CAPÍTULO 7: GENERALIDADES SOBRE TRANSFORMACIONES (V)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 7: Generalidades Sobre Transformaciones (V)

E. Ejercicios resueltos

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

21 diapositivas

CAPITULO VII: GENERALIDADES SOBRE TRANSFORMACIONES

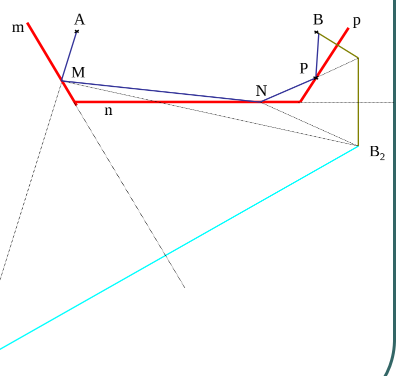
EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS

VII-1 Hallar la trayectoria mínima que, partiendo de A, toque la semirrecta m, el segmento n, la semirrecta p y llegue a B.

Resolución:

Supongamos que toque m, n y p en los puntos M, N y P respectivamente. (Suponemos el problema resuelto).

AM, MN,NP y PB deben ser segmentos rectilíneos (distancia más corta entre 2 puntos).



Transformaremos el problema mediante reflexiones en rectas.

Una reflexión respecto a p transforma B en B_1 y PB en PB_1.

El camino NP + PB es igual a NP + PB_1 el cual será mínimo si N, P y B_1 están alineados; es decir:

- NP + PB = N B_1; lo cual nos permitiría determinar P si conociéramos N.

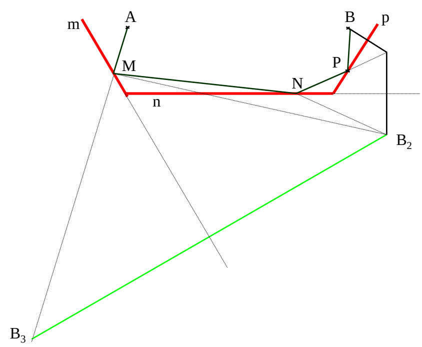
Una reflexión respecto a n transforma B_1 en B_2 ; NB_1 en NB_2.

El camino MN + NP + PB = MN + NB_2 será mínimo si M, N y B_2 están alineados; en ese caso MN + NB_2 =MB_2; lo que permitiría determinar N conociendo M.

Una reflexión respecto a m transforma B_2 en B_3 ; MB_2= MB_3.

El camino AM + MB_2 = AM + MB_3 será mínimo si A, M y B_3 están alineados.

Lo que permitiría determinar M; y siguiendo pasos inversos a los anteriores, determinar N y P para la trayectoria mínima, como se ilustra en la figura .



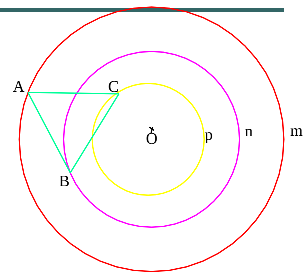
VII-2 Construir un triángulo equilátero cuyos vértices estén sobre tres circunferencias concéntricas dadas.

Resolución:

Supondremos, como siempre, el problema resuelto:

Observamos que el punto A podría trasladarse, mediante un giro alrededor de O del conjunto, a cualquier punto de m. Por consiguiente podemos escoger un A arbitrario en m.

Un giro de alrededor de A, transforma B en C; este giro transforma n en n'; C tiene que estar en p (primer lugar geométrico) y por otra parte, por ser imagen de B, tiene que estar en n' (segundo lugar geométrico). Luego C queda determinado por la intersección de n' y p (2 soluciones).

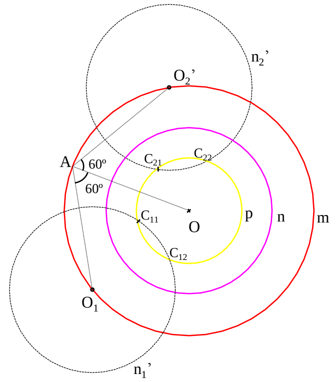


Pero como el giro puede hacerse en 2 sentidos, podemos obtener como máximo 4 soluciones para cada punto A.

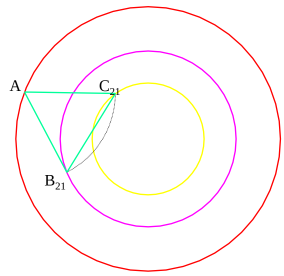
Como se ve, aplicamos el método de las transformaciones completado con el de los lugares geométricos.

Invirtiendo el giro obtendríamos B.

Aplicamos el método a un caso concreto:



Hemos determinado cuatro posibles puntos C. Tomando uno de ellos, por ejemplo C_{21} e invirtiendo el giro obtendremos una de las soluciones:

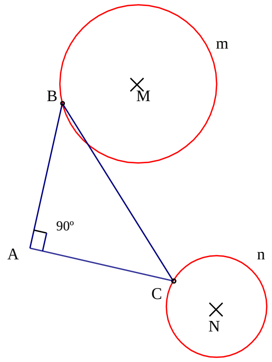


De forma análoga obtendríamos las otras 3 soluciones.

VII-3 Construir un triángulo rectángulo isósceles ABC, siendo A vértice del ángulo recto) un punto dado y tal que B y C se encuentren sobre 2 circunferencias dadas m y n.

Resolución:

Supondremos, como siempre, el problema resuelto:



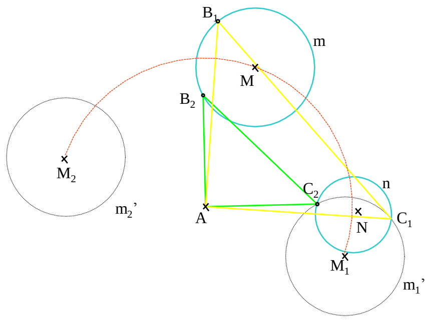
Observamos que una rotación de alrededor de A:

- transforma B en C (sobre n)
- transforma m en m'
- luego C estará en la intersección de m' y n.

Como el giro de se puede hacer en 2 sentidos distintos, hay 2 circunferencias posibles m'; que al cortar a n pueden dar máximo 4 puntos.

Obtenido C, se invierte el giro de alrededor de A y se obtiene

Aplicación a unos datos concretos:



Vemos que m'$_2$ no corta a n ni da, por tanto, ninguna solución.

m'$_1$ sí corta a n, dando C_1 y C_2 con los que obtenemos las soluciones AB_1C_1 y AB_2C_2.

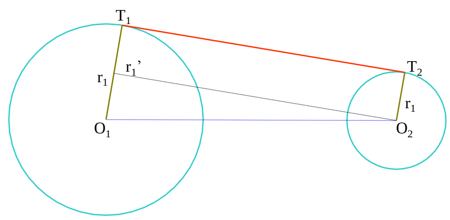
VII-4 Trazar tangentes exteriores comunes a dos circunferencias.

Resolución:

Supondremos, como siempre, el problema resuelto:

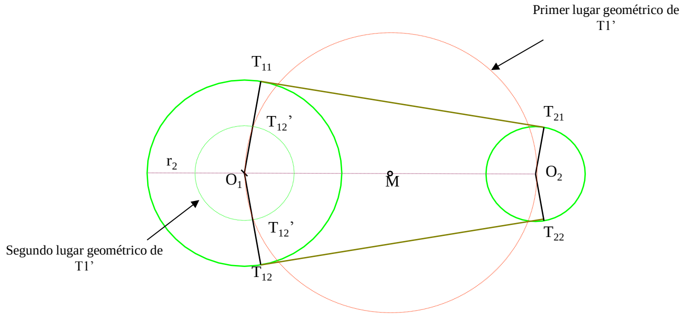
T_1T_2 es perpendicular a O_1T_1 y a O_2T_2, las cuales son paralelas entre sí.

Una traslación de T_1T_2 con vector T_2O_2 lleva T_2 a O_2, y T_1 a T'_1; se forma el triángulo rectángulo $O_1T'_1O_2$, de hipotenusa O_1O_2 conocida y un cateto $O_1T'_1 = r_1 - r_2$ también conocido.



Se puede construir ese triángulo (máximo 2 soluciones), y prolongando O_1 T'_1 y trazándole la paralela O_2T_2 se pueden obtener los puntos T_1 y T_2.

Aplicación:

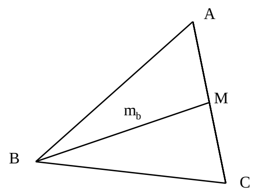


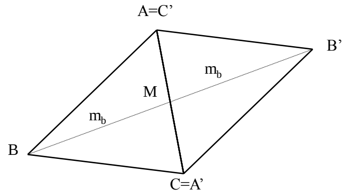
VII-5 Resolver un triángulo conociendo a, A y m_b.

Resolución:

Supondremos, como siempre, el problema resuelto:

Vemos que AM = MC ; tomando una simetría central respecto a M, A se transforma en C y viceversa; B en B'.



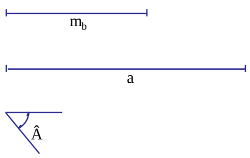


ABCB' es un paralelogramo; AB' = a.

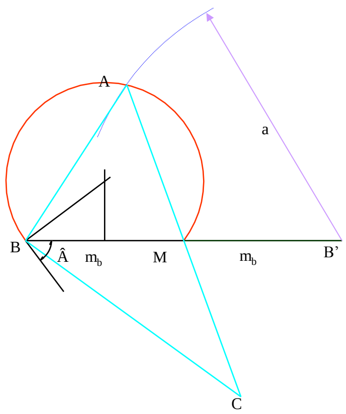
A está en el arco capaz de A respecto BM (primer lugar geométrico). También está a distancia a de B' (segundo lugar geométrico).

Con lo expuesto podemos resolver el problema.

DATOS :



Colocamos en posición 2 $\underline{m_b}$; trazamos el arco capaz de A respecto BM; trazamos la circunferencia de centro B' y radio a; donde se corten se halla A:



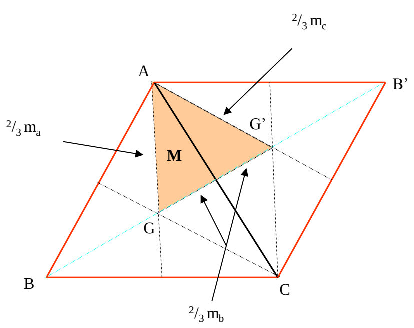
VII-6. Construir un triángulo conociendo las 3 medianas.

Resolución:

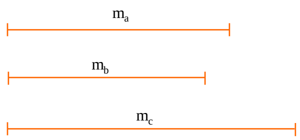
Supondremos el problema resuelto y hacemos una simetría central respecto a M como en el problema anterior:

El triángulo AGG' tiene lados conocidos, que valen 2/3 de las medianas.

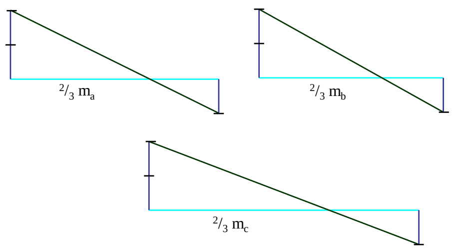
La mediana AM de dicho triángulo es la mitad del lado b. GB es $2/3m_b$. Lo cual permitirá construir el triángulo ABC.

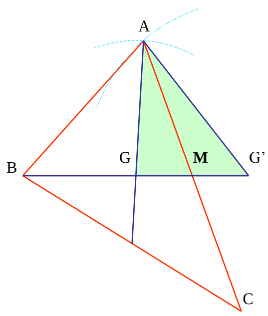


Aplicación de datos:



Calculamos gráficamente los 2/3:

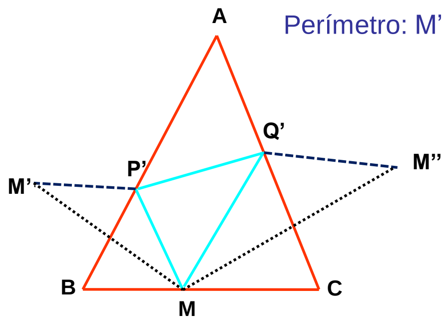




Construimos AGG'; y completamos ABC.

TRIÁNGULO ÓRTICO

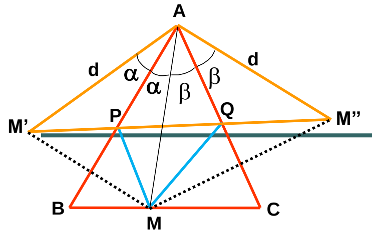
Sea un triángulo acutángulo ABC. En el lado BC hay un punto M. Se desea trazar un triángulo MPQ inscrito en el triángulo ABC (P en AB, Q en AC) de forma que el perímetro de MPQ sea mínimo.



Perímetro: M'P'+ P'Q'+ Q'M''

El perímetro será mínimo cuando M', P', Q' y M'' estén en línea recta.

Esto permite construir el triángulo buscado: Triángulo Órtico.



A= $\alpha + \beta$

2A= $2\alpha + 2\beta$

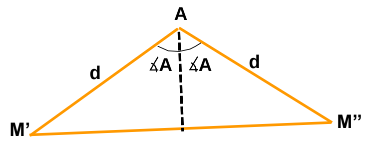
Perímetro: MP + PQ + QM

Perímetro: M’P +PQ + QM”

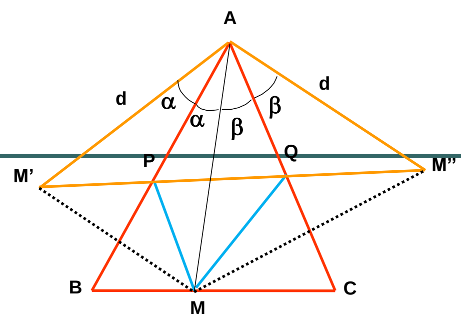
Perímetro: M’M” = 2p

El perímetro mínimo se puede calcular conociendo la distancia AM = d; y el ángulo A. Puede observarse que M’M’’ es un segmento tal que M’A = d; M’’A = d; y el ángulo M’AM”= 2A. Luego .

Perímetro= 2d sen A



- El perímetro es mínimo cuando d es mínimo.
- La distancia “d” es mínima cuando vale lo mismo que la altura del lado a.
- O sea, cuando M coincida con el pie de la altura.



Pero como el lado a no tiene ningún privilegio respecto a los otros dos lados, el triángulo será de perímetro mínimo cuando M, P y Q sean los pies de las tres alturas.

A ese triángulo se le llama **Triángulo Órtico**.

Su construcción es siempre posible y cae dentro de los lados de ABC, cuando ABC es acutángulo.

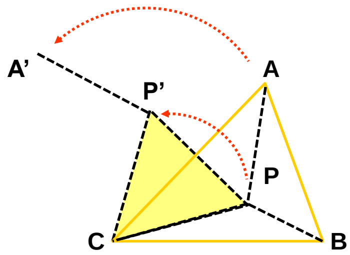
PUNTO DE FERMAT

Sea ABC un triángulo, tal que sus ángulos son menores que 120º.

Se busca un punto P en su interior, tal que la suma de sus distancias a los vértices sea mínima:

PA + PB + PC = mínimo

Sea P un punto en el interior del triángulo y tracemos PA, PB y PC.



Una rotación de 60º alrededor de C:

Convierte **A** en **A'** y **P** en **P'**.

PA + PB + PC = A'P' + P'P + PB

Esta suma será mínima si:

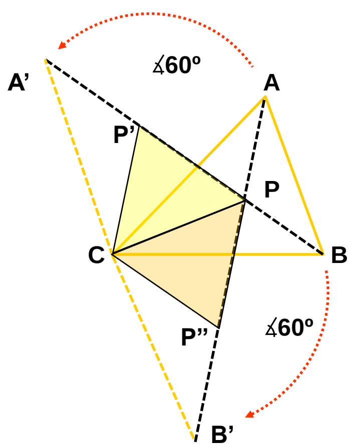
A', **P'**, **P** y **B** están en línea recta.

PUNTO DE FERMAT

Para obtener el punto **P** conveniente, llamado **Punto de Fermat**, se traza la recta **A'B**; en ella se encuentra **P** y **P'**.

Luego se invierte el giro: **A'** regresa a **A**; **B** se convierte en **B'**. La recta **A'B** se convierte en **AB'**, la cual está en P.

Luego P está en la intersección de las dos rectas.



Puede comprobarse que el ángulo APB vale 180º - 60º = 120º. Pero como el lado AB no tiene privilegios respecto a los otros dos, se deduce que también BPC y CPA valen 120º.

Luego el Punto de Fermat está en la intersección de los tres arcos capaces de 120º respecto a los tres lados del triángulo ABC.

VII-9. Construir un triángulo equilátero cuyos vértices estén sobre 3 rectas paralelas dadas.

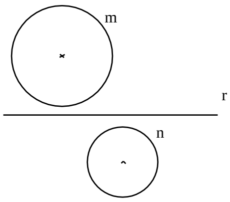
VII-10. Construir una circunferencia de radio dado r, que pase por un punto P, e intercepte en una circunferencia dada a una cuerda de longitud también dada l.

VII-11. Dadas 2 circunferencias exteriores m y n y una recta r, trazar otra recta r' paralela a r que corte a m y n según cuerdas iguales.

(Sugerencia: aplique una traslación con guía r).

VII-12. Construir un cuadrado ABCD de forma que A y C estén en la recta r, B y D estén en las circunferencias m y n, respectivamente.

(Sugerencia: aplique una reflexión respecto a r)



VII-13. Dado un cuadrilátero cualquiera ABCD y punto O en su interior, construir un paralelogramo MNPQ de forma que sus vértices estén en los lados del cuadrilátero y su centro (punto de intersección de las diagonales) sea O.

(Sugerencia: aplique una simetría de centro O)

VII-14. Dadas 2 circunferencias exteriores, trazar tangentes interiores comunes.

VII-15. Hallar la longitud de una tangente exterior común (distancia entre puntos de tangencia) a dos circunferencias de radios r y r' y distancia entre centros d.

(R: $l = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}$)

VII-16. Id. para tangentes interiores comunes.

(R: $l = \sqrt{d^2 - (r + r')^2}$)