CAPÍTULO 9: POTENCIA E INVERSIÓN (I)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 9: Potencia e Inversión (I)

A. Potencia

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

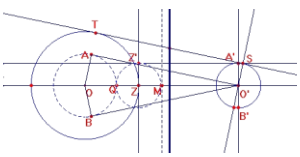
Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

9 diapositivas

Starry Night Over the Rhone
(Vincent Van Gogh)

CAPÍTULO IX: POTENCIA E INVERSIÓN

A. POTENCIA

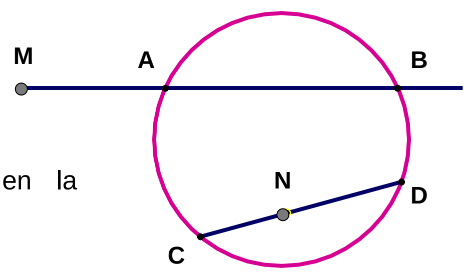


A. POTENCIA
DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

Se llama así al producto de las distancias del punto a cada uno de los dos puntos de una secante que pasa por él y corta a la circunferencia, tomando ese producto con signo + ó - según el punto sea exterior o interior a la circunferencia.

P_M = + MA x MB

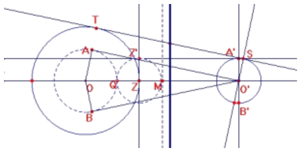
P_N = - NC x ND



Corolario: un punto situado en la circunferencia tiene potencia nula.

Potencia = MA . MB

(M interior o exterior)



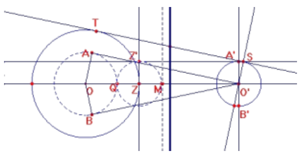
A. POTENCIA
DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA IX-1

La potencia de un punto respecto a una circunferencia es independiente de la secante trazada, y vale :

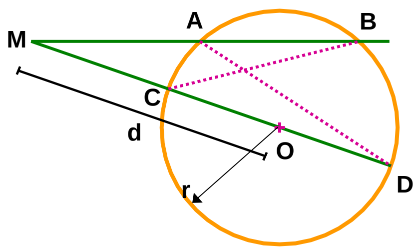
$$P = d^2 - r^2$$

Siendo "d" la distancia del punto al centro de la circunferencia, y "r" el radio de la misma.



A. POTENCIA
DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

DEMOSTRACIÓN
TEOREMA IX-1



Sea M un punto exterior.

Trazamos la secante MAB y,

Unimos M con el centro O.

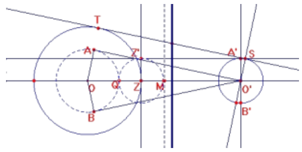
El Δ **MAD** $\cong$ Δ **MCB**

$\measuredangle$ M es común,

y los $\measuredangle$ MDA y $\measuredangle$ MBC son inscritos y abarcan el mismo arco; luego:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

MA x MB = MD x MC = (d + r) (d - r) = $d^2 - r^2$ la cual es ya positiva.



A. POTENCIA
DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

DEMOSTRACIÓN TEOREMA IX-1

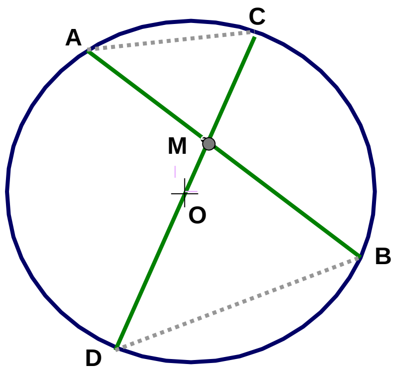
Si M fuese interior:

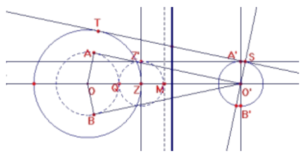
El Δ MAC ≅ Δ MDB

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

$$MA \, x \, MB = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2$$

$$Potencia = -MA \, x \, MB = d^2 - r^2$$





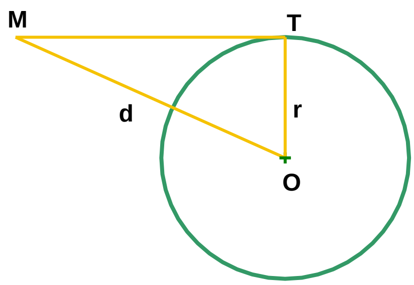
A. POTENCIA
DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

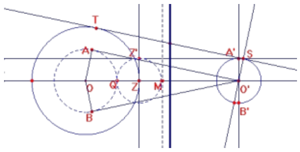
COROLARIO:

Para un punto exterior, la potencia es el cuadrado de la tangente desde este punto a la circunferencia:

$$\overline{MT}^2 = d^2 - r^2$$

Por Pitágoras





A. POTENCIA
DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

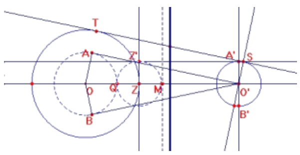
TEOREMA IX-2

Si dos pares de puntos AA' y BB' situados en 2 rectas secantes en P son concíclicos (es decir, por ellos pasa una circunferencia), se cumple, en valor y signo, que:

$$\overline{PA} \times \overline{PA'} = \overline{PB} \times \overline{PB'}$$

y recíprocamente.

Se considerará como positivo, si A y A' están en la misma semirrecta respecto a P



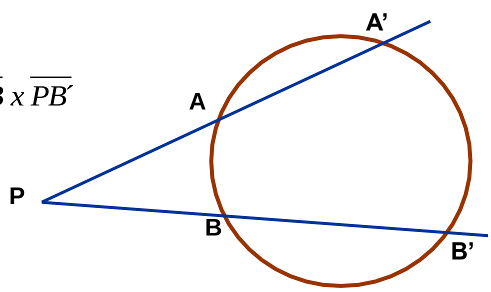
A. POTENCIA
DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

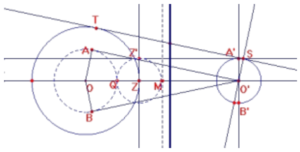
DEMOSTRACIÓN TEOREMA IX-2

Aplicando la definición de potencia se demuestra fácilmente.

Potencia de P :

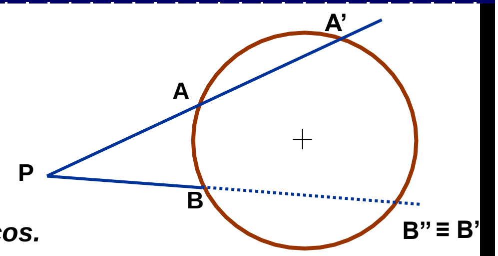
$$\overline{PA} \times \overline{PA'} = \overline{PB} \times \overline{PB'}$$





A. POTENCIA
DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

DEMOSTRACIÓN TEOREMA IX-2



Para demostrar el recíproco,

H: PA . PA' = PB . PB'

T: Los cuatro puntos son ***concíclicos.***

Trazamos la circunferencia que pasa por A, A' y B, es un problema geométrico de fácil solución, se trata de encontrar el *circuncentro* del triángulo formado por los puntos A, A' y B.

Los puntos P, A y A' están en una línea recta y PB en otra que al prolongarse corta a la circunferencia en B''.

Aplicando el Teorema IX-1: PA . PA' = PB . PB'' Esto exige que B'=B'' por lo tanto B' está en la circunferencia. Luego los puntos son ***concíclicos***.