



UNIVERSIDAD  
DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

**Aplicación del enfoque de Álgebra como actividad para la  
reducción de errores algebraicos en estudiantes de cuarto  
grado de secundaria de una institución educativa rural de  
la región Piura, 2022**

Tesis para optar el Título de  
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física

**Raúl Eduardo Ramos Sernaqué**

Asesor(es):  
Mgtr. Flor Manuela Hau Yon Palomino.

Piura, noviembre de 2023

### Declaración Jurada de Originalidad del Trabajo Final


Yo, Raúl Eduardo Ramos Sernaqué, egresado del Programa Académico Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, identificado(a) con DNI 71005782.

Declaro bajo juramento que:

1. Soy autor del trabajo final titulado:  
"Aplicación del enfoque de Álgebra como actividad para la reducción de errores algebraicos en estudiantes de cuarto grado de secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022"  
El mismo que presento bajo la modalidad de Tesis.<sup>1</sup> para optar el Título Profesional<sup>2</sup>.
2. La asesoría del trabajo estuvo a cargo de:
  - Mgtr. Flor Manuela Hau Yon Palomino , identificado con DNI N° 06422599.
3. El texto de mi trabajo final respeta y no vulnera los derechos de terceros o de ser el caso derechos de los coautores, incluidos los derechos de propiedad intelectual, datos personales, entre otros. En tal sentido, el texto de mi trabajo final no ha sido plagiado total ni parcialmente, para la cual he respetado las normas internacionales de citas y referencias de las fuentes consultadas.
4. El texto del trabajo final que presento no ha sido publicado ni presentado antes en cualquier medio electrónico o físico.
5. La investigación, los resultados, datos, conclusiones y demás información presentada que atribuyo a mi autoría son veraces.
6. Declaro que mi trabajo final cumple con todas las normas de la Universidad de Piura.

El incumplimiento de lo declarado da lugar a responsabilidad del declarante, en consecuencia; a través del presente documento asumo frente a terceros, la Universidad de Piura y/o la Administración Pública toda responsabilidad que pueda derivarse por el trabajo final presentado. Lo señalado incluye responsabilidad pecuniaria incluido el pago de multas u otros por los daños y perjuicios que se ocasionen.

Fecha: 24/11/2023



Firma del autor optante<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Indicar si es tesis, trabajo de investigación, trabajo académico o trabajo de suficiencia profesional.

<sup>2</sup> Grado de Bachiller, Título de profesional, Grado de Maestro o Grado de Doctor

<sup>3</sup> Idéntica a DNI, no se admite digital salvo certificado.

## Dedicatoria

A Dios Todopoderoso, quien con su guía espiritual me ha protegido, brindado estabilidad y ha forjado mi camino.

A mis padres Digna y Raúl, quienes me brindaron un gran ejemplo y ahora me observan desde el cielo.



## **Agradecimientos**

Mi eterna gratitud,

A la Universidad de Piura, por haberme brindado formación humana y académica de calidad durante todo el transcurso de mi vida universitaria. Especialmente a los docentes quienes con su sapiencia enriquecieron mi espíritu y me brindaron una visión humanista de la vida.

A mi asesora, Flor Manuela Hau Yon Palomino, por su paciencia, dedicación personal y asistencia académica en la elaboración de este trabajo de investigación.



## Resumen

Con el objetivo de diseñar y aplicar actividades didácticas relacionadas al enfoque de “Álgebra como actividad” para tratar de superar errores algebraicos que presentan los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, se realizó esta investigación y se optó por la metodología experimental basada en la identificación de los errores algebraicos a través de una evaluación diagnóstica, la aplicación de actividades didácticas basadas en el enfoque de álgebra como actividad y el análisis de los errores que manifiestan los estudiantes después de estas a través de una evaluación de salida. Se ha tomado en cuenta las definiciones de diversos autores acerca de los errores en el aprendizaje del álgebra y enfoques didácticos para la enseñanza del álgebra. Se elaboró una evaluación diagnóstica y de salida cuyas preguntas fueron seleccionadas de uno de los instrumentos de medida de la investigación de la doctora Mercedes Palarea (Palarea, 1998). La muestra corresponde a 29 estudiantes del cuarto grado de educación secundaria cuyas edades oscilan entre 15 - 16 años. Los errores cometidos por estos estudiantes fueron clasificados según la tipología encontrada en las investigaciones de Palarea (1998). Los resultados de la evaluación diagnóstica permitieron reflexionar acerca de los aprendizajes logrados en los estudiantes, así como identificar las dificultades que se presentan y que constituyen factores que impiden el aprendizaje del álgebra. A partir de estas dificultades se diseñaron y aplicaron actividades didácticas basadas en el enfoque de álgebra como actividad establecido por Kieran (1996). Finalmente, se analizó la evaluación de salida determinando una reducción de los errores en los estudiantes.

## Tabla de contenido

<b>Introducción.....</b>	<b>10</b>
<b>Capítulo 1. Planteamiento de la investigación .....</b>	<b>11</b>
1.1    Caracterización de la problemática .....	11
1.2    Formulación del problema de investigación.....	12
1.2.1 <i>Problema general de investigación</i> .....	12
1.2.2 <i>Problemas específicos de investigación</i> .....	12
1.3    Hipótesis de la investigación.....	13
1.4    Objetivos de la investigación .....	13
1.4.1 <i>Objetivo general de investigación</i> .....	13
1.4.2 <i>Objetivos específicos de investigación</i> .....	13
1.5    Justificación de la investigación.....	13
1.6    Antecedentes del estudio .....	14
1.6.1 <i>Antecedentes internacionales de estudio</i> .....	14
1.6.2 <i>Antecedentes nacionales de estudio</i> .....	18
<b>Capítulo 2. Marco teórico de la investigación .....</b>	<b>22</b>
2.1    Didáctica de las matemáticas.....	22
2.1.1 <i>Perfil del docente en el área de matemáticas</i> .....	23
2.1.2 <i>Metodologías de enseñanza empleadas en la enseñanza de las matemáticas</i> .....	26
2.1.3 <i>Recursos para la enseñanza de la matemática</i> .....	29
2.2    El área de matemática en el Currículo Nacional .....	31
2.2.1 <i>Competencias del área de matemática</i> .....	31
2.2.2 <i>Capacidades relacionadas al álgebra</i> .....	32
2.2.3 <i>Estándares de aprendizaje para el área de matemática</i> .....	33
2.2.4 <i>Desempeños para el área de matemáticas</i> .....	35
2.3    Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra escolar .....	37
2.3.1 <i>Diferencias entre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra</i> .....	38
2.3.2 <i>Errores algebraicos</i> .....	41
2.3.3 <i>Tipología de errores algebraicos</i> .....	44
2.4    Actividades algebraicas basadas en el enfoque de “álgebra como actividad” .....	45
2.4.1 <i>Actividades Generational</i> .....	46
2.4.2 <i>Actividades Transformational</i> .....	47
2.4.3 <i>Actividades Global Meta-level</i> .....	47
<b>Capítulo 3. Metodología de la investigación .....</b>	<b>48</b>
3.1    Tipo de investigación.....	48

3.2 Diseño de investigación.....	49
3.3 Población y muestra.....	53
3.4 Variables de investigación.....	54
3.4.1 <i>Definición conceptual</i> .....	54
3.4.2 <i>Definición operacional</i> .....	54
3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	56
3.5.1 <i>Instrumentos de investigación</i> .....	56
3.6 Actividades didácticas planteadas en sesiones de aprendizaje.....	57
3.7 Procedimiento de análisis de datos.....	62
<b>Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados.....</b>	<b>65</b>
4.1 Análisis de resultados obtenidos de la evaluación diagnóstica.....	65
4.2 Análisis de resultados de la evaluación diagnóstica.....	81
4.3 Análisis de resultados obtenidos de la evaluación de salida.....	83
<b>Conclusiones.....</b>	<b>98</b>
<b>Recomendaciones.....</b>	<b>101</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>102</b>
<b>Apéndices.....</b>	<b>108</b>
Apéndice A. Evaluación diagnóstica.....	108
Apéndice B. Evaluación de salida.....	110
Apéndice C. Actividades didácticas.....	112
<b>Anexos.....</b>	<b>147</b>
Anexo A. Validaciones de evaluación diagnóstica.....	147
Anexo B. Validaciones de evaluación de salida.....	151

## Lista de tablas

Tabla 1. Capacidades de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	32
Tabla 2. Procedimiento metodológico de la investigación	50
Tabla 3. Cantidad de estudiantes de cuarto grado B de secundaria.	53
Tabla 4. Definición operacional de variables	55
Tabla 5. Resumen de actividades planteadas en las sesiones de aprendizaje	61
Tabla 6. Pasos para el procesamiento y análisis de los resultados obtenidos	63
Tabla 7. Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 01 y su incidencia porcentual	66
Tabla 8. Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 02 y su incidencia porcentual	68
Tabla 9. Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 03 y su incidencia porcentual	70
Tabla 10. Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 04 y su incidencia porcentual	71
Tabla 11. Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 05 y su incidencia porcentual	73
Tabla 12. Datos informativos de la pregunta 06 perteneciente a la evaluación diagnóstica	75
Tabla 13. Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 06 y su incidencia porcentual	76
Tabla 14. Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 07 y su incidencia porcentual	78
Tabla 15. Incidencia de errores según la tipología de Mercedes Palarea (1998)	80
Tabla 16. Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 1	84
Tabla 17. Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 2	86
Tabla 18. Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 3	87
Tabla 19. Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 4	90
Tabla 20. Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 5	91
Tabla 21. Datos informativos de la pregunta 06 perteneciente a la evaluación de salida	93
Tabla 22. Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 6	94
Tabla 23. Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 7	95
Tabla 24. Comparación porcentual de errores algebraicos en estudiantes	97

## Lista de figuras

Figura 1. Esquema de representación de niveles de comprensión. (Hernández et al., 1998, p. 84)....	29
Figura 2. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 1.....	66
Figura 3. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 2.....	68
Figura 4. Respuesta brindada por E4 de la pregunta 2.....	69
Figura 5. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 3.....	70
Figura 6. Respuesta brindada por E11 de la pregunta 3.....	71
Figura 7. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 4.....	72
Figura 8. Respuesta brindada por E19 de la pregunta 4.....	73
Figura 9. Respuesta brindada por E23 de la pregunta 4.....	73
Figura 10. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 5.....	74
Figura 11. Respuesta brindada por E15 de la pregunta 5.....	75
Figura 12. Respuesta brindada por E8 de la pregunta 5.....	75
Figura 13. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 6.....	76
Figura 14. Respuesta de E17 de la pregunta 6.....	77
Figura 15. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 7.....	78
Figura 16. Respuesta de E23 de la pregunta 7.....	79
Figura 17. Respuesta de E14 de la pregunta 7.....	79
Figura 18. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 1.....	85
Figura 19. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 2.....	86
Figura 20. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 3.....	88
Figura 21. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 4.....	90
Figura 22. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 5.....	92
Figura 23. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 6.....	94
Figura 24. Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 7.....	96

## Introducción

La educación es un medio necesario para lograr la autorrealización de la persona a través del perfeccionamiento que se da a las capacidades y habilidades que esta posee. Es por ello por lo que es de relevancia que en el país se definan políticas educativas que vayan acorde a los nuevos estándares educativos, en este sentido los docentes deben planificar estrategias y actividades direccionadas a atender los cambios y necesidades particulares de los estudiantes.

Dentro de estas necesidades se reconoce una gran dificultad de los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas, específicamente en la rama del álgebra ya que su estudio supone un cambio de lo concreto, visto en la aritmética, a la generalización y abstracción de la realidad. Este cambio supone el surgimiento de dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra. A partir de ello, la presente investigación aborda el diseño y aplicación de actividades didácticas relacionadas al enfoque de “Álgebra como actividad” con la finalidad de determinar la evolución de errores algebraicos cometidos por estudiantes de cuarto grado del nivel secundario de una institución rural de la región Piura.

La investigación se ha organizado en cuatro capítulos, en el primero de ellos, *Planteamiento de la investigación*, se aborda la formulación del problema de investigación, objetivos generales y específicos, además de la justificación y los antecedentes que dan sustento a la realización del presente trabajo y que han proporcionado una visión diferente al investigador sobre la forma de abordar la problemática planteada.

En el segundo capítulo, *Marco teórico*, se exponen los fundamentos del área de las matemáticas y específicamente del álgebra. Asimismo, se presenta la relación existente entre dificultades, obstáculos y errores y la tipología que se empleó en el desarrollo de esta investigación.

El tercer capítulo, *Marco metodológico de la investigación*, describe el tipo y diseño de la investigación, así como las técnicas e instrumentos de recolección de datos empleados durante todo el proceso.

En el último y cuarto capítulo, *Análisis e interpretación de resultados*, se presenta el análisis y discusión de los resultados de la aplicación de los instrumentos utilizados para dar solución al problema de investigación planteado.

Finalmente, se exponen las conclusiones de la investigación, recomendaciones, las referencias bibliográficas, apéndices y anexos.

## Capítulo 1. Planteamiento de la investigación

En este capítulo, se presenta la caracterización del problema y la formulación del problema. Se propone la hipótesis de la investigación. A partir de lo anterior, se definen los objetivos de la investigación. Se muestra la justificación de la investigación. Finalmente, se presentan los antecedentes de estudio (internacionales y nacionales) que sustentan este trabajo.

### 1.1 Caracterización de la problemática

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es un tema investigado por educadores alrededor del mundo debido a la dificultad que presentan los estudiantes en la adquisición de conocimientos matemáticos. Dentro de este estudio es relevante la importancia del álgebra como una rama de estudio en la que los estudiantes presentan más problemas ya que se introduce al estudiante a un campo de indeterminaciones, variables y abstracciones.

Esta dificultad también se presenta en gran medida en la realidad educativa peruana provocando una falta de conocimientos matemáticos en los estudiantes, esto se evidencia en los pésimos resultados obtenidos por los estudiantes peruanos en exámenes internacionales de matemática como en el examen PISA realizado en el 2018, identificándose que el 50% de los estudiantes peruanos se ubican en los niveles más bajos en las tareas evaluadas de matemática, ciencias y lectura (Ministerio de Educación del Perú Minedu, 2019), presentando gran dificultad en el álgebra ya que el estudiante no logra afianzar conocimientos basados en la generalización, uso de incógnitas e igualdades.

Estas dificultades se han acentuado a causa de la pandemia de coronavirus COVID 19 que provocó la instauración de una educación virtual como una medida de prevención ante el contagio. Estos cambios causaron que los estudiantes no alcancen los desempeños esperados en las áreas, debido a que no existió una interacción permanente entre el profesorado y los estudiantes. Además, no existía una plataforma tecnológica que permita un proceso de aprendizaje constante ya que la gran mayoría de estudiantes no tenían acceso a internet.

Las dificultades cognitivas que presentan los estudiantes en la rama del álgebra han sido evidenciadas durante la realización de mi labor como docente con estudiantes de cuarto grado de educación secundaria de la institución educativa Almirante Miguel Grau del distrito de Suyo de la provincia de Ayabaca en la región Piura, quienes presentaban dificultades en la resolución de problemas algebraicos. Esto se evidenció en la aplicación del kit de evaluación diagnóstica proporcionado por el Ministerio de Educación, donde solo el 1% de los estudiantes logró desarrollar las preguntas referidas a la competencia resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Una de las causas probables podría ser una mala práctica docente en el área de matemáticas, docentes poco capacitados quienes no logran afianzar los conocimientos en los estudiantes. La deficiente práctica educativa conlleva a un déficit cognitivo en los estudiantes, quienes no poseen los conocimientos fundamentales para desarrollar aprendizajes más complejos. Esto se incrementó con la falta recursos tecnológicos (celular, tablets, laptop o internet) que impidió a los estudiantes el acceso a la educación por dos años consecutivos causando un bajo rendimiento académico y la aparición de dificultades cognitivas.

Un bajo rendimiento académico de los estudiantes se evidencia en los niveles de desempeño alcanzados por los estudiantes, y que se establecen para esta área en el Currículo Nacional. En consecuencia, el proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de matemática no se ha desarrollado con normalidad, ya que los estudiantes no han asimilado los conocimientos básicos para desarrollar contenidos matemáticos más complejos.

Ante esta problemática, la presente investigación tiene como objetivo determinar la evolución de errores algebraicos mediante la aplicación de actividades didácticas relacionadas al enfoque de “Álgebra como actividad” en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022. Esta investigación podría replicarse en otras instituciones educativas con el fin de reducir los problemas que presenten los estudiantes relacionados al aprendizaje y desarrollo de problemas algebraicos.

## **1.2 Formulación del problema de investigación**

Con respecto a lo expuesto, surge el siguiente problema general y problemas específicos que son abordados en la presente investigación:

### **1.2.1 Problema general de investigación**

¿Qué tipo de actividades didácticas serán las pertinentes para superar errores algebraicos que presentan los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022?

### **1.2.2 Problemas específicos de investigación**

- ¿Cómo diagnosticar los principales errores algebraicos que presentan los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022?
- ¿Cómo diseñar actividades didácticas con la finalidad de reducir los errores algebraicos que presentan los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022?

- ¿Cómo ejecutar actividades didácticas con la finalidad de reducir los errores algebraicos que presentan los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022?

### 1.3 Hipótesis de la investigación

El diseño de actividades didácticas relacionadas al enfoque de “Álgebra como actividad” ayudarán a superar errores algebraicos que presentan los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022.

### 1.4 Objetivos de la investigación

#### 1.4.1 *Objetivo general de investigación*

Determinar la evolución de errores algebraicos mediante la aplicación de actividades didácticas relacionadas al enfoque de “Álgebra como actividad” en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022.

#### 1.4.2 *Objetivos específicos de investigación*

- Diagnosticar los principales errores algebraicos que presentan los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022.
- Analizar el progreso en la reducción de errores algebraicos en estudiantes de cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, luego de implementar actividades didácticas relacionadas al enfoque de “Álgebra como actividad”.

### 1.5 Justificación de la investigación

La presente investigación tiene como objetivo fundamental determinar la evolución de errores algebraicos mediante la aplicación de actividades didácticas relacionadas al enfoque de “Álgebra como actividad” en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, de modo que superen los errores algebraicos debidos al uso erróneo de signos y expresiones algebraicas, la interpretación incorrecta de las variables, desconocimiento del significado de igualdad y la omisión parcial de la incógnita.

La relevancia de esta investigación radica en dos aspectos, el primero se relaciona al planteamiento de una metodología innovadora que ayude a los docentes en su quehacer pedagógico en temas relacionados al álgebra, provocando una mayor relación entre el estudiante y el profesor durante el acto educativo. De esta manera se busca una mayor participación y autonomía del estudiante al momento de la adquisición de conocimiento, además de una mejor planificación por parte del profesor empleando metodologías adecuadas para la enseñanza de

contenidos algebraicos. Esta propuesta pretende aclarar dudas acerca de temas esenciales del álgebra, confiando que los estudiantes superen las principales dificultades algebraicas y puedan desenvolverse de manera adecuada en la adquisición de conocimiento matemático más complejo.

El segundo aspecto se relaciona con aprovechar esta mayor interacción entre los estudiantes y el docente para planificar un proceso gradual y adecuado para una correcta adquisición de conocimiento matemático. Para ello se requerirá una minuciosa planificación del contenido temático y didáctico que se desarrollará, esto implica el desarrollo de sesiones de clases, elaboración de materiales y evaluaciones para el posterior análisis de los resultados obtenidos.

En suma, esta investigación busca ayudar a superar las dificultades y errores algebraicos que presenten los estudiantes de cuarto grado de secundaria, a través de la implementación de una propuesta para mejorar la práctica educativa, lo que conlleva a un desarrollo planificado de sesiones de clases, materiales educativos y evaluaciones con adecuados instrumentos de evaluación.

## **1.6 Antecedentes del estudio**

Para la investigación se han tenido en cuenta antecedentes internacionales y nacionales relacionados a la enseñanza de las matemáticas específicamente del álgebra, estos se presentan a continuación.

### **1.6.1 Antecedentes internacionales de estudio**

**Primer antecedente internacional.** Corresponde Palarea (1998) en su investigación “La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por estudiantes de 12 a 14 años” para optar el grado de doctora en Ciencias Matemáticas en España. Tuvo como objetivo general determinar las dificultades, obstáculos y errores que tienen los estudiantes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.), para comprender y trabajar con objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico, además elaboró una Propuesta Curricular para el desarrollo del lenguaje algebraico.

Con respecto a la metodología empleada esta se direccionó a un enfoque experimental debido a que se buscó identificar las variables a estudiar y con ellos obtener resultados matemáticos que pudiesen ser interpretados a través de un enfoque cuantitativo. Asimismo, se empleó un enfoque cualitativo debido a que se trató de comprender el comportamiento de los estudiantes durante la implementación del diseño, es decir detectar las dificultades y eliminar las que pudiesen haber tenido.

Para llevar a cabo esta metodología de investigación se consideró la elaboración de un pretest, para el diagnóstico de errores algebraicos en estudiantes, y de un posttest para identificar el grado de efectividad de la propuesta curricular planteada.

La conclusión a la que llegó esta investigación es que la falta de conocimiento que tienen los estudiantes, específicamente el desconocimiento de notaciones y convenciones del lenguaje formal algebraico es causa de errores en álgebra. Asimismo, concluye que la conversión directa de situaciones reales que involucran cantidades y relaciones en contextos diferentes no son causas de dificultades.

En este sentido esta investigación posee gran relación con el trabajo ya que se pretende desarrollar una metodología similar, considerando la etapa del examen diagnóstico y la aplicación de la propuesta para reducir los errores algebraicos. Además, esta investigación constituye la base cognitiva para el desarrollo de los contenidos del marco teórico relacionados a la tipología de errores algebraicos existentes.

**Segundo antecedente internacional.** García (2015) en su investigación “Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas” para optar el grado de doctor en España, tuvo como objetivo estudiar, analizar y caracterizar los errores en los que incurren los estudiantes al resolver tareas algebraicas con el fin de proponer un conjunto de sugerencias dirigidas a implementar estrategias de enseñanza del álgebra.

Con respecto a la metodología empleada, la investigación se direccionó a un enfoque cuantitativo y contó con dos fases diferenciadas. La primera se centró en la recogida de datos con un instrumento de evaluación diseñado para conocer el rendimiento algebraico. En esta fase se detectaron los errores algebraicos y se constató la necesidad de determinar la causalidad de estos. La segunda fase consistió en la aplicación de un instrumento de evaluación para constatar específicamente en qué habilidades y conocimientos algebraicos presentaban errores. Además, se complementó con la realización de una entrevista para determinar los argumentos empleados por los estudiantes en su razonamiento. Para esta investigación se reconoce dos instrumentos de evaluación y la elaboración de una entrevista con preguntas relacionadas al problema investigado.

Algunas de las conclusiones que obtuvo señalan que sí es posible determinar los errores algebraicos en los que inciden los estudiantes, a través del uso de instrumentos de evaluación planificados. Asimismo, afirman que es posible caracterizar las respuestas de los estudiantes para así determinar las posibles causas de los errores algebraicos.

A partir del análisis de los componentes de este trabajo, se puede determinar que esta investigación sí posee gran relación con el trabajo que se desea realizar, debido a que servirá como guía para planificar el proceso de aplicación de la propuesta didáctica, además de otorgar una idea acerca de la elaboración de los instrumentos de evaluación. También es importante identificar el uso de entrevistas para una relación más personalizada con los estudiantes al momento de reconocer las dificultades algebraicas que presenten.

**Tercer antecedente internacional.** Pertenece a Galeano et al. (2015) con su investigación “Una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia utilizando el modelo virtual de la balanza” para optar la licenciatura, en Colombia. Tuvieron como finalidad principal favorecer la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia en los estudiantes de grado octavo, de la Institución Educativa Santa Isabel Hungría sede Compartir, usando el modelo virtual de la balanza. De esta manera la investigación se limita a un solo aspecto de la resolución de problemas algebraicos, planteando para ello un método para la resolución de problemas; es por ello por lo que la investigación tiene un enfoque cuantitativo ya que se busca determinar valores de retención de procedimientos a través de la aplicación de una metodología conductista.

Para la implementación de la prueba, los aplicadores de esta adecuaron seis computadores con la aplicación java, la cual era necesaria para el funcionamiento del software. Los 10 estudiantes seleccionados fueron dispuestos en pares para que realicen todo el trabajo, tanto la manipulación del simulador como el desarrollo de las hojas de trabajo. Para el desarrollo del trabajo de campo con los estudiantes se tuvo en cuenta tanto la ruta didáctica que contempla el modelo virtual de la balanza como unas hojas de trabajo.

A partir de esto llegaron a las siguientes conclusiones, el uso del modelo virtual de la balanza en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita permitió un escenario en que los estudiantes lograron tomar conciencia sobre la necesidad de mantener la equivalencia en las ecuaciones, lo cual se reflejaba cuando ellos en el proceso de resolución de las ecuaciones planteadas hacían lo mismo en ambos lados de la balanza para mantener su equilibrio. Además, las dificultades asociadas a la resolución de ecuaciones de primer grado se logran superar haciendo uso del modelo virtual de la balanza.

En este sentido esta investigación se relaciona directamente con el trabajo que se pretende desarrollar debido a que considera un método para la solución de un tipo de error algebraico específico. De esta manera se puede emplear esta investigación como guía para la propuesta didáctica que se piensa implementar con los estudiantes.

Además, es relevante visualizar las limitaciones que tuvo el desarrollo de este trabajo ya sea en la aplicación de la metodología como en la teoría seleccionada para la elaboración de los instrumentos.

**Cuarto antecedente internacional.** Fernández (2013) en su investigación “Estrategias didácticas para fortalecer el aprendizaje de la matemática en la transición de la aritmética al álgebra” para obtener el grado de licenciado en Chile. Tuvo como objetivo fortalecer el aprendizaje de las matemáticas en la transición de la aritmética al álgebra, a través de estrategias didácticas en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Técnica-Agro Industrial de Venecia Chile.

Asimismo, se identifica que esta investigación fue trabajada por fases; la primera que involucra la observación y en la que se mira a detalle la problemática a través de un pre-test, se reflexiona y a la vez se proponen ideas para enfrentar la situación. La segunda considera la planificación es decir se plantearon los objetivos y se diseñaron las acciones a realizar. La tercera se caracteriza por la aplicación de la propuesta e involucró el desarrollo de las actividades diseñadas. Para finalizar se contempla la cuarta fase que involucra una reflexión y se realizó un análisis de la estrategia desarrollada para interpretar cada momento de la acción y extraer conclusiones acertadas.

Una de las conclusiones a las que llegaron fueron que los estudiantes no son los que presentan las falencias, sino las metodologías utilizadas para la enseñanza y los prejuicios que influyen en el estudiante desde antes de ingresar al grado octavo, prejuicios que son infundados pero que al salir de palabras de educadores y padres de familia, se incrustan en el inconsciente y subconsciente del estudiante bloqueando la capacidad de asimilar los conceptos y dando origen al desinterés por aprender esta materia.

La investigación descrita posee una gran relación con el trabajo que se realizará debido a que ambos tienen como objetivo la aplicación de una propuesta debido al reconocimiento de dificultades del álgebra. Además, es importante porque proporciona un modelo para la forma en la que se aplicará la propuesta didáctica.

Por otro lado, a través de las conclusiones se puede identificar que existen otras variables como el tipo de metodología empleada por el docente, que influyen directamente en la forma como los estudiantes resuelven problemas matemáticos y el grado de participación que puedan tener en clase. Es relevante mencionar que el docente debe cumplir una función motivadora en el aula debido a que debe incentivar a los estudiantes a dejar sus miedos, con ello los estudiantes despejarán sus mentes y se involucrarán más en el proceso de aprendizaje.

Esta investigación proporciona una visión general del proceso que se debe seguir para la aplicación de una propuesta didáctica, siendo de gran relevancia en el trabajo que se pretende realizar pues servirá como un recurso referencial para la elaboración y aplicación de la propuesta.

### **1.6.2 Antecedentes nacionales de estudio**

**Primer antecedente nacional.** Mamani (2015) en su investigación “Nivel de conocimientos que tienen los docentes del distrito de Piura sobre la aplicación de los recursos TIC en el área de matemáticas en la EBR” para optar el grado de maestría en educación secundaria, tuvo como objetivo general determinar el nivel de conocimientos que tienen los docentes del distrito de Piura sobre la aplicación de los recursos de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en el área de matemáticas en la Educación Básica Regular (EBR).

En relación con la metodología empleada esta se fundamentó en el paradigma positivista ya que los resultados se obtuvieron a través de la aplicación y análisis estadístico de un cuestionario. Su enfoque metodológico fue predominantemente cuantitativo direccionado a obtener datos cuantificables, de estudios observables y susceptibles a ser medidos.

Para la realización de esta investigación se consideró la elaboración de un cuestionario para conocer el nivel de conocimientos que tenían los docentes del área de matemática en la aplicación de los recursos TIC en su labor educativa para el logro de los aprendizajes. La aplicación de este cuestionario se realizó de manera amplia a noventa y ocho docentes de matemática de veintidós instituciones educativas públicas del distrito de Piura lo que permite obtener una panorámica general de la realidad educativa de los docentes en relación con los recursos tecnológicos.

A partir del desarrollo de la investigación se llegó a concluir que existen altas demandas de capacitación en la utilización de las TIC por parte de los docentes del área de matemáticas, se identifica que la mayoría de los docentes siguen dictando las sesiones de aprendizaje de manera tradicional excluyendo las distintas tecnologías, herramientas y contenidos digitales existentes. Por último, se destaca que los docentes consideran importante ser capacitados permanentemente en el uso y aplicación de las herramientas TIC en sus actividades académicas para el logro de los aprendizajes.

Este trabajo tiene relación con la investigación que se pretende realizar debido a que se destaca la importancia que tiene la utilización de las TIC en la enseñanza de las matemáticas y las deficiencias que poseen los docentes de la región Piura en aspectos relacionados al uso de recursos tecnológicos en las sesiones de aprendizaje. Con ello se destaca la importancia que tiene el diseño de sesiones de aprendizaje en el área que involucren el uso de las TIC con el objetivo de dinamizar con nuevos recursos el proceso de enseñanza y aprendizaje.

**Segundo antecedente nacional.** Lázaro (2012) en la investigación “Estrategias didácticas y aprendizaje de la matemática en el programa de estudios por experiencia laboral” para obtener el grado de doctor propuso como objetivo establecer que las estrategias didácticas de la enseñanza de la matemática tienen relación con el aprendizaje de los estudiantes del Programa Estudios por Experiencia Laboral EPEL, en la Universidad Ricardo Palma en el periodo 2005 - 2008.

Esta investigación corresponde a un diseño no experimental, dado que se observa los fenómenos tal y como se dan en su contexto natural para después analizarlos, es decir no se manipuló la variable en estudio.

La investigación realizada permitió apreciar, según los resultados de rendimiento académico, la influencia positiva de las estrategias didácticas en el aprendizaje de la matemática del Programa de Estudios por Experiencia Laboral en la Universidad Ricardo Palma en el periodo 2,005 – 2008. Teniendo en cuenta la opinión de los estudiantes del Programa de Estudios por Experiencia Laboral, se determinó que el desarrollo de las asignaturas fue satisfactorio en lo concerniente a los distintos aspectos del proceso de enseñanza - aprendizaje.

Con respecto a lo que aporta este trabajo se puede indicar que esta investigación proporciona un enfoque más profesional de lo que involucra planificar y elaborar una propuesta didáctica. De esta manera se puede definir de manera más acertada los instrumentos que se emplearán ya que se debe ser más analítico al diagnosticar las características de los estudiantes a los que se evaluará.

**Tercer antecedente nacional.** Díaz (2017) con la investigación “La influencia del software GeoGebra en el aprendizaje del álgebra de los estudiantes del 4to año de educación secundaria de la Institución Educativa Trilce del Distrito de Santa Anita, UGEL 06, 2015” para obtener el grado de magister, propuso como objetivo determinar si el uso del software Geogebra influye en el aprendizaje del álgebra en los estudiantes del 4to año de educación secundaria de la Institución Educativa Trilce del distrito de Santa Anita.

La investigación siguió un diseño cuasi experimental de enfoque cuantitativo, pues la variable en estudio fue cuantificada en una escala vigesimal, la cual fue la base para determinar si el uso del Software GeoGebra influye en el aprendizaje del álgebra en los estudiantes del 4to año de educación secundaria de la Institución Educativa Trilce del distrito de Santa Anita, UGEL 06 - 2015. Además, tuvo un corte “longitudinal” pues la aplicación del uso del software Geogebra fue continua a lo largo de dos periodos académicos semestrales.

A partir de esto el diseño de la investigación se planteó de la siguiente manera, primero se estableció una medición previa de las variables dependientes que fueron estudiadas, posterior a ello se planteó una aplicación de la variable independiente al grupo experimental y para finalizar se aplicó una evaluación pos-test a los dos grupos.

Al realizar este procedimiento el investigador llegó a la conclusión de que la aplicación de la propuesta utilizando el software GeoGebra influye en el aprendizaje del álgebra y que el nivel de influencia de estrategias metacognitivas de la comprensión lectora influye en la expresión y comprensión oral en los estudiantes.

Esta investigación proporciona mucha información relevante para llevar a cabo este trabajo debido a que plantea una visión más realista y aplicativa de lo que se pretende realizar. Es importante considerar el procedimiento que toma este investigador debido a que se asemeja mucho al enfoque que se le trata de dar a este trabajo, también es importante mejorar ciertos aspectos e identificar errores para diseñar nuevas actividades que ayuden a que se reduzcan.

**Cuarto antecedente nacional.** Ramos (2015) en su investigación “Actividades lúdicas como estrategias de enseñanza para el aprendizaje significativo del álgebra, de los estudiantes del segundo grado “B” de la institución educativa secundaria industrial Federico Villarreal del distrito y provincia de Andahuaylas 2013 – 2015” para obtener el grado de licenciado, planteó como objetivo aplicar actividades lúdicas como estrategias de enseñanza, para generar aprendizaje significativo del álgebra en las y los estudiantes del segundo grado “B” de la institución educativa secundaria Industrial “Federico Villarreal” del distrito y provincia de Andahuaylas.

Esta investigación planteó una propuesta pedagógica que se basó en incorporar y utilizar las actividades lúdicas como estrategia de enseñanza para favorecer el aprendizaje significativo de álgebra, lo cual permitió desarrollar las competencias, habilidades, capacidades y destrezas del área de matemática. Durante el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, se propuso una matemática motivadora a través de actividades lúdicas como: una dinámica motivacional, aplicación del pensamiento lateral divergente, torres de Hanói, cubo de soma, cuadrilíneas, fichas saltarinas, de los puzzles de alambre a las matemáticas, cubos diabólicos, juego de ingenio con cerillas, lecturas reflexivas, etc. siendo necesario conocer sus reglas de juego y la utilidad de estas en la realidad práctica.

A partir de la aplicación de la propuesta pedagógica el investigador llegó a las siguientes conclusiones, se logró identificar las fortalezas y debilidades en relación con las estrategias de enseñanza, las cuales eran poco eficientes en el aprendizaje del álgebra. Asimismo, se determinó que la aplicación de actividades lúdicas como estrategia de enseñanza permite implementar un proceso

activo de enseñar y comprender la matemática de manera divertida y dinámica, los estudiantes construyen sus aprendizajes de manera lúdica, trabajando en equipo cooperativo y colaborativo. Por último, se determinó que la aplicación de actividades lúdicas en la enseñanza del álgebra resulta significativa para los estudiantes, teniendo en cuenta que la curiosidad ante la novedad hizo que los actores participaran con entusiasmo y dinamismo para aprender y comprender.

Esta investigación proporciona una visión orientativa para la propuesta pedagógica que se desea implementar ya que incluye el aspecto lúdico en la enseñanza siendo de vital importancia puesto que ayuda al estudiante a relacionarse más con el aprendizaje de las matemáticas. Este punto es de suma importancia para implementar en la propuesta pedagógica que se diseñará ya que permitirá que los estudiantes se enfoquen más en las matemáticas como algo cercano.



## Capítulo 2. Marco teórico de la investigación

En este capítulo se detalla el sustento teórico del trabajo de investigación. Se aborda el fundamento teórico relacionado a la didáctica de las matemáticas considerando el perfil del docente en el área. También, se detalla las metodologías y los recursos existentes para la enseñanza de las matemáticas. Se aborda las competencias, capacidades, estándares y desempeños correspondientes al séptimo nivel de estudio ya que a este nivel pertenece la población de la investigación. Se explica lo relacionado a dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra, también se aborda la diferenciación existente entre estos conceptos. Por último, se presentan conceptualmente las actividades algebraicas basadas en el enfoque de álgebra como actividad propuesta por Kieran (1996) y se detallan las actividades generational, transformational y global meta-level.

### 2.1 Didáctica de las matemáticas

El proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas se ha convertido con el tiempo en una tarea compleja e importante en los sistemas educativos a nivel mundial. En la actualidad los docentes se enfrentan a una realidad educativa en constante cambio que requiere de propuestas didácticas innovadoras que atiendan nuevos modelos educativos enfocados en el desarrollo de competencias y el uso de recursos tecnológicos, donde el estudiante es el actor principal del acto educativo.

Como señalan Gallego et al. (2008) la enseñanza de las matemáticas debe adaptarse a las características particulares del estudiante, este debe ocupar el centro de todo acto educativo y se le debe dar libertad para que construya de manera autónoma el conocimiento. Por ello consideran el acto de la docencia como un componente artístico que debe poseer calidad en todas las acciones profesionales y humanas que ejecute. De esta manera se busca que el docente adapte los contenidos a la realidad particular de cada estudiante, empleando para ello metodologías educativas que se direccionen al desarrollo del conocimiento de manera autónoma.

En el Perú, los procesos de enseñanza-aprendizaje responden a los fundamentos establecidos en el Currículo Nacional (Ministerio de Educación del Perú Minedu, 2017) que direcciona la enseñanza a una educación que busca el desarrollo de competencias en los estudiantes. El Currículo Nacional debe ser empleado como un elemento articulador que posibilite la adaptación de los contenidos y el desarrollo de una educación a través del uso de enfoques transversales que desarrollen las dimensiones de la persona, posibiliten el uso de TICs y permita la adaptación curricular de los contenidos a la realidad particular de los estudiantes.

En este sentido la didáctica es considerada como ciencia y como técnica, según Sotos (1993), ya que se produce un continuo feedback entre teoría, práctica y tecnología. Es así como la didáctica busca una directa utilidad en los campos de la enseñanza, pero al mismo tiempo es consciente de la necesidad de un profundo conocimiento matemático de todas las variables que operan en ellos. Por otro lado, la didáctica se desarrolla en ambientes organizados esto abarca los procesos de escolarización y las instituciones educativas. Teniendo en cuenta estos aspectos generales se llega a determinar que la didáctica de las matemáticas es “la disciplina cuyo objeto de estudio son los procesos de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas” (Sotos, 1993, p. 174).

La didáctica de las matemáticas supone la elaboración de situaciones didácticas por parte del docente que ejecuta el proceso de enseñanza y aprendizaje en un ambiente organizado. Según Brousseau (2000) estas situaciones didácticas tienen dos significados: “En el sentido clásico, es una situación que se usa con fines didácticos, que sirve para enseñar (como un problema o un ejercicio), tanto si está dotada de virtudes didácticas autónomas, como si el profesor debe intervenir para que produzca su efecto” (p. 20).

En esta visión se plantea la importancia que tiene el docente de matemática como actor educativo que promueve el acto de enseñanza con el objetivo de que el estudiante adquiera el aprendizaje esperado de manera correcta. Es una situación que describe el entorno didáctico del estudiante, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo. “En este sentido, comprende al profesor, tanto si éste se manifiesta durante el desarrollo de la situación, como si no” (Brousseau, 2000, p. 21).

Este significado supone la importancia que se le debe otorgar al educando como actor central de todo acto educativo, posibilitando el desarrollo de los conocimientos de manera autónoma sin la necesidad de una intervención del docente.

Esto supone que el conocimiento didáctico que se tiene de un contenido debe aportar los elementos de análisis adecuados para que el docente planifique y realice el trabajo profesional de manera eficiente. De esta manera el docente debe considerar todos los recursos didácticos disponibles para elaborar un proceso de enseñanza y aprendizaje que incentive el desarrollo de los conocimientos de manera autónoma por parte de los estudiantes bajo una supervisión permanente del educando.

### **2.1.1 Perfil del docente en el área de matemáticas**

Al considerar a la educación como una realidad en constante cambio, se debe apreciar la importancia que tiene el docente en el acto educativo debido a que es el agente que posibilita los medios pertinentes al estudiante para que pueda desarrollar el aprendizaje de manera satisfactoria.

Además, la educación al ser una realidad cambiante requiere que el perfil del docente presente cambios y diste mucho del modelo tradicional de enseñanza.

Como lo señala Cabanne (2007) el rol del docente se basa en “hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los estudiantes como respuesta razonable a una situación familiar y además transformar esa respuesta razonable en un hecho cognitivo extraordinario, identificado, reconocible desde el exterior” (2007, p. 8). Este concepto dista del perfil tradicional del docente que solo se limita a transmitir conocimientos siguiendo la línea conductista, en vez de ello se plantea un profesor que permite el desarrollo del conocimiento de manera autónoma a través de la relación de los contenidos con una situación presente en la realidad cercana del estudiante. A partir de ello el estudiante logra obtener aprendizajes significativos que son interiorizados y apreciados por los agentes externos, el estudiante hace propio el aprendizaje.

En este sentido el docente debe plantear situaciones de aprendizaje que provoquen actividades. Como indica Cabanne estas situaciones deben “ser significativas y acercarse a la manera real de aprender del estudiante de su edad, a sus necesidades individuales, a su conocimiento informal; debe ayudarlo a superar los obstáculos en la construcción del conocimiento” (2007, p. 17). Es decir, el docente en el acto educativo debe considerar las características particulares que tiene el estudiante, teniendo en cuenta el estilo de aprendizaje y la realidad propia del estudiante.

A partir de esto se determina que el docente debe ayudar al estudiante a que desarrolle sus propias ideas y que tome sus propias decisiones al momento de aprender. Por lo que debe crear oportunidades para que el estudiante aplique su razonamiento matemático, relacionando los diferentes aprendizajes que ya posee y pueda desarrollar una aptitud de resolución de problemas complejos.

Según Hernández et al. (1998) en el campo específico de las matemáticas el profesorado tiene que ampliar su perspectiva sobre los contenidos matemáticos establecidos en el currículo educativo, con el fin de que los procesos de enseñanza y aprendizaje que plantee no se limiten a una lógica formal interna, sino que adopten una visión más abierta e integrado del saber matemático a enseñar.

Estos autores señalan que el docente del área de matemática debe adquirir un conocimiento profesional con el fin de desarrollar habilidades específicas que le permitan un mejor desenvolvimiento en el acto educativo. Estas habilidades son las siguientes:

- a) Formación científica y didáctica adaptada a la realidad del contexto educativo en el que se encuentra.
- b) Capacitación para trabajar con estudiantes que presenten un alto grado de heterogeneidad en destrezas básicas, intereses y necesidades.
- c) Cambio de aptitudes que promuevan planteamientos educativos flexibles y profundicen en una visión más interdisciplinar de las matemáticas.
- d) Concepción del currículo como un instrumento de investigación que permita el desarrollo de métodos y estrategias de concreción y adaptación.
- e) Valoración y ejercitación del trabajo en equipo, así como el desarrollo autónomo de los conocimientos.

Estas habilidades en los docentes suponen la concepción de un profesorado de matemática que dista mucho del modelo tradicional que se limita a la emisión de conceptos y la resolución repetitiva de ejercicios matemáticos. Esta nueva idea del profesor de matemáticas supone un alto dominio de contenidos matemáticos, el planteamiento de metodologías didácticas que relacionen los conocimientos matemáticos con otras áreas y que motiven la adquisición autónoma de los aprendizajes esperados.

Los docentes deben complementarse empleando la didáctica de las matemáticas, como señala Brousseau (2000) ésta proporciona conocimientos relativos a los diferentes aspectos de la labor docente. Se establece que el docente de matemáticas debe saber acerca de:

- a) Las condiciones que deben surgir en las situaciones de enseñanza-aprendizaje para que los estudiantes se desenvuelvan de manera satisfactoria.
- b) Los estándares educativos que deben mantenerse en la gestión o la conducción de la enseñanza durante la sesión de aprendizaje.
- c) De los estudiantes, de sus comportamientos, de sus aprendizajes, de sus resultados en las condiciones específicas de enseñanza, es decir el desarrollo de una educación integral en el estudiante y no solo cognitiva.
- d) Fenómenos de la didáctica a los que estudiantes y profesores se ven confrontados con todos los participantes en la trasmisión de los saberes.

En suma, el perfil del docente de matemática se direcciona a ser un mediador en el acto educativo que los ayude a desarrollar la capacidad de resolución de problemas a través de la construcción autónoma de los conocimientos. Además, el docente debe considerar las características particulares de los estudiantes y plantear metodologías acordes a ellas, insertar en estas la realidad

del estudiante para que se produzca un acercamiento real del estudiante con el propósito de la sesión, logrando con ello aprendizajes significativos.

### **2.1.2 Metodologías de enseñanza empleadas en la enseñanza de las matemáticas**

Una metodología de enseñanza se basa en una estrategia didáctica aplicada por los docentes que al ponerse en práctica desencadenan la actividad clave para lograr el aprendizaje. Como lo indica Tejada (2000) no se puede dar una generalización sobre una metodología de enseñanza que atienda de manera universal la adquisición de todos los conocimientos, sino que el éxito de esta dependerá de factores como el momento y el contexto de intervención. Esto supone la existencia de una variedad metodológica que debe ser considerada al momento de querer enseñar un contenido específico.

Asimismo, Tejada (2000) señala que en las metodologías de enseñanza se puede adoptar dos tendencias, la primera que le proporciona la importancia al docente como un agente que posibilita el acto del aprendizaje a través de tareas como la orientación, explicación, intervención, ayuda, corrección, entre otras. La otra tendencia considera el desenvolvimiento del estudiante de manera autónoma a través del trabajo individual o en equipo, se necesita de la guía del docente para el aprendizaje y el desarrollo de estas actividades autónomas. Un correcto balance entre estas dos tendencias garantizará la puesta en práctica de una metodología de enseñanza que considere la participación del docente y el aprendizaje autónomo del estudiante.

Además, una correcta metodología de enseñanza debe realizar un seguimiento constante del progreso de los objetivos planteados en los estudiantes, por ello la importancia que tiene el docente como actor educativo que sirve de guía en el proceso de enseñanza y aprendizaje. A partir de los datos obtenidos en el análisis se podrá reajustar la acción pedagógica y adaptarla a las características que presente el contexto donde se desarrolla el acto de enseñanza.

En la actualidad la naturaleza de la enseñanza de la matemática se muestra como una nueva realidad en la que se revalora las aplicaciones prácticas al entorno cercano del estudiante y como un nuevo lenguaje que no se limita a los números. El correcto aprendizaje de las matemáticas, como lo señala Fernández (2007), se debe enfocar en la comprensión y experimentación de los contenidos en diferentes realidades prácticas es decir el estudiante debe reconocer lo aprendido en situaciones diversas a las ya planteadas en la sesión de aprendizaje. En la enseñanza de la matemática se debe sustituir la información verbal por dudas, retos y desafíos mediante el planteamiento de situaciones significativas correctas y relacionadas al contexto del estudiante. Esto permitirá que el estudiante realice un descubrimiento autónomo de los conocimientos considerando los aprendizajes adquiridos en sesiones de aprendizaje anteriores, esto determina un aprendizaje gradual.

**2.1.2.1 Metodologías de enseñanza empleadas en la enseñanza del álgebra.** La enseñanza del álgebra escolar supone una mayor dificultad para la enseñanza debido a la aparición de algunos conflictos cognitivos. Vayoles (2013) indica que estas son la aparición de letras y símbolos algebraicos para representar cantidades numéricas, los procesos de construcción de nociones algebraicas como las de variable e incógnita, los procedimientos para la solución de problemas verbales y la dificultad en los procesos de solución de ecuaciones.

Además, es necesario indicar la importancia que tiene el aprendizaje de la aritmética en la enseñanza del álgebra ya que se configura como la fuente fundamental para la construcción del significado de objeto y conceptos algebraicos. De esta manera los aprendizajes y dificultades algebraicos relacionados a la aritmética que aparecen se justifican en un aprendizaje continuo entre la aritmética y el álgebra.

Considerando lo mencionado, las metodologías de la enseñanza del álgebra no deben direccionarse a ejecutar un corte didáctico entre la aritmética y el álgebra debido a la gran relación que poseen estas ramas de las matemáticas. Al contrario, se debe fortalecer un correcto aprendizaje de la aritmética para impedir el desarrollo de dificultades en el álgebra. Como lo indica Vayoles (2013) “las dificultades en el aprendizaje de los conceptos algebraicos se describen y explican exclusivamente en términos de la falta de conocimiento aritmético o de una fundamentación deficiente de éste en los estudiantes” (p. 16).

De esta manera, las metodologías enfocadas en la enseñanza del álgebra deben plantear una continuidad entre los contenidos de la aritmética y los aprendizajes esperados en el álgebra. Eso permitirá una correcta transición del estudiante y así se favorecerá una adecuada comprensión de los contenidos algebraicos que podrá aplicar a su realidad.

De manera específica la enseñanza del álgebra en la escuela según Vayoles se caracteriza por los siguientes aspectos:

- Modela todos los elementos de la organización matemática original, o sea sus campos de problemas, técnicas y discursos teóricos; se produce, en este sentido, una nueva organización matemática algebrizada en el estudiante.
- Modela materialmente las técnicas y los campos de problemas de la organización matemática original, en el sentido en que se representan y manipulan mediante el simbolismo algebraico.

- El modelo algebraico que resulta constituye una extensión de la organización matemática original, en tanto la contiene y la enriquece conceptualmente (Vayoles, 2013, p. 21).

Entonces se puede resaltar que las metodologías para la enseñanza del álgebra se deben enfocar en fortalecer el proceso de algebrización del estudiante. Destacando la confusión que tienen los estudiantes por la aparición de las variables, para ello el docente debe plantear situaciones que relacionen la organización matemática que se tenía en la aritmética con el simbolismo algebraico. De esta manera el álgebra se posiciona como una organización matemática que enriquece la que el estudiante ya tenía, involucrándolo con una realidad más abstracta.

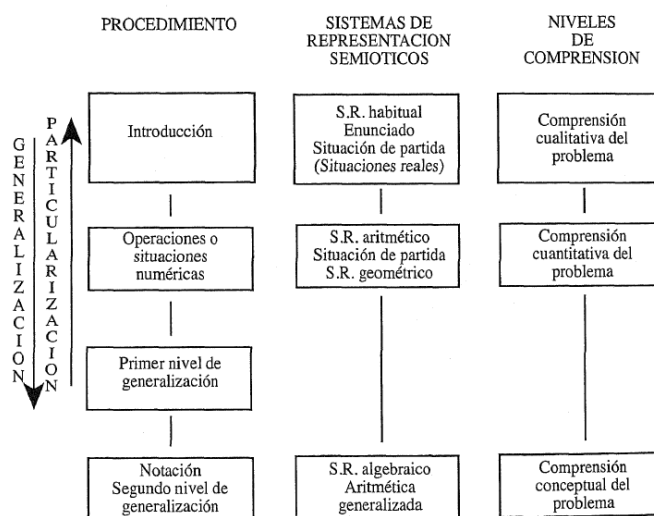
Hernández et al. (1998) proponen que la enseñanza del álgebra debe darse a partir de la relación de los sistemas de representación empleados: habitual, aritmético, algebraico y geométrico. Se entiende por habitual a la expresión en el lenguaje natural de situaciones reales que involucran relaciones o cantidades. Esta se empleará en la representación de objetos algebraicos como una herramienta que permita la comunicación de ideas abstractas de una manera más simplificada, con ello el estudiante adquirirá los saberes algebraicos de una forma más rápida y sencilla.

El uso de los diferentes modos de representación se justifica en que los conocimientos matemáticos están jerarquizados lo que facilita el establecimiento de esquemas cognitivos que facilitan la comprensión de las abstracciones realizadas de la representación habitual. Esto permitirá que el estudiante tenga más confianza al momento de comprender y emplear saberes algebraicos.

Las relaciones producto de los diferentes modos de representación, según Hernández et al. (1998), producen tres niveles de comprensión, tal como se muestra en la figura 1. El primero relacionado a la comprensión cualitativa del problema, en este aspecto se considera la representación habitual donde se emplean situaciones reales en las que están inmersos conceptos matemáticos. El segundo nivel tiene que ver con la comprensión cuantitativa del problema, en este el estudiante emplea la representación aritmética y geométrica para contemplar la situación real desde una perspectiva matemática. Por último, el tercer nivel considera una comprensión conceptual del problema, es decir el estudiante llega a generalizar los conocimientos inmersos en la situación inicial con ello se llega a alcanzar conocimientos algebraicos.

**Figura 1**

*Esquema de representación de niveles de comprensión.*



Nota. Tomando de Hernández et al. (1998, p. 84)

### **2.1.3 Recursos para la enseñanza de la matemática**

Peralta (1995) define los recursos didácticos como “todo objeto, persona, situación, actividad, etc., que puede servir para hacer más eficaz el proceso de enseñanza aprendizaje” (p. 62). Es así como los recursos de enseñanza pueden ser considerados como los medios facilitadores que debe emplear el docente para lograr un aprendizaje significativo en el estudiante. En una institución educativa estos recursos, según Peralta (1995), involucran una diversidad de medios como los profesores de apoyo, orientadores, psicólogos, la organización de los estudiantes en el aula, la infraestructura del colegio, los espacios de trabajo, la existencia de recursos audiovisuales y bibliográficos, entre otros.

La enseñanza de las matemáticas requiere el uso de materiales estructurados y relacionados al objetivo propuesto por el docente en la sesión de aprendizaje. Los materiales estructurados son definidos como aquellos “objetos creados específicamente para facilitar el aprendizaje de la matemática” (Peralta, 1995, p. 199); ejemplo de estos son los bloques lógicos de Dienes, bloques aritméticos, geoplano y geoespacio. Estos materiales son de gran importancia pues permiten que el estudiante realice un proceso de aprendizaje de manera concreta, relacionando los contenidos con una realidad cercana y sensible.

De manera complementaria, la enseñanza de las matemáticas emplea recursos que son producto de las nuevas tecnologías de la información como lo son las calculadoras, ordenadores y medios audiovisuales. En el caso de la calculadora ha sido considerado mayormente como un recurso que impide el aprendizaje de las operaciones matemáticas básicas, esto ha sido refutado por investigaciones que señalan el uso de la calculadora como un medio que “mejora la actitud ante las

matemáticas, en las destrezas del cálculo personales, en la comprensión de conceptos y en la resolución de problemas” (Peralta, 1995, p. 67).

Por otro lado, los ordenadores proporcionan programas de enseñanza asistida para temas concretos de la matemática, con ello los estudiantes pueden tener un tratamiento de los datos más cómodo y rápido, pues permite realizar gráficos, realizar experiencias simuladas, entre otros. El uso de las nuevas tecnologías también permite una mejora de la práctica docente ya que el profesor es capaz de visualizar sus acciones a través del uso de recursos audiovisuales.

**2.1.3.1 Recursos empleados en la enseñanza del álgebra.** Con respecto al álgebra se empleaban mayormente recursos estructurados de tipo memorístico, con ello los estudiantes aprendían de la manera tradicional resolviendo ejercicios mecánicamente sin llegar a un aprendizaje significativo.

Sin embargo, en la actualidad se ha hecho un cambio en la enseñanza del álgebra posibilitando la introducción de recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esto debido a las características particulares que poseen los nuevos estudiantes, las cuales se relacionan en mayor medida con medios tecnológicos que estructurales.

El uso de las nuevas tecnologías permite, según Calle (2015), el desarrollo de nuevas destrezas, la automatización de la información disponible y el desarrollo de una conciencia en los estudiantes quienes se hacen responsables de sus progresos y dificultades. Esto permite un aprendizaje significativo a partir de una adquisición autónoma de los estudiantes.

La investigación realizada por Calle llega a determinar que el uso de las TIC's en el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene los siguientes efectos:

- Elevan la motivación y mejoran la comunicación de los estudiantes.
- Mejoran la eficacia comunicativa entre profesores(as) y estudiantes(as), al crearse un diálogo que permite romper las barreras espacio temporales.
- El aprendizaje se interioriza de un modo más eficiente y duradero.
- Creación de una atmósfera cálida para el aprendizaje.
- Mejora en la organización del conocimiento, de forma que permiten crear interrelaciones entre los distintos conceptos (Calle, 2015, p. 37).

De esta, manera se llega a alcanzar un ambiente óptimo para el aprendizaje del álgebra donde el estudiante interioriza de manera correcta los contenidos. Ejemplo de estos recursos son SYMBALOO, GEOGEBRA, EXCEL y simuladores algebraicos virtuales.

## 2.2 El área de matemática en el Currículo Nacional

El diseño curricular de la matemática se enmarca en el Currículo Nacional Peruano (Ministerio de Educación del Perú Minedu, 2016) que se enfoca en el desarrollo de valores y educación ciudadana en los estudiantes con el fin de lograr un desarrollo integral; involucra para ello aprendizajes, valores, cultura, arte y salud desde una perspectiva intercultural, ambiental e inclusiva que considera las características particulares de los estudiantes. Esto permite que los contenidos se puedan diversificar en el ámbito regional e institucional de manera que se atienda las necesidades particulares de la comunidad y los estudiantes.

Para ello, el currículo nacional considera el desarrollo de cuatro definiciones curriculares clave con el fin de concretar lo esperado en el perfil de egreso del estudiante, estas son: competencias, capacidades, estándares de aprendizaje y desempeños; las cuales se definen para cada área de enseñanza.

### 2.2.1 Competencias del área de matemática

El Ministerio de Educación define a la competencia como: “la facultad que tiene una persona de combinar un conjunto de capacidades a fin de lograr un propósito específico en una situación determinada, actuando de manera pertinente y con sentido ético” (Ministerio de Educación del Perú Minedu, 2017, p. 29). Es decir, se busca que el estudiante sea capaz de identificar los conocimientos y habilidades propias o del entorno, relacionar aspectos y analizar su realidad con el fin de tomar decisiones propias frente a un problema de una manera íntegra.

En el área de matemática se contempla el desarrollo de cuatro competencias, las cuales son:

- Competencia 23: Resuelve problemas de cantidad.
- Competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
- Competencia 25: Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.
- Competencia 26: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

Estas competencias se deben desarrollar de manera constante, deliberada y consciente durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, siendo incentivadas por todos los agentes de la comunidad educativa. De esta manera, la actitud que tenga un estudiante frente a un determinado problema dependerá del grado alcanzado en las competencias del área, por ello los docentes deben aplicar metodologías pertinentes que permitan al estudiante llegar a desarrollar los conocimientos esperados en la sesión de aprendizaje.

En la enseñanza del álgebra se busca desarrollar la competencia “resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” debido a que es utilizada como fundamento matemático para la construcción de contenidos más complejos en niveles educativos superiores. Los docentes deben plantear para ello metodologías educativas que permitan una comprensión completa del álgebra elemental, identificar los errores algebraicos en los que inciden los estudiantes y tratar de disminuir su incidencia durante el proceso de enseñanza.

Como esta investigación trata acerca de los errores algebraicos, se trabajará con la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Esta competencia busca que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos y hacer predicciones sobre fenómenos (Ministerio de Educación del Perú Minedu, 2016) Para ello, el estudiante debe plantear ecuaciones, inecuaciones y funciones que le permitan resolver situaciones problemáticas.

### 2.2.2 Capacidades relacionadas al álgebra

Las capacidades son definidas como: “Recursos para actuar de manera competente. Estos recursos son los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. Estas capacidades suponen operaciones menores implicadas en las competencias, que son operaciones más complejas” (Ministerio de Educación del Perú Minedu, 2017, p. 30). Es decir, se busca que el estudiante desarrolle de manera autónoma conocimientos, habilidades y actitudes para resolver situaciones problemáticas; estos aspectos deben ser relacionados de manera constante, combinándolos frente a nuevas situaciones.

En el área de matemáticas las capacidades se trabajan de manera conjunta para desarrollar determinadas competencias, aquellas relacionadas con los contenidos algebraicos son expresadas en el siguiente cuadro extraído del Currículo Nacional (2017):

**Tabla 1**

*Capacidades de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.*

Competencia	Capacidades
<b>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas.</li> <li>• Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>• Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.</li> <li>• Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>

Nota. Tomado de Currículo Nacional (2017)

El desarrollo de competencias y capacidades se debe realizar de manera constante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues como lo señala el Ministerio de Educación (2017) el hecho de que un estudiante sea competente involucra más que demostrar el logro de las capacidades por separado, el individuo debe combinar las capacidades de manera adecuada frente a nuevas realidades. Por ello los docentes deben tratar de desarrollar de manera permanente todas las capacidades y competencias durante su programación curricular.

Teniendo en cuenta esto, es necesario considerar en gran medida la adquisición de todas las competencias y capacidades relacionadas al área de matemática en una propuesta didáctica que busca mejorar el aprendizaje del álgebra en estudiantes de educación básica regular. Siendo el álgebra una parte esencial para el correcto aprendizaje de la matemática pues la mayoría de los estudiantes presenta problemas para pasar desde un ámbito concreto visto en la aritmética a un plano abstracto y genérico que es independiente de los números y los objetos tangibles. Por esta razón se pondrá mayor énfasis en las Capacidades de la Competencia 24.

### **2.2.3 Estándares de aprendizaje para el área de matemática**

Los estándares de aprendizaje son definidos por el Ministerio de Educación en el Currículo Nacional como:

Descripciones del desarrollo de la competencia en niveles de creciente complejidad, desde el inicio hasta el fin de la Educación Básica, de acuerdo a la secuencia que sigue la mayoría de los estudiantes que progresan en una competencia determinada. Estas descripciones son holísticas porque hacen referencia de manera articulada a las capacidades que se ponen en acción al resolver o enfrentar situaciones auténticas. (2017, p. 36)

Con ello se trata de determinar el progreso esperado en los estudiantes en el proceso de adquisición de competencias y capacidades al haber cumplido cierto nivel educativo. Aunque, como lo señala el Ministerio de Educación del Perú (2017) puede existir una diversidad de niveles de aprendizaje en un determinado grado debido a la multiplicidad de realidades que presentan los estudiantes y esto ha sido representado en evaluaciones nacionales e internacionales.

En relación con la presente investigación se consideran los estándares de aprendizaje especificados para el séptimo nivel de enseñanza pues este comprende el tercer, cuarto y quinto grado de EBR. Haciendo un mayor hincapié en aquellos relacionados al cuarto grado que consideren al álgebra pues sobre este punto se desarrolla la investigación. Es necesario indicar que se consideran a estudiantes del cuarto grado de EBR ya que estos componen la población de la investigación, siendo

este grupo el que presenta mayores problemas para el aprendizaje del álgebra debido a los dos años de educación virtual que recibieron a raíz de la pandemia.

**2.2.3.1 Estándares de aprendizaje para la enseñanza del álgebra en el séptimo nivel de educación básica regular.** El proceso de determinar un estándar de aprendizaje posee mucha importancia ya que brindan información esencial para realizar un proceso de retroalimentación en los estudiantes y a partir de ello el docente, según el Ministerio de Educación del Perú (2017), podrá replantear sus técnicas de enseñanza y así ayudar a los estudiantes de acuerdo con las necesidades específicas que tengan. Considerando esto es necesario tener en cuenta los estándares de aprendizaje pues determinarán la labor del docente y la metodología educativa que se ejecutará en el acto educativo.

En esta investigación se tendrán en cuenta los estándares de aprendizaje del cuarto grado de EBR relacionados a la enseñanza del álgebra con el objetivo de determinar una propuesta didáctica que atienda la problemática que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra. Los estándares de aprendizaje se encuentran organizados de acuerdo con las competencias desarrolladas en el área, es así como cada competencia posee un estándar de aprendizaje esperado en el cuarto grado. De esta manera, en esta investigación se considera el desarrollo del estándar enfocado a la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” ya que es la que abarca la enseñanza del álgebra.

El estándar del séptimo nivel de enseñanza de la competencia mencionada se expresa de la siguiente manera en el Currículo Nacional:

Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por

aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas. (Ministerio de Educación del Perú Minedu, 2017, p. 139)

La descripción detallada de este estándar involucra todos los aprendizajes esperados en los estudiantes desde el tercer hasta el quinto grado de secundaria de EBR. Por ello, el docente debe discernir sobre los contenidos que pretende desarrollar en cada grado específico para así plantear metodologías correctas que permitan un aprendizaje significativo gradual durante todos los grados que involucran el séptimo nivel de enseñanza. La elección de contenidos que se pretende desarrollar en cada grado dependerá directamente de los desempeños planteados en el programa curricular nacional.

#### **2.2.4 Desempeños para el área de matemáticas**

Los desempeños son definidos en el Currículo Nacional como:

Descripciones específicas de lo que hacen los estudiantes respecto a los niveles de desarrollo de las competencias (estándares de aprendizaje). Son observables en una diversidad de situaciones o contextos. No tienen carácter exhaustivo, más bien ilustran actuaciones que los estudiantes demuestran cuando están en proceso de alcanzar el nivel esperado de la competencia o cuando han logrado este nivel. (Ministerio de Educación del Perú Minedu, 2017, p. 38)

Es decir, consideran lo estipulado en los estándares de aprendizaje para determinar de manera más específica los contenidos correspondientes a cada grado de enseñanza. Es así como el docente determina los aprendizajes esperados en los estudiantes de determinado grado para lograr un aprendizaje gradual, considerando que en los estudiantes existe una diversidad de niveles de desempeño. El profesor debe adecuar los contenidos planteando para ello metodologías correspondientes al nivel de desempeño que poseen los estudiantes.

**2.2.4.1 Desempeños para la enseñanza del álgebra en el séptimo nivel de educación básica regular.** Con respecto a esta investigación se consideran los desempeños direccionados al álgebra para el cuarto grado de EBR que corresponden a la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, estos desempeños son detallados en el Programa Curricular de Educación Secundaria. Los desempeños para el cuarto grado de EBR son los siguientes:

- Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen la regla de formación de una progresión geométrica, a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, a inecuaciones ( $ax \pm b < c$ ,  $ax \pm b > c$ ,  $ax \pm b \leq c$  y  $ax + b \geq c$ ,  $\forall a \in \mathbb{Q}$  y  $a \neq 0$ ), a ecuaciones cuadráticas ( $ax^2 = c$ ) y a funciones cuadráticas ( $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = ax^2 + c$ ,  $\forall a \neq 0$ ) con coeficientes enteros y proporcionalidad compuesta.
- Evalúa si la expresión algebraica o gráfica (modelo) que planteó representa todas las condiciones del problema: datos, términos desconocidos, regularidades, relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes.
- Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la regla de formación de una progresión geométrica y reconoce la diferencia entre un crecimiento aritmético y uno geométrico para interpretar un problema en su contexto y estableciendo relaciones entre dichas representaciones.
- Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales y de la ecuación cuadrática e inecuación lineal, para interpretar su solución en el contexto de la situación y estableciendo conexiones entre dichas representaciones.
- Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática, sus valores máximos, mínimos e intercepto, su eje de simetría, vértice y orientación, para interpretar su solución en el contexto de la situación y estableciendo conexiones entre dichas representaciones.
- Selecciona y combina estrategias heurísticas, métodos gráficos, recursos y procedimientos matemáticos más convenientes para determinar términos desconocidos, simplificar expresiones algebraicas, y solucionar ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones, usando productos notables o propiedades de las igualdades. Reconoce cómo afecta a una gráfica la variación de los coeficientes en una función cuadrática.
- Plantea afirmaciones sobre la relación entre la posición de un término y su regla de formación en una progresión geométrica, y las diferencias entre crecimientos aritméticos y geométricos, u otras relaciones de cambio que descubre. Justifica y

comprueba la validez de sus afirmaciones mediante ejemplos, propiedades matemáticas, o razonamiento inductivo y deductivo.

- Plantea afirmaciones sobre el significado de los puntos de intersección de dos funciones lineales que satisfacen dos ecuaciones simultáneamente, la relación de correspondencia entre dos o más sistemas de ecuaciones equivalentes, u otras relaciones que descubre. Justifica y comprueba la validez de sus afirmaciones mediante ejemplos, propiedades matemáticas, o razonamiento inductivo y deductivo.
- Plantea afirmaciones sobre el cambio que produce el signo de coeficiente cuadrático de una función cuadrática en su gráfica, relaciones entre coeficientes y variación en la gráfica, u otras relaciones que descubre. Justifica y comprueba la validez de sus afirmaciones mediante ejemplos, propiedades matemáticas o razonamiento inductivo y deductivo. (Ministerio de Educación del Perú Minedu, 2016, p. 160-161)

El estudio y comprensión de estos desempeños es de suma importancia porque constituyen los aprendizajes que se espera que desarrollen los estudiantes luego de haber aplicado la propuesta didáctica. Es necesario tener en cuenta que los contenidos deben acompañarse de una metodología didáctica que relacione los aprendizajes con la realidad del estudiante.

Por otro lado, los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” pertenecientes al segundo grado de EBR serán considerados para la elaboración de la prueba diagnóstica puesto que los estudiantes ingresantes al cuarto grado debieron haber alcanzado aquellos desempeños.

### **2.3 Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra escolar**

El proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar involucra una gran cantidad de dificultades que poseen una naturaleza diversa. Estos problemas de aprendizaje poseen orígenes en el ámbito escolar, entre los que se encuentran: el desenvolvimiento del docente, interés de los estudiantes y los contenidos que estos poseen sobre los temas relacionados al álgebra. Al respecto, Palarea señala:

Para estos alumnos lo que les pedimos hacer en Álgebra no tiene un significado real subyacente. Muchos estudiantes no están dispuestos en el mismo sentido que el profesorado, que se muestra siempre ansioso de pasar al tema siguiente e introduce ideas algebraicas demasiado pronto y demasiado de prisa. (Palarea, 1998, p. 6)

De esta manera, las dificultades para el aprendizaje del álgebra tienen una gran incidencia en la problemática que tienen los estudiantes para no identificar en los contenidos algebraicos una realidad concreta, siendo esta la que ha estado presente durante todo su proceso de formación. Es decir, no existe un cambio correcto y adecuado de la realidad concreta a la formal y abstracta, consideran al álgebra como una parte de la matemática que se enfoca completamente a las letras y variables. Es así como aparecen una serie de dificultades, obstáculos y errores que comete el estudiante en el acto educativo al momento de comprender el álgebra.

Palarea (1998) determina que los problemas específicos del proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra son las dificultades, obstáculos y errores algebraicos. Esta investigación abordará de manera más detallada los errores algebraicos debido a que son estos los que el estudiante comete en el proceso de aprendizaje del álgebra dificultando la comprensión de los contenidos algebraicos.

### **2.3.1 Diferencias entre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra**

Realizar una correcta diferenciación de los problemas específicos del proceso de aprendizaje del álgebra involucra entender los conceptos relacionados a dificultades, obstáculos y errores que se pueden presentar en esta rama de la matemática. Es así como se presenta en este apartado un estudio de manera detallada de las dificultades, obstáculos y errores algebraicos, con el fin de establecer las diferencias que existen y comprender cuáles poseen mayor relación con el actuar del estudiante.

Las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra son definidas por Hernández et al. (1998) como rupturas en los modos de pensamiento algebraico y que afectan el proceso normal de la construcción de conocimiento matemático. Además, mencionan que los conocimientos matemáticos previos que posee el estudiante generan modelos matemáticos implícitos con el objetivo de resolver problemas, en la mayoría los casos estos son adecuados, pero en otros aparecen como dificultades para el aprendizaje de los nuevos saberes matemáticos.

El aprendizaje del álgebra genera dificultades que se relacionan a la complejidad que tiene esta rama de la matemática al inducir al estudiante a un proceso de generalización y abstracción, considerando los registros formales y métodos de enseñanza empleados. Palarea (1998) señala que la raíz de estas dificultades tiene que ver con “la complejidad de los objetos del Álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra” (p. 74).

Teniendo en cuenta esto, se deduce que las dificultades del álgebra pueden ser estudiadas desde diferentes perspectivas, haciendo mayor incidencia en el aspecto que se quiere estudiar. Respecto a las dificultades relacionadas a la complejidad de los objetos del álgebra; Palarea (1998)

indica que los objetos operan en dos niveles determinados: el nivel semántico, relacionado con los signos que dan un significado preciso y concreto, y el nivel sintáctico que se refiere a los signos que pueden ser operados mediante directrices sin referencia a ningún concepto ya preestablecido.

Con respecto a los procesos de pensamiento algebraico se determina que estos producen rupturas que se llegan a convertir en dificultades en el aprendizaje. Como señala Palarea (1998), el saber matemático que posee el estudiante establece modelos para la resolución de problemas matemáticos, en ciertos casos estos son adecuados, pero otros se imponen como un modelo contrario al nuevo conocimiento matemático, el conocimiento algebraico. Ante este escenario el docente debe reflexionar sobre la contradicción de las respuestas y establecer métodos de relación entre los contenidos matemáticos.

Las dificultades de aprendizaje guardan una relación directa con el currículo y los métodos de enseñanza empleados por los docentes en el aula. En la actualidad estos deben estar direccionados al desarrollo de competencias, potenciando un aprendizaje autónomo de parte del estudiante.

Las dificultades de aprendizaje relacionadas a los procesos cognitivos de los estudiantes, como lo indica Palarea (1998), tienen relación con las fases del desarrollo intelectual de la persona y las tareas específicas del álgebra que el estudiante debe llegar a desarrollar. En este sentido se aborda un enfoque constructivista en la que el estudiante debe llegar a un grado de contemplación máximo de la realidad que se le propone, se debe primar la comprensión de los contenidos para conseguir con ello la consecución de aprendizajes significativos.

Por último, en el campo de las actitudes afectivas y emocionales se consideran las dificultades que tiene los estudiantes al aprender el álgebra, lo que crea un ambiente de tensión y nerviosismo hacia los contenidos algebraicos. Para ello el docente debe establecer un clima de aprendizaje en donde prime la tranquilidad y posibilite un desenvolvimiento del estudiante sin presiones.

Por otro lado, los obstáculos en la enseñanza-aprendizaje del álgebra tienen que ver con la organización de los errores. Palarea (1998) define los obstáculos algebraicos como “un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento” (p. 75). El estudiante emplea estos conocimientos para responder a situaciones problemáticas de manera eficiente en un contexto en el que es adecuado y pertinente. Pero si este concepto es empleado fuera de contexto se consiguen respuestas incorrectas.

Un afianzamiento intenso de estos conocimientos depende de que el estudiante haya reconocido una gran cantidad de veces la eficacia en la validez de las respuestas. Es importante identificar estos conocimientos y demostrar la incongruencia que tiene con los nuevos conocimientos,

en este caso los contenidos algebraicos. Este tipo de obstáculo se “concibe como una especie de inercia que provoca el estancamiento o, incluso, la regresión del conocimiento” (Palarea, 1998, p. 76) y que ocurre en el acto de contemplar de la persona, estos obstáculos son concebidos como epistemológicos.

Esto va relacionado con los obstáculos didácticos, según Palarea (1998), estos surgen en base a la experiencia de enseñanzas regladas, determinadas y organizadas en el sistema educativo. Es decir, este tipo de obstáculos van relacionados con la metodología de enseñanza que asume la institución educativa y específicamente los docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El profesor debe ser consciente de la diferencia en la naturaleza de los conocimientos matemáticos, por lo que debe plantear medios diferentes para permitir el afianzamiento de los contenidos y con ello el logro de aprendizajes significativos. Un caso concreto es el paso de la aritmética al álgebra, que amerita de medios que permitan al estudiante formalizar los contenidos concretos que tenía en la aritmética.

En el acto de conocer se identifican los obstáculos cognitivos, pues el estudiante se enfrenta a nuevas ideas que no tienen cabida en su estructura cognitiva existente, lo que provoca que no pueda enfrentarse satisfactoriamente a los nuevos contenidos. Como se indica:

los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los alumnos y del procesamiento interno de estas experiencias, y que nuestra organización curricular, diseñada para presentar los objetos matemáticos de las formas lógicamente más simples, puede realmente causar obstáculos cognitivos, pero que también surgen obstáculos cognitivos que no tienen que ver con esta organización curricular sino que tienen que ver con otros aspectos, como por ejemplo, la lógica interna de las Matemáticas. (Palarea, 1998, p. 76)

Según lo referido en los obstáculos cognitivos destaca la complejidad que tiene la comprensión de las matemáticas y la lógica social que cumple un rol fundamental en la construcción de estructuras cognitivas en el estudiante. El docente debe cambiar la concepción que tienen las personas de la dificultad que supone el estudio de las matemáticas, se deben establecer metodologías que vayan acorde a la realidad cognitiva del estudiante.

De manera jerárquica, los errores algebraicos aparecen como una consecuencia directa de las dificultades y los obstáculos en la enseñanza-aprendizaje del álgebra. Es así como Palarea (1998) indica que si bien el estudiante puede tener un desempeño satisfactorio en la matemática puede ocultar errores conceptuales que pueden dificultar el aprendizaje de los contenidos posteriores. Es así como las metodologías de enseñanza deben considerar también el aspecto de atender la forma de conocer de los estudiantes y no limitarse al plano emisor de contenidos. Aunque esta concepción de los errores

algebraicos es muy general, también proporciona una idea de la relación que tiene con los obstáculos y dificultades de aprendizaje.

Las diferencias entre las dificultades, obstáculos y errores algebraicos se enfocan en un plano jerárquico. Como señala Palarea (1998) las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas desde un plano general y conceptual, mientras que los obstáculos representan el aspecto concreto en la práctica educativa y se manifiestan en los estudiantes a través de errores algebraicos. Es así como en esta investigación se prioriza el estudio de los errores algebraicos porque las manifestaciones que tienen los estudiantes en el acto educativo permitirán la construcción de una metodología que tenga como objetivo tratar de corregirlos y permitir así un mejor aprendizaje de los contenidos algebraicos.

### **2.3.2 Errores algebraicos**

Los errores algebraicos constituyen la manifestación de los obstáculos y dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra. Es por ello la importancia que tienen en el desarrollo de la investigación, pues esta tiene como objetivo aplicar el enfoque de álgebra como actividad para determinar la evolución de los errores algebraicos que cometen los estudiantes al momento de aprender conocimientos algebraicos. En esta sección se presenta un estudio detallado de los errores algebraicos considerando su definición, la clasificación que han desarrollado varios investigadores al respecto y se abarcará la tipología más pertinente al propósito de esta investigación.

**2.3.2.1 Definición de errores algebraicos.** Los errores algebraicos son definidos, según Palarea (1998), como “intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 80). Estos aparecen en el trabajo de los estudiantes, cuando se propone desarrollar contenidos nuevos que provoca una revisión de las estructuras cognitivas ya establecidas con anterioridad.

En el caso del álgebra, el aprendizaje de contenidos algebraicos supone una formalización y abstracción de los contenidos concretos vistos en la aritmética, este proceso no debe ser considerado como un quiebre sino como una continuidad para llegar a generalizaciones de los conocimientos matemáticos. Pero la divergencia identificada entre los contenidos ya aprendidos de la aritmética y los esperados en el álgebra produce una disparidad al momento que el estudiante contempla los nuevos conocimientos.

La importancia de identificar los errores algebraicos que poseen los estudiantes, según Palarea (1998), radica en que con ellos el docente se “provee de información sobre la forma en que los niños interpretan los problemas y cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos”. Esto permitirá que el profesor plantee métodos de enseñanza que ayuden a los estudiantes a enmendar los errores

cometidos, y posibilitar la identificación de las posibles causas de las dificultades en el aprendizaje del álgebra.

Es necesario tener en cuenta que los estudiantes que tienen un desempeño adecuado en el aprendizaje de la matemática pueden ocultar errores conceptuales que impide el aprendizaje de contenidos más complejos. El docente debe realizar un estudio consciente del grupo de estudiantes que maneja y no limitarse al plano académico, sino realizar un seguimiento al estudiante para reconocer así las posibles dificultades de aprendizaje y los errores que comete frecuentemente, considerando que la mayoría de estos se refieren a la formación de conceptos y resolución de problemas.

**2.3.2.2 Clasificación de errores algebraicos.** Los errores algebraicos han sido clasificados de diversas formas, dependiendo en gran medida de los objetivos que han tenido las investigaciones que han realizado las tipologías.

Una clasificación de errores algebraicos fue establecida por el grupo de Álgebra del proyecto SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics), esta investigación se llevó a cabo en Reino Unido entre 1980 y 1983, en estudiantes que poseían edades en el rango de trece y dieciséis años. La investigación se centró en la naturaleza de los errores cometidos por los estudiantes y especialmente por aquellos que tuvieron mayor incidencia en los estudiantes.

Esta indagación Booth (1984) llega a establecer que los errores algebraicos que cometían los estudiantes tienen relación con los siguientes aspectos:

- la naturaleza y significado de los símbolos y las letras
- el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en Álgebra.
- la comprensión de la Aritmética por parte de los estudiantes, y
- el uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimientos”.

Es necesario tener en cuenta que los tres primeros aspectos se relacionan con la transición que realizan los estudiantes desde la aritmética al álgebra. Mientras que el último punto abarca falsas generalizaciones de operadores y números.

Otra forma de concebir los errores algebraicos, según Palarea (1998), fue establecida por Lesley R. Booth del estudio (SESM) en su “Estrategia y Errores en Aritmética Generalizada”. Esta investigación se centra en considerar las respuestas erráticas de mayor incidencia en los estudiantes y trabajar con ellas como objetos de estudio. A partir de ello se llega a establecer que los errores algebraicos se producen debido a:

- una mala interpretación de los elementos de la pregunta o de lo que se pide hacer.
- el uso de un método incorrecto para abordar o resolver el reactivo.
- una incorrecta codificación del resultado.

Esta clasificación supone la incidencia a cometer errores que tienen los estudiantes debido a la falta del afianzamiento de los conocimientos algebraicos.

A través de una conjunción de las clasificaciones analizadas anteriormente Palarea (1998) propone una clasificación que se representa de la siguiente manera:

- Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.
  - Errores algebraicos relativos al mal uso de la propiedad distributiva.
  - Errores algebraicos relativos al uso de recíprocos.
  - Errores algebraicos debidos a cancelación.
- Errores de álgebra que son debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

La importancia de esta clasificación radica en que considera dos aspectos relevantes para esta investigación; primero, se consideran los errores que pueden cometer los estudiantes y que se originan en los conocimientos provenientes de la aritmética. Este trabajo al centrarse en estudiantes de cuarto grado de secundaria se desarrolla en un contexto en el que los estudiantes transitan de la aritmética al aprendizaje formal del álgebra. Por lo que los errores algebraicos de este tipo pueden tener gran incidencia en estos estudiantes.

Segundo, se abarcan los errores producto de las características propias del lenguaje algebraico, en este sentido se toman en cuenta los nuevos conocimientos a los que están siendo expuestos los estudiantes en el proceso de aprendizaje del álgebra. Esto es importante ya que el aprendizaje del álgebra involucra que el estudiante llegue a desarrollar operaciones mentales formales de los contenidos concretos lo que supone una gran dificultad en la mayoría de los casos.

Otra clasificación importante es la proporcionada por Radatz (1979) (citado por García et al., 2011, p. 147) quien proporciona la siguiente clasificación:

- Errores debidos a dificultades de lenguaje.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, que generalmente son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, que surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Esta clasificación considera aspectos generales de la enseñanza de las matemáticas que impide trabajar de manera específica en la enseñanza del álgebra. Esto dificultaría el desarrollo de esta investigación ya que la elaboración de los materiales de diagnóstico y evaluación se realizaría de manera muy general provocando confusión.

En suma, la presente investigación considerará la taxonomía planteada por Palarea (1998), debido a los motivos antes mencionados y a la proximidad que tiene con el propósito de la investigación de plantear una propuesta didáctica que trate de reducir los errores algebraicos cometidos por estudiantes del cuarto grado de educación básica regular.

### **2.3.3 Tipología de errores algebraicos**

La investigación realizada por Palarea (1998) titulada “La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años”, centra su atención en la forma como los estudiantes adquieren el lenguaje algebraico al iniciar el aprendizaje del álgebra y en los errores que se evidencian en este proceso.

Plantea una taxonomía de errores algebraicas que será analizada en los siguientes apartados y que servirán de guía teórica para el desarrollo de esta investigación.

**2.3.3.1 Errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética.** El álgebra tiene una fuerte relación con la aritmética y en muchos casos es considerada como una aritmética generalizada debido a la similitud en el uso de signos y símbolos. Como indica Brousseau (1983) la aritmética es un campo natural previo del álgebra, este se concibe como un medio de hablar de la aritmética.

Es por ello por lo que Palarea (1998) señala que, para desarrollar procesos de generalización y formalización de relaciones y procesos, primero la persona debe asimilar estos procesos en un contexto completamente aritmético. Además, indica que la mayoría de las dificultades que los estudiantes encuentran en el álgebra provienen de problemas que quedan sin corregir en el estudio de la aritmética.

Una gran cantidad de este tipo de errores algebraicos son producto de falsas generalizaciones sobre operaciones, ejemplo de esto es el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento que son mal ejecutadas por los estudiantes al momento de resolver un problema matemático. Esto se debe mayormente porque los estudiantes extraen una regla matemática de un contexto determinado y tratan de replicarlo de la misma manera en una situación nueva.

Entre estos se encuentran los siguientes:

- **Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.**

Estos errores son producto del uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento. En el caso de la propiedad distributiva, se muestra el siguiente ejemplo:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

- **Errores relativos al uso de recíprocos.**

Se puede identificar los siguientes ejemplos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{(x+y)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{(x+y)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{(x)(y)}$$

- **Errores de cancelación.**

Este tipo de errores algebraicos parecen indicar que los estudiantes generalizan determinados procedimientos que se verifican en determinados casos. Por ejemplo:

$$\frac{(x+y)}{(x+z)} = y+z$$

**2.3.3.2 Errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.** Estos errores poseen una naturaleza estrictamente algebraica y no poseen una referencia directa en la aritmética. Palarea (1998) destaca el sentido del signo “=” en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal.

**2.4 Actividades algebraicas basadas en el enfoque de “álgebra como actividad”**

Las actividades algebraicas basadas en el enfoque de “álgebra como actividad” constituyen una propuesta realizada por la investigadora Kieran en el 8th Congreso Internacional de Educación Matemática realizado en Sevilla durante 1996. Este modelo se basa en el término “pensamiento

algebraico” que surge durante las actividades didácticas escolares, Kieran (1996) fundamenta que este pensamiento se interpreta como un análisis de situaciones cuantitativas que prioriza los aspectos relacionales y de generalización con términos que no son necesariamente letras simbólicas, aunque estas pueden emplearse como un apoyo cognitivo para la introducción del estudiante al álgebra escolar. De esta manera, se proponen tres tipos de actividades: generational, transformational y global meta-level.

Este enfoque se basa en el “pensamiento algebraico” que surge durante las actividades didácticas, es decir se plantean actividades cuantitativas que induzcan al estudiante al desarrollo de capacidades como la relación de variables matemáticas y la generalización. El pensamiento algebraico hace referencia a un cambio que se da desde un pensamiento empírico a uno más simbólico, Butto et al. (2011) recalcan que para la introducción del estudiante a este tipo de pensamiento se le debe otorgar herramientas aritméticas que le otorguen sentido y simbolismo a las situaciones algebraicas que se le presenten. Además, destacan la importancia de la generalización para que el estudiante desarrolle la capacidad de extraer patrones empleando variables. Castro et al. (1995) indican que la generación de patrones algebraicos es necesario para el correcto aprendizaje del álgebra y Reggiani (1994) menciona que la generalización es el pilar fundamental para esto. Para ello, Kieran propone tres tipos de actividades, las cuales poseen características propias, que se describen a continuación.

#### **2.4.1 Actividades Generational**

Las actividades generational, según Kieran (1996), involucran la forma de las expresiones y ecuaciones que son parte del álgebra. Se detalla que estas actividades son las siguientes: ecuaciones que contienen una incógnita que representan una situación problemática, expresiones de generalidad que provienen de patrones geométricos o secuencias numéricas y expresiones geométricas, y expresiones de las reglas que gobiernan las relaciones numéricas. Asimismo, plantea que la noción del signo igual y la solución de ecuaciones se desarrollan durante estas actividades ya que son objetos subyacentes que forman parte de la actividad generational del álgebra en el estudiante.

Según Kieran (1996), estas actividades contienen dos indicadores, el primero es la acción de formar enunciados y ecuaciones que contengan una cantidad desconocida, el estudiante emplea símbolos que son representaciones para la resolución de situaciones cuantitativas. El segundo indicador se refiere a la acción de generalizar patrones geométricos y secuencias o relaciones numéricas. Está caracterizada más por la estrategia y el razonamiento que por el conocimiento matemático, de esta manera el estudiante usa diferentes estrategias y el razonamiento matemático para determinar patrones.

### **2.4.2 Actividades Transformational**

Kieran (1996) establece que las actividades transformational son aquellas basadas en cambiar la forma de una expresión o ecuación para mantener la equivalencia de sus términos, es decir están basadas en reglas de transformación algebraica. Dentro de estas actividades se identifican las siguientes: recopilar términos semejantes, factorizar, expandir, sustituir, resolver ecuaciones, simplificar expresiones algebraicas y ecuaciones equivalentes.

### **2.4.3 Actividades Global Meta-level**

Las actividades global meta-level son definidas por Kieran (1996) como aquellas donde se utiliza el álgebra como una herramienta para la solución de problemas pero que no son parte del álgebra fundamental; dentro de estas actividades se encuentran las siguientes: resolución de problemas, generalizar, analizar relaciones, justificar, probar y predecir. Estas actividades sugieren un pensamiento más general del estudiante, además forman parte esencial de las dos primeras actividades ya que posibilitan la construcción del significado algebraico de manera más independiente y autónoma.

Este tipo de actividades destacan por la importancia que tienen en la generación del pensamiento algebraico en estudiantes que no poseen ningún conocimiento relacionado al álgebra ya que no se fundamenta en el uso de letras simbólicas, Kieran (2004) detalla que estas actividades se convierten en vehículos ideales para que se desarrolle un pensamiento no simbólico o pre simbólico, además de motivar formas de pensar que son cruciales para el éxito en el álgebra. Por ello, este tipo de actividades poseen gran relevancia y deben mantenerse a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

### Capítulo 3. Metodología de la investigación

En este capítulo se aborda la metodología de la investigación, para ello se detalla la tipología y el diseño que se ha planteado, se precisa la población y muestra de la que se ha obtenido la información, las variables que han sido consideradas teniendo en cuenta sus definiciones conceptuales y operacionales, y las técnicas e instrumentos que han sido empleados para la recolección de la información. Seguidamente se analiza cómo los errores algebraicos cometidos por los estudiantes pueden ser trabajados y disminuidos haciendo uso de actividades didácticas, basadas en el enfoque de “álgebra como actividad” propuesto por Kieran. Este enfoque propone el desarrollo de tres tipos de actividades: generational, transformational y global/meta-level. Por último, se detalla el procesamiento de análisis de datos que ha sido considerado para procesar la información recolectada.

#### 3.1 Tipo de investigación

La investigación es de tipo experimental, prospectiva y analítica. Este trabajo es experimental debido a que se centra en encontrar la relación entre dos variables ya determinadas. Como señala Rodríguez (2011) la experimentación se define como “el método que permite descubrir con mayor grado de confianza, relaciones de tipo causal entre hechos o fenómenos de la realidad” (p. 148). Por ello, la investigación es experimental debido a que existe la manipulación de una variable “actividades didácticas”, tratando de determinar cómo esta influye en “los errores algebraicos” que pudiesen presentar estudiantes de cuarto grado de educación secundaria.

Asimismo, es prospectiva ya que los datos necesarios para el trabajo de investigación han sido recogidos mediante instrumentos de evaluación planificados, diseñados y aplicados por el investigador. La primera con la finalidad de diagnosticar los errores algebraicos presentes en los estudiantes y la segunda para analizar cómo han evolucionado los estudiantes luego de la aplicación de las actividades didácticas. Esto fundamentado en la concepción de Mera (2014) quien considera a la propección como la actitud mental que tiene el investigador de concebir el futuro para obrar en el presente, de modo que las actividades didácticas surgen como una alternativa futura para contar con una propuesta que ayude a minimizar los errores algebraicos que cometen los estudiantes.

Además, es analítica ya que el análisis de datos cuantitativos y cualitativos entre las dos variables trae consigo una interpretación de los resultados obtenidos. También se trata de determinar la relación que tienen estas dos variables y cómo las características y participación de los estudiantes influyen en los resultados obtenidos.

Por otro lado, la presente investigación responde al paradigma cualitativo, ya que se busca comprender un problema dentro de un contexto ya establecido y con ello plantear una serie de actividades que aportarían a su solución. Se adoptó una metodología basada en la descripción

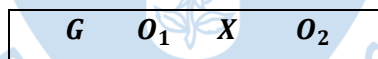
cualitativa fundamentada en los errores algebraicos que presentan los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de una institución educativa rural de la región Piura, 2022.

Hernández et al. (2010) señalan que la metodología cualitativa se basa en recoger información basada en el contexto, eventos, conductas observadas y sus manifestaciones. A partir de estos elementos se plantean hipótesis y preguntas de investigación que pueden ir cambiando de acuerdo con los hechos. Esto supone un proceso de investigación más flexible que permita atender y reconstruir la realidad. En este sentido, se busca optimizar el desarrollo de la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” considerando para ello los errores algebraicos que cometen los estudiantes y teniendo en cuenta su contexto y necesidades particulares.

De esta manera, las actividades didácticas se fundamentan tanto en los resultados obtenidos a través de una evaluación diagnóstica para identificar errores algebraicos cometidos por los estudiantes, como en la información que el investigador recogió del contexto educativo y las necesidades particulares de los estudiantes ya que éste es el docente a cargo del grupo en el área de matemática; siendo esta metodología la más adecuada de acuerdo con los objetivos de la investigación.

### 3.2 Diseño de investigación

La observación y medición de las variables se ha desarrollado bajo un enfoque basado en un diseño pre-experimental, con la aplicación de un pretest y postest. El diseño mencionado se representa de la siguiente manera:



Esta representación se interpreta de la siguiente forma:

- **G**: Grupo de estudiantes del cuarto grado “B” de educación secundaria de una institución educativa estatal rural de la región Piura, 2022.
- **O<sub>1</sub>**: Observación de entrada o pretest para identificar los errores algebraicos que poseen los estudiantes.
- **X**: Representa las actividades didácticas centradas en estrategias de enseñanza enfocadas en reducir o eliminar los errores algebraicos que poseen los estudiantes.
- **O<sub>2</sub>**: Observación de salida o postest para identificar los errores algebraicos que poseen los estudiantes.

La elección del diseño pre-experimental se dio ya que permite la elección aleatoria de los sujetos que componen la muestra de la investigación. Al respecto, Salas (2013) acota que:

El profesor-investigador, el pedagogo o el psicólogo educativo por estas limitaciones tienen que recurrir a los pre o cuasi experimentos cuando se desarrollan trabajos con un sólo grupo de participantes o cuando eligiendo a dos o más grupos, no se tiene control sobre su conformación. (p. 139)

De esta manera, este tipo de diseño permite que la investigación pueda direccionarse a aquellos estudiantes que cuentan con acceso a clases presenciales, esto de acuerdo con el contexto educativo post pandemia de coronavirus COVID 19.

A continuación, se detalla el procedimiento seguido en la investigación:

**Tabla 2**

*Procedimiento metodológico de la investigación*

<b>Procedimiento</b>	<b>Descripción</b>
<b>1. Determinación de la problemática.</b>	Se identificó una necesidad particular en el área de matemática referida a la competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; en estudiantes de una institución educativa rural de la región Piura, quienes después de dos años de educación virtual no han logrado los desempeños esperados en esta competencia.
<b>2. Planteamiento de los objetivos.</b>	La investigación se centra en aplicar actividades didácticas para reducir errores algebraicos, esto luego de conocer su tipología y diagnosticar los errores más frecuentes en los estudiantes que componen la muestra del estudio.
<b>3. Selección del contenido teórico que fundamenta la investigación.</b>	La revisión de la bibliografía se centró en el estudio de la didáctica de las matemáticas, el desarrollo de la competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; la tipología de errores algebraicos y actividades didácticas empleadas para la enseñanza del álgebra.
<b>4. Elaboración de evaluación diagnóstica (pretest) y</b>	Las preguntas de la evaluación diagnóstica y evaluación de salida que se aplicaron en esta investigación fueron adaptadas del anexo 5 y 6 de la

<b>evaluación de salida (postest).</b>	tesis doctoral de Palarea “La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años” debido a que los objetivos que se pretenden conseguir son similares a los planteados en la investigación.
<b>5. Validación de la evaluación diagnóstica (pretest) y evaluación de salida (postest).</b>	La evaluación diagnóstica y salida fueron validadas por tres docentes del área de matemática, quienes hicieron observaciones, las cuales fueron corregidas para su correcta validación.
<b>6. Selección de la muestra.</b>	La muestra fue constituida por 29 estudiantes del cuarto grado sección B de secundaria de una institución educativa pública rural JEC. Esta selección se realizó en base a que este grado se encuentra en el VII nivel educativo, siendo este grupo el que ha pasado dos años en educación virtual y no ha logrado alcanzar los desempeños de la competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, en el nivel educativo anterior.
<b>7. Aplicación de la evaluación diagnóstica.</b>	Se aplicó la evaluación diagnóstica a 29 estudiantes del cuarto “B” de manera presencial y tuvo una duración de 1 hora cronológica (60 minutos).
<b>8. Análisis de resultados de la evaluación diagnóstica.</b>	Se realizó el análisis a los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica. Para ello se tuvo en cuenta las capacidades del estudiante y la tipología de errores algebraicos que utilizó Palarea. Este análisis se realizó a través de tablas y gráficos estadísticos que muestran los errores de mayor incidencia.
<b>9. Elaboración de actividades didácticas.</b>	Se elaboraron actividades didácticas basadas en el análisis de los resultados obtenidos en

	la evaluación diagnóstica. Estas actividades se fundamentan en la teoría de “álgebra como actividad” propuesta por Kieran. Estas se organizaron en sesiones de aprendizaje donde se aborda cada uno de los errores algebraicos que se detectaron en los estudiantes.
<b>10. Aplicación de actividades didácticas.</b>	Las actividades didácticas fueron aplicadas a 29 estudiantes del cuarto grado “B” de una institución educativa rural de la región Piura, 2022.
<b>11. Aplicación de evaluación de salida (postest)</b>	Se aplicó la evaluación de salida a 29 estudiantes del cuarto “B”, de manera presencial y tuvo una duración de 1 hora cronológica (60 minutos).
<b>12. Análisis de resultados de la evaluación de salida (postest).</b>	Se realizó el análisis a los resultados obtenidos en la evaluación de salida. Para ello se tuvo en cuenta las capacidades del estudiante y la tipología de errores algebraicos de Palarea. Este análisis se presenta a través de tablas y gráficos estadísticos que muestran como evolucionaron los estudiantes con respecto a los errores algebraicos que se detectaron en el diagnóstico.
<b>13. Elaboración de conclusiones.</b>	Posterior al análisis de los resultados, la elaboración de las actividades didácticas y la validación de estas; se elaboraron las conclusiones de acuerdo con los objetivos de la investigación.
<b>14. Redacción del informe final.</b>	El informe final de la investigación está organizado en 4 capítulos y las conclusiones, estos se detallan de la siguiente manera: <ul style="list-style-type: none"> <li>I. Planteamiento de la investigación.</li> <li>II. Marco teórico.</li> <li>III. Marco metodológico.</li> <li>IV. Análisis e interpretación de resultados.</li> </ul> Conclusiones y limitaciones de la investigación.

---

Adicionalmente, en anexos y apéndices se adjunta la evaluación diagnóstica y las actividades didácticas con sus respectivas validaciones.

---

Nota. Elaboración propia.

### 3.3 Población y muestra

La investigación se desarrolla en una institución educativa rural perteneciente al distrito de Suyo en la provincia de Ayabaca de la región Piura. Este centro de estudios se caracteriza por brindar servicios educativos en el nivel inicial, primario y secundario bajo la modalidad de Educación Básica Regular en Jornada Escolar Completa. Las sesiones se desarrollaron en modalidad presencial debido a las disposiciones del Ministerio de Educación para el año escolar 2022, durante las clases se respetaron los protocolos de bioseguridad necesarios para salvaguardar la integridad del investigador y los estudiantes.

La muestra de la investigación está conformada por los estudiantes pertenecientes a la sección B del cuarto grado del nivel secundario, quienes cursan durante el año 2022 en la institución educativa rural de la región Piura. Los estudiantes se distribuyen de la siguiente manera:

**Tabla 3**

*Cantidad de estudiantes de cuarto grado B de secundaria.*

<b>CUARTO B</b>	
Estudiantes matriculados	34
Estudiantes con acceso a clases presenciales	29

Nota. Elaboración propia.

La muestra se estableció siguiendo procedimientos correspondientes al muestreo no probabilístico, específicamente es un muestreo intencional o por conveniencia, ya que se decidió trabajar con los estudiantes de una sección que tengan acceso de manera completa a las clases presenciales para el desarrollo de esta investigación. Debido a que el docente investigador ejerce labores de docencia con este grupo, es así como la muestra está conformada por 29 estudiantes con acceso a clases presenciales de los 34 matriculados en el mencionado grado durante el año 2022.

### 3.4 Variables de investigación

Las variables de investigación se definen de manera conceptual y operacional.

#### 3.4.1 Definición conceptual

La investigación ha considerado dos variables:

**Actividades didácticas relacionadas al enfoque de “Álgebra como actividad”.** El modelo de “Álgebra como actividad” se define como una serie de actividades didácticas que muestran formas de construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación en estudiantes de educación secundaria. Este enfoque para el trabajo del álgebra fue desarrollado por Kieran en 1996 y parte de unas “breves referencias a los principales problemas de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria, centrándose, especialmente, en las diferentes fuentes de significado para el lenguaje algebraico en esta etapa educativa” (Socas, 2011, p. 8)

Se destaca la importancia de estas actividades ya que se dirigen a la enseñanza del álgebra en estudiantes de nivel secundario que no han logrado los desempeños esperados en niveles educativos anteriores.

**Errores algebraicos.** Los errores algebraicos son definidos, según Palarea (1998), como “intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 80). Estos aparecen en el trabajo de los estudiantes, cuando se propone desarrollar contenidos nuevos que provoca una revisión de las estructuras cognitivas ya establecidas con anterioridad. La existencia de errores algebraicos en los estudiantes supone que estos no han llegado a asimilar de manera correcta los contenidos matemáticos en el nivel de enseñanza anterior, esto conlleva a que no puedan realizar una relación y transferencia de contenidos correcta a otro ámbito de enseñanza como el álgebra.

#### 3.4.2 Definición operacional

La definición operacional de las variables antes mencionadas se manifiesta en la siguiente tabla.

Tabla 4

Definición operacional de variables

Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores
		Generational	Actividades relacionadas a variables, expresiones y ecuaciones, el signo menos y los números negativos, el sentido de estructura (inicio); múltiples representaciones y conexiones; y problemas verbales que implican múltiples representaciones o planteamiento y resolución de ecuaciones.
<b>Actividades relacionadas al enfoque de "Álgebra como actividad"</b>	El modelo de "Álgebra como actividad" es definida por Kieran (1996) como una serie de actividades didácticas que muestran formas de construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación en estudiantes de educación secundaria.	Transformational	Actividades para el reconocimiento de equivalencias y cierto control teórico del proceso y analiza las expresiones, las ecuaciones y la resolución de ecuaciones y el uso de materiales manipulativos.
		Global/Meta-Level	Actividades para el uso del Álgebra como herramienta, y analiza la generalización, las pruebas y la demostración, y la modelización, en este

		caso analiza el impacto de la tecnología.
	Los errores algebraicos son definidos, según Palarea (1998), como “intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 80).	Errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética
		Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.
		Errores relativos al uso de recíprocos.
		Errores de cancelación.
<b>Errores algebraicos</b>		Errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.
		Naturaleza estrictamente algebraica y no poseen una referencia directa en la aritmética.

Nota. Elaboración propia.

### 3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

El instrumento inicial y final de esta investigación ha sido la evaluación diagnóstica y de salida respectivamente que permitieron identificar los errores algebraicos que cometen los estudiantes de cuarto grado de nivel secundario de una institución educativa rural de la región Piura. Estas se adaptaron del anexo 5 y 6 de la investigación doctoral de Palarea denominada, “La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años”.

Por otro lado, la técnica de la observación se aplicó durante todo el proceso previo a la aplicación de la evaluación diagnóstica a través de un diario de campo con el objetivo de monitorear el avance del tratamiento experimental e identificar las preferencias de actividades que tienen los estudiantes.

El proceso de análisis de la investigación se realizó a través de la interpretación de la evaluación diagnóstica y de salida en los diferentes niveles del proceso de investigación. Esto servirá como base para diseñar las actividades didácticas relacionadas al enfoque de “Álgebra como actividad”. Además de identificar la eficacia que tuvieron estas actividades en los estudiantes.

#### 3.5.1 Instrumentos de investigación

Considerando los objetivos de la investigación se elaboró una evaluación diagnóstica para poder identificar los errores algebraicos que cometen los estudiantes de cuarto grado de secundaria de una institución educativa rural de la región Piura. Esta evaluación se elaboró considerando la tipología de errores algebraicos establecida por Palarea y el anexo 5 y 6 de su investigación “La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por

alumnos de 12 a 14 años”, la que tuvo como objetivo principal determinar las dificultades, obstáculos y errores que presentaban los estudiantes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O) para mejorar la comprensión del pensamiento algebraico.

A partir de los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica se concretó el objetivo principal de esta investigación el cual fue determinar la evolución de errores algebraicos mediante la aplicación actividades didácticas basadas en el enfoque de “álgebra como actividad”. Es así como se diseñaron actividades las cuales fueron organizadas en sesiones de aprendizaje para una mejor comprensión y contextualización, estas se planificaron teniendo en cuenta los errores algebraicos de mayor incidencia.

**Prueba de entrada o diagnóstica.** El primer instrumento que se aplicó fue la prueba de entrada o diagnóstica, esta permitió conocer los errores algebraicos que cometen con mayor incidencia los estudiantes ya que a partir de ellos se diseñaron las actividades didácticas. Este examen diagnóstico se adaptó de los anexos 5 y 6 de la tesis doctoral de Palarea (1998), estos se consideraron por su relación con la tipología de errores algebraicos que se seleccionaron en esta investigación.

**Prueba de salida.** El segundo instrumento que se aplicó fue la prueba de salida, esta permitió conocer la evolución que han tenido los estudiantes a partir de la aplicación de las actividades didácticas para reducir errores algebraicos. Este examen de salida se adaptó de los anexos 5 y 6 de la tesis doctoral de Palarea (1998), estos se consideraron por su relación con la tipología de errores algebraicos que se seleccionaron en esta investigación. Se aclara que la prueba de salida no fue la misma que la evaluación diagnóstica ya que se alteraron los datos de los ejercicios y problemas planteados.

### **3.6 Actividades didácticas planteadas en sesiones de aprendizaje**

Los errores algebraicos planteados por la tipología de Palarea (1998) presentan una gran incidencia porcentual en los estudiantes, es decir estos cometen errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética y en las características propias del lenguaje algebraico. Ante ello se plantea un conjunto de actividades fundamentadas en el enfoque de “álgebra como actividad” propuesto por Kieran (1996) con el objetivo de determinar la evolución de estos errores algebraicos.

Los errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética, específicamente aquellos causados por un mal uso de la propiedad distributiva, recíprocos y cancelación, fueron abordados a través de actividades transformational y global meta-level. El primer tipo de actividades, según Kieran (1998), son aquellas basadas en cambiar la forma de una expresión o ecuación para mantener la equivalencia de sus términos, es decir están basadas en reglas de transformación algebraica. En este tipo de actividades el estudiante debe realizar operaciones numéricas y de variables, ejemplo de estas

son recopilar, factorizar, simplificar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones. De esta manera, se podrán emplear los conceptos como la propiedad distributiva, recíprocos y cancelación para la resolución de este tipo de actividades, con ello el estudiante podrá afianzar sus conocimientos aritméticos y relacionarlos con el álgebra. Se recalca que durante las sesiones de aprendizaje el docente brinda un soporte conceptual de estos temas con el objetivo de que el estudiante afiance estos conocimientos y los pueda extrapolar de manera correcta al álgebra.

Asimismo, Kieran (1998) plantea que las actividades global meta-level son aquellas donde se utiliza el álgebra como una herramienta para la solución de problemas pero que no son parte del álgebra fundamental, dentro de estas actividades se encuentran las siguientes: resolución de problemas, generalizar, analizar relaciones, justificar, probar y predecir. A través del uso de este tipo de actividades se podrá introducir al estudiante a desarrollar un pensamiento algebraico que no esté ligado concretamente a las matemáticas, sino que se relacione con su realidad concreta.

De esta manera, los errores algebraicos que tienen su origen en las características propias del lenguaje algebraico son abordados a través de actividades generational y global meta-level. Según Kieran (1998) las actividades generational son aquellas que se relacionan con la forma de las expresiones algebraicas y ecuaciones que son parte del álgebra. Además, posee dos indicadores el primero es la acción de formar enunciados y ecuaciones que contengan una cantidad desconocida, el estudiante emplea símbolos que son representaciones para la resolución de situaciones cuantitativas. El segundo indicador se refiere a la acción de generalizar patrones geométricos y secuencias o relaciones numéricas. Este tipo de actividades permitirán desarrollar un pensamiento algebraico que otorgará al estudiante la capacidad de generalizar situaciones y comprender elementos como variables y el signo igual. Bednarz, Kieran y Lee (1996) indican que la generalización se puede desarrollar a través de actividades como la generalización de patrones numéricos y geométricos, de modelización de situaciones matemáticas y concretas, y el estudio de situaciones funcionales y la solución de problemas. Es decir, el estudiante no se limitará a un aprendizaje conductista de los conceptos algebraicos, sino que extrapolará esta capacidad de generalizar a situaciones de su vida cotidiana.

El logro de la generalización se reforzará con actividades global meta-level las que permitirán al estudiante resolver problemas, generalizar, analizar relaciones, justificar, probar y predecir. Estas actividades, según Kieran (1998), sugieren un pensamiento más general del estudiante, además forman parte esencial de las dos primeras actividades ya que posibilitan la construcción del significado algebraico de manera más independiente y autónoma.

Se indica que la primera y sexta sesión de aprendizaje abordan la aplicación de la evaluación diagnóstica y de salida respectivamente. La primera para reconocer la incidencia que tienen los errores

algebraicos en los estudiantes y la segunda para identificar la eficacia de la aplicación de las actividades didácticas en la reducción de los errores algebraicos hallados en los estudiantes.

De esta manera, en la segunda sesión de aprendizaje se abordan errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico específicamente aquellos referidos a los conceptos de variable, igualdad y resolución de ecuaciones, para ello se plantea las actividades generational 1 y 2 planteadas en la segunda sesión de aprendizaje, la primera consiste en realizar secuencias aritméticas y la segunda secuencia empleando patrones geométricos. A partir de estas actividades se buscó que el estudiante desarrolle el concepto de variable, es decir generalice una variable como un objeto tangible o intangible que cambia sus valores de acuerdo con diferentes situaciones. Siendo el proceso de generalizar fundamental en las matemáticas, como lo señala Mason (citado por Villa, 2006) este proceso es la vida de las matemáticas y el álgebra es aquel lenguaje con el que se puede expresar dicha generalidad. También, se resalta la introducción de secuencias geométricas ya que en estas se logran identificar “variables visuales que en los aritméticos por misma naturaleza no existen” (Villa, 2006, p. 146). Este concepto se refuerza con las actividades generational 3 y 4 en las que los estudiantes deben generalizar situaciones de la vida cotidiana empleando variables algebraicas como “x”.

Posterior a ello, se plantea la actividad generational 5 que consiste en generalizar una situación de la vida cotidiana, por ejemplo “Mi edad es el triple de la edad de mi hermano, ¿Cómo representaría mi edad?”, de esta manera se introduce el concepto de coeficiente algebraico ya que los estudiantes deben concebir la edad como una variable y el triple como un coeficiente. Rojas et al. (2013) indican que estos procesos de generalización son simbólicos ya que emplean símbolos para representar situaciones y destacan la importancia de trabajarlas con los estudiantes en el aula, ya que las diferentes variaciones de las situaciones planteadas permiten el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por último, se plantean las actividades generational 6 y 7 basadas en el modelo de la balanza para introducir el concepto de igualdad y ecuación. Rojano (2010) indica que este modelo permite la enseñanza sobre la resolución de ecuaciones de primer grado ya que recurre a la metáfora de la preservación del equilibrio para enseñar el concepto de igualdad algebraica. También señala que este modelo permite realizar procesos de lectura y transformación, es decir permite modelar y realizar acciones para resolver ecuaciones de primer grado. Para finalizar la sesión de aprendizaje se plantean las actividades generational 8 y 9 como estrategia para afianzar los aprendizajes y se plantea una actividad global meta-level 1 donde los estudiantes relacionan los aprendizajes adquiridos con situaciones de su vida cotidiana es decir emplean los conceptos algebraicos para resolver problemas más complejos.

En la tercera sesión de aprendizaje se abordan errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética específicamente aquellos errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva. Primero, se propone la actividad global meta-level 2 que consiste en la demostración de la propiedad distributiva empleando conceptos geométricos en este caso el de área del rectángulo. Luego, el docente halla el área de un rectángulo utilizando variables a las medidas del largo y ancho, luego fragmenta el primer rectángulo y genera dos rectángulos pequeños, de esta manera el largo del original se divide en dos partes a las que se les asigna nuevas variables cuya suma dan el valor del largo original, el docente halla las áreas de estos dos rectángulos y los suma demostrando que coincide con el área del rectángulo original. De esta manera, se logra demostrar el concepto de propiedad distributiva y el estudiante logra asimilar como se realizan las transformaciones algebraicas. Para afianzar este aprendizaje el docente plantea la actividad transformational 1 que consiste en ejercicios propuestos para aplicar la propiedad distributiva como  $4(x + y)$ ,  $3(x - 3)$  y  $2x(x + 2)$ .

Posterior a ello, se plantea la actividad transformational 2 y generational 10 esta consiste en retomar la situación problemática planteada en el inicio de la sesión de aprendizaje y resolverla empleando los aprendizajes logrados sobre propiedad distributiva y su utilidad en el álgebra. Esta actividad es generational ya que el estudiante tiene que generalizar situaciones relacionadas a su vida cotidiana como el cálculo de nutrientes consumidos y es transformational debido a que se tienen que realizar transformaciones algebraicas de la generalización a la que llega el estudiante.

Al finalizar la tercera sesión de aprendizaje se propone una ficha de actividades para que los estudiantes demuestren los aprendizajes logrados; la primera es la actividad transformational 3 que consiste en demostrar el binomio al cuadrado empleando la propiedad distributiva esta actividad se caracteriza por realizar cambios a los términos algebraicos a través de multiplicaciones y sumas; la segunda y tercera son las actividades transformational 4 y 5 respectivamente estas consisten en realizar transformaciones algebraicas similares a la actividad transformational 1. Por último, la cuarta es la actividad global meta-level 3 que consiste en emplear la propiedad distributiva para resolver una situación problemática de la vida real que involucra conceptos algebraicos.

En la cuarta sesión de aprendizaje se abordan los errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética específicamente aquellos relacionados al uso incorrecto de recíprocos en ecuaciones lineales, para ello se plantea la actividad global meta-level 4 donde los estudiantes comprenden el concepto de número recíproco empleando el aplicativo denominado "Recíproco de un número" a través de este los estudiantes comprenden el concepto de manera práctica. Luego, se plantea la actividad generational 11 que consiste en la resolución de ecuaciones lineales empleando recíprocos, esta actividad permitirá que los estudiantes comprueben el concepto de igualdad en las ecuaciones a

través de la eliminación de los números y coeficientes empleando sus recíprocos. Para finalizar la sesión de aprendizaje se propone la actividad generational 12 esta se divide en dos partes, la primera plantea preguntas teóricas sobre la definición de recíprocos y su utilidad en el álgebra, y la segunda propone ecuaciones lineales que deben ser resueltas empleando recíprocos. Estas actividades se proponen con el objetivo de que el estudiante demuestre el logro de aprendizaje alcanzado con respecto al uso de recíprocos en la resolución de ecuaciones lineales.

En la quinta sesión de aprendizaje se abordan los errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética exactamente aquellos referidos al uso incorrecto de la ley de cancelación en problemas de álgebra. Para ello se propone la actividad global meta-level 5, esta consiste en que el estudiante emplee el método de la balanza a través del simulador *Equality Explorer* para mantener una igualdad a través de la eliminación de elementos de ambos platillos de la balanza, a través de este simulador el estudiante asocia una situación de la vida cotidiana con el álgebra y comprende la ley de cancelación. Luego se plantea la actividad transformational 6 esta consiste en una ecuación de primer grado  $2x + 5 = 14 + 5$ , aquí el estudiante debe emplear la ley de la cancelación para eliminar cantidades y poder llegar a una igualdad menos compleja.

Posteriormente, se propone la actividad transformational 7 en la que el estudiante debe crear dos ecuaciones de primer grado de manera algebraica y emplear el simulador *Equality Explorer* para resolverlas aplicando la ley de cancelación eliminando elementos de ambos extremos de la igualdad. A través de esta actividad los estudiantes deben representar algebraicamente situaciones de la vida cotidiana y comprobar el logro de aprendizaje en el concepto de ley de cancelación. Para finalizar, se plantean las actividades transformational 8 y 9 que consisten en resolver ecuaciones de primer grado empleando la ley de cancelación con ello se pretende que el estudiante afiance los aprendizajes relacionados a este concepto.

A continuación, se presenta un resumen de las actividades desarrolladas en cada una de las sesiones de aprendizaje:

**Tabla 5**

*Resumen de actividades planteadas en las sesiones de aprendizaje.*

Sesión de aprendizaje	Actividades planteadas en la sesión de aprendizaje
Sesión de aprendizaje 01: "Identificamos nuestros errores para el aprendizaje del álgebra"	- Aplicación de evaluación diagnóstica para identificar errores algebraicos.

Sesión de aprendizaje 02: “Aprendemos sobre variable, igualdad y ecuación para resolver problemas de nuestra vida diaria”	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Actividad generational 1.</li> <li>- Actividad generational 2.</li> <li>- Actividad generational 3.</li> <li>- Actividad generational 4.</li> <li>- Actividad generational 5.</li> <li>- Actividad generational 6.</li> <li>- Actividad generational 7.</li> <li>- Actividad generational 8.</li> <li>- Actividad generational 9.</li> <li>- Actividad global meta-level 1.</li> </ul>
Sesión de aprendizaje 03: “Empleamos la propiedad distributiva para identificar la cantidad de nutrientes que consume nuestro cuerpo”	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Actividad global meta-level 2.</li> <li>- Actividad transformational 1.</li> <li>- Actividad transformational 2.</li> <li>- Actividad generational 10.</li> <li>- Actividad transformational 3.</li> <li>- Actividad transformational 4.</li> <li>- Actividad transformational 5.</li> <li>- Actividad global meta-level 3.</li> </ul>
Sesión de aprendizaje 04: “Empleamos estrategias didácticas para el correcto uso de recíprocos en ecuaciones lineales”	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Actividad global meta-level 4.</li> <li>- Actividad generational 11.</li> <li>- Actividad generational 12.</li> </ul>
Sesión de aprendizaje 05: “Aprendemos el uso correcto de la ley de cancelación en problemas de álgebra”	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Actividad global meta-level 5.</li> <li>- Actividad transformational 6.</li> <li>- Actividad transformational 7.</li> <li>- Actividad transformational 8.</li> <li>- Actividad transformational 9.</li> </ul>
Sesión de aprendizaje 06: “Reflexionamos sobre los aprendizajes logrados y la importancia del álgebra en nuestra formación”	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Aplicación de evaluación de salida para identificar errores algebraicos.</li> </ul>

Nota. Elaboración propia.

### 3.7 Procedimiento de análisis de datos

Para lograr los objetivos planteados en esta investigación, en el análisis de los datos, se ha planteado la secuencia que se muestra en la tabla 6:

Tabla 6

*Pasos para el procesamiento y análisis de los resultados obtenidos*

<b>Pasos para el procesamiento y análisis de la información</b>	1. Presentación de los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica.	Los resultados obtenidos por cada estudiante son codificados en tablas, donde se visualizan los aciertos y errores algebraicos cometidos. <hr/> Los datos obtenidos se representan en cantidades porcentuales y gráficos estadísticos para identificar en que errores algebraicos inciden los estudiantes.
	2. Análisis de los resultados obtenidos.	El investigador analiza los resultados obtenidos teniendo en cuenta la clasificación de errores algebraicos establecido por Mercedes Palarea. En este análisis se muestran imágenes de los errores que cometen los estudiantes en referencia a la tipología ya mencionada. <hr/> Se indica los errores algebraicos que han tenido mayor incidencia en la evaluación diagnóstica ya que estos serán trabajados a través de actividades didácticas relacionadas al enfoque de “álgebra como actividad” establecido por Kieran.
	3. Elaboración y aplicación de las actividades didácticas.	Se elaboran las actividades didácticas relacionadas al enfoque de “álgebra como actividad” establecido por Kieran, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica. Posterior a las actividades didácticas, se aplica una evaluación de salida.
	4. Presentación de los resultados obtenidos en la	Los resultados obtenidos en la evaluación de salida son codificados en tablas, donde se visualizan los aciertos y errores.

---

evaluación de salida.

---

5. Análisis de los resultados obtenidos. El investigador analiza los resultados obtenidos, para ello realiza una comparación entre los datos de la evaluación diagnóstica y los de salida. Se reflexiona sobre la eficacia de las actividades didácticas relacionadas al enfoque de “álgebra como actividad” en la reducción de errores algebraicos en los estudiantes.
- 

Nota. Elaboración propia.

Es así como los resultados son expuestos en el capítulo IV de la investigación a través de cuadros, tablas y diagramas.



## Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados

En este capítulo se aborda el análisis y discusión de los resultados obtenidos en la investigación, el primer apartado del análisis considera los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica, identificando los errores algebraicos que cometen los estudiantes de cuarto grado de nivel secundario de una institución educativa rural de la región Piura. Los resultados se presentan con muestras de los errores cometidos por los estudiantes, tablas y gráficos estadísticos con datos porcentuales.

Luego considera la interpretación de los datos obtenidos con respecto a la tipología de errores algebraicos planteada por Mercedes Palarea. Se mencionan los errores con mayor incidencia y se discute sobre las posibles causas de estos teniendo en cuenta el contexto de la educación posterior a la pandemia de Coronavirus COVID 19.

Por último, se muestra el análisis de los datos obtenidos en la evaluación de salida, para ello se realiza una comparación de estos con los de la evaluación diagnóstica. De esta manera se analiza cómo las actividades didácticas relacionadas al enfoque de “álgebra como actividad” planteadas influyen en la reducción de los errores algebraicos que tenían los estudiantes de cuarto grado de una institución educativa rural de la región Piura.

### 4.1 Análisis de resultados obtenidos de la evaluación diagnóstica

Se presentan tablas donde se muestran los errores algebraicos encontrados en la resolución de los estudiantes para cada pregunta planteada en la evaluación diagnóstica, complementariamente se muestra el porcentaje de incidencia en los estudiantes y se realiza un análisis.

#### Pregunta N°01

¿Cómo expresarías con signos, letras y números?

- Un número cualquiera.
- La suma de dos números distintos.
- La mitad de un número.
- El doble de un número menos 5 es igual a 17.
- La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 24.

**Tabla 7**

*Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 01 y su incidencia porcentual*

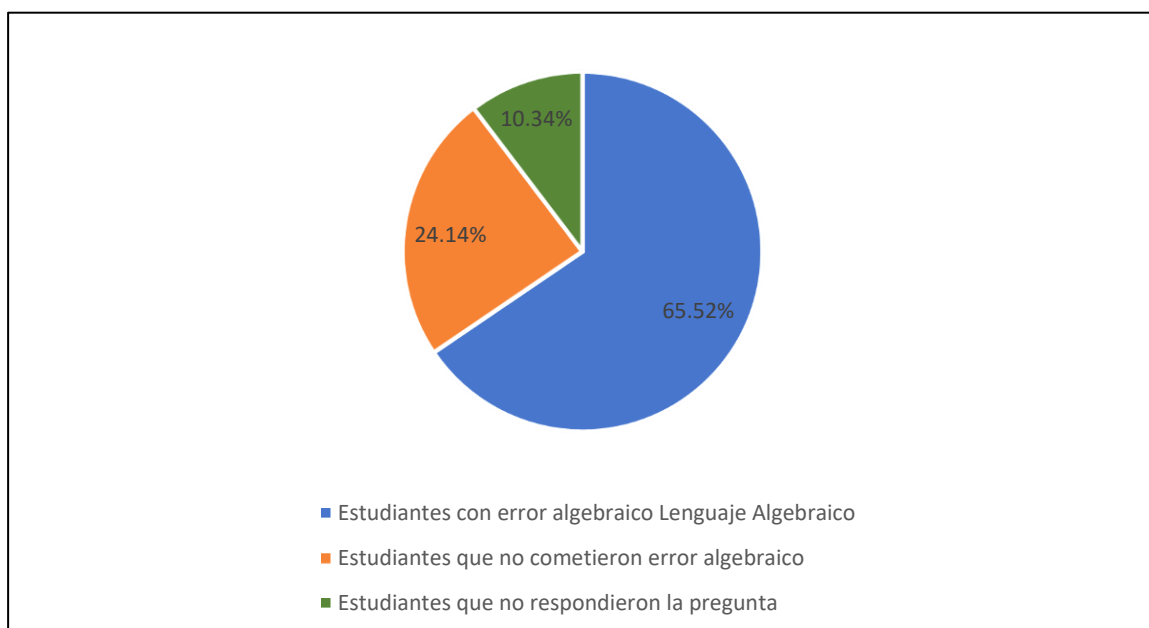
Pregunta N°01		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico, específicamente referidos a la conversión de registros.	19	65.52 %
Estudiantes que no respondieron la pregunta 01	7	24.14 %
Estudiantes que respondieron correctamente la pregunta 01	3	10.34 %
Número total de estudiantes	29	100 %

Nota. Elaboración propia.

Gráficamente, se manifiestan los resultados porcentualmente en la siguiente figura:

**Figura 2**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 1*



Nota. Elaboración propia.

En la pregunta 1 se observa que el 65.52% de los estudiantes presentan errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico, específicamente referidos a la conversión de registros. Además, se identifica que un 24.14% no respondió la pregunta lo que evidencia un desconocimiento de los contenidos algebraicos elementales referidos a la representación y abstracción de la aritmética en términos algebraicos.

Este tipo de errores algebraicos, según Rodríguez-Domingo et al. (2015) derivan en cuatro tipos de errores: errores en los que se generaliza un elemento o parte del enunciado que es un caso concreto, errores debidos a la particularización de números o relaciones concretas de una expresión general, error de letra y error de complicación estructural.

Según Ruano et al. (2008), y Rodríguez-Domingo et al. (2015) las posibles causas de este tipo de errores son: emplear un procedimiento completamente sintáctico, elaborar un esquema mental basado en relaciones de comparación entre las variables en vez de las relaciones de igualdad, considerar el signo igual como indicador de una asociación, interpretar los numerales como adjetivos, no entender el enunciado verbal debido a la compleja sintaxis y tener un conocimiento limitado del concepto de variable y de las características sintácticas de los enunciados simbólicos.

Dentro de los estudiantes que cometieron el error se identifica que la mayoría se resistió a emplear lenguaje algebraico y expresaban las respuestas empleando símbolos aritméticos. En este sentido, Kieran (2007) destaca que los estudiantes muestran resistencia al uso del simbolismo algebraico, ante ello emplean estrategias y representaciones de tipo aritmético. Esto acrecentado por una falta de conocimiento provocado por la pandemia de coronavirus COVID19 que limitó el acceso a la educación de los estudiantes que provienen de zonas rurales del país como los pertenecientes a la muestra de estudio.

### **Pregunta N°02**

Resuelve

- $6(b + 4)$
- $(a + 2)(b + a)$

**Tabla 8**

*Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 02 y su incidencia porcentual*

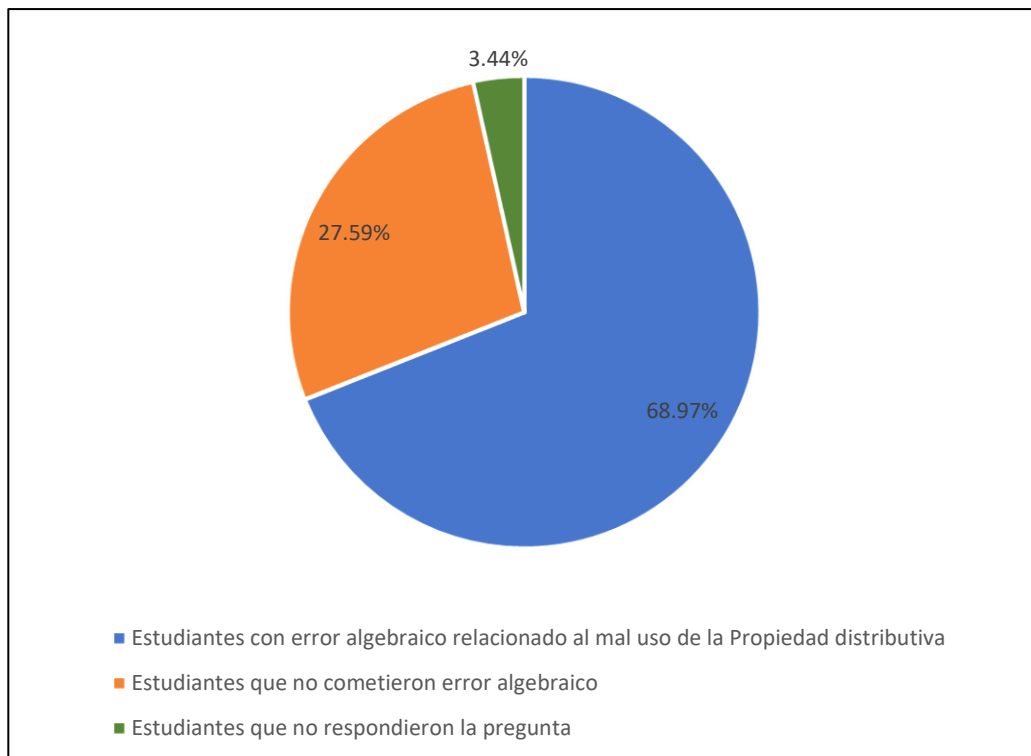
Pregunta N°02		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados al mal uso de la propiedad distributiva.	20	68.97 %
Estudiantes que no respondieron la pregunta 02	8	27.59 %
Estudiantes que respondieron correctamente la pregunta 02	1	3.44 %
Número total de estudiantes	29	100

Nota. Elaboración propia.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 3**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 2*



Nota. Elaboración propia.

Se observa que un 68.97% de los estudiantes presentan errores algebraicos relacionados al mal uso de la propiedad distributiva de acuerdo con la clasificación de Palarea (1998). En la figura 4 se identifica que los estudiantes no tienen conocimiento de cómo emplear la propiedad distributiva ya que realizan procedimientos erróneos e incomprensibles, esto reforzado por el 27.59% de estudiantes que no respondieron la pregunta. De esta manera, se afirma que la mayoría de los estudiantes no dominan este aspecto específico del álgebra.

#### Figura 4

*Respuesta de E4 a la pregunta 2*

a)  $6 \cdot (b + 4)$        $6 \cdot (4b)$   
 $24b$

b)  $(a + 2)(b + a)$   
 $(2a)(ba)$   
 $2b$

Nota. Tomado de evaluación diagnóstica de E4.

Se observa que los estudiantes no tienen una noción clara del procedimiento o realizan generalizaciones de reglas que solo se aplican en casos particulares. En este caso, el estudiante se enfoca en resolver los paréntesis cometiendo el error de sumar variables con números y opera de manera intuitiva una multiplicación. Con ello se afirma que los estudiantes no manejan la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adicción. Respecto a ello, Hernández et al. (1998) recalca que estos errores se originan por un mal uso de fórmulas o reglas de procedimiento.

#### Pregunta N°03

**Resuelve**

- $2x + \frac{1}{2x}$
- $10x + \frac{1}{10x}$

**Tabla 9**

*Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 03 y su incidencia porcentual*

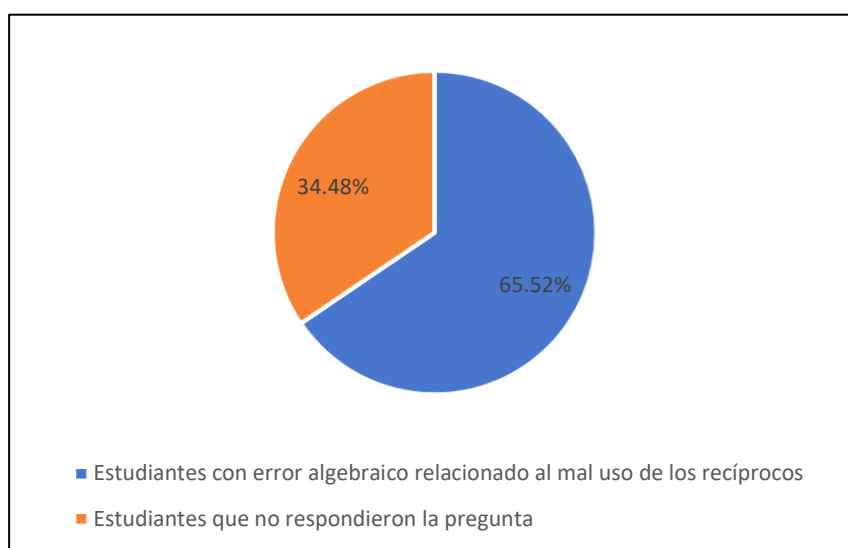
Pregunta N°03		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados al mal uso de recíprocos.	19	65.52 %
Estudiantes que no respondieron la pregunta 03	10	34.48 %
Número total de estudiantes	29	100

Nota. Elaboración propia.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 5**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 3*



Nota. Elaboración propia.

En la pregunta 3 se observa que un 65.52% de los estudiantes presenta errores algebraicos relacionados al mal uso de los recíprocos, esto acrecentado con un 34.48% que no respondió la pregunta. Palarea (1998) señala que este tipo de errores son causados por un uso incorrecto de fórmulas o reglas de procedimiento, en este sentido los estudiantes presentan déficit de conocimientos aritméticos que impide un correcto uso de estos en problemas que involucran aspectos algebraicos como es la adición de fracciones que incluyen variables. Hernández et al. (1998) fundamenta que esto es ocasionado por un deficiente dominio de habilidades, hechos y conceptos aritméticos que no han sido corregidos previamente.

En la figura 6 se observa que los estudiantes resuelven el ejercicio de manera intuitiva empleando la teoría de adición de fracciones sin éxito, ya que no consideran aspectos como el cálculo del mínimo común múltiplo y no colocan el denominador en el resultado. Con ello, se afirma que los estudiantes presentan desconocimiento de la teoría de recíprocos ya que no los emplean para facilitar la adición de las fracciones con variables. Ante esto, se propone que los estudiantes empleen recíprocos e igualen las fracciones, encontrando un denominador común, y después, expresen la adición de fracciones en una sola fracción.

**Figura 6**

*Respuesta de E11 a la pregunta 3*

a)  $\frac{2x}{1} + \frac{1}{2x} = 4x + 1$

b)  $\frac{10x}{1} + \frac{1}{10x} = 20x + 1$

Nota. Tomado de evaluación diagnóstica de E11.

**Pregunta N°04**

Resuelve

- $10x + 14x - 3y + 8 = (4)(2) - 3y + 24x$
- $x + 2(x - 6) = 2x - 12 + 4$

**Tabla 10**

*Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 04 y su incidencia porcentual*

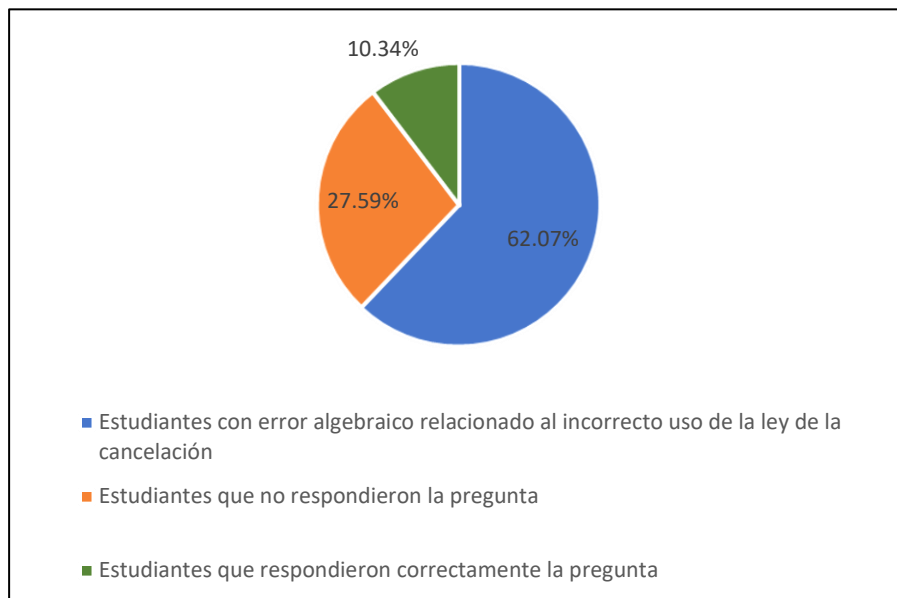
Pregunta N°04		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados al incorrecto uso de la ley de la cancelación.	18	62.07 %
Estudiantes que no respondieron la pregunta 04	8	27.59 %
Estudiantes que respondieron correctamente la pregunta 04	3	10.34 %
Número total de estudiantes	29	100

Nota. Elaboración propia.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 7**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 4*



Nota. Elaboración propia.

Con respecto a la pregunta 4 se observa que un 62.07% de los estudiantes presentan errores algebraicos relacionados al incorrecto uso de la cancelación, que Palarea (1998) los cataloga como errores que tiene su origen en la aritmética, los estudiantes tienden a generalizar procedimientos que se verifican en ocasiones ya establecidas, es decir los estudiantes no llegan a generalizar y manipular variables empleando los conocimientos alcanzados en la aritmética. Ruano et al. (2008) resaltan que para entender la generalización de las relaciones entre las variables y procesos se requiere que éstos hayan sido asimilados previamente en un contexto aritmético.

El establecer una relación entre letras y números es una modelización en la que el estudiante debe emplear la sustitución formal y la generalización de contenidos aritméticos que debieron haberse visto y asimilado con anterioridad. En este sentido, en las figuras 8 y 9 se observa que los estudiantes no comprenden la diferencia entre variables y números por lo que realizan operaciones entre estos, además no emplean la cancelación como un método facilitador para la eliminación de elementos con igual valor y signo en cada uno de los miembros de la ecuación.

**Figura 8**

Respuesta de E19 a la pregunta 4

Resuelve:

$$a) 10x + 14x - 3y + 8 = (4 \times 2) - 3y + 24x$$

$$24x - 3y + 8 = 8 - 3y + 24x$$

$$24x - 3y + 8 - 8 = 3y + 24$$

$$0 = 3y + 8$$

Nota. Tomado de evaluación diagnóstica de E19.

**Figura 9**

Respuesta de E23 a la pregunta 4

a)  $10x + 14x - 3y + 8 = (4 \times 2) - 3y + 24x$   
 $10x + 14 - 24x + 8 = 8 - 3y + 3y$   
 $24x - 24x + 8 = 5y + 3y$   
 $0x + 8 = 2y$   
 $8x = 2y$

b)  $x + 2(x - 6) = 2x - 12 + 4$   
 $2x(5x) = 10x + 4$   
 $10x = 14x$   
 $x = \frac{14}{10}$   
 $x = 1,4$

Nota. Tomado de evaluación diagnóstica de E23.

**Pregunta N°05**

En cada caso, halla el valor de la "x" y explica como lo has resuelto

- $x - 4 = 12$
- $4x + 16 = 7x + 1$

**Tabla 11**

Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 05 y su incidencia porcentual

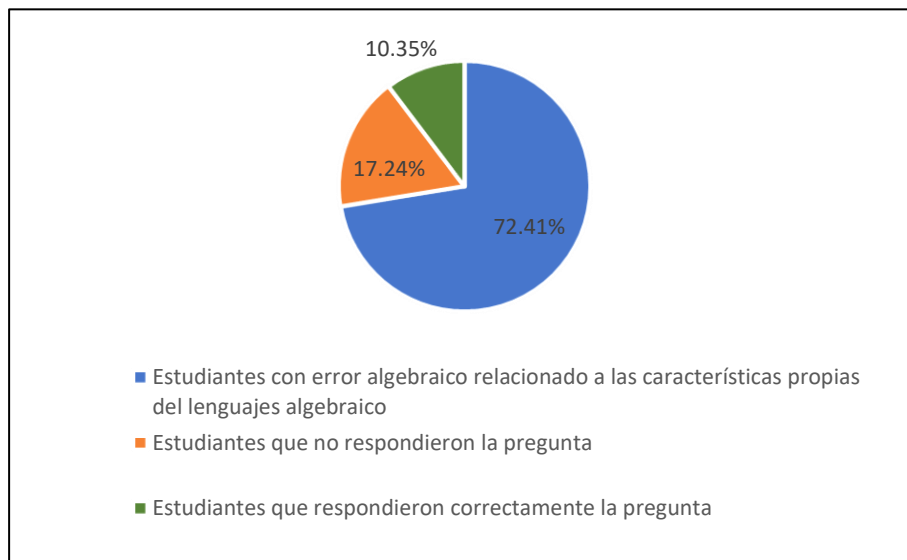
Pregunta N°05		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico.	21	72.41 %
Estudiantes que no respondieron la pregunta 05	5	17.24 %
Estudiantes que respondieron correctamente la pregunta 05	3	10.35 %
Número total de estudiantes	29	100

Nota. Elaboración propia.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 10**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 5*



Nota. Elaboración propia.

En la pregunta 5 se observa que existe un 72.41% de estudiantes que presentan errores relacionados a características propias del lenguaje algebraico, específicamente referidos a la resolución de ecuaciones de primer grado. Palarea (1998) resalta que este tipo de errores se refieren al empleo del signo igual en álgebra, como en ecuaciones y la sustitución formal, es decir una comprensión generalizada de la variable como un término que puede adoptar diferentes valores. Ante ellos los estudiantes manifiestan dificultades en la comprensión del concepto de variable, igualdad y coeficiente de la variable, por lo que realizan procedimientos errados como la suma de variables con términos independientes.

En la figura 11 se observa que los estudiantes emplean procedimientos erróneos como pasar elementos de un miembro a otro sin cambiar el signo lo que le conduce a error. Asimismo, en la figura 12 se evidencia el desconocimiento del concepto de variable ya que el estudiante resuelve la primera ecuación de manera intuitiva al colocar los valores de la resta sin llegar a establecer que el valor de  $x$  es igual de 16. En estos errores es relevante pensar que el logro de conocimientos algebraicos implica, según Castellanos et al. (2009), representar, generalizar, y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas; es decir, a medida que se desarrolla el razonamiento algebraico el estudiante irá progresando en el uso de la generalización y uso de simbolismo.

**Figura 11**

Respuesta de E15 a la pregunta 5

a)  $x - 4 = 12 = 12 - 4 = x = \boxed{x = 8}$

b)  $4x + 16 = 7x + 1 = 4x + 7x = 16 + 1$   
 $11x = 17$   
 $\boxed{x = 28}$

Nota. Tomado de evaluación diagnóstica de E15.

**Figura 12**

Respuesta de E8 a la pregunta 5

a)  $x - 4 = 12$      $16 - 4 = 12$

b)  $4x + 16 = 7x + 1$   
 $4x + 4 = 16 + 16 = 32 + 49 = 81$

Nota. Tomado de evaluación diagnóstica de E8.

A partir de ello, se afirma que los estudiantes están en proceso de adquirir el conocimiento y razonamiento algebraico necesario para llegar a emplear símbolos y patrones que permitan la resolución correcta de ecuaciones y problemas.

**Pregunta N°06**

Para ir de Cusco a Machu Picchu, se puede tomar el servicio de tren hasta Aguas Calientes. El costo por este servicio se muestra a continuación.

Trenes disponibles (domingo, 1 de mayo)

**Tabla 12:**

Datos informativos de la pregunta 06 perteneciente a la evaluación diagnóstica

Tipo de servicio	Descripción	Costo del boleto de tren (soles)
Económico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes	30
Turístico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes, vista panorámica y alimentos incluidos.	200

Nota. Elaboración propia.

Un sábado, un total de 400 personas se trasladaron mediante alguno de estos dos tipos de servicios. Si “x” es la cantidad de personas que tomaron el servicio económico, ¿qué expresión

representaría el dinero recaudado “y” por las personas que tomaron el servicio turístico ese mismo día?

**Tabla 13**

*Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 06 y su incidencia porcentual*

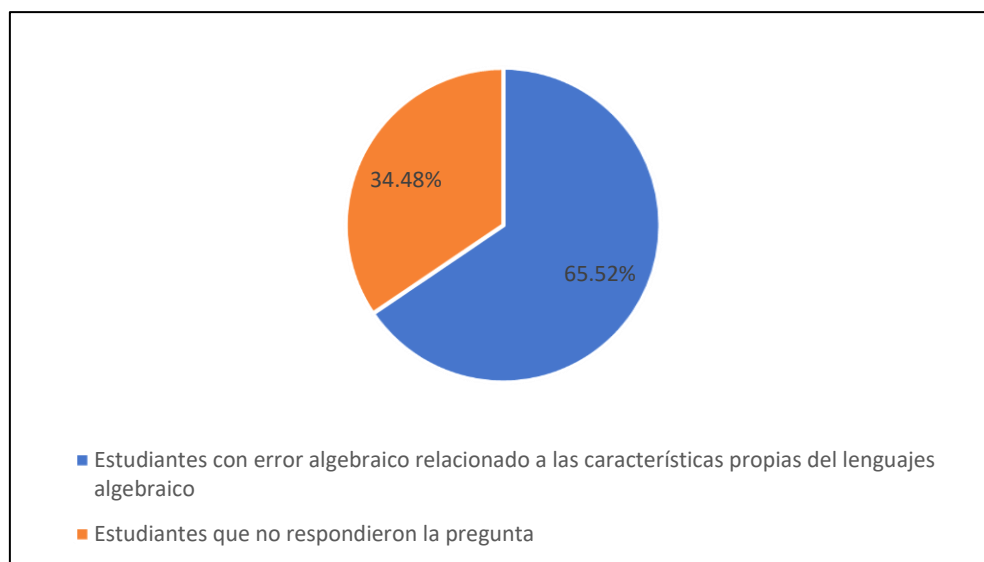
Pregunta N°06		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico.	19	65.52 %
Estudiantes que no respondieron la pregunta 06	10	34.48 %
Número total de estudiantes	29	100 %

Nota. Elaboración propia.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 13**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 6*



Nota. Elaboración propia.

La pregunta 6 propone un problema algebraico complejo relacionado a una situación de la vida cotidiana donde los estudiantes deben obtener un parámetro algebraico que cumpla con las condiciones manifestadas. Esto representó un problema ya que los estudiantes no podían generalizar la situación empleando términos algebraicos como variables. En esta pregunta se

observa que un 65.52% de los estudiantes presenta errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico y 34.48% no respondieron la pregunta debido a un desconocimiento absoluto de los contenidos y procesos de generalización algebraica.

Palarea (1998) plantea que este tipo de errores se debe a las características propias del lenguaje algebraico específicamente a la sustitución formal donde se emplean procesos de generalización y abstracción algebraica, los estudiantes son incapaces de atribuir una letra a un número desconocido o a un objeto matemático. Esto repercute en la asociación de la realidad a expresiones algebraicas ya que no se alcanza un nivel de abstracción que permita la generalización de patrones a partir de condiciones ya establecidas. En la figura 14 se evidencia como el estudiante trata de asociar variables a situaciones planteadas en el problema, pero sin llegar a establecer un patrón algebraico.

#### Figura 14

Respuesta de E17 a la pregunta 6

6. Para ir de Cusco a Machu Picchu, se puede tomar el servicio de tren hasta Aguas Calientes. El costo por este servicio se muestra a continuación.

Trenes disponibles (domingo, 1 de mayo)

Tipo de servicio	Descripción	Costo del boleto de tren (soles)
Económico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes	30
Turístico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes, vista panorámica y alimentos incluidos	200

Un sábado, un total de 400 personas se trasladaron mediante algunos de estos dos tipos de servicios. Si "x" es la cantidad de personas que tomaron el servicio económico, ¿qué expresión representaría el dinero recaudado "y" por las personas que tomaron el servicio turístico ese mismo día?

*x = servicio económico*  
*y = servicio turístico*  
*x = dinero recaudado*

Resuelve la siguiente ecuación, brinda los valores que puede tomar "x" en la ecuación dada.

Nota. Tomado de evaluación diagnóstica de E17.

Se recalca que este tipo de problemas relacionan los conceptos algebraicos con la lógica y situaciones de la vida cotidiana. A partir de ello la persona llega a formular patrones para validar o invalidar conclusiones.

#### Pregunta N°07

Resuelve la siguiente ecuación, brinda los valores que puede tomar "x" en la ecuación dada.

$$(x - 4)^2 = 36$$

**Tabla 14**

*Errores algebraicos encontrados en la resolución de la pregunta 07 y su incidencia porcentual*

Pregunta N°07		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico, específicamente referidos a la resolución de ecuaciones dadas.	22	75.86 %
Estudiantes que no respondieron la pregunta 07	7	24.14 %
Número total de estudiantes	29	100

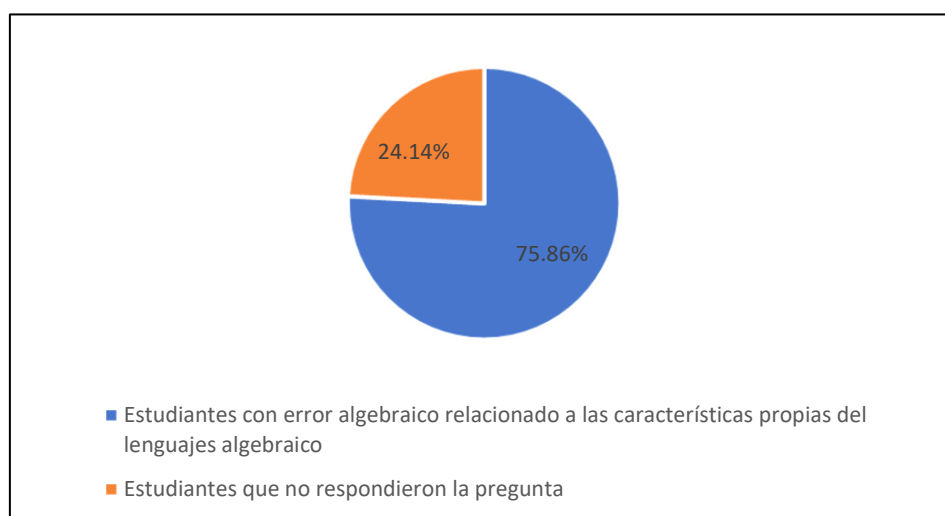
Nota. Elaboración propia.

Como se observa en la tabla un 75.86% de los estudiantes presenta errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico, específicamente referidos a la resolución de ecuaciones. Según Palarea (1998) estos errores se relacionan al desconocimiento del signo igual en álgebra, al plantearse una igualdad los estudiantes no tienen en cuenta los procedimientos referidos a la relación de operaciones en ecuaciones y el concepto de variable.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 15**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 7*



Nota. Elaboración propia.

En las figuras 16 y 17 se observa como los estudiantes tienen desconocimiento del signo igual en álgebra y cometen un error al resolver el cuadrado de un binomio, Kieran (1981) resalta la importancia de este concepto ya que una correcta interpretación operacional permite a estudiantes de educación secundaria atribuirles sentido a las ecuaciones. De esta manera, el signo igual en álgebra debe ser abordado como una relación de equivalencia entre dos extremos que deben valer lo mismo. Según Molina (2006) este sentido es el único que hace referencia a una relación que va acorde con las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva.

**Figura 16**

*Respuesta de E23 a la pregunta 7*

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 &= 36 \\ 2x - 16 &= 36 \\ 2x &= 36 - 16 \\ 2x &= 20 \\ x &= 20 \div 2 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Nota. Tomado de evaluación diagnóstica de E23.

**Figura 17**

*Respuesta de E14 a la pregunta 7*

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 &= 36 \\ (x^2 - 4^2) &= 36 \\ 2x - 16 &= 36 \\ x &= 16 + 2 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Nota. Tomado de evaluación diagnóstica de E14.

Asimismo, en las figuras 16 y 17 se observa que los estudiantes también desconocen el concepto de binomio al cuadrado, esto repercute en la solución de la ecuación ya que realizan procedimientos incorrectos que invalidan el valor de la variable encontrado. Además, no comprenden que la ecuación planteada es de segundo grado por lo que la variable debe adoptar dos valores (positivo y negativo), este error se debe a conceptos no alcanzados en niveles educativos anteriores.

Por último, se muestra la siguiente tabla donde se manifiesta el porcentaje de incidencia de errores algebraicos que presentan los estudiantes, según Palarea en cada una de las preguntas:

**Tabla 15**

*Incidencia de errores según la tipología de Mercedes Palarea (1998)*

N° de Pregunta	Tipología de errores según Mercedes Palarea (1998)				Porcentaje de incidencia de errores	
	Error algebraico que tiene su origen en la aritmética		Error algebraico debido a características propias del lenguaje algebraico			
	Propiedad distributiva	Recíprocos	Cancelación	Conversión de registros		
1				X	65.52%	
2	X				68.97%	
3		X			65.52%	
4			X		62.07%	
5					X	72.41%
6				X	X	65.52%
7					X	75.86%

Nota. Elaboración propia.

A partir de los resultados obtenidos en la evaluación diagnóstica (ver tabla 14) se presenta la discusión de estos según la clasificación de errores algebraicos propuesta por Mercedes Palarea y también cómo estos deben ser abordados de acuerdo con el enfoque de “álgebra como actividad” propuesto por Kieran, se indican algunas orientaciones para tener en cuenta en la planificación y elaboración de actividades didácticas.

#### 4.2 Análisis de resultados de la evaluación diagnóstica

En la tabla 14 se observa que los errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética y los errores en álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico, según la clasificación propuesta por Palarea, tienen un grado de incidencia superior al 62% en todos los estudiantes, se evidencia que estos cometen al menos un error de esta tipología. La presencia de estos errores algebraicos imposibilita el logro de aprendizajes en los estudiantes y genera dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Con respecto a los errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética es importante que los estudiantes sean conscientes de su falta de conocimiento en temas relacionados a la aritmética ya que esto se convierte en un obstáculo para el aprendizaje del álgebra. En este sentido, Palarea señala en su clasificación que estos errores son causados principalmente por un mal uso de la propiedad distributiva, recíprocos y la cancelación. Rojas (2010) señala que el estudiante para resolver un problema algebraico debe realizar una transferencia de conceptos, procedimientos e interpretaciones aritméticas, es decir debe ser consciente del carácter cuasi general de estos procesos. Asimismo, Arroyo (2014) destaca la importancia de expresar en términos aritméticos la información contenida en el lenguaje natural de un problema, el estudiante debe poseer habilidades en la modelación de la aritmética con el objetivo de comprender la situación problemática algebraica.

Ruano et al. (2008) señalan que la mente del estudiante no es una hoja en blanco durante la acción de aprender, sino que posee un conocimiento anterior que le parece suficiente y le brinda una estabilidad cognitiva. Los errores surgen cuando el estudiante se enfrenta a conocimientos novedosos que lo obligan a realizar una reestructuración de los conocimientos que posee. Es entonces el cambio de la aritmética al álgebra, lo que provoca el surgimiento de errores ya que los estudiantes deben llegar a la comprensión de la sustitución formal y la generalización, donde debe atribuir letras a números desconocidos. Es importante que el docente plantee nuevos métodos de enseñanza que permitan una transición equilibrada de la aritmética al álgebra.

En la evaluación diagnóstica se identificó que los errores algebraicos debidos al mal uso de la propiedad distributiva presentan una incidencia del 68.97% en los estudiantes, esto causado por la poca comprensión de este concepto aritmético. Ruano et al. (2008) recalcan la importancia de que el concepto aritmético haya sido asimilado de manera correcta para que el estudiante introduzca nuevos conceptos, ya que este trata de emplear los conceptos aprendidos sobre la propiedad distributiva de la multiplicación, pero se enfrenta a nuevos elementos que

son letras, no se asocia el concepto de variables con números desconocidos lo que genera un esquema cognitivo inadecuado ya que no se conoce el concepto de variable algebraica y sus características.

Los errores algebraicos debidos al mal uso de recíprocos presentan una incidencia del 65.52% en los estudiantes, esto causado por un desconocimiento de este concepto aritmético, los estudiantes manifestaron durante sesiones de aprendizaje previas que no habían recibido explicación sobre este término, aunque se observa una aplicación empírica de este concepto, pero sin éxito. Además, es necesario tener en cuenta que los estudiantes desconocen teoría relacionada a adición de fracciones homogéneas y heterogéneas lo que dificulta la resolución del ejercicio planteado. Hernández et al. (1998) señala que el origen de este tipo de errores se encuentra en una relación entre el desarrollo cognitivo de los estudiantes, currículo de las matemáticas y métodos de enseñanza. Es relevante señalar la educación virtual que se desarrolló durante los años 2020 y 2021 ha originado una falta de conocimiento de los estudiantes con respecto a su nivel de enseñanza ya que no existían los recursos tecnológicos para el desarrollo de un proceso de enseñanza y aprendizaje adecuado.

Los errores algebraicos debidos al mal uso de la cancelación presentan una incidencia del 62.07% en los estudiantes, este error es resultado de la falta de comprensión del signo igual ya que los estudiantes desconocen la equivalencia de valores de los miembros de una ecuación. Según Hernández et al. (1998) estos errores son causados por la complejidad del lenguaje algebraico y la de los objetos matemáticos, en este sentido los estudiantes no han desarrollado sistemas de representación para que los estudiantes relacionen la realidad con las matemáticas.

Por otro lado, los errores algebraicos debido a características propias del lenguaje algebraico se refieren a la complejidad que tiene el álgebra al introducir al estudiante a un mundo de generalización y de sustituciones formales, es decir estos se refieren a problemas estrictamente algebraicos. Ruano et al. (2008) afirman que el hecho de otorgar una letra a un número desconocido o a un objeto matemático es una operación de sustitución formal y generalización, es decir los errores de este tipo se originan debido a las transformaciones algebraicas que se provocan de cálculo algebraico que quedan en medio camino entre lo formal y el conocimiento explícito de su significado. Asimismo, Radatz (1979) señala que estos errores se relacionan a las dificultades de lenguaje algebraico que tienen los estudiantes ya que existe una mala interpretación de la semántica de un problema o texto matemático, los estudiantes cometen errores relacionados al lenguaje algebraico ya que se enfrentan a conceptos matemáticos, símbolos y vocabularios nuevos.

Los errores algebraicos debidos a características propias del lenguaje algebraico, específicamente a los originados por la conversión de registros, tienen una incidencia del 65.52% en los estudiantes. Este tipo de errores se presentan según Radatz (1979) por la utilización incorrecta de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al realizar un cambio del lenguaje común al matemático. Es decir, los estudiantes no comprenden desde un pensamiento matemático las situaciones de la vida cotidiana que se les presentan. Con relación a esto, Barría y Chavarría (2010) llegaron a la conclusión de que “los estudiantes no saben expresar la relación que hay entre las variables al momento de presentarles alguna situación problema en el que se requiere que el estudiante tenga un uso y manejo apropiado del lenguaje algebraico” (p. 37). Ante esta situación, se propone plantear actividades didácticas donde los estudiantes relacionen números u objetos matemáticos con variables o conceptos matemáticos.

También los errores algebraicos debidos a las características propias del lenguaje algebraico, específicamente a los causados por una incorrecta resolución de ecuaciones, tienen una incidencia porcentual promedio de 71.26% en los estudiantes. De Moreno et al. (1997) detallan que en este tipo de errores destaca la confusión de los estudiantes para diferenciar el inverso multiplicativo del aditivo, por lo que cometen errores operacionales entre los coeficientes y los términos independientes. Además, los autores señalan que la incorrecta resolución de ecuaciones es causada también por el poco conocimiento que tiene el estudiante de las operaciones con números reales, concretamente en el dominio de la ley de signos y la jerarquía de operaciones.

#### **4.3 Análisis de resultados obtenidos de la evaluación de salida**

Se presentan tablas y gráficos donde se muestran los errores algebraicos encontrados en la resolución de los estudiantes para cada pregunta planteada en la evaluación de salida, complementariamente se muestra el porcentaje de incidencia en los estudiantes y se realiza un análisis con respecto a los resultados obtenidos en la evaluación de salida.

##### **Pregunta N°01**

¿Cómo representarías con signos, letras y números las siguientes afirmaciones?

- Un número cualquiera.
- La suma de tres números distintos.
- La tercera parte de un número.
- El cuádruple de un número menos 8 es igual a 20.
- La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 48.

**Tabla 16***Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 1*

<b>Pregunta N°01</b>		
<b>Indicador</b>	<b>Número de estudiantes</b>	<b>Porcentaje</b>
<b>Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico, específicamente referidos a la conversión de registros.</b>	5	17.24%
<b>Estudiantes que no respondieron la pregunta 01</b>	2	6.9%
<b>Estudiantes que respondieron correctamente la pregunta 01</b>	22	75.86%
<b>Número total de estudiantes</b>	29	100 %

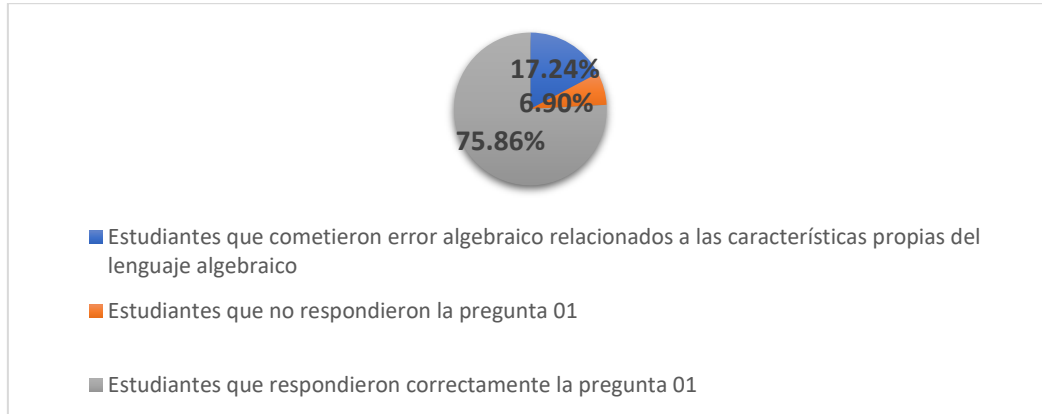
Nota. Elaboración propia.

Se evidencia que en la pregunta 1 existe un 17.24% de estudiantes que aún cometen errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico, específicamente referidos a la conversión de registros, a este resultado agregamos el 6.9% que no respondió la pregunta lo que demuestra un desconocimiento persistente del concepto relacionado a la generalización de números con variables. Sin embargo, un 75.86% de los estudiantes logró desarrollar la pregunta de manera satisfactoria lo que evidencia una mejora en el logro de los aprendizajes con respecto a la representación simbólica de números. Esto demuestra un avance porcentual del 65.52% de estudiantes que lograron responder la pregunta de manera correcta después de haberse implementado las actividades didácticas, basadas en la explicación de los elementos fundamentales del álgebra lo que permitió una mejor comprensión de estos.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 18**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 1*



Nota. Elaboración propia.

Butto (2005) sostiene que es importante estimular el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes con el objetivo de que estos desarrollen un sistema simbólico algebraico y sistema de representación matemática fundamentada en la generalización. Asimismo, el correcto aprendizaje operacional de los conceptos relacionados a la aritmética permitió que los estudiantes puedan desarrollar un pensamiento algebraico ligado a operaciones matemáticas que ellos ya han aprendido con anterioridad. De esta manera, los estudiantes adquirieron un sistema de representación matemático basado en la generalización de situaciones, esto a través de actividades como la generación de patrones.

Las actividades generacional planteadas en las sesiones de aprendizaje 2, 3, 4 y 5 con la finalidad de que los estudiantes lleguen a formular patrones y logren asociar valores concretos de números con variables fueron de gran ayuda ya que los estudiantes lograron en su mayoría desarrollar la habilidad de generalizar. Debido a que Kieran (1998) plantea que estas actividades están caracterizadas más por la estrategia y el razonamiento que por el conocimiento matemático, el estudiante usa diferentes estrategias y el razonamiento matemático para determinar patrones.

### **Pregunta N°02**

Resuelve

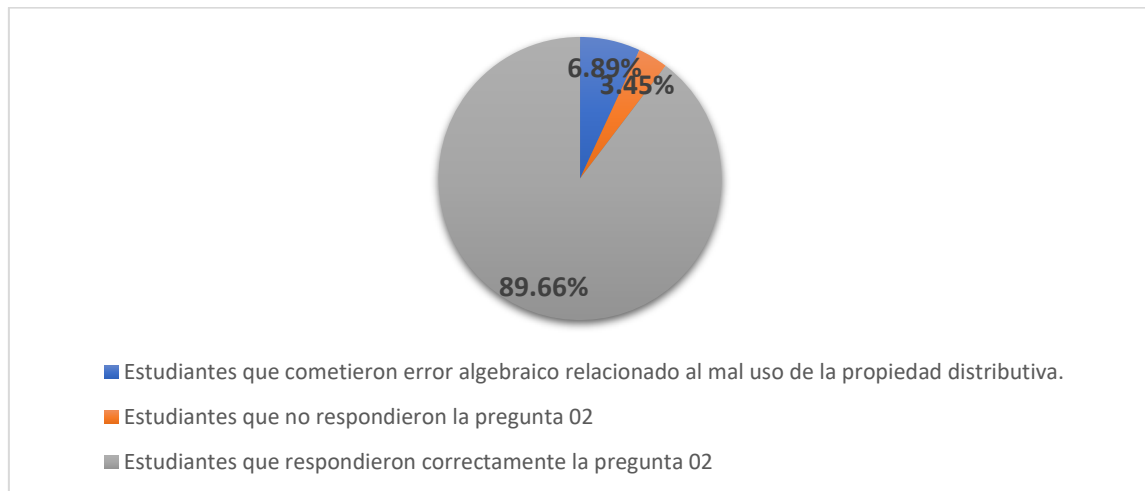
- $11(c + 9)$
- $(x + 3)(x + y)$

**Tabla 17***Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 2*

Pregunta N°02		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados al mal uso de la propiedad distributiva.	2	6.89%
Estudiantes que no respondieron la pregunta 02	1	3.45%
Estudiantes que respondieron correctamente la pregunta 02	26	89.66%
Número total de estudiantes	29	100

Nota. Elaboración propia.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 19***Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 2*

Nota. Elaboración propia.

En la pregunta 2 se identifica que un 89.66% de estudiantes lograron resolver de manera satisfactoria el ejercicio planteado, esto significa que un 86.22% más de estudiantes logró desarrollar esta pregunta y relacionar el concepto de propiedad distributiva empleada en la aritmética con variables algebraicas, esto en contraste con la evaluación diagnóstica donde solo el 3.44% logró responder satisfactoriamente un ejercicio similar. Este avance fundamentado en la simplicidad operacional de la propiedad distributiva y la operación de multiplicación de términos algebraicos empleando polígonos, permitió identificar la función que cumple la variable y cómo interactúa con números y operaciones matemáticas.

Las actividades transformacional propuestas en la tercera sesión de aprendizaje permitieron que el estudiante pueda manejar de manera más simple expresiones algebraicas donde interactuaban variables y números. Kieran propone que uno de los ejes del aprendizaje del álgebra es la alteración algebraica o manipulación simbólica sin sentido, es decir el estudiante debe realizar procedimientos operacionales entre variables y números de manera directa sin necesidad de asociar estos conceptos con situaciones de la vida cotidiana. Por ello, en las actividades donde se aplicó la propiedad distributiva a través de su demostración con figuras geométricas se desarrolló un enfoque conductista que permitió la aplicación de los conceptos aritméticos en ejercicios de operaciones algebraicas que incluían variables. Godino (2013) destaca que para un correcto aprendizaje del álgebra en una de sus fases se debe identificar y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, es decir propiedades de las operaciones y las relaciones. Es decir, el aprendizaje del álgebra no se limita a una abstracción o generalización de la realidad, sino que debe considerar el manejo operacional de la propiedad distributiva y relaciones aritméticas antes aprendidas.

**Pregunta N°03**

**Resuelve**

- $3x + \frac{1}{3x}$
- $16x + \frac{1}{16x}$

**Tabla 18**

*Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 3*

Pregunta N°03		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados al mal uso de recíprocos.	12	41.38%
Estudiantes que respondieron la pregunta 03 de manera correcta.	17	58.62%
Número total de estudiantes	29	100 %

Nota. Elaboración propia.

La pregunta número 3 consiste en la resolución de una adición de fracciones que poseen variables, para ello los estudiantes deben emplear el concepto de recíprocos y suma de fracciones. En esta pregunta, se identificó que un 58.62% de estudiantes la pudo responder de manera correcta, esto representa un incremento del 24.14% con respecto a los estudiantes que respondieron satisfactoriamente una pregunta similar en la evaluación diagnóstica. Este incremento contrasta con el 41.38% de estudiantes que cometieron nuevamente el error algebraico, esto causado por la confusión que poseen sobre las operaciones matemáticas que se pueden realizar con fracciones. Los estudiantes manifestaron durante las sesiones de aprendizaje una falta de conocimiento con relación a operaciones con fracciones lo que dificultaba el desarrollo de las actividades programadas debido a la limitación de tiempo que tenía la investigación.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 20**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 3*



Nota. Elaboración propia.

Hernández et al. (1998) destacan la importancia que tiene el docente en este proceso de aprendizaje operacional y generación de habilidades algebraicas en los estudiantes ya que deben formar parte del proceso de construcción de conocimiento matemático. Es decir, el docente debe conocer y reflexionar sobre el conocimiento que va a impartir a los estudiantes para que estos lo asimilen de manera fluida sin generar conflictos cognitivos que generen errores, es así como la falta de conocimientos matemáticos se refleja en el poco dominio operacional que poseen los estudiantes.

Cabe indicar que los errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética específicamente aquellos relacionados al uso incorrecto de recíprocos en ecuaciones lineales, se abordaron a través de la actividad global meta-level 4 en esta los estudiantes comprendieron el concepto de número recíproco empleando el aplicativo denominado “Recíproco de un número”. Luego, se planteó la actividad generational 11 que consistió en la resolución de ecuaciones lineales empleando recíprocos, esta actividad permitió la comprobación del concepto de igualdad en las ecuaciones a través de la eliminación de los números y coeficientes empleando sus recíprocos. Para finalizar la sesión de aprendizaje se propuso la actividad generational 12 esta se dividió en dos partes, la primera planteó preguntas teóricas sobre la definición de recíprocos y su utilidad en el álgebra, y la segunda propuso ecuaciones lineales que deben ser resueltas empleando recíprocos. Cabe mencionar que este error es uno de los que más persiste luego de la aplicación de las actividades didácticas, esto probablemente se debe a que el concepto de recíprocos involucra otros aspectos de la matemática como las fracciones y no se tuvo suficiente tiempo para la enseñanza de este concepto.

Con respecto a la pregunta 4 se identifica que un 55.17% de los estudiantes lograron desarrollar de manera correcta las ecuaciones empleando para ello la cancelación de términos; aunque un 44.83% de estos no desarrollaron los ejercicios o cometieron errores relacionados al inverso multiplicativo y aditivo, es decir presentaron dificultades relacionadas a otros aspectos del álgebra que no habían sido aprendidas durante las actividades. Es necesario tener en cuenta la complejidad del álgebra y el amplio campo temático que posee por lo que estas actividades didácticas presentan limitaciones para el aprendizaje completo del álgebra, se hizo un mayor énfasis en actividades generational que transformational y global meta-level. En este sentido; Hernández et al. (1998) señalan que estos errores son causados principalmente por una mala aplicación de fórmulas o reglas de procedimientos que no han sido aprendidas por el estudiante.

#### **Pregunta N°04**

Resuelve

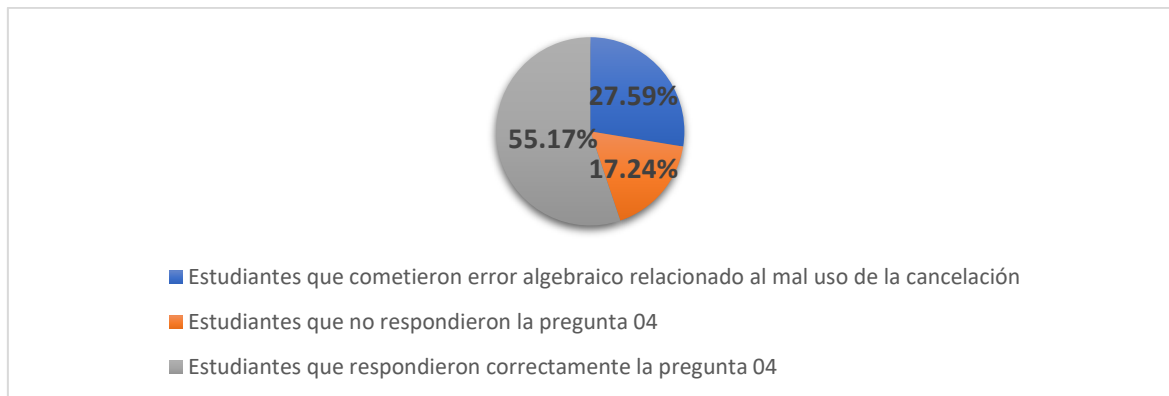
- $10x - 14x - 8y + 20 = (10)(2) - 8y + 24x$
- $x + 3(x - 6) = 3x - 18 + 4$

**Tabla 19***Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 4*

Pregunta N°04		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados al incorrecto uso de la ley de la cancelación.	8	27.59%
Estudiantes que no respondieron la pregunta 04	5	17.24%
Estudiantes que respondieron correctamente la pregunta 04	16	55.17%
Número total de estudiantes	29	100

Nota. Elaboración propia.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 21***Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 4*

Nota. Elaboración propia.

**Pregunta N°05**

En cada caso, halla el valor de la “x” y “y” explica como lo has resuelto

- $y - 12 = 36$
- $8x + 25 = 12x + 1$

**Tabla 20***Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 5*

Pregunta N°05		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico, específicamente referidos a la resolución de ecuaciones dadas.	6	20.69%
Estudiantes que no respondieron la pregunta 05	4	13.79%
Estudiantes que respondieron correctamente la pregunta 05	19	65.52%
Número total de estudiantes	29	100 %

Nota. Elaboración propia.

En la pregunta 5 se observa que un 65.52% de los estudiantes lograron responder de manera correcta las ecuaciones dadas, esto significa un progreso del 55.17% con respecto a la evaluación diagnóstica. Sin embargo, existe un 20.69% de estudiantes que aún cometieron el error relacionado a las características propias del lenguaje algebraico, esto debido a confusiones relacionadas al inverso multiplicativo y aditivo. Por otro lado, se tiene un 13.79% de estudiantes que no pudieron resolver las dos ecuaciones de primer grado. De Moreno et al. (1997) señalan que para una correcta solución de ecuaciones con una variable son requisitos que el estudiante opere con números enteros, encuentre el valor numérico de expresiones algebraicas sencillas para un valor específico de una variable, entienda la jerarquía de operaciones, interprete enunciados que le permita resolver un problema e identifique la variable como una incógnita en una igualdad. De esta manera, se identifica una gran cantidad de conocimientos previos que son necesarios para la correcta solución de ecuaciones, estos no llegaron a ser logrados a través de las actividades global meta-level debido al limitante de tiempo.

Para los errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico específicamente aquellos referidos a los conceptos de variable, igualdad y resolución de ecuaciones, se plantearon las actividades generacional 1 y 2, la primera consistió en realizar secuencias aritméticas y la segunda secuencia empleando secuencias geométricas. A partir de estas actividades se buscó desarrollar el concepto de variable, es decir generalice una variable como un objeto tangible o intangible que cambia sus valores de acuerdo con diferentes situaciones. También, se resalta la introducción de secuencias geométricas ya que en estas se

logran identificar “variables visuales que en los aritméticos por su misma naturaleza no existen” (Villa, 2006, p. 146). Este concepto se reforzó con las actividades generational 3 y 4 en estas los estudiantes tuvieron que generalizar situaciones de la vida cotidiana empleando variables algebraicas. Posterior a ello, se planteó la actividad generational 5 esta consistió en generalizar una situación de la vida cotidiana, de esta manera se introdujo el concepto de coeficiente algebraico ya que los estudiantes deben concebir la edad como una variable y el triple como un coeficiente.

Por último, se plantearon las actividades generational 6 y 7 basadas en el modelo de la balanza para introducir el concepto de igualdad y ecuación. Rojano (2010) indica que este modelo permite la enseñanza sobre la resolución de ecuaciones de primer grado ya que recurre a la metáfora de la preservación del equilibrio para enseñar el concepto de igualdad algebraica. Para finalizar la sesión de aprendizaje se plantearon las actividades generational 8 y 9 como estrategia para afianzar los aprendizajes y se planteó una actividad global meta-level 1 donde se buscó relacionar los aprendizajes adquiridos con situaciones de su vida cotidiana.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 22**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 5*



Nota. Elaboración propia.

La resolución de ecuaciones con una variable es un paso fundamental para que el estudiante aplique la sustitución formal y la generalización. La enseñanza de este tema, según De Moreno et al. (1997), debe cambiarse ya que los ejercicios y metodologías propuestas son descontextualizadas y requieren un alto nivel de abstracción, además de la falta de conocimiento que los estudiantes manifiestan sobre contenidos aritméticos como la jerarquía de operaciones y el manejo de signos. La introducción de recursos tecnológicos, como applets en las tablets brindadas por el estado, permite que el estudiante aprenda este concepto de manera más concreta y cercana, pero es ineficiente debido a la falta de conocimientos aritméticos previos que debieron ser alcanzados en niveles de educación anteriores.

### Pregunta N°06

Para ir de Cusco a Machu Picchu, se puede tomar el servicio de tren hasta Aguas Calientes. El costo por este servicio se muestra a continuación.

Trenes disponibles (domingo, 1 de mayo)

**Tabla 21**

*Datos informativos de la pregunta 06 perteneciente a la evaluación de salida*

Tipo de servicio	Descripción	Costo del boleto de tren (soles)
Económico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes	40
Turístico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes, vista panorámica y alimentos incluidos	180

Nota. Elaboración propia.

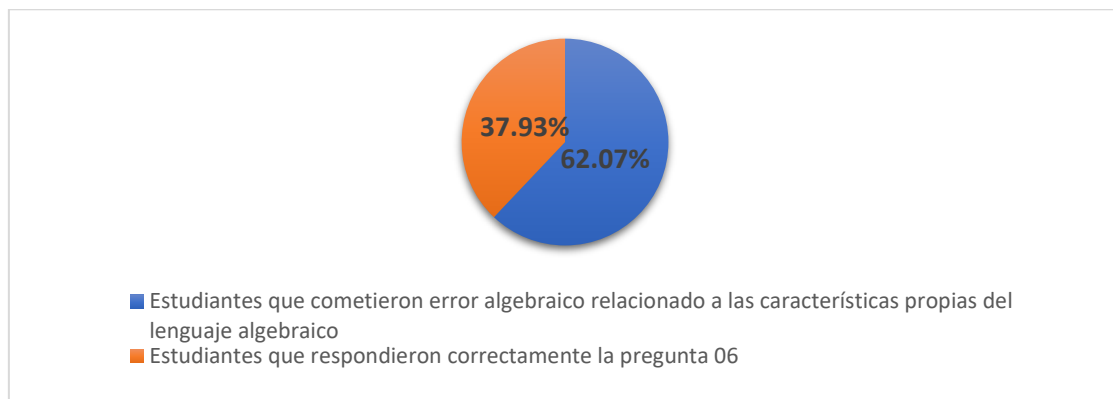
Un domingo, un total de 300 personas se trasladaron mediante algunos de estos dos tipos de servicios. Si “x” es la cantidad de personas que tomaron el servicio económico, ¿qué expresión representaría el dinero recaudado “y” por las personas que tomaron el servicio turístico ese mismo día?

**Tabla 22***Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 6*

Pregunta N°06		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico.	18	62.07%
Estudiantes que respondieron correctamente la pregunta 06	11	37.93%
Número total de estudiantes	29	100

Nota. Elaboración propia.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 23***Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 6*

Nota. Elaboración propia.

La pregunta 6 se presentó como un problema de gran complejidad ya que plantea una situación problemática en un contexto determinado que involucra procesos de generalización a través de la formulación de patrones algebraicos y de sustitución formal en la resolución de ecuaciones. En este problema se identificó un 62.07% de estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionado a las características propias del lenguaje algebraico. Sin embargo, a diferencia de los resultados de la evaluación diagnóstica donde ningún estudiante pudo resolver de manera satisfactoria el problema, en la evaluación de salida se identificó que un 37.93% de estudiantes logró resolver el problema lo que significó un avance en el desarrollo de pensamiento algebraico y una superación de errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico.

El problema está planteado en un sistema de representación verbal-sintáctico; su resolución involucra, según Palarea et al. (1995), una serie de habilidades lingüísticas, reconocimiento de nombres, adjetivos y verbos, es decir el estudiante debe identificar lo que se sabe y lo que se desea saber. Así, las dificultades de este problema se encuentran en el procesamiento verbal-sintáctico que pueda tener el estudiante y la traducción que hará de ello al lenguaje algebraico para el planteamiento de los patrones y ecuaciones. Palarea et al. (1995) indican que la resolución de este tipo de problemas algebraicos supone una traslación de un sistema de representación a otro, posterior a ello se introduce la complejidad de resolver los patrones empleando reglas algebraicas. Por ello, las actividades generacional que se desarrollaron durante todas las sesiones de aprendizaje son insuficientes y abordan el problema de manera específica en la generación de patrones algebraicos, pero no toma en cuenta aspectos relacionados a cómo el estudiante puede pasar de un lenguaje verbal a uno algebraico.

### Pregunta N°07

Resuelve la siguiente ecuación, brinda los valores que puede tomar “y” en la ecuación dada.

$$(y - 8)^2 = 144$$

**Tabla 23**

*Incidencia porcentual en la resolución de la pregunta 7*

Pregunta N°07		
Indicador	Número de estudiantes	Porcentaje
Estudiantes que cometieron errores algebraicos relacionados a las características propias del lenguaje algebraico, específicamente referidos a la resolución de ecuaciones dadas.	15	51.72%
Estudiantes que respondieron la pregunta 07	14	48.28%
Número total de estudiantes	29	100%

Nota. Elaboración propia.

Con respecto a la pregunta 7 se identifica que existe un 48.28% de estudiantes que respondieron la pregunta de manera correcta, en contraste a un 51.72% que cometieron errores al resolver la ecuación de segundo grado. En relación con estos datos se evidencia un buen avance teniendo en cuenta que en la evaluación diagnóstica ningún estudiante pudo resolver una ecuación de características similares. Además, se evidenció una reducción del 24.14% de

aquellos estudiantes que cometieron el error algebraico en la evaluación diagnóstica con respecto a la evaluación de salida. Este progreso significa un avance en el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes ya que pudieron comprender conceptos como variables, signo igual y aspectos operacionales relacionados a la solución de ecuaciones que se abordaron a través de actividades generational y transformational en las sesiones 2, 4 y 5.

Gráficamente, se presentan los resultados porcentuales en la siguiente figura:

**Figura 24**

*Resultados porcentuales obtenidos en la pregunta 7*



Nota. Elaboración propia.

La resolución de ecuaciones de segundo grado involucra una complejidad mayor debido a que la variable o incógnita asume dos valores posibles, para ello es necesario que el estudiante comprenda desde una forma de pensar aritmética las características particulares de la ley de signos y de operaciones como la potenciación y radicación. Ruiz et al. (2010) plantean que el álgebra debe ser entendida como un proceso de modelización y generalización que se debe fundamentar en los problemas aritméticos que se les han planteado con anterioridad a los estudiantes. La educación escolar debe basarse de esta manera en una constante relación de los conceptos prácticos con procesos algebraicos como la sustitución y la generalización.

Por último, se muestra la siguiente tabla donde se representa el porcentaje de incidencia de errores algebraicos que presentaron los estudiantes en la evaluación diagnóstica y el que poseen en la evaluación de salida:

**Tabla 24***Comparación porcentual de errores algebraicos en estudiantes*

N° de pregunta	Error algebraico que tiene su origen en la aritmética			Error algebraico debido a características propias del lenguaje algebraico		Porcentaje de incidencia de errores en la evaluación diagnóstica.	Porcentaje de incidencia de errores en la evaluación de salida.	Reducción porcentual de la incidencia de errores algebraicos en estudiantes.
	Propiedad distributiva	Recíprocos	Cancelación	Conversión de registros	Ecuaciones			
1				X		65.52%	17.24%	48.28%
2	X					68.97%	6.89%	62.08%
3		X				65.52%	41.38%	24.14%
4			X			62.07%	27.59%	34.48%
5					X	72.41%	20.69%	51.72%
6				X	X	65.52%	62.07%	3.45%
7					X	75.86%	51.72%	24.14%

Nota. Elaboración propia.

## Conclusiones

A partir del trabajo de investigación surgen las siguientes conclusiones:

Primera: Conocer la tipología de errores algebraicos ha sido de gran importancia para esta investigación, ya que ha permitido conocer los errores que presentan los estudiantes de cuarto grado de nivel secundario de una institución educativa rural en el aprendizaje del álgebra. Considero que el error es una manifestación compleja que involucra elementos como los agentes de la comunidad educativa, el contexto sociocultural, la adaptabilidad del currículo y otros. Por ello, es importante que sea tomado como un elemento que propicie el desarrollo de actividades enfocadas en su superación empleándolo como un generador de conflictos cognitivos que motiven al estudiante a repensar su estructura cognitiva con respecto a un aprendizaje concreto.

En esta investigación se consideró la tipología de errores algebraicos de Palarea (1997) que se basa en la naturaleza y origen de estos. En esta se identifican errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética; como los errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, relativos al uso de recíprocos y al uso incorrecto de la ley de cancelación. Además de errores algebraicos debido a las características propias del lenguaje algebraico, estos caracterizados por no poseer una referencia directa a la aritmética. Se señala que esta tipología surgió de la experiencia propia de la investigadora y de las investigaciones realizadas por el grupo de Álgebra del proyecto SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics) llevado a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983. Se consideró la tipología de errores algebraicos de Palarea (1997) debido a que esta resalta la importancia de la aritmética en la transición al álgebra y la generalización como un pilar fundamental para el desarrollo de un lenguaje algebraico, además de estar fundamentada en investigaciones realizadas a estudiantes con el mismo rango de edad y que poseían errores basados en un incorrecto aprendizaje de fundamentos aritméticos y algebraicos.

El análisis de los errores algebraicos cometidos por los estudiantes de cuarto grado de nivel secundario de una institución educativa rural de la región Piura se realizó a través del diseño y aplicación de una evaluación diagnóstica y de salida. Estas evaluaciones se diseñaron en base de la tipología de errores algebraicos y los anexos 5 y 6 propuestos por Palarea (1997) en su tesis doctoral.

Segunda: Los errores algebraicos encontrados en el 100% de estudiantes son los errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética y aquellos que son causados por las características propias del lenguaje algebraico. Se identifica que los estudiantes poseen una enorme falta de conocimiento de habilidades operacionales aritméticas y de conceptos como operaciones con números enteros, ley de signos, propiedad distributiva de la multiplicación, números recíprocos y cancelación de elementos. Esto impide desarrollar de manera correcta el pensamiento algebraico necesario para el logro de habilidades relacionadas a la sustitución formal y la generalización. En este sentido, manifestaron un desconocimiento de conceptos algebraicos como las variables, signo igual, ecuaciones y resolución de problemas algebraicos.

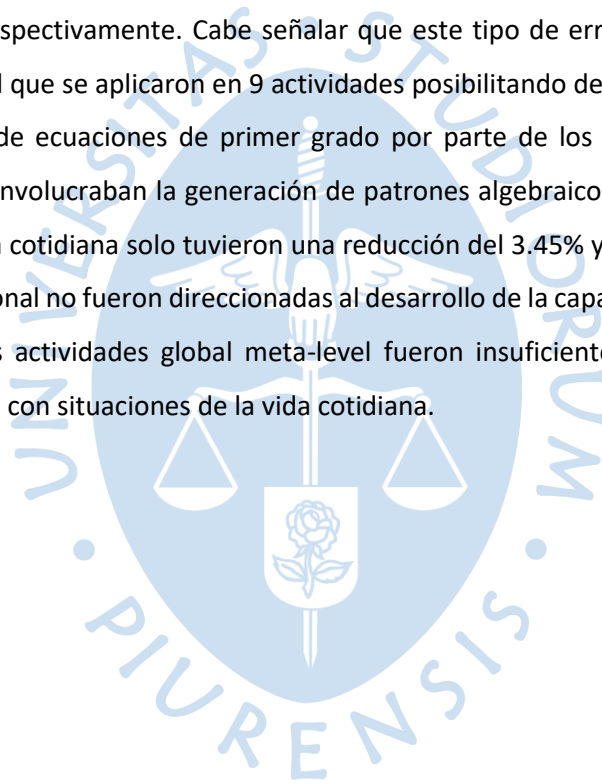
Tercera: Las actividades didácticas se desarrollaron bajo el enfoque de “álgebra como actividad” propuesto por Kieran (1996) que plantea el desarrollo de actividades denominadas “generational”, referidas a actividades que involucran la forma de las expresiones y las ecuaciones que son parte del álgebra; “transformational”, relacionadas al cambio de términos algebraicos o ecuaciones manteniendo el sentido de equivalencia; y “global-metal level”, aquellas que emplean al álgebra como una herramienta para la resolución de problemas, modelar, generalizar, justificar, probar y predecir actividades. Se elaboraron seis sesiones de aprendizaje; la primera y última correspondientes a la aplicación de la evaluación diagnóstica y de salida respectivamente, mientras que las restantes abordaron las actividades antes mencionadas siendo las generational y transformational aquellas que tuvieron más incidencia ya que se aplicaron doce actividades generational, ocho transformational y solo cinco global meta-level.

Cuarta: La aplicación de las actividades didácticas permitió reducir en gran medida los errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética, se identificó una reducción porcentual del 40.23% en promedio de la incidencia de este tipo de errores por parte de los estudiantes. Debido a que se proporciona la base teórica sobre habilidades operacionales referida al uso de la propiedad distributiva, números recíprocos y cancelación de elementos; es decir los estudiantes pudieron aprender de manera correcta conceptos aritméticos y relacionarlos con los elementos del álgebra como son uso de la variable, signo igual y ecuación. Asimismo, los errores algebraicos que son causados por las características propias del lenguaje algebraico tuvieron una reducción porcentual promedio del 31.9% esto debido a la complejidad del aprendizaje del álgebra, el limitante de tiempo impidió que los estudiantes desarrollen de manera plena un pensamiento algebraico que les permita desarrollar habilidades algebraicas como la generación de patrones, sustitución formal y generalización.

De manera específica, los errores algebraicos que tienen su origen en la aritmética relacionados al mal uso de la propiedad distributiva tuvieron una reducción porcentual del 62.08% y

los que se basan en el mal uso de la ley de la cancelación se redujeron en 34.48%. Se destaca la importancia que tuvieron las actividades transformacional en la reducción de estos errores ya que se aplicaron diez actividades de este tipo logrando una gran disminución en su incidencia. Además, aquellos errores que se relacionan al mal uso de recíprocos tuvieron una reducción del 24.14%, esto debido a que solo se aplicaron dos actividades generational debido al limitante del tiempo que se tuvo en esta investigación y por la complejidad conceptual que involucra el dominio de los recíprocos.

Por otro lado, los errores algebraicos debido a las características propias del lenguaje algebraico tuvieron una disminución porcentual que varía de acuerdo con el tipo de ejercicio propuesto. Se identifica que aquellos ejercicios que se limitaban a la conversión de situaciones en prosa a expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones de primer grado tuvieron una reducción del 48.28% y 51.72% respectivamente. Cabe señalar que este tipo de errores se trabajaron con las actividades generational que se aplicaron en 9 actividades posibilitando de esta manera el manejo de variables y la solución de ecuaciones de primer grado por parte de los estudiantes. Sin embargo, aquellos ejercicios que involucraban la generación de patrones algebraicos para resolver situaciones problemáticas de la vida cotidiana solo tuvieron una reducción del 3.45% y 24.14% esto debido a que las actividades generational no fueron direccionadas al desarrollo de la capacidad de generar patrones algebraicos, además las actividades global meta-level fueron insuficientes para que el estudiante pueda asociar el álgebra con situaciones de la vida cotidiana.



## Recomendaciones

Se recomienda que los docentes investiguen sobre las diferentes tipologías de errores algebraicos que pueden presentar los estudiantes en el aprendizaje del álgebra. Además, conocer la realidad del estudiante con respecto a su contexto socio cultural, familiar y emocional. Con el objetivo de identificar las causas de aquellos errores que cometen al momento de aprender. La identificación de estos errores supone según Briceño (2009) “desarrollar habilidades cognitivo-perceptivas, crítico-comparativas, así como su inteligencia discursiva resolutora de problemas” (p. 26).

Para ello, el docente debe elaborar instrumentos que le permitan identificar estos errores; como evaluaciones diagnósticas de temas en específico donde se evidencien posibles tipologías de errores, fichas técnicas y entrevistas que le faciliten conocer la realidad del estudiante. En este sentido, se recomienda la aplicación de entrevistas a los estudiantes para conocer con mayor profundidad los errores que presentan los estudiantes y así poder abordarlos en las sesiones de aprendizaje.

Se propone que la reducción de errores algebraicos sea considerada en la planificación anual de trabajo (PAT) a través de la implementación de una experiencia de aprendizaje completa para contar con un diagnóstico oportuno y el diseño de las sesiones y actividades vayan acordes a los errores algebraicos presentes en los estudiantes. Además, se debe incentivar la aplicación de recursos tecnológicos como Google Classroom y applets gamificadas en álgebra ya que permitirían la aplicación de actividades a distancia y asincrónicas, lo que conllevaría una mayor participación del estudiante en la reducción de errores algebraicos.

Por último, la importancia de estas acciones radica en la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje, donde el estudiante es el agente central de este acto. En este sentido, es relevante plantear actividades que posibiliten la mejora de las acciones involucradas en la enseñanza de las matemáticas, considerando para ello la realidad propia del estudiante. De esta manera, el docente debe investigar diversos enfoques de actividades didácticas que se direccionen a reducir los errores que presentan los estudiantes a través de retos que propicien la reestructuración de formas cognitivas ya establecidas. En este sentido, se recomienda la planificación de actividades didácticas considerando otros enfoques con el objetivo de abordar y reducir los errores algebraicos que no han sido considerados en esta investigación.

## Referencias

- Arroyo, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, 28(2), 15-44. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4945344.pdf>
- Barría, B. y Chavarría, L. (2010). *Dificultades que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado* [tesis de pregrado, Universidad del Bío-Bío]. <http://biblio3.url.edu.gt/publijrcifuentes/TESIS/2018/05/86/Mateo-Marta.pdf>
- Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer Academic Publishers.
- Booth, L. (1984) *Algebra: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. New Windsor, Berkshire, England: NFER-Nelson Publishing Co.
- Briceño, M. (2009). El uso del error en los ambientes de aprendizaje: Una visión transdisciplinaria. *Revista de teoría y didáctica de las ciencias sociales*, (14), 9-28. <https://www.redalyc.org/pdf/652/65213214002.pdf>
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques el les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2), 165-198. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516569v2/document>
- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, 12(01), 5-38. <http://funes.uniandes.edu.co/10210/1/Educacion2000Brousseau.pdf>
- Butto, C. (2005). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria* [tesis doctoral inédita, México]. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40516105.pdf>
- Butto, C. y Rivera, T. (noviembre, 2011). *La generalidad una vía para acceder al pensamiento algebraico: un estudio sobre la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo*. [Ponencia]. XI Congreso Nacional de Investigación Educativa, Monterrey, México. [https://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area\\_05/1330.pdf](https://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_05/1330.pdf)
- Cabanne, N. (2007). *Didáctica de las Matemáticas*. Editorial Bonum. <https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=OLxkcM28tCEC&oi=fnd&pg=PA7&dq=perfil+de>

[+docente+de+las+matem%C3%A1ticas&ots=f4wAunKJ33&sig=XclDeITEnCFxy\\_uUg9dlwIPiMMk](#)

Calle, M. (2015). *Symbaloo como puerta de acceso a las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza de álgebra.*

<http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/5567/996-3367-1-PB.pdf?sequence=1>

Castellanos, M. y Obando, J. (8-10 de octubre de 2009). *Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico* [Discurso principal].

10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.

<http://asocolme.com/sitio/>

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

<http://funes.uniandes.edu.co/677/1/Castro95Estructuras.pdf>

De Moreno, I. y De Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado. *Revista EMA*, 2(3), 247-258. <https://core.ac.uk/download/pdf/12341542.pdf>

Díaz, J. (2017). *La influencia del software GeoGebra en el aprendizaje del álgebra de los alumnos del 4to año de educación secundaria de la Institución Educativa Trilce del Distrito de Santa Anita, UGEL 06, 2015* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle].

<http://hdl.handle.net/20.500.14039/1371>

Fernández, F. (2013). *Estrategias didácticas para fortalecer el aprendizaje de la matemática en la transición de la aritmética al álgebra* [tesis de pregrado, Universidad Católica de Manizales].

<http://hdl.handle.net/10839/682>

Fernández, J. (2007). Metodología didáctica para la enseñanza de la matemática: variables facilitadoras del aprendizaje. En *Aprender matemáticas: metodología y modelos europeos* (pp. 9-26).

Secretaría General Técnica.

<https://pdfs.semanticscholar.org/54ff/e4ae9673a4e51312ffd579c32f637b188166.pdf>

Galeano, O. y Váquiro, L. (2015). *Una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia utilizando el modelo virtual de la balanza* [tesis de pregrado, Universidad del Valle].

<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/9452>

Gallego, D. y Nevot, A. (2008). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Complutense de educación*, 19(1), 95-112.

<https://revistas.ucm.es/index.php/RCED/article/download/RCED0808120095A/15564>

- García, J., Segovia, I., y Lupiáñez, J. (2011). *Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*. <http://funes.uniandes.edu.co/2018/>
- García, J. (2015). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas* [tesis de doctorado, Universidad de Granada] <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/43529/26082202.pdf?sequence=6&isAllowed=y>
- Hernández, J., Socas, M. y Camacho, M. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza Secundaria. *Revista Interuniversitaria de formación del Profesorado*, (32), 73-86. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117980>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Interamericana Editores. <http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/2707>
- Kieran, C. (1996). *The changing face of school algebra*. En C. Alsina, B. Álvarez, B. R. Hodgson; C. Laborde y A Pérez. (Eds.). 8th International Congress on Mathematical Education: Selected Lectures. (pp. 271-290). Sevilla: S.A.E.M. Thales. <https://core.ac.uk/download/pdf/20482407.pdf>
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151. [https://www.researchgate.net/publication/228526202\\_Algebraic\\_thinking\\_in\\_the\\_early\\_grades\\_What\\_is\\_it](https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it)
- Lázaro, D. (2012). *Estrategias didácticas y aprendizaje de la matemática en el programa de estudios por experiencia laboral* [tesis de doctorado, Universidad de San Martín de Porres]. <https://hdl.handle.net/20.500.12727/613>
- Mamani, G. (2015). *Nivel de conocimientos que tienen los docentes del distrito de Piura sobre la aplicación de los recursos TIC en el área de matemáticas en la EBR* [tesis de maestría, Universidad de Piura] [https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/2872/MAE\\_EDUC\\_244.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://pirhua.udep.edu.pe/bitstream/handle/11042/2872/MAE_EDUC_244.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Mera, C. (2014). Pensamiento prospectivo: visión sistémica de la construcción del futuro. *Revista Colombiana de Humanidades*, 46(84), 89-104. <https://www.redalyc.org/pdf/5155/515551535005.pdf>

- Ministerio de Educación del Perú (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria*. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú (2017). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú (2019). Evaluación PISA 2018. <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/12/PISA-2018-Resultados.pdf>
- Ministerio de Educación del Perú (s.f.). *Currículo Nacional*. Ministerio de Educación. <https://sites.minedu.gob.pe/curriculonacional/2020/11/09/que-significa-la-competencia-resuelve-problemas-de-regularidad-equivalencia-y-cambio/#:~:text=Consiste%20en%20que%20el%20estudiante,el%20comportamiento%20de%20un%20fen%C3%B3meno.>
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria* [tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://funes.uniandes.edu.co/544/1/MolinaM06-2822.PDF>
- Palarea, M. y Socas, M. (1995). Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos. *Suma Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (20), 29-35. <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/20/029-035.pdf>
- Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* [tesis doctoral, Universidad de La Laguna]. <http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21205>
- Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la matemática* (Vol. 2). Hueriga Y Fierro Editores. <https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=VrYFiZyTXVUC&oi=fnd&pg=PA17&dq=recursos+empleados+en+la+ense%C3%B1anza+de+las+matem%C3%A1ticas+&ots=0gfP7qG8dI&sig=YRhR-B5VAxRJdGYreqbgHAdRH48>
- Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 162-172. <http://www.jstor.org/stable/748804>
- Ramos, H. (2015). *Actividades lúdicas como estrategias de enseñanza para el aprendizaje significativo del álgebra, de los estudiantes del segundo grado "b" de la institución educativa secundaria industrial Federico Villarreal del distrito y provincia de Andahuaylas 2013 – 2015* [tesis de

- pregrado, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa].  
<http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/4875>
- Reggiani, M. (1994). Generalization as a Basic for Algebraic Thinking: Observations with 11-12 years Old Pupils. En *Proceeding of the XVIII PME Conference Lisboa, Portugal*.
- Rodríguez, N. (2011). Diseños experimentales en educación. *Revista de Pedagogía*, 32(91), 147-158.  
<https://www.redalyc.org/pdf/659/65926549009.pdf>
- Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, 9(4), 273-293. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5379313.pdf>
- Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 75, 5-20.  
<http://funes.uniandes.edu.co/3553/1/Rojano2010Modelaci%C3%B3nNumeros75.pdf>
- Rojas, P. (2010). Conflictos semióticos en un contexto algebraico: un análisis de las producciones de los estudiantes. *Revista Digital Matemática*, 11(1), 1-9. <http://hdl.handle.net/2238/12889>
- Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *REVISTA CIENTÍFICA*, 17(02), 688-694. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8917459.pdf>
- Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2010). La algebraización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática 14* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.  
[http://funes.uniandes.edu.co/1716/1/365\\_2010Laalgebrizacion\\_SEIEM13.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1716/1/365_2010Laalgebrizacion_SEIEM13.pdf)
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74. <http://hdl.handle.net/10481/4441>
- Salas, E. (2013) *Diseños preexperimentales en psicología y educación: una revisión conceptual*.  
<http://www.scielo.org.pe/pdf/liber/v19n1/a13v19n1>
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 7, 5-34.  
<http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Apertura.pdf>

- Sotos, M. (1993). Didáctica de las Matemáticas. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, (8), 173-194. <http://bibliotecadigital.conevyt.org.mx/colecciones/documentos/somece/77.pdf>
- Tejada, J. (2000). Estrategias didácticas para adquirir conocimiento. *Revista española de pedagogía*, año LVIII (217), 491-514. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/23674.pdf>
- Vayoles, L. (2013). Estudio de la representación del álgebra en los documentos curriculares colombianos. *Revista Perspectivas Educativas*, 6. [http://www.academia.edu/download/37361926/Representacion del algebra .pdf](http://www.academia.edu/download/37361926/Representacion_del_algebra_.pdf)
- Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. *REVISTA TECNOLÓGICAS*, (16), 139-151. [https://www.researchgate.net/profile/Jhony-Villa-Ochoa/publication/277831377\\_El\\_proceso\\_de\\_generalizacion\\_Matematica\\_algunas\\_reflexiones\\_en\\_torno\\_a\\_su\\_validacion/links/5611584408aec422d116f6aa/El-proceso-de-generalizacion-Matematica-algunas-reflexiones-en-torno-a-su-validacion.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Jhony-Villa-Ochoa/publication/277831377_El_proceso_de_generalizacion_Matematica_algunas_reflexiones_en_torno_a_su_validacion/links/5611584408aec422d116f6aa/El-proceso-de-generalizacion-Matematica-algunas-reflexiones-en-torno-a-su-validacion.pdf)



## Apéndices

### Apéndice A. Evaluación diagnóstica

#### Evaluación Diagnóstica

Adaptado de los anexos 5 y 6 de la tesis doctoral de Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (tesis doctoral). Universidad de La Laguna, España.

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=991&orden=102005&info=link>

**Estudiante:**

**Grado y sección:**

1. ¿Cómo expresarías con signos, letras y números?
  - a) Un número cualquiera.
  - b) La suma de dos números distintos.
  - c) La mitad de un número.
  - d) El doble de un número menos 5 es igual a 17.
  - e) La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 24.
2. Resuelve
  - a)  $6 \cdot (b + 4)$
  - b)  $(a + 2)(b + a)$
3. Resuelve
  - a)  $2x + \frac{1}{2x} =$
  - b)  $10x + \frac{1}{10x} =$
4. Resuelve
  - a)  $10x + 14x - 3y + 8 = (4x^2) - 3y + 24x$

b)  $x + 2(x - 6) = 2x - 12 + 4$

5. En cada caso, halla el valor de la "x" y explica cómo lo has resuelto.

a)  $x - 4 = 12$

b)  $4x + 16 = 7x + 1$

6. Para ir de Cusco a Machu Picchu, se puede tomar el servicio de tren hasta Aguas Calientes. El costo por este servicio se muestra a continuación.

Trenes disponibles (domingo, 1 de mayo)

Tipo de servicio	Descripción	Costo del boleto de tren (soles)
Económico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes	30
Turístico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes, vista panorámica y alimentos incluidos	200

Un sábado, un total de 400 personas se trasladaron mediante algunos de estos dos tipos de servicios. Si "x" es la cantidad de personas que tomaron el servicio económico, ¿qué expresión representaría el dinero recaudado "y" por las personas que tomaron el servicio turístico ese mismo día?

7. Resuelve la siguiente ecuación, brinda los valores que puede tomar "x" en la ecuación dada.

$$(x - 4)^2 = 36$$

**Apéndice B. Evaluación de salida****Evaluación de Salida**

Adaptado de los anexos 5 y 6 de la tesis doctoral de Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (tesis doctoral). Universidad de La Laguna, España.

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=991&orden=102005&info=link>

**Estudiante:**

**Grado y sección:**

1. ¿Cómo representarías con signos, letras y números las siguientes afirmaciones?
  - a) Un número cualquiera.
  - b) La suma de tres números distintos.
  - c) La tercera parte de un número.
  - d) El cuádruple de un número menos 8 es igual a 20.
  - e) La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 48.
2. Resuelve
  - a)  $11 \cdot (c + 9)$
  - b)  $(x + 3)(x + y)$
3. Resuelve
  - a)  $3x + \frac{1}{3x} =$
  - b)  $16x + \frac{1}{16x} =$
4. Resuelve
  - a)  $10x - 14x - 8y + 20 = (10)(2) - 8y + 24x$
  - b)  $x + 3(x - 6) = 3x - 18 + 4$

5. En cada caso, halla el valor de la “y” y “x” respectivamente, explica cómo lo has resuelto.

a)  $y - 12 = 36$

b)  $8x + 25 = 12x + 1$

6. Para ir de Cusco a Machu Picchu, se puede tomar el servicio de tren hasta Aguas Calientes. El costo por este servicio se muestra a continuación.

Trenes disponibles (domingo, 1 de mayo)

Tipo de servicio	Descripción	Costo del boleto de tren (soles)
Económico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes	40
Turístico	Traslado de Cusco a Aguas Calientes, vista panorámica y alimentos incluidos	180

Un domingo, un total de 300 personas se trasladaron mediante algunos de estos dos tipos de servicios. Si “x” es la cantidad de personas que tomaron el servicio económico, ¿qué expresión representaría el dinero recaudado “y” por las personas que tomaron el servicio turístico ese mismo día?

7. Resuelve la siguiente ecuación indicando los valores que puede tomar “y” en la ecuación dada.

$$(y - 8)^2 = 144$$

## Apéndice C. Actividades didácticas

### Sesión de aprendizaje 1

#### SESIÓN DE APRENDIZAJE 1: “Identificamos nuestros errores para el aprendizaje del álgebra”

##### I.- Datos Informativos:

Docente : Ramos Sernaqué Raúl Eduardo.

Área : Matemática.

Grado : Cuarto de secundaria.

Sección : B

##### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación

Competencia/capacidad	Desempeños precisados	Evidencia de aprendizaje	Instrumento de valoración
<p><b>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>• Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>• Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.</li> <li>• Argumenta afirmaciones sobre relaciones</li> </ul>	<p>Evalúa si la expresión algebraica o gráfica (modelo) que planteó representó todas las condiciones del problema: datos, términos desconocidos, regularidades, relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes.</p>	<p>Evaluación diagnóstica sobre errores algebraicos en estudiantes de tercer grado de secundaria.</p>	<p>Rúbrica de evaluación de la evaluación diagnóstica.</p>

de cambio y equivalencia.			
COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS			
<p>Gestiona su aprendizaje de manera autónoma</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> <p>Se desenvuelve en los entornos virtuales generados por las TIC.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Gestiona información del entorno virtual.</li> <li>- Interactúa en entornos virtuales.</li> </ul>			
Enfoques Transversales		Valores/acciones observables	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enfoque orientación al bien común.</li> <li>• Enfoque búsqueda de la excelencia.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Responsabilidad Disposición a valorar y proteger los bienes comunes y compartidos de un colectivo.</li> <li>• Superación personal Disposición a adquirir cualidades que mejorarán el propio desempeño y aumentarán el estado de satisfacción consigo mismo y con las circunstancias</li> </ul>	

### III.- Momentos de la sesión:

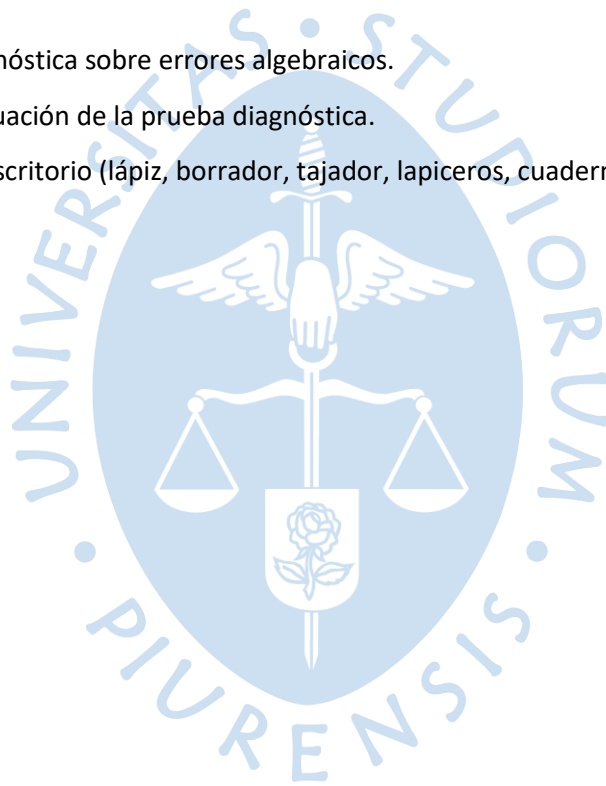
MOMENTOS	ESTRATEGIAS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente se presenta de manera formal con los estudiantes de cuarto grado de secundaria pertenecientes a la sección B, partícipes en el proyecto de reducción de errores algebraicos, indicando sus nombres y apellidos.</li> <li>• Se establecen las normas de convivencia de manera colaborativa y en consenso con los estudiantes, teniendo como ejes fundamentales los valores, asistencia y participación en las sesiones de aprendizaje.</li> <li>• El docente presenta el nombre de la sesión: “Identificamos nuestros errores para el aprendizaje del álgebra”.</li> <li>• El docente plantea el siguiente texto a los estudiantes, este texto es compartido con los estudiantes a través de la tablet:</li> </ul>	30 minutos

	<p style="text-align: center;"><b>¿Para qué sirve el álgebra?</b></p> <p>El álgebra es sumamente útil dentro del campo de la matemática, pero también posee grandes aplicaciones en la vida cotidiana. Permite llevar a cabo <a href="#">presupuestos</a>, facturación, cálculo de <a href="#">costos</a>, beneficios y <a href="#">ganancias</a>.</p> <p>Además, otras operaciones de importancia en la <a href="#">contabilidad</a>, <a href="#">administración</a> e incluso la ingeniería, se sostienen en base a cálculos algebraicos que manejan una o varias variables, expresándolas en relaciones lógicas y patrones detectables.</p> <p>El manejo del álgebra permite a los individuos lidiar mejor con conceptos complejos y abstractos, expresándolos de un modo más sencillo y ordenado mediante la notación algebraica.</p> <p style="text-align: center;">Fuente: <a href="https://concepto.de/algebra/#ixzz7Rnl6KBYX">https://concepto.de/algebra/#ixzz7Rnl6KBYX</a></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente cuestiona a los estudiantes con las siguientes preguntas: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Qué es el álgebra?</li> <li>✓ ¿Por qué es importante el álgebra?</li> <li>✓ ¿Cómo se expresa el álgebra?</li> <li>✓ ¿Qué conocimientos tienen sobre el álgebra?</li> <li>✓ ¿Qué importancia tiene el álgebra en la vida cotidiana?</li> </ul> </li> <li>• Los estudiantes reflexionan sobre la importancia que tiene el álgebra en sus vidas, el docente apunta las ideas en la pizarra y brinda ejemplos del uso del álgebra en la vida cotidiana. A partir de ello se reflexiona sobre la importancia que tiene esta investigación como un medio para mejorar el aprendizaje del álgebra.</li> <li>• Se establece que la sesión de aprendizaje tendrá como propósito identificar los errores algebraicos que poseen los estudiantes de tercer grado de educación secundaria.</li> </ul>	
DESARROLLO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente indica que se aplicará una evaluación diagnóstica a los estudiantes, esta tendrá una duración de 60 minutos. El docente muestra las partes que componen la evaluación y brinda una explicación general.</li> <li>• Se aplica la evaluación diagnóstica a los estudiantes.</li> <li>• Posterior a ello, el docente cuestiona a cada estudiante con las siguientes preguntas:</li> </ul>	70 minutos

	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Qué conceptos algebraicos ha identificado en la evaluación diagnóstica?</li> <li>✓ ¿Qué dificultad ha tenido la evaluación diagnóstica para ustedes?</li> </ul>	
CIERRE	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente plantea las siguientes preguntas de investigación:             <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Qué es el álgebra?</li> <li>✓ ¿Qué es una variable?</li> <li>✓ ¿Qué es una igualdad?</li> </ul> </li> </ul>	20 minutos

#### IV.-Materiales:

- Evaluación diagnóstica sobre errores algebraicos.
- Rúbrica de evaluación de la prueba diagnóstica.
- Materiales de escritorio (lápiz, borrador, tajador, lapiceros, cuaderno, laptop)



## Anexos

## Anexo 1

## Rúbrica para evaluación diagnóstica

Nivel de logro / Elementos	Inicio	Proceso	Logrado	Satisfactorio
<b>Ejercicios</b>	Presenta correctamente menos del 50% de los ejercicios a resolver.	Presenta correctamente el 60% de los ejercicios a resolver	Presenta más del 60% de los ejercicios a resolver.	Presenta correctamente a la totalidad de ejercicios a resolver.
<b>Procedimiento</b>	No refleja ningún razonamiento, resuelve los ejercicios de manera mecánica.	Refleja un razonamiento sin orden, puede hacer los ejercicios, pero no explica la manera en que los resolvió. Utiliza otro proceso obteniendo un resultado razonable.	Refleja un razonamiento sin orden, puede hacer los ejercicios, pero no explica la manera en que los resolvió. Cuando los hace utiliza el proceso adecuado, siguiendo los pasos para resolver los ejercicios de manera correcta.	Refleja un razonamiento detallado y ordenado, utilizando el proceso adecuado, siguiendo los pasos para resolver los ejercicios de manera correcta.
<b>Resultados</b>	Presenta 50% o menos resultados correctos.	Presenta 60 % o más resultados correctos, comete algunos errores debido a cálculos erróneos, y un proceso inadecuado, se salta los pasos para resolverlo.	Presenta 80% o más resultados correctos, comete algunos errores debido a cálculos erróneos, utiliza el proceso adecuado y sigue los pasos para resolverlo.	Presenta el resultado obtenido de los ejercicios y es correcto. Puede corroborarlo dándole sentido.
<b>Total</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>AD</b>

## Sesión de aprendizaje 2

### SESIÓN DE APRENDIZAJE 2: “Aprendemos sobre variable, igualdad y ecuación para resolver problemas de nuestra vida diaria”

#### I.- Datos Informativos:

Docente : Ramos Sernaqué Raúl Eduardo.

Área : Matemática.

Grado : Cuarto de secundaria.

Secciones : B



#### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación

Competencia/capacidad	Desempeños precisados	Evidencia de aprendizaje	Instrumento de valoración
<p>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>• Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>• Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.</li> <li>• Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>	<p>Establece relaciones entre datos, regularidades, valores desconocidos, relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas.</p> <p>Plantea afirmaciones sobre las posibles soluciones a un sistema de ecuaciones lineales u otras relaciones que descubre.</p>	<p>Participación del estudiante en la resolución de ejercicios sobre variable, igualdad y ecuación propuestos durante la sesión de aprendizaje.</p> <p>Ficha de ejercicios sobre variable, igualdad y ecuación.</p>	<p>Lista de cotejo.</p> <p>Solución de la ficha de ejercicios sobre variable, igualdad y ecuación.</p>
<p>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</p>			

Gestiona su aprendizaje de manera autónoma <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> Se desenvuelve en los entornos virtuales generados por las TIC. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Gestiona información del entorno virtual.</li> <li>- Interactúa en entornos virtuales.</li> </ul>	
Enfoques Transversales	Valores/acciones observables
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enfoque orientación al bien común.</li> <li>• Enfoque búsqueda de la excelencia.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Responsabilidad Disposición a valorar y proteger los bienes comunes y compartidos de un colectivo.</li> <li>• Superación personal Disposición a adquirir cualidades que mejorarán el propio desempeño y aumentarán el estado de satisfacción consigo mismo y con las circunstancias</li> </ul>

### III.- Momentos de la sesión:

MOMENTOS	ESTRATEGIAS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente saluda de manera cordial a los estudiantes al iniciar la sesión de aprendizaje.</li> <li>• Se solicita la participación de un estudiante aleatorio para que haga recordar las normas de convivencia establecidas con anterioridad.</li> <li>• El docente presenta el nombre de la sesión: “Aprendemos conocimientos algebraicos para resolver problemas de nuestra vida diaria”.</li> <li>• Se establece que la sesión de aprendizaje tendrá como propósito: Aprender conocimientos algebraicos para resolver problemas de nuestra vida diaria.</li> <li>• El docente comparte la siguiente situación problemática:               <p style="text-align: center;"><b>SITUACIÓN PROBLEMÁTICA</b></p>               Iván sabe que por salud debe beber agua. Él hirvió agua y la guardó en botellas para beber durante el día. Para comenzar, llenó 7,2 litros de agua usando 3 botellas grandes y 5 pequeñas. No llenó otra botella grande porque le faltaban 0,5 litros, pero en cambio, llenó una botella pequeña más y le quedaron 0,3 litros de agua hervida para tomar. ¿Cuánta agua hervida tenía al inicio?             </li> </ul>	

	 <p>Ilustración 1 Imagen recuperada de <a href="https://img.freepik.com/">https://img.freepik.com/</a></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se cuestiona a los estudiantes con las siguientes interrogantes: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ ¿Qué es una variable?</li> <li>▪ ¿Qué es la igualdad?</li> <li>▪ ¿Qué es una ecuación?</li> </ul> </li> <li>• A través de una lluvia de ideas el docente recoge las ideas que los estudiantes tienen en relación con variable, igualdad y ecuación.</li> </ul>	30 minutos
DESARROLLO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente plantea la siguiente actividad (<b>actividad generational 1</b>), los estudiantes y el docente deben desarrollar las siguientes secuencias numéricas: <ul style="list-style-type: none"> <li>30, 27, 24, 21, 18, ...</li> <li>1, 4, 7, 10, 13, 16, ...</li> <li>1, 2, 4, 8, 16, ...</li> </ul> </li> </ul> <p>El docente explica lo siguiente: los resultados de las secuencias corresponden a reglas y patrones ya establecidos. De manera conjunta con los estudiantes extrae los patrones para las secuencias.</p> <p>Posterior a ello el docente plantea la siguiente secuencia (<b>actividad generational 2</b>):</p>  <p>El docente cuestiona a los estudiantes por el patrón que observan en las cantidades de palitos que conforman la figura.</p> <p>Se introduce el concepto de <b>Variable</b>.</p>	70 minutos

¿Qué es una variable?

Una variable es un objeto tangible o intangible que cambia, como, por ejemplo, el clima, la temperatura, entre otros. En los ejemplos propuestos cambia el valor que sigue en las secuencias debido a los patrones. Para la representación de variables empleamos letras o símbolos. Por ejemplo:

$x, y, z$ , entre otros

El docente propone la siguiente expresión (**actividad generational 3**):

*El dinero que me devuelven si compro un kilo de tomate.*

Se cuestiona a los estudiantes con la siguiente pregunta: ¿Cómo expresarían esta expresión empleando una variable? ¿Qué representa esta variable?

Se proponen las siguientes expresiones (**actividad generational 4**), los estudiantes deben expresarlas empleando variables:

- ✓ La temperatura en la ciudad de Piura es  $10^\circ$  grados más alta que en la ciudad de Lima. Si la temperatura de Lima es  $X$ . ¿Cómo representamos la temperatura de Piura?
- ✓ Un agricultor tiene una hectárea de tierra ( $10000 \text{ m}^2$ ) para cultivo. Para la siembra de maíz empleo  $X$  metros de esta hectárea. ¿Cómo representarías la cantidad de metros cuadrados que le quedan para la siembra de otros productos?

El docente y los estudiantes analizan las representaciones con variables que se hicieron de las expresiones.

El docente propone representar la siguiente expresión con variables (**actividad generational 5**):

*Mi edad es el triple de la edad de mi hermano, ¿Cómo representaría mi edad?*

Los estudiantes plantean la expresión  $3x$ , donde  $x$  es la edad de mi hermano y  $3x$  es mi edad.

El docente cuestiona a los estudiantes con la siguiente pregunta: ¿Qué función cumple el número que acompaña a la variable?

Se presenta el siguiente concepto:

¿Qué es un coeficiente algebraico?

Algunas veces verás una variable con un número frente a ella, así:

$3x$

En este ejemplo, 3 es el coeficiente. Los coeficientes son una forma de agrupar variables.  $3x$  es solo una forma compacta de escribir  $x + x + x$ .

	<p>Se plantea la siguiente actividad teniendo en cuenta el modelo de la balanza, esto es explicado por el docente (<b>actividad generational 6</b>):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Una bolsa de papas junto con un bloque madera de 6 kilos pesan lo mismo que tres bolsas de papas (iguales a la primera) y un bloque de madera de 2 kilos. <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ ¿Qué es lo desconocido en esta situación?</li> <li>▪ ¿Qué expresión algebraica utilizarías para representar esta situación?</li> <li>▪ Representa en el modelo de la balanza la situación anterior.</li> </ul> </li> </ul> <p>A partir de esta actividad el docente cuestiona a los estudiantes sobre el concepto que tienen de igualdad.</p> <p style="text-align: center;">¿Qué es la igualdad en álgebra?</p> <p>Igualdad matemática es la proposición de equivalencia existente entre dos expresiones algebraicas conectadas a través del signo “=” en la cual, ambas expresan el mismo valor. La relación de igualdad establecida en una expresión de este tipo se emplea para denotar que dos objetos matemáticos expresan el mismo valor.</p> <p>Veamos un ejemplo:</p> $3x = 18$ <p>En este ejemplo, <math>x</math> adopta el valor de 6 para que se cumpla la igualdad. En otros tipos de ecuaciones la variable puede adoptar más de un valor.</p> <p>A partir del anterior concepto el docente plantea la siguiente actividad (<b>actividad generational 7</b>), para ello explica en qué consiste una balanza, el docente emplea el simulador Equality Explorer (<a href="https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_en.html">https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_en.html</a>):</p> <p style="text-align: center;">Empleamos una balanza</p> <p>Un ovejo pesa veinte kilos más que un perro.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Escribe dos ejemplos de los que pueden ser los pesos del ovejo y del perro.</li> <li>✓ Usa una la balanza para representar esta situación.</li> <li>✓ ¿Cuál sería la ecuación que representa esta situación?</li> </ul>	
--	---	--

	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Si el ovejo y el perro juntos pesan 80 kilos, ¿cuál sería la ecuación que representa esta situación? Representa lo anterior utilizando el modelo de la balanza.</li> <li>✓ ¿Cuánto pesa el perro y cuanto el ovejo? Explica tu respuesta</li> </ul> <p>El docente ayuda a resolver este planteamiento y propone el concepto de ecuación que es similar al de igualdad.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente resuelve junto a los estudiantes la situación significativa planteada en el inicio de la sesión de aprendizaje, para ello se brinda un tiempo de 15 minutos para su resolución.</li> <li>• El docente plantea una ficha de ejercicios para que los estudiantes practiquen, la resolución de estos ejercicios se realiza con la guía del docente quien resuelve dudas y motiva a los estudiantes.</li> </ul>	
CIERRE	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se cuestiona a los estudiantes con las siguientes preguntas: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Qué hemos aprendido hoy?</li> <li>✓ ¿Cómo lo hemos aprendido?</li> <li>✓ ¿Qué debemos mejorar en nuestra forma de aprender?</li> </ul> </li> <li>• Se plantea las siguientes preguntas de investigación <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Qué es la propiedad distributiva?</li> <li>✓ ¿Cómo empleo la propiedad distributiva en el álgebra?</li> </ul> </li> </ul>	20 minutos

#### IV.-Materiales:

- Lista de cotejo.
- Portafolio.
- Materiales de escritorio (lápiz, borrador, tajador, lapiceros, cuaderno y laptop)
- Tablet educativa.
- Simulador Equality Explorer ([https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_en.html))

## ANEXOS

## ANEXO 1

## LISTA DE COTEJO

	ASPECTO PARA OBSERVAR	SÍ	NO	OBSERVACIONES
1	El estudiante respeta las normas de convivencia planteadas al inicio de la sesión de aprendizaje.			
2	El estudiante participa de manera activa durante el desarrollo de las sesiones de aprendizaje.			
3	El estudiante aplica los conceptos básicos relacionados a variable, igualdad y ecuación; a través de la formulación de conclusiones teóricas durante la sesión de aprendizaje.			
4	El estudiante resuelve ejercicios sobre variable, igualdad y ecuación.			

**ANEXO 2****Ficha de ejercicios: Resolvemos problemas algebraicos**

1. ¿Cómo expresarías con signos, letras y números? (**actividad generational 8**)
  - f) Un número cualquiera.
  - g) La suma de dos números distintos.
  - h) El doble de un número.
  - i) La mitad de un número.
  - j) El doble de un número menos 5 es igual a 17.
2. El dueño de un quiosco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días)? (**actividad generational 9**)
3. Según la FAO, un adolescente varón entre 13 a 14 años necesita 1120 kilocalorías (kcal) y 330 gramos de carbohidratos por día para realizar sus actividades diarias. Si Manuel diariamente consume leche, yogurt, frutas, alguna carne y algunas verduras; le faltan aproximadamente 385 kcal y 96 g de carbohidratos para completar lo necesario. Sabemos que el pan y el azúcar son alimentos que se consumen diariamente. También conocemos que cada pan aporta 30 g de carbohidratos y 130 kcal; además, cada cucharadita de azúcar aporta 7 g de carbohidratos y 20 kcal. ¿Cuántos panes y cucharaditas de azúcar se pueden consumir para completar lo necesario en kcal y gramos de carbohidratos? ¿Qué podría pasar si consume más kilocalorías de lo necesario? (**actividad global meta-level 1**)

### Sesión de aprendizaje 3

#### SESIÓN DE APRENDIZAJE 3: “Empleamos la propiedad distributiva para identificar la cantidad de nutrientes que consume nuestro cuerpo”

##### I.- Datos Informativos:

Docente : Ramos Sernaqué Raúl Eduardo.

Área : Matemática.

Grado : Cuarto de secundaria.

Secciones : B

##### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación

Competencia/capacidad	Desempeños precisados	Evidencia de aprendizaje	Instrumento de valoración
<p><i>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>• Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>• Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.</li> <li>• Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>	<p>Evalúa expresiones algebraicas o gráficas (modelo) planteadas para un mismo problema y determina mejor las condiciones del problema.</p>	<p>Participación del estudiante en la sesión de aprendizaje. Ficha de ejercicios.</p>	<p>Lista de cotejo. Resolución de la ficha de ejercicios.</p>
<p>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</p>			
<p>Gestiona su aprendizaje de manera autónoma</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> <p>Se desenvuelve en los entornos virtuales generados por las TIC.</p>			

<ul style="list-style-type: none"> <li>- Gestiona información del entorno virtual.</li> <li>- Interactúa en entornos virtuales.</li> </ul>	
Enfoques Transversales	Valores/acciones observables
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enfoque orientación al bien común.</li> <li>• Enfoque búsqueda de la excelencia.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Responsabilidad Disposición a valorar y proteger los bienes comunes y compartidos de un colectivo.</li> <li>• Superación personal Disposición a adquirir cualidades que mejorarán el propio desempeño y aumentarán el estado de satisfacción consigo mismo y con las circunstancias</li> </ul>

### III.- Momentos de la sesión:

MOMENTOS	ESTRATEGIAS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente saluda a los estudiantes de manera cordial.</li> <li>• El docente hace recordar a los estudiantes las normas de convivencia para ello solicita la participación de un estudiante.</li> <li>• Se presenta el nombre de la sesión: “Empleamos la propiedad distributiva para identificar la cantidad de nutrientes que consume nuestro cuerpo”</li> <li>• Se presenta la siguiente situación significativa a los estudiantes:  <p style="text-align: center;"><b>Calculamos la cantidad de nutrientes que consumimos</b></p> <p>Joaquín es un estudiante de una institución educativa de la región Piura, recientemente visualizó un documental sobre la importancia de la alimentación para el desarrollo correcto de la persona. En este video se detalló que la cantidad de nutrientes consumidas en total serán importantes para identificar el bienestar de la persona.</p> <p>Si se sabe que Joaquín al despertar desayuna una cantidad de 275 calorías, al almorzar consume 350 calorías y en la cena solo 140 calorías. Empleando la propiedad distributiva determina la cantidad de calorías que Joaquín consume en un periodo de 30 días.</p> </li> </ul>	30 minutos

	<div data-bbox="718 190 1021 560" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="558 571 1181 616" style="text-align: center;"><b>Ilustración 2: Recuperado de <a href="https://i.pinimg.com">https://i.pinimg.com</a></b></p> <ul data-bbox="438 660 1356 1075" style="list-style-type: none"> <li>• A raíz de la situación problemática, el docente plantea las siguientes preguntas: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ ¿Qué es la propiedad distributiva?</li> <li>▪ ¿Cómo se usa la propiedad distributiva en el álgebra?</li> </ul> </li> <li>• Se solicita la participación de los estudiantes; a través de una lluvia de ideas el docente recoge ideas previas.</li> <li>• Se establece que la sesión de aprendizaje tendrá como propósito “Usar correctamente la propiedad distributiva en problemas de álgebra lineal”.</li> </ul>	
--	--	--

DESARROLLO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se plantea la siguiente actividad (<b>actividad global meta-level 2</b>):  <p style="text-align: center;">Demostramos la propiedad distributiva</p> <p>Tenemos la siguiente figura donde a, b y c (números reales) son las longitudes de los segmentos.</p> <div data-bbox="798 1388 1037 1556" data-label="Diagram"> </div> <p>Sabiendo que la fórmula para determinar el Área del Rectángulo = Base x Altura.</p> <p>Se propone la siguiente pregunta a los estudiantes: ¿Cómo expresarían la fórmula del área total de la figura geométrica?</p> <p>El docente espera las respuestas de los estudiantes, posterior a ello llegan a la siguiente respuesta.</p> <math display="block">\text{Área total} = c \cdot (a + b)</math> </li> </ul>	70 minutos
------------	---	------------

Sabiendo que el Área Total = Área Rectángulo chico + Área Rectángulo Grande. ¿Cómo escribiríamos el área total?

$$\text{Área total} = c \cdot a + c \cdot b$$

Si estamos hablando de la misma área podemos sacar alguna conclusión. Para reforzar esta conclusión el docente resuelve un ejemplo empleando números naturales.

El docente plantea la siguiente pregunta: ¿Qué propiedad hemos demostrado? ¿Porqué?

- El docente explica el concepto de la propiedad distributiva:

#### Propiedad distributiva

La propiedad distributiva se define como una multiplicación, cuando un factor se reescribe como la suma de dos números, el producto no cambia.

Aplicar la propiedad distributiva nos permite resolver dos multiplicaciones más sencillas.

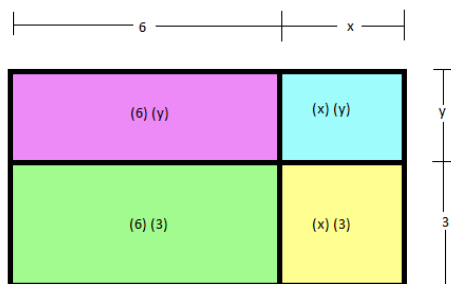
Por ejemplo:

Se puede cambiar  $4 \times 12$  por  $4 \times (10 + 2)$

El 4 se distribuye con el 10 y con el 2, de esta manera se obtiene lo siguiente:

$$4(10) + 4(2)$$

- Se cuestiona a los estudiantes con las siguientes interrogantes:
  - ¿Cómo empleamos la propiedad distributiva en álgebra?
  - ¿Qué ejemplo representa el uso de la propiedad distributiva en álgebra?
  - ¿Qué conclusiones se pueden extraer sobre la propiedad distributiva en el álgebra?
- El docente propone la siguiente operación  $(6 + x) \cdot (3 + y)$



Se llega a concluir lo siguiente:

	$(6 + x) \cdot (3 + y) = 6y + xy + 18 + 3x$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente propone algunos ejercicios algebraicos que emplean la propiedad distributiva, para su resolución se tendrá en cuenta el método anterior (<b>actividad transformational 1</b>). <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>4(x + y)</math></li> <li>▪ <math>2x(x + 2)</math></li> <li>▪ <math>3x(x - 3)</math></li> <li>▪ <math>(x + 2)(y + 1)</math></li> <li>▪ <math>(b + 1)(a - 3)</math></li> </ul> </li> <li>• El docente plantea nuevamente la situación problemática propuesta al inicio de la sesión de aprendizaje, los estudiantes resuelven el problema empleando los conocimientos adquiridos de la propiedad distributiva (<b>actividad generational 10 y transformational 2</b>).</li> <li>• Se propone una ficha de ejercicios prácticos para que los estudiantes practiquen, la resolución de estos ejercicios se realizará en el aula (<b>actividad transformational y global metal-level</b>), el docente brindará acompañamiento y asesoría a los estudiantes.</li> </ul>	
CIERRE	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se cuestiona a los estudiantes con las siguientes preguntas: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Qué hemos aprendido?</li> <li>✓ ¿Cómo lo hemos aprendido?</li> <li>✓ ¿Qué podríamos mejorar en la enseñanza de este tema?</li> </ul> </li> <li>• El docente plantea las siguientes preguntas de investigación: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Investiga sobre el concepto de números recíprocos.</li> <li>✓ ¿Cómo se emplean los números recíprocos en la resolución de problemas algebraicos?</li> </ul> </li> </ul>	20 minutos

#### IV.-Materiales:

- Lista de cotejo.
- Ficha de ejercicios.
- Portafolio.
- Materiales de escritorio (lápiz, lapiceros, borrador, tajador, cuaderno y laptop)

## ANEXOS

## ANEXO 1

## LISTA DE COTEJO

	ASPECTO PARA OBSERVAR	SÍ	NO	OBSERVACIONES
1	El estudiante respeta las normas de convivencia planteadas al inicio de la sesión de aprendizaje.			
2	El estudiante participa de manera activa durante el desarrollo de la sesión de aprendizaje.			
3	El estudiante demuestra conocimiento básico sobre el uso de la propiedad distributiva en un ejercicio que no involucra conocimiento numérico.			
4	El estudiante expresa los conocimientos que tiene con relación al uso de la propiedad distributiva a través de la resolución de ejercicios algebraicos donde se aplique la propiedad distributiva.			

## ANEXO 2

## FICHA DE EJERCICIOS:

## Empleamos la propiedad distributiva para simplificar expresiones algebraicas

1. Representa la siguiente expresión  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  , empleando el cuadro mostrado **(actividad transformational 3)**

Términos algebraicos	$a$	$b$
$a$		
$b$		

2. Simplifica la siguiente expresión algebraica:  $-10x(2y + 3x)$  **(actividad transformational 4)**
3. Simplifica la siguiente expresión algebraica:  $4x^2(3x + 2y - 9)$  **(actividad transformational 5)**
4. Resuelve el siguiente problema **(actividad global meta-level 3):**

Un día después de trabajar en los campos de sembrío, Luis y algunos de los otros trabajadores decidieron ir a comer unos snacks al centro del pueblo. Luis tomó la orden de cada uno y fue al puesto de hamburguesas. Se dio cuenta de que tendría que sacar una bandeja. Cada uno de los trabajadores le dio algunos soles y Luis cree que tiene suficiente dinero para llevar todo.

Cuando llega al puesto, revisa los precios. Luis tiene que comprar 9 hamburguesas. Una hamburguesa sencilla vale s/.1,50 más s/.1.00 si se le quiere agregar queso y salsa. Todos quieren con queso y salsa, por lo que Luis necesita comprar nueve Hamburguesas con queso y salsa.

Según estos números, ¿cuánto gastará Luis? ¿Para cuántas hamburguesas le alcanzará el dinero que tiene?

Luis no está seguro. Tomó una servilleta y pidió un lápiz para poder resolverlo. Tiene s/. 25,00.

¿Le alcanza?

La propiedad distributiva será de gran ayuda para Luis.

## Sesión de aprendizaje 4

### SESIÓN DE APRENDIZAJE 4: “Empleamos estrategias didácticas para el correcto uso de recíprocos en ecuaciones lineales”

#### I.- Datos Informativos:

Docente : Ramos Sernaqué Raúl Eduardo.

Área : Matemática.

Grado : Cuarto de secundaria.

Secciones : B

#### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación

Competencia/capacidad	Desempeños precisados	Evidencia de aprendizaje	Instrumento de valoración
<p>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>• Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>• Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.</li> <li>• Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>	<p>Uso de recíprocos en ecuaciones lineales y resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado.</p>	<p>Participación del estudiante en la sesión de aprendizaje.</p> <p>Ficha de ejercicios sobre uso de recíprocos en álgebra.</p>	<p>Lista de cotejo.</p> <p>Resolución de la ficha de ejercicios.</p>
<p>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</p>			
<p>Gestiona su aprendizaje de manera autónoma</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> <p>Se desenvuelve en los entornos virtuales generados por las TIC.</p>			

<ul style="list-style-type: none"> <li>- Gestiona información del entorno virtual.</li> <li>- Interactúa en entornos virtuales.</li> </ul>	
Enfoques Transversales	Valores/acciones observables
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enfoque orientación al bien común.</li> <li>• Enfoque búsqueda de la excelencia.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Responsabilidad Disposición a valorar y proteger los bienes comunes y compartidos de un colectivo.</li> <li>• Superación personal Disposición a adquirir cualidades que mejorarán el propio desempeño y aumentarán el estado de satisfacción consigo mismo y con las circunstancias</li> </ul>

### III.- Momentos de la sesión:

MOMENTOS	ESTRATEGIAS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente saluda de manera cordial a los estudiantes al iniciar la sesión de aprendizaje.</li> <li>• Se solicita la participación de un estudiante para recordar las normas de convivencia establecidas por consenso en sesiones anteriores.</li> <li>• El docente presenta el nombre de la sesión: “Empleamos estrategias didácticas para el correcto uso de recíprocos en ecuaciones lineales”</li> <li>• Se establece que la sesión de aprendizaje tendrá como propósito: Emplear de manera correcta los recíprocos en ecuaciones lineales.</li> <li>• El docente muestra el siguiente video a través de las tablets que poseen los estudiantes: “¿Cuál es el recíproco de un número?” (Recuperado de <a href="https://www.youtube.com/watch?v=rGAuX-Xb6Jc">https://www.youtube.com/watch?v=rGAuX-Xb6Jc</a>)</li> </ul>	20 minutos



- Se cuestiona a los estudiantes con las siguientes preguntas:
  - ¿Tenían conocimiento de este concepto anteriormente?
  - ¿Qué es un recíproco? Proporciona ejemplos.
  - ¿Cómo emplearíamos los recíprocos en álgebra? Menciona un ejemplo.

El docente realiza una discusión con los estudiantes sobre las respuestas a las preguntas, los estudiantes proponen ideas de cómo pueden ser usados los recíprocos en el álgebra.

- El docente explica los conceptos relacionados al uso de recíprocos en álgebra, se explica el aspecto teórico.  
El docente explica que todo número tiene dos opuestos: el [inverso aditivo](#) y el inverso multiplicativo, también conocido como recíproco.  
Los números recíprocos tienen que ver con la [multiplicación](#) y la [división](#).  
Para entenderlos, debes comprender primero que cualquier número entero puede ser escrito como una fracción con denominador 1. Por ejemplo, 6 puede ser escrito también como 6/1, es decir:

$$6 = \frac{6}{1}$$

Las variables también pueden ser escritas de la misma forma, por ejemplo, X como X/1, o sea:

$$x = \frac{x}{1}$$

DESARROLLO	<p>Todos los números tienen un inverso multiplicativo (<a href="#">excepto el cero</a>). No importa qué tan grande o pequeño sea, al multiplicarlo por su recíproco siempre da 1.</p> <p>El docente brinda más ejemplos del uso de recíprocos. Se brindan estos ejemplos empleando el aplicativo Recíproco de un número (<b>actividad global meta-level 4</b>)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor explica que en <a href="#">álgebra</a>, los inversos multiplicativos o recíprocos nos sirven para cancelar valores en una ecuación.</li> </ul> <p>Se presentan tres ejemplos más sobre el uso de recíprocos en el álgebra. La resolución de estos ejemplos se realiza de manera conjunta con los estudiantes (<b>actividad generational 11</b>).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>3x = 18</math></li> <li>▪ <math>5x = 75</math></li> <li>▪ <math>6x + 12 = 48</math></li> <li>▪ <math>9x - 3 = 78</math></li> <li>▪ <math>4x + 20 = 80 + 2x</math></li> </ul> <p>El docente solicita a los estudiantes que creen tres ejemplos del uso de recíprocos en álgebra.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se proponen un conjunto de ejercicios a los estudiantes, estos serán trabajados de manera grupal, para ello se dividirá los estudiantes en grupos de dos, el docente apoyará resolviendo dudas (<b>actividad generational 12</b>).</li> </ul> <p>Cada grupo de estudiantes tendrán 20 minutos para resolver los problemas propuestos, posterior a ello cada grupo deberá exponer a la clase la resolución de un problema aleatorio.</p> <p>Los estudiantes discuten sobre los métodos de resolución empleados y como se utilizan los recíprocos en estos.</p>	80 minutos
CIERRE	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se cuestiona a los estudiantes con las siguientes preguntas: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Qué hemos aprendido hoy?</li> <li>✓ ¿Cómo lo hemos aprendido?</li> <li>✓ ¿Qué les pareció la metodología empleada en la enseñanza de estos aprendizajes?</li> </ul> </li> <li>• Se establecen las siguientes preguntas de investigación:</li> </ul>	20 minutos

	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Investiga sobre la ley de cancelación.</li> <li>✓ ¿Cómo se emplea la ley de cancelación en el álgebra?</li> </ul> <p>Los estudiantes investigan y comparten sus ideas en la siguiente sesión durante la lluvia de ideas.</p>	
--	---	--

#### IV.-Materiales:

- Lista de cotejo.
- Portafolio.
- Materiales de escritorio (lápiz, borrador, tajador, lapiceros, cuaderno y laptop)
- Tablet educativa.
- Applet “Recíproco de un número”  
([http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/applets/matematicas\\_IV/Applets\\_Geogebra//reciproco.html](http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/applets/matematicas_IV/Applets_Geogebra//reciproco.html))

#### ANEXOS

#### ANEXO 1

#### LISTA DE COTEJO

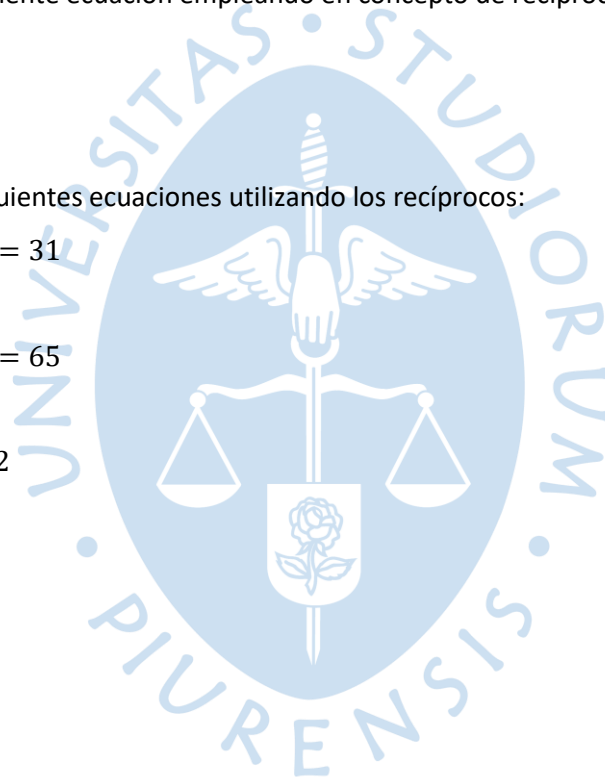
	ASPECTO PARA OBSERVAR	SÍ	NO	OBSERVACIONES
1	El estudiante respeta las normas de convivencia planteadas al inicio de la sesión de aprendizaje.			
2	El estudiante participa de manera activa durante el desarrollo de las sesiones de aprendizaje.			
3	El estudiante demuestra sus conocimientos en relación con el uso de recíprocos en las matemáticas basadas en aritmética.			
4	El estudiante resuelve ecuaciones de primer grado utilizando los recíprocos.			

## ANEXO 2

## FICHA DE EJERCICIOS:

Empleamos la teoría de recíprocos para resolver ecuaciones lineales (actividad generational 12)

1. ¿Qué es un recíproco?
  
2. ¿Cómo puedo emplear los recíprocos en álgebra?
  
3. Resuelve la siguiente ecuación empleando en concepto de recíprocos  $10x = 120$
  
4. Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando los recíprocos:
  - a)  $4x - 5 = 31$
  
  - b)  $6x + 5 = 65$
  
  - c)  $8x = 72$



## Sesión de aprendizaje 5

### SESIÓN DE APRENDIZAJE 5: “Aprendemos el uso correcto de la ley de cancelación en problemas de álgebra”

#### I.- Datos Informativos:

Docente : Ramos Sernaqué Raúl Eduardo.

Área : Matemática.

Grado : Cuarto de secundaria.

Secciones : B

#### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación

Competencia/capacidad	Desempeños precisados	Evidencia de aprendizaje	Instrumento de valoración
<p><i>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>• Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>• Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.</li> <li>• Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>	<p>Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes. Transforma esas relaciones a expresiones algebraicas.</p>	<p>Participación del estudiante en la sesión de aprendizaje.</p>	<p>Lista de cotejo.</p>
<p>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</p>			

Gestiona su aprendizaje de manera autónoma <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> Se desenvuelve en los entornos virtuales generados por las TIC. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Gestiona información del entorno virtual.</li> <li>- Interactúa en entornos virtuales.</li> </ul>	
Enfoques Transversales	Valores/acciones observables
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enfoque orientación al bien común.</li> <li>• Enfoque búsqueda de la excelencia.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Responsabilidad Disposición a valorar y proteger los bienes comunes y compartidos de un colectivo.</li> <li>• Superación personal Disposición a adquirir cualidades que mejorarán el propio desempeño y aumentarán el estado de satisfacción consigo mismo y con las circunstancias</li> </ul>

### III.- Momentos de la sesión:

MOMENTOS	ESTRATEGIAS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente saluda de manera cordial a los estudiantes al iniciar la sesión de aprendizaje.</li> <li>• Se solicita el apoyo de un estudiante para recordar las normas de convivencia preestablecidas en sesiones de aprendizaje anteriores.</li> <li>• El docente presenta el nombre de la sesión: “Aprendemos el uso correcto de la ley de cancelación en problemas de álgebra”</li> <li>• Se establece que la sesión de aprendizaje tendrá como propósito: Usar correctamente la ley de cancelación en problemas de álgebra.</li> <li>• El docente muestra el siguiente ejercicio a los estudiantes:               <math display="block">2x + 10 = 24 + 10</math> </li> <li>• Se les cuestiona a los estudiantes con las siguientes interrogantes:               <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ ¿Saben resolver este tipo de ejercicios?</li> <li>▪ ¿Qué método emplearían para resolver este ejercicio?</li> </ul> </li> <li>• El docente emplea la lluvia de ideas para recoger todas las respuestas de los estudiantes. Posterior a ello, se establecen conclusiones que son anotadas por los estudiantes en sus cuadernos.</li> </ul>	20 minutos

DESARROLLO	<ul style="list-style-type: none"> <li>El docente explica el método de la balanza que ha sido empleado en sesiones de aprendizaje anteriores (<b>actividad global meta-level 5</b>). Una ecuación es como una balanza en equilibrio: en la balanza se exhiben dos objetos del mismo peso en ambos lados mientras que en la ecuación se exhiben dos números o expresiones del mismo valor en ambos lados. El docente representa una igualdad numérica <math display="block">5 = 5</math>Para ello emplea el simulador Equality explorer (<a href="https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_en.html">https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_en.html</a>) Esta representación se realiza empleando valores de unidad. Se extrae dos unidades de cada parte de la balanza, el docente comprueba que el equilibrio se mantiene, es decir se mantiene la igualdad.</li> <li>El docente introduce y explica la ley de cancelación desde el punto de vista aritmético: <b>Para la suma y resta:</b> todo número sumado con su contrario entero se "cancela". En realidad, esta es la aplicación de dos leyes. Todo número sumado con 0 no se altera y todo número sumado con su inverso es igual a 0. <math display="block">-8 + 8 = 0</math><math display="block">-2 + 2 - 1 = -1</math>Se solicita que los estudiantes presenten cuatro ejemplos de este tipo de cancelación. <b>Para la multiplicación y división:</b> todo número multiplicado con su inverso se "cancela". En realidad, esta es la aplicación de dos leyes. Todo número multiplicado por 1 no se altera y todo número diferente de 0 multiplicado por su inverso es igual a 1. <math display="block">5 \left( \frac{1}{5} \right) = 1</math>Se solicita que los estudiantes presenten dos ejemplos de este tipo de cancelación, para ello deberán emplear el simulador antes empleado.</li> <li>El docente propone la siguiente ecuación <math>2x + 5 = 14 + 5</math>, se solicita que los estudiantes representen esta ecuación empleando el simulador brindado y traten de darle solución (<b>actividad transformational 6</b>). Luego se plantean las siguientes interrogantes:</li> </ul>	80 minutos
------------	--	------------

	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ ¿Cómo resolvimos la ecuación?</li> <li>▪ ¿Qué función cumple la ley de la cancelación en este caso?</li> <li>▪ ¿Cómo empleamos la ley de la cancelación en álgebra?</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se solicita que los estudiantes formulen dos ejemplos de ecuaciones empleando el simulador (<b>actividad transformational 7</b>).</li> <li>• El docente plantea el ejercicio propuesto al inicio de la sesión de aprendizaje y solicita la participación de los estudiantes para su resolución empleando el método de cancelación (<b>actividad transformational 8</b>):             <math display="block">2x + 10 = 24 + 10</math> <p>Al finalizar de resolver el ejercicio, el docente establece el concepto de ley de cancelación en el álgebra.</p> </li> <li>• Se plantean los siguientes ejercicios (<b>actividad transformational 9</b>):             <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ <math>2x - 8 = -8 - x + 48</math></li> <li>✓ <math>2x - 1 = 6 + x - 1</math></li> <li>✓ <math>3x - 10 = 66 + 6x - 10</math></li> </ul> <p>El docente proporciona un tiempo de 20 minutos para la resolución de estos ejercicios. Posterior a ello se plantean las siguientes interrogantes a los estudiantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ ¿Qué métodos empleaste para la resolución de los ejercicios?</li> <li>▪ ¿Qué conocimientos matemáticos antes estudiados tuviste que emplear?</li> </ul> </li> </ul>	
CIERRE	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se cuestiona a los estudiantes con las siguientes preguntas:             <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Qué hemos aprendido hoy?</li> <li>✓ ¿Cómo lo hemos aprendido?</li> <li>✓ ¿Qué podemos mejorar para aprender mejor?</li> </ul> </li> <li>• Se establecen la siguiente pregunta de investigación:             <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ ¿Cómo empleamos el álgebra en nuestra vida cotidiana?</li> <li>✓ ¿Qué conocimientos algebraicos hemos aprendido?</li> </ul> </li> </ul>	20 minutos

#### IV.-Materiales:

- Lista de cotejo.
- Portafolio.
- Materiales de escritorio (lápiz, borrador, tajador, lapiceros, cuaderno y laptop)
- Table educativa.

- Simulador Equality Explorer ([https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_en.html))

### ANEXOS

#### ANEXO 1

##### LISTA DE COTEJO

	ASPECTO PARA OBSERVAR	SÍ	NO	OBSERVACIONES
1	El estudiante respeta las normas de convivencia planteadas al inicio de la sesión de aprendizaje.			
2	El estudiante participa de manera activa durante el desarrollo de las sesiones de aprendizaje.			
3	El estudiante demuestra dominio de conocimientos aritméticos que son complementarios a los algebraicos.			
4	El estudiante expresa los conocimientos que tiene en relación con el tema de la cancelación en problemas algebraicos.			
5	Los ejercicios algebraicos creados por los estudiantes corresponden a la teoría de cancelación vista en la sesión de aprendizaje.			

## Sesión de aprendizaje 6

### SESIÓN DE APRENDIZAJE 6: “Reflexionamos sobre los aprendizajes logrados y la importancia del álgebra en nuestra formación”

#### I.- Datos Informativos:

Docente : Ramos Sernaqué Raúl Eduardo.

Área : Matemática.

Grado : Cuarto de secundaria.

Secciones : B

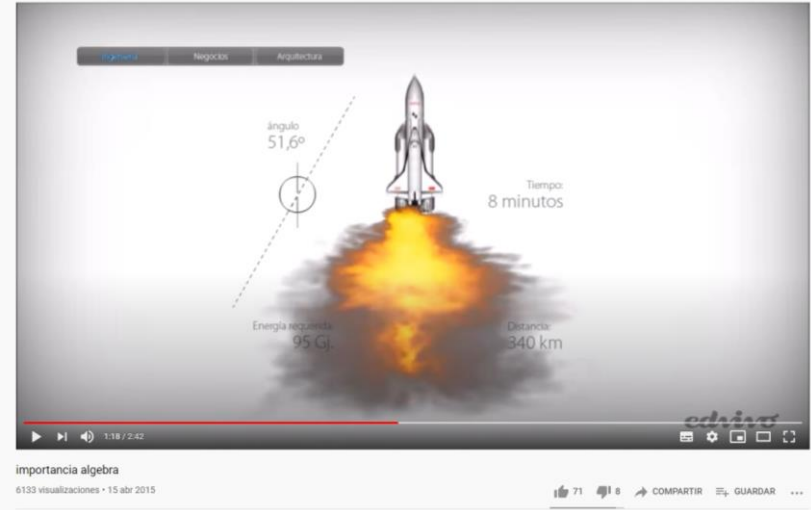
#### II.- Propósitos de aprendizaje, criterios, evidencias de aprendizaje e instrumentos de evaluación

Competencia/capacidad	Desempeños precisados	Evidencia de aprendizaje	Instrumento de valoración
<p><i>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.</li> <li>• Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.</li> <li>• Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.</li> <li>• Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.</li> </ul>	<p>Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes.</p> <p>Evalúa si la expresión algebraica o gráfica (modelo) que planteó representó todas las condiciones del problema: datos, términos desconocidos, regularidades, relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes.</p>	<p>Examen postest aplicado para identificar errores algebraicos en los estudiantes de tercer grado de secundaria.</p>	<p>Rúbrica de evaluación de la prueba postest.</p>
<p>COMPETENCIAS TRANSVERSALES, CAPACIDADES Y OTRAS COMPETENCIAS RELACIONADAS</p>			

Gestiona su aprendizaje de manera autónoma <ul style="list-style-type: none"> <li>- Organiza acciones estratégicas para alcanzar sus metas</li> <li>- Monitorea y ajusta su desempeño durante el proceso de aprendizaje</li> </ul> Se desenvuelve en los entornos virtuales generados por las TIC. <ul style="list-style-type: none"> <li>- Gestiona información del entorno virtual.</li> <li>- Interactúa en entornos virtuales.</li> </ul>	
Enfoques Transversales	Valores/acciones observables
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Enfoque orientación al bien común.</li> <li>• Enfoque búsqueda de la excelencia.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Responsabilidad Disposición a valorar y proteger los bienes comunes y compartidos de un colectivo.</li> <li>• Superación personal Disposición a adquirir cualidades que mejorarán el propio desempeño y aumentarán el estado de satisfacción consigo mismo y con las circunstancias</li> </ul>

### III.- Momentos de la sesión:

MOMENTOS	ESTRATEGIAS	TIEMPO
INICIO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente saluda cordialmente a los estudiantes al iniciar la sesión de aprendizaje.</li> <li>• Se recuerda a los estudiantes las normas de convivencia establecidas por consenso entre el docente y los estudiantes.</li> <li>• El docente presenta el nombre de la sesión: “Reflexionamos sobre los aprendizajes logrados y la importancia del álgebra en nuestra formación”</li> <li>• Se establece que la sesión de aprendizaje tratará sobre el tema de la importancia que tiene el álgebra en nuestra formación y los aprendizajes desarrollados en el transcurso de las sesiones de aprendizaje.</li> <li>• El docente comparte con los estudiantes el siguiente video: Importancia del álgebra (Recuperado de <a href="https://www.youtube.com/watch?v=y5c_LTI0TRQ">https://www.youtube.com/watch?v=y5c_LTI0TRQ</a>)</li> </ul>	30 minutos

	 <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se cuestiona a los estudiantes con las siguientes interrogantes: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ ¿Qué importancia tiene el álgebra en nuestras vidas?</li> <li>▪ ¿Qué conocimientos has desarrollado del álgebra en este tiempo?</li> <li>▪ ¿Qué diferencias evidencias en relación al dominio del álgebra después de la aplicación de las actividades didácticas?</li> </ul> </li> </ul>	
DESARROLLO	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El docente indica que se aplicará una evaluación de salida a todos los estudiantes, para ello deberán acceder a la plataforma CLASSROOM de Google y resolver las preguntas de la tarea pendiente DIAGNÓSTICO.</li> <li>• Se señala que esta tendrá una duración de 1 hora, los estudiantes tendrán dos medios para el envío de las respuestas, el primero a través de la plataforma y el segundo a través de fotos por el aplicativo de WhatsApp. Los envíos se recibirán hasta 10 minutos pasada la hora de resolución, luego de este tiempo no se aceptarán respuestas.</li> </ul>	70 minutos
CIERRE	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se cuestiona a los estudiantes sobre las diferencias que han experimentado al rendir nuevamente el examen.</li> <li>• El docente reflexiona con los estudiantes sobre los aprendizajes logrados en relación con el álgebra.</li> </ul>	20 minutos

#### IV.-Materiales:

- Examen postest.
- Rúbrica de evaluación de la prueba de salida.
- Presentación elaborada empleando PowerPoint.
- Equipo multimedia (laptop, cámara, auriculares)
- Materiales de escritorio (cuaderno y laptop)

## Anexo

## Anexo 1

## Rúbrica para evaluación de salida

Nivel de logro / Elementos	Inicio	Proceso	Logrado	Satisfactorio
<b>Ejercicios</b>	Presenta correctamente menos del 50% de los ejercicios a resolver.	Presenta correctamente el 60% de los ejercicios a resolver	Presenta más del 60% de los ejercicios a resolver.	Presenta correctamente la totalidad de ejercicios a resolver.
<b>Procedimiento</b>	No refleja ningún razonamiento, resuelve los ejercicios de manera mecánica.	Refleja un razonamiento sin orden, puede hacer los ejercicios, pero no explica la manera en que los resolvió. Utiliza otro proceso obteniendo un resultado razonable.	Refleja un razonamiento sin orden, puede hacer los ejercicios, pero no explica la manera en que los resolvió. Cuando los hace utiliza el proceso adecuado, siguiendo los pasos para resolver los ejercicios de manera correcta.	Refleja un razonamiento detallado y ordenado, utilizando el proceso adecuado, siguiendo los pasos para resolver los ejercicios de manera correcta.
<b>Resultados</b>	Presenta 50% o menos resultados correctos.	Presenta 60 % o más resultados correctos, comete algunos errores debido a cálculos erróneos, y un proceso inadecuado, se salta los pasos para resolverlo.	Presenta 80% o más resultados correctos, comete algunos errores debido a cálculos erróneos, utiliza el proceso adecuado y sigue los pasos para resolverlo.	Presenta el resultado obtenido de los ejercicios y es correcto. Puede corroborarlo dándole sentido.
<b>Total</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>AD</b>

## Anexos

### Anexo A. Validaciones de evaluación diagnóstica



**UNIVERSIDAD DE PIURA**  
Facultad de Ciencias de la Educación

**FICHA DE VALIDACIÓN  
DEL INSTRUMENTO**

#### I. INFORMACIÓN GENERAL

- 1.1 Nombres y apellidos del validador: José Luis Chero Ipanaqué  
1.2 Cargo e institución donde labora: IE Juan de Mori de Catacaos  
1.3 Nombre del instrumento evaluado: Prueba diagnóstica.  
1.4 Autor del instrumento: Raúl Eduardo Sernaqué ramos.

#### II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

- D** - Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
- R** - Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
- B** - Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.			x	Los ítems propuestos están en relación a la matriz de evaluación
CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.		x		El ítem 4a utiliza el signo "x" para expresar una operación, pero a la vez está comprendido como variable de la ecuación
REDACCIÓN	Los ítems están bien escritos, respetando las reglas ortográficas y de redacción.			x	Muestra respeto de las reglas de ortografía y enfoca el orden de las ideas.
<b>CONTEO TOTAL</b> (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)					
		<b>C</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>Total</b>

**Coefficiente de validez** :

$$\frac{A + B + C}{9} = 0,89$$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

**III. CALIFICACIÓN GLOBAL**

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el Intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

**Validez buena**



Firma del Experto

José Luis Chero I  
DNI 02771134

Piura, 15 de Mayo de 2022.





UNIVERSIDAD DE PIURA  
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN  
DEL INSTRUMENTO

### I. INFORMACIÓN GENERAL

- 1.1 Nombres y apellidos del validador: *Graciela Hermelinda Anton Martiniz*  
 1.2 Cargo e institución donde labora: *IE Almirante Miguel Grau Suyo*  
 1.3 Nombre del instrumento evaluado: *Evaluación Diagnóstica*  
 1.4 Autor del instrumento: *Raul Eduardo Ramos Arnaqui*

### II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. D - Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. R - Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. B - Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<i>Pregunta 7 especificar grado de ecuación</i>
REDACCIÓN	Los ítems están bien escritos, respetando las reglas ortográficas y de redacción.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
<b>CONTEO TOTAL</b> (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)		<b>C</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>Total</b>

Coefficiente de validez :  $\frac{A+B+C}{9} = 0,89$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

### III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el Intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

*Validez Buena.*

*H. Arnaqui*  
Firma del Experto

Piura, (día) de (mes) de (año).

*16 de Mayo del 2022.*



UNIVERSIDAD DE PIURA  
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN  
DEL INSTRUMENTO

### I. INFORMACIÓN GENERAL

- 1.1 Nombres y apellidos del validador: JOSE FELIPE SANCHEZ CAJO  
 1.2 Cargo e institución donde labora: I.E ALMIRANTE MIGUEL GRAU SUYA  
 1.3 Nombre del instrumento evaluado: EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA  
 1.4 Autor del instrumento: RAUL EDUARDO RAMOS SERNAQUE

### II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. D - Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. R - Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. B - Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
REDACCIÓN	Los ítems están bien escritos, respetando las reglas ortográficas y de redacción.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)			2	6	8
		C	B	A	Total

Coefficiente de validez :  $\frac{A+B+C}{9} = \frac{8}{9} = 0,89$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

### III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el Intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez Buena

Piura, (día) de (mes) de (año).

PIURA, 04 DE MAYO DE 2022.

Firma del Experto

*José Felipe Sánchez Cajo*  
LIC. EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

Anexo B. Validaciones de evaluación de salida



UNIVERSIDAD DE PIURA  
Facultad de Ciencias de la Educación

FICHA DE VALIDACIÓN  
DEL INSTRUMENTO

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Nombres y apellidos del validador: JOSE FELIPE SANCHEZ CAJO  
 1.2 Cargo e institución donde labora: I.E. ALMIRANTE MIGUEL GRON-SUJO.  
 1.3 Nombre del instrumento evaluado: PRUEBA DE SALIDA  
 1.4 Autor del instrumento: RAÚL EDUARDO RAMOS JERNAQUE

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. D - Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. R - Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. B - Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
REDACCIÓN	Los ítems están bien escritos, respetando las reglas ortográficas y de redacción.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)			2	6	8
		C	B	A	Total

Coefficiente de validez :  $\frac{A+B+C}{9} = 0,89$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez Buena.

Lic. José Felipe Sánchez Cajo  
 COORDINADOR ACADÉMICO DE CIENCIAS  
 Firma del Experto

Piura, (día) de (mes) de (año).  
 Piura, 05 de Mayo de 2022



I. INFORMACIÓN GENERAL

- 1.1 Nombres y apellidos del validador: Graciela Hermelinda Antón Martínez  
 1.2 Cargo e institución donde labora: I.E. ALMIRANTE MIGUEL GRAU-SUYO  
 1.3 Nombre del instrumento evaluado: PRUEBA DE SALIDA  
 1.4 Autor del instrumento: RAÚL EDUARDO RAMOS SERNAQUE

II. ASPECTOS DE VALIDACIÓN

Revisar cada uno de los ítems del instrumento y marcar con un aspa dentro del recuadro (X), según la calificación que asigna a cada uno de los indicadores.

1. D - Deficiente (Si menos del 30% de los ítems cumplen con el indicador).
2. R - Regular (Si entre el 31% y 70% de los ítems cumplen con el indicador).
3. B - Buena (Si más del 70% de los ítems cumplen con el indicador).

Aspectos de validación del instrumento		1	2	3	Observaciones Sugerencias
Criterios	Indicadores	D	R	B	
PERTINENCIA	Los ítems miden lo previsto en los objetivos de investigación.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
CLARIDAD	Los ítems están redactados en un lenguaje entendible para los sujetos a evaluar.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<i>Especificar grado de ecuación</i>
REDACCIÓN	Los ítems están bien escritos, respetando las reglas ortográficas y de redacción.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
CONTEO TOTAL (Realizar el conteo de acuerdo a puntuaciones asignadas a cada indicador)			2	6	8
		C	B	A	Total

Coefficiente de validez :  $\frac{A+B+C}{9} = 0,89$

Intervalos	Resultado
0,00 – 0,49	Validez nula
0,50 – 0,59	Validez muy baja
0,60 – 0,69	Validez baja
0,70 – 0,79	Validez aceptable
0,80 – 0,89	Validez buena
0,90 – 1,00	Validez muy buena

III. CALIFICACIÓN GLOBAL

Ubicar el coeficiente de validez obtenido en el Intervalo respectivo y escriba sobre el espacio el resultado.

Validez Buena

*Graciela H Antón Martínez*  
Firma del Experto

Graciela H Antón Martínez

Piura, (día) de (mes) de (año).  
18 de Mayo del 2022.