CAPÍTULO 5: SEGMENTOS PROPORCIONALES (II)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 5: Segmentos Proporcionales (II)

B. Teoremas

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

36 diapositivas

CAPÍTULO V : SEGMENTOS PROPORCIONALES

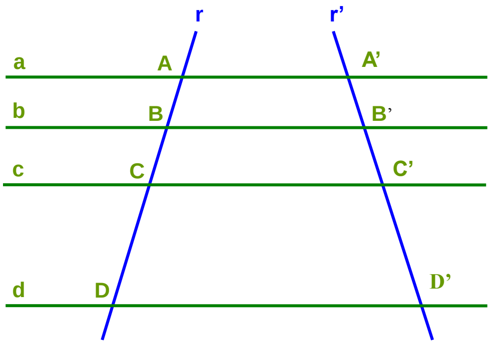
B. TEOREMAS

B. TEOREMAS

TEOREMA DE THALES DE MILETO

TEOREMA V - 1

Si un sistema de paralelas corta a 2 rectas secantes r y r' determina sobre ellas segmentos homólogos (correspondientes) proporcionales.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Explicación

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$

Segmentos homólogos o correspondientes: en este caso, los limitados por las mismas paralelas: el homólogo de AB es A'B', etc.

B. TEOREMAS

TEOREMA DE THALES DE MILETO **Demostración** **TEOREMA V - 1**

Paso 1. Si dos segmentos de r son iguales, los 2 homólogos de r' también lo son (hay correspondencia en la igualdad).

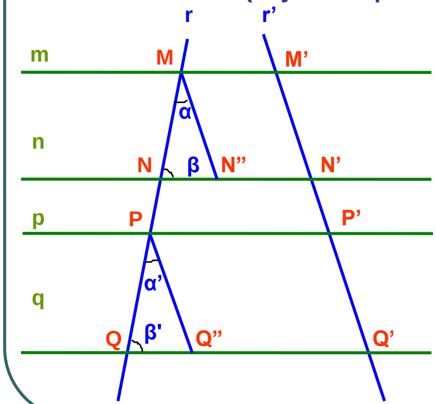
Paso 2. Si un segmento de r es igual a la suma de otros dos de r, el homólogo del primero en r' es igual a la suma de los homólogos de los segundos. (hay correspondencia en la suma)

Paso 3. Habiendo correspondencia en la igualdad y en la suma, se puede demostrar con absoluta generalidad que los segmentos homólogos son proporcionales.

B. TEOREMAS

TEOREMA DE THALES DE MILETO **Demostración** **TEOREMA V - 1**

Paso 1. Si dos segmentos de r son iguales, los 2 homólogos de r' también lo son (hay correspondencia en la igualdad).



Hipótesis Sea **MN = PQ**

Tesis demostraremos que **M'N' = P'Q'**

Trazando por **M** y **P** paralelas a **r’**

Obtenemos los triángulos **MNN''** y **PQQ''** que son congruentes (**MN = PQ**, **α** y **ß** son iguales a **α'** y **ß'** por correspondientes).

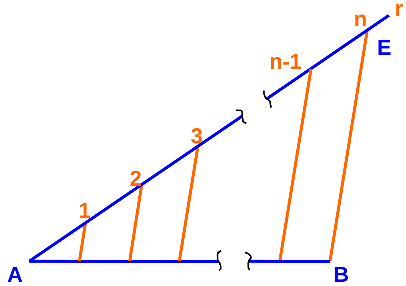
Luego **MN'' = PQ''**; luego **M' N' = P' Q'**

B. TEOREMAS

TEOREMA DE THALES DE MILETO **Demostración** **TEOREMA V - 1**

Corolario: Dividir un segmento en n partes iguales.

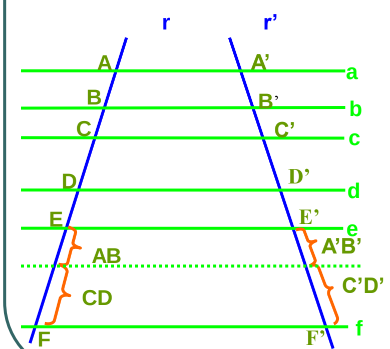
Dado un segmento **AB**, desde **A** trazamos una recta **r** y sobre ella colocamos n partes iguales arbitrarias. Unimos el extremo de la última, **E**, con **B**; y por los extremos de las restantes, trazamos paralelas a **EB**.



B. TEOREMAS

TEOREMA DE THALES DE MILETO **Demostración** **TEOREMA V - 1**

Paso 2. Si un segmento de r es igual a la suma de otros dos de r, el homólogo del primero en r' es igual a la suma de los homólogos de los segundos. (hay correspondencia en la suma)



Hipótesis **AB** + **CD** = **EF**

Tesis **A'B'** + **C'D'** = **E'F'**

Trasladando las distancias **AB** y **CD**, una a continuación de otra, a partir de **E** y a lo largo de **r**, se determina **F**, por donde pasa la paralela **f**, tal que

AB + CD = EF.

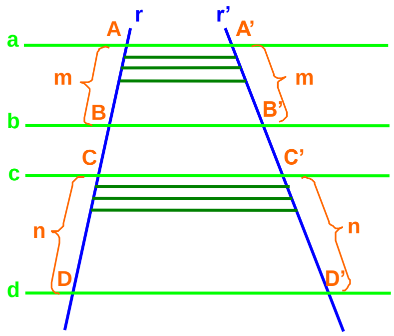
Luego, en virtud del **Paso 1**, descrito anteriormente, **A'B' + C'D' = E'F'.**

B. TEOREMAS

TEOREMA DE THALES DE MILETO **Demostración** **TEOREMA V - 1**

Paso 3. Habiendo correspondencia en la igualdad y en la suma, se puede demostrar con absoluta generalidad que los segmentos homólogos son proporcionales.

Aquí nos limitaremos a demostrarlo para el caso particular (suficiente en la práctica técnica) de que los segmentos tengan medidas racionales (es decir, al ser medidos arrojan números racionales, como $\left(\frac{a}{b}\right)$ siendo a y b enteros)



Sea la razón:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$$

B. TEOREMAS

TEOREMA DE THALES DE MILETO **Demostración** **TEOREMA V - 1**

Ello quiere decir que:

- Dividiendo AB en **m** partes iguales, y
- Dividiendo CD en **n** partes iguales,

Una parte (de AB) y una parte (de CD) serán iguales entre sí.

Suponiendo dividido AB en **m** partes:

- Se trazan paralelas del sistema por los extremos de cada una, las cuales determinarían **m** partes también iguales en A'B';

Se hace lo propio con CD, obteniendo **n** partes iguales en C'D'.

B. TEOREMAS

TEOREMA DE THALES DE MILETO **Demostración** **TEOREMA V - 1**

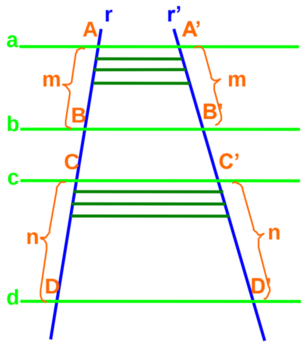
Ya que tanto AB y A'B' como CD y C'D' quedan divididos en un mismo número de partes m y n, respectivamente, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} AB = m(\text{unidades}_r) \\ CD = n(\text{unidades}_r) \end{array}\right| \frac{AB}{CD} = \frac{m(\text{unidades}_r)}{n(\text{unidades}_r)} = \frac{m}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} A'B' = m(\text{unidades}_{r'}) \\ C'D' = n(\text{unidades}_{r'}) \end{array}\right| \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{m(\text{unidades}_{r'})}{n(\text{unidades}_{r'})} = \frac{m}{n}$$

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}}$$

Lqqd.



B. TEOREMAS

TEOREMA V - 2

Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros 2 en segmentos proporcionales.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

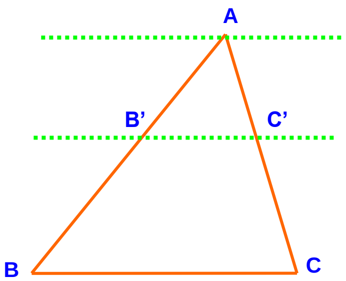
Demostración

Sea un triángulo **ABC** y trazamos una **paralela** al lado **BC** que corta a los otros dos lados en **B'** y **C'**

Suponemos trazada la **paralela** a **BC** que pasa por **A**. Aplicando al sistema de 3 paralelas el Teorema de Thales:

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{B'B}{C'C} = \frac{AB}{AC}$$

Lqqd.



B. TEOREMAS

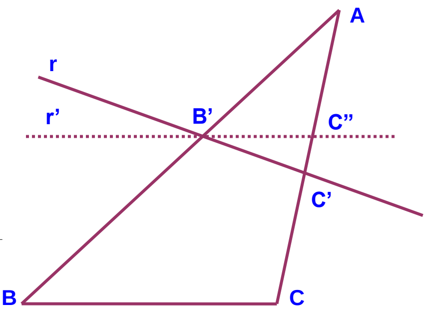
TEOREMA V - 3

(recíproco del anterior) Si una recta corta a 2 lados de un triángulo (o a sus prolongaciones) determinando segmentos proporcionales a ellos (y situados ambos al mismo lado del vértice común), es paralela al 3er lado .

Demostración

Sea un triángulo **ABC** y una recta **r** que corta a dos lados en **B'** y **C'** tales que

$$\frac{AB´}{AB} = \frac{AC'}{AC} \quad \text{o sea} \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$



B. TEOREMAS

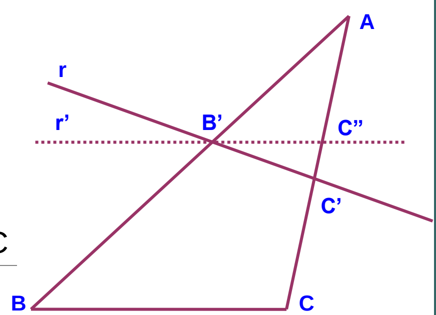
TEOREMA V - 3

Trazamos **r'** paralela a **BC** por **B'**; corta a **AC** en **C''.**

En virtud del teorema V-2:

$$\frac{AB}{AB´} = \frac{AC}{AC´´}$$

$$AC´ = \frac{AB´ \text{ x } AC}{AB} \quad ; \quad AC´´ = \frac{AB¨ \text{ x } AC}{AB}$$



Siendo **AC'** = **AC''**, **C'** debe coincidir con **C''** y por tanto **r** debe coincidir con **r''** y ser paralela a **BC**.

B. TEOREMAS

TRIANGULOS SEMEJANTES

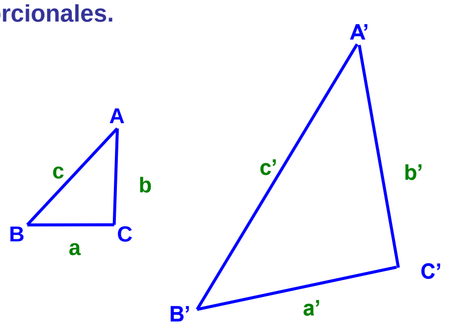
Dos triángulos son semejantes cuando tienen los ángulos respectivamente iguales, y los lados homólogos (opuestos a ángulos iguales) respectivamente proporcionales.

Son semejantes si:

$$\hat{A} = \hat{A}'; \quad \hat{B} = \hat{B}'; \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K$$

(K = razón de semejanza).



B. TEOREMAS

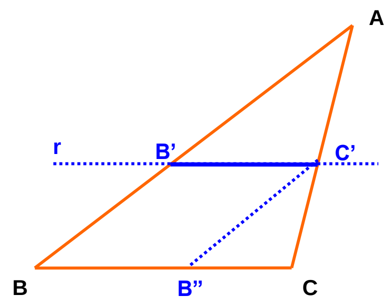
TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TRIÁNGULOS SEMEJANTES — TEOREMA V - 4

Toda paralela a un lado de un triángulo forma, con los otros dos lados (o con sus prolongaciones) otro triángulo semejante al primero.

Demostración

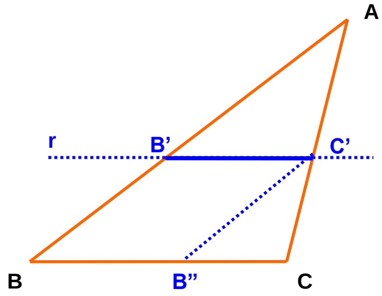
Sea un triángulo **ABC**; trazamos **r** paralela a **BC**; corta a los lados en **B'** y **C'**.

Decimos que **ABC** y **AB'C'** son semejantes; porque: $\hat{A}$ es igual por común.
$\hat{B} = \hat{B}'$ por $\hat{C} = \hat{C}'$ correspondientes; por lo mismo.



B. TEOREMAS

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TRIÁNGULOS SEMEJANTES **TEOREMA V - 4**



$\hat{B} = \hat{B}'$ $\hat{C} = \hat{C}'$

$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$ por teorema V-2

Trazamos por **C', C'B''** paralela a **AB.**

$\frac{B''B}{AC'} = \frac{BC}{AC}$ por Teorema V-2

$\frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B''B}$; $B''B = B'C'$

luego: $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$,los lados son proporcionales.

Siendo los ángulos respectivamente iguales y los lados homólogos proporcionales, los triángulos son semejantes.

B. TEOREMAS

TEOREMA V - 5

Todo triángulo A'B'C' semejante a otro ABC es congruente con un triángulo formado por 2 lados de ABC y una paralela al 3er lado.

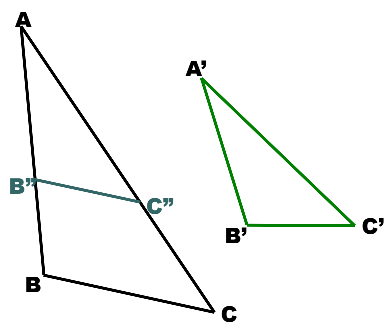
Demostración

Supongamos que ABC y A´B´C´ son semejantes.

Tomemos sobre AB el punto B'' de modo que **AB''=A'B'.**

Tracemos B''C'' paralela a BC. El triángulo AB''C'' es semejante a ABC.

$\hat{A} = \hat{A}'$ $\hat{B}'' = \hat{B} = \hat{B}'$ $\hat{C}'' = \hat{C} = \hat{C}'$

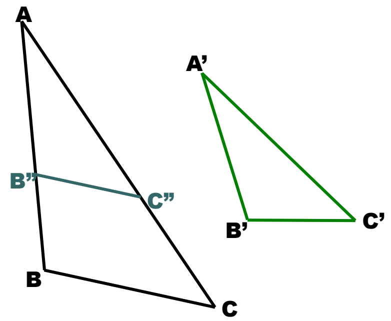


B. TEOREMAS

TEOREMA V - 5

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ por ser semejantes ABC y A'B'C'

$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''}$ por ser semejantes ABC y AB"C"



B. TEOREMAS

TEOREMA V - 5

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \qquad \frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''}$$

Dividiendo ordenadamente los tres miembros de las igualdades anteriores, se obtiene:

$\frac{A'B'}{AB''} = \frac{A'C'}{AC''} = \frac{B'C'}{B''C''}$ y como **AB" = A'B'**

$1 = \frac{A'C'}{AC''} = \frac{B'C'}{B''C''}$ por tanto **A'C'= AC"** y también **B'C'= B"C"**

Finalmente **los triángulos AB"C" y A'B'C'** tienen lados y ángulos respectivamente iguales y **son** , por tanto, **congruentes**.

B. TEOREMAS

CASOS DE SEMENJANZA DE TRIANGULOS

De acuerdo con la definición de triángulos semejantes, para saber si un triángulo ABC es semejante a otro A'B'C', habría que averiguar si:

$$\hat{A} = \hat{A}' ; \quad \hat{B} = \hat{B}' ; \quad \hat{C} = \hat{C}' ; \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Sin embargo, no es necesario comprobar todas estas condiciones, pues no son independientes; basta que comprobemos que se cumplen algunas, para poder asegurar que también se cumplen las demás.

Las condiciones mínimas se expresan por medio de los siguientes casos…

B. TEOREMAS

TEOREMA V - 6

Dos triángulos son semejantes en los casos siguientes:

Caso 1 Cuando tienen 2 ángulos respectivamente iguales.

Caso 2 Cuando tienen un ángulo respectivamente igual y los lados que lo forman respectivamente proporcionales.

Caso 3 Cuando tienen los 3 lados respectivamente proporcionales.

B. TEOREMAS

TEOREMA V - 6

Demostración

Sean ABC y A'B'C' los triángulos

Caso 1 Debiendo sumar 180º los 3 ángulos, el 3er. ángulo es también igual. Tomando sobre AB la distancia AB" = A'B' y trazando B"C" paralela a BC obtenemos AB"C" semejante a ABC y congruente con A'B'C'. Luego A'B'C' es semejante a ABC.

Caso 2 Sea $\hat{A} = \hat{A} \quad y \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

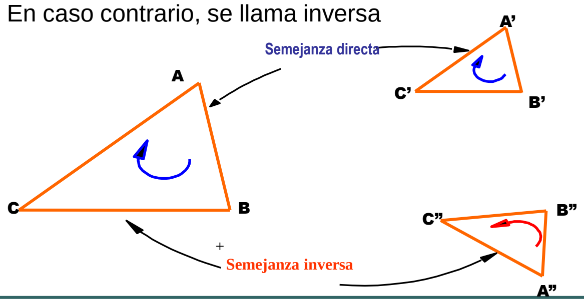
Trazando AB"C" de la misma forma que en el caso anterior, AB"C" resulta congruente con A'B'C' y semejante a ABC.

Caso 3 Obtenemos AB"C" congruente con A'B'C' (lados iguales).

B. TEOREMAS

SEMEJANZA DIRECTA E INVERSA

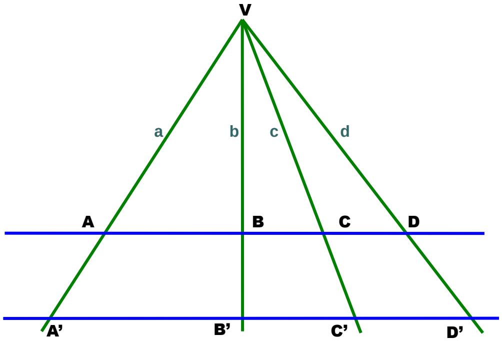
Supongamos un triángulo ABC en el piso (plano) y un observador situado dentro de él (con los pies dentro del triángulo). Si mira sucesivamente a los vértices A, B y C puede ser que tenga que girar en sentido contrario al de la agujas del reloj (sentido positivo) o en el mismo sentido (sentido negativo). Sea el mismo observador en un triángulo semejante A'B'C'. Si para mirar a A', B' y C' debe girar en el mismo sentido que antes, la semejanza se llama directa. En caso contrario, se llama inversa



B. TEOREMAS

TEOREMA V - 7

Si un haz de rectas corta a dos paralelas, determina sobre ellas segmentos homólogos proporcionales.



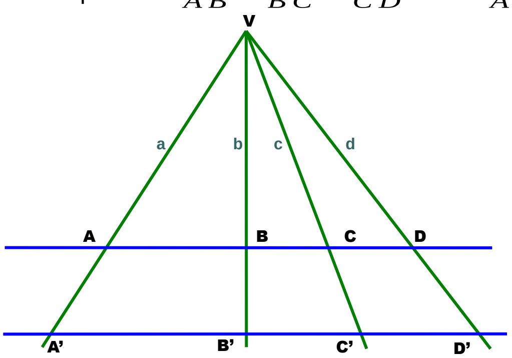
Haz de rectas es el conjunto de rectas que pasan por un punto V, llamado vértice del haz.

B. TEOREMAS

TEOREMA V - 7

Demostración:

Queremos demostrar que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots = \frac{AC}{A'C'} = \ldots$



B. TEOREMAS

TEOREMA V - 7

Los triángulos VAB y VA'B' son semejantes:

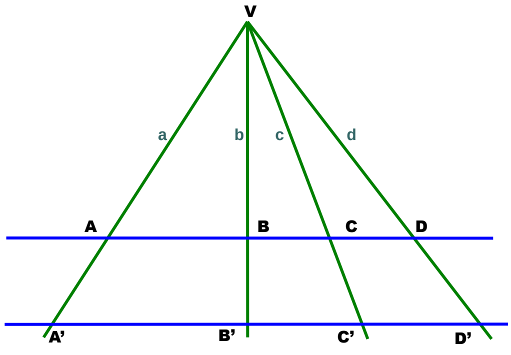
$$\frac{VB}{VB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

También lo son los VBC y VB'C'

$$\frac{VB}{VB'} = \frac{BC}{B'C'}$$

igualando las dos proporciones (tienen una razón común):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$



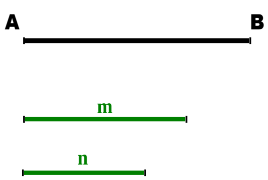
lo mismo podríamos seguir haciendo, en forma consecutiva, con los restantes triángulos.

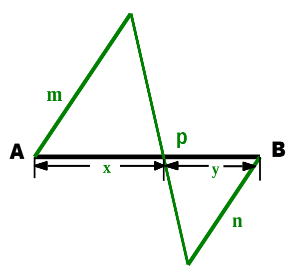
B. TEOREMAS

ALGUNAS APLICACIONES (1)

Dividir un segmento en 2 partes proporcionales a otros 2 segmentos m y n.

Sea AB el segmento a dividir :





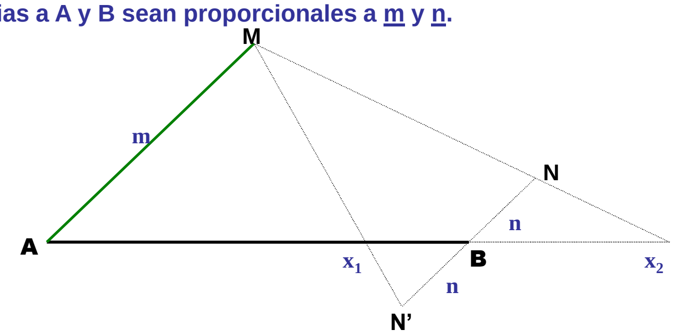
Por A y B se trazan 2 semirrectas paralelas y en sentido contrario; sobre ellas se colocan m y n. Se unen los extremos, obteniendo el punto P.

Por semejanza de triángulos: $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}; \quad x + y = AB$

B. TEOREMAS

ALGUNAS APLICACIONES (2)

En una recta que contenga 2 puntos A y B, hallar puntos X tales que sus distancias a A y B sean proporcionales a m y n.



Por A se traza una semirrecta y se toma sobre ella m;

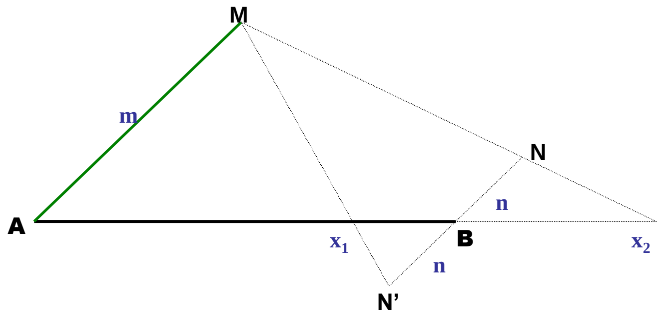
Por B se traza una paralela a ella y se toma n en los dos semiplanos.

B. TEOREMAS

ALGUNAS APLICACIONES

Se unen los 2 puntos MN' y MN obteniendo:

X_1 (interior a AB) y X_2 (exterior a AB) que cumplen.

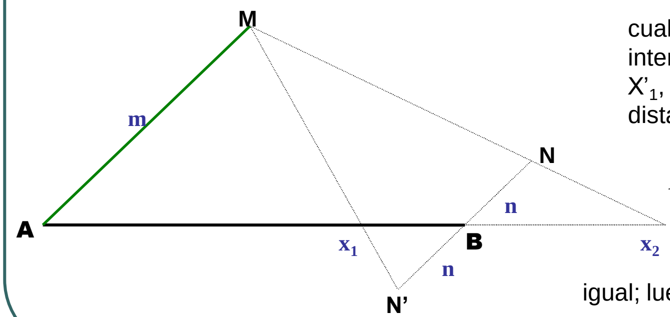


B. TEOREMAS

ALGUNAS APLICACIONES

Puede demostrarse que ningún otro punto, interior ni exterior, puede cumplir la condición propuesta:

$$\frac{AX_1}{m} = \frac{X_1B}{n} = \frac{AB}{m+n}\ ; \quad AX_1 = m\frac{AB}{m+n}$$



cualquier otro punto interior que cumpliera X'_1, daría que su distancia a A es:

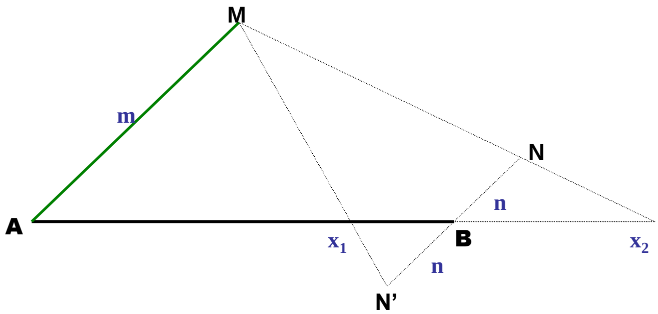
$$AX'_1 = m\frac{AB}{m+n}$$

igual; luego coincidiría con X_1.

B. TEOREMAS

ALGUNAS APLICACIONES

Demostración análoga se hace con X_2.
Luego: los 2 puntos obtenidos son los únicos que cumplen.



Nota: La solución X_2 se pierde cuando m = n, pues en este caso MN es paralela a AB. En lenguaje matemático, puede decirse que para este caso, "X_2 está en el infinito".

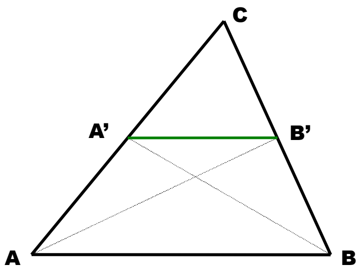
B. TEOREMAS

TEOREMA V - 8

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

Demostración:

Porque forma con las mitades de dos lados un triángulo semejante, de razón de semejanza igual a 1/2.



Δ A´B´C ≅ Δ ABC

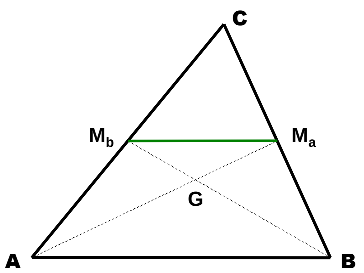
AC = 2 A´C $\wedge$ BC = 2 B´C

$\Rightarrow$ **AB = 2 A´B´**

B. TEOREMAS

TEOREMA V - 9

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado baricentro (que significa centro de gravedad), situado en cada mediana a 1/3 de distancia de la base (o lado) y a 2/3 del vértice.



Demostración:

En el triángulo ABC, las medianas A y B se cortan en G.

Uniendo M_b con M_a,

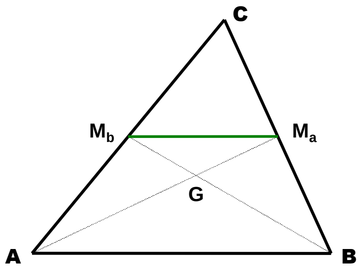
M_aM_b es paralelo a AB e igual a su mitad.

B. TEOREMAS

TEOREMA V - 9

Los triángulos AGB y M_aGM_b son pues semejantes: $\frac{AB}{M_aM_b} = \frac{GB}{GM_b} = \frac{GA}{GM_a} = 2$

o sea $GB = 2 \times GM_b$; $GA = 2 \times GM_a$



Se cortan (estas dos medianas) en el punto **G** a la 3ra. parte de la base.

Como ese punto es único para AM_a, al repetir el proceso anterior para la mediana de A y la de C, se encontrará igualmente que esta última pasa también por **G** y que está a 1/3 de su propia base.

B. TEOREMAS

TEOREMA V - 10

En dos triángulos semejantes, la razón de semejanza de los lados es también la razón que tienen entre sí:

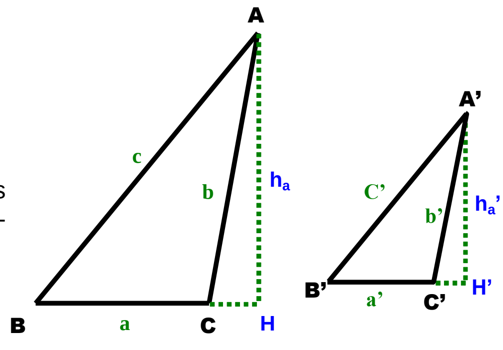
a) las alturas homólogas,

b) las medianas homólogas,

c) las bisectrices homólogas,

d) los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita,

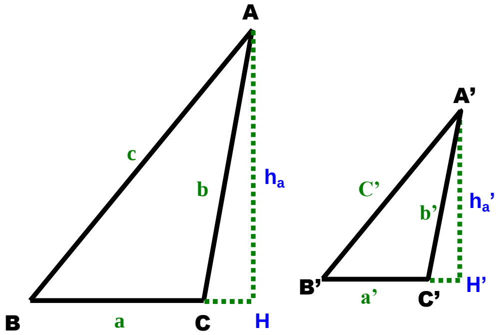
e) los perímetros.



B. TEOREMAS

TEOREMA V - 10

Los triángulos AHC y A'H'C' son semejantes; luego $\frac{b}{b'} = \frac{ha}{h'a}$



B. TEOREMAS

TEOREMA V - 10

De forma análoga se demuestran los casos

b) las medianas homólogas,

c) las bisectrices homólogas,

d) los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita,

e) los perímetros

$$2p = a + b + c$$

$$2p' = a' + b' + c'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{2p}{2p'}$$

(lqqd)