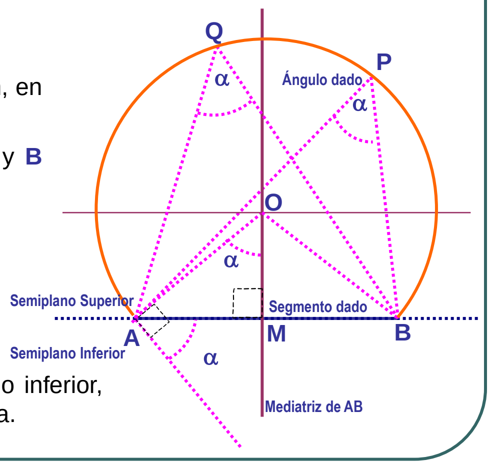
Sea **P** un punto que cumple la condición, en el semiplano superior.

La **circunferencia** que pasa por **A**, **P** y **B** tiene su centro **O** en la mediatriz de **AB**.

El ángulo ∡ **AOM** debe ser **α**.

En el semiplano superior, cualquier punto **Q** del arco APB cumplirá la condición.

Escogiendo un punto P' en el semiplano inferior, se completa la demostración del teorema.



TEOREMA DEL ARCO CAPAZ

B. TEOREMAS

TEOREMA IV - 5

Construcción del arco capaz de un ángulo α

Tomando como "origen" **A** en el segmento **AB** **se construye el ángulo α** en sentido horario (hacia abajo, así se halla el arco capaz del semiplano superior).

Se traza una perpendicular al **2º lado de α**; **el punto O,** intersección de ella con la **mediatriz de AB**, **es el centro** del **arco capaz**.

La construcción se justifica por el apartado anterior.