



UNIVERSIDAD
DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Definiciones y representaciones gráficas de polígono. Un estudio del conocimiento evidenciado por futuros profesores de matemática de secundaria

Tesis para optar el Título de
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física

Jocelyne Graciela Mendoza Gonzales

Asesor:
Dra. Emma Lizelly Carreño Peña

Piura, febrero de 2025

Declaración Jurada de Originalidad del Trabajo Final

Yo, Jocelyne Graciela Mendoza Gonzales, egresado del Programa Académico de Ciencias de la Educación, Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, identificado(a) con DNI: 47838675, declaro que:

Soy autor del trabajo final titulado:

“Definición y representaciones gráficas de polígono. Un estudio del conocimiento evidenciado por futuros profesores de matemática de secundaria”

El mismo que presento bajo la modalidad de Tesis para optar el Título profesional de Licenciado en Educación. Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física.

El texto de mi trabajo final es original y no vulnera los derechos de terceros o, de ser el caso, derechos de los coautores, incluidos los derechos de propiedad intelectual, datos personales, entre otros. En tal sentido, el texto de mi trabajo final no ha sido plagiado total ni parcialmente, para lo cual, he respetado las normas internacionales de citas y referencias de las fuentes consultadas. Asimismo, el texto del trabajo final que presento no ha sido publicado ni presentado antes en cualquier medio electrónico o físico; y que la investigación, los resultados, datos, conclusiones y demás información presentada que atribuyo a mi autoría son veraces.

En caso de detectarse el incumplimiento de lo declarado asumo frente a terceros, la Universidad de Piura y/o la Administración Pública toda responsabilidad que pueda derivarse por el trabajo final presentado. Lo señalado incluye responsabilidad pecuniaria incluido el pago de multas u otros por los daños y perjuicios que se ocasionen.

La asesoría del trabajo estuvo a cargo de los siguientes docentes de la Universidad de Piura:

- Dra. Emma Lizelly Carreño Peña, identificado con DNI: 41607683

Declaro que:

Luego de haber empleado el software de coincidencia Turnitin, revisado las fuentes de información señaladas por el autor, y en razón de mi (nuestra) experiencia como investigador(es), declaro (declaramos) que las ideas expuestas en el trabajo final alcanzan las condiciones de calidad, integridad y originalidad acorde a los objetivos institucionales y estándares en materia de investigación. Finalmente, no asumo (asumimos) responsabilidad por la posible vulneración de derechos de autor en el trabajo final referido, pues tal responsabilidad es exclusiva del autor.

Fecha: 28/01/2025.



Firma del autor²



Firma del asesor²

² Firma idéntica al DNI. No se admite digital, salvo certificado.

Dedicatoria

A mis queridos padres, Jorge Luis Mendoza León y Graciela Gonzáles Moscol, quienes han sido mi familia y mi hogar en todo momento. Su amor y dedicación han sido el cimiento sobre el que he construido mi vida y mi carrera. Gracias por ser mis pilares y por estar siempre a mi lado

A mis hermanos, Lesly y Cristhian, quienes han sido mi familia y mis amigos en todo momento. Su amor y apoyo han sido un regalo para mí. Gracias por ser mis compañeros de aventuras y por estar siempre a mi lado.

A mi asesora, Emma Lizelly Carreño Peña, quien ha sido una guía y una mentora invaluable en este proceso. Su sabiduría y experiencia han enriquecido mi investigación y me han ayudado a crecer como profesional. Muchas gracias por su dedicación y apoyo.

Esta tesis es un reflejo de la pasión y el esfuerzo que he puesto en ella. Espero que sea un tributo a la confianza que han depositado en mí y un agradecimiento por su amor y apoyo incondicional.



Resumen

La presente investigación tiene como objetivo describir el conocimiento que evidencian futuros profesores de matemática de secundaria, respecto del concepto de polígono, a partir del análisis de sus definiciones y representaciones gráficas. Este estudio tiene un enfoque cualitativo y se realizó con 20 futuros profesores de matemática que cursaban la asignatura Práctica Pre Profesional B. Se utilizó un cuestionario con tareas de análisis y construcción de definiciones, así como de trazado de representaciones gráficas para ejemplificar dichas definiciones. El estudio de los datos se hace a partir del análisis de contenido. Los resultados muestran que los futuros profesores presentan conocimientos erróneos o parcializados sobre las definiciones y representaciones gráficas de polígono. También evidenciaron dificultades al analizar definiciones dadas de polígono, construir una definición verbal precisa, representar gráficamente qué es y qué no es un polígono e identificar características de una buena definición matemática. Estos resultados sugieren la necesidad de implementar tareas formativas que promuevan la reflexión sobre el conocimiento matemático en la formación de profesores. Además, destacan la importancia de comprender los conceptos básicos, como los polígonos, para mejorar la enseñanza de la geometría en secundaria. Esta investigación tiene un carácter diagnóstico que puede contribuir a la mejora de la formación de profesores y, en consecuencia, a la calidad de la educación matemática en secundaria.

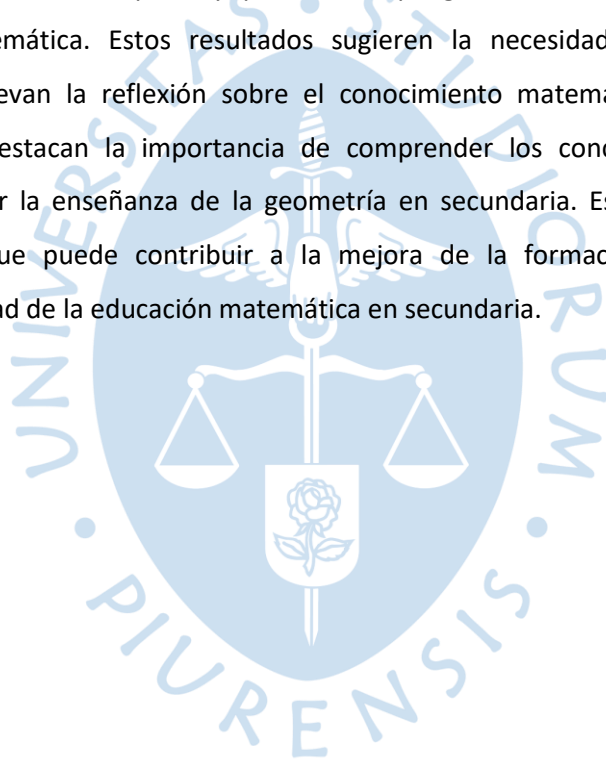


Tabla de contenido

Introducción.....	10
Capítulo 1. Planteamiento de la investigación	12
1.1 Caracterización de la problemática.....	12
1.2 Objetivos general y específicos	14
1.3 Antecedentes	14
1.3.1 <i>Antecedentes locales</i>	14
1.3.2 <i>Antecedentes nacionales</i>	15
1.3.3 <i>Antecedentes internacionales</i>	15
1.4 Justificación de la investigación	17
Capítulo 2. Marco teórico	19
2.1 Formación de conceptos geométricos.....	19
2.2 Importancia de la definición y la práctica de definir en matemática.....	22
2.3 Definición de polígono en la Educación Peruana: presencia en el Currículo Nacional.....	23
2.4 Definición de polígono según libros de texto.....	29
2.5 Conocimiento especializado del profesor de matemáticas: el modelo MTSK.....	32
Capítulo 3. Aspectos metodológicos.....	36
3.1 Características de la investigación	36
3.2 Contexto e informantes de la investigación.....	36
3.3 Recogida de información: Prueba de conocimiento disciplinar y didáctico	37
3.4. Análisis de los datos	39
Capítulo 4. Resultados y discusión	45
4.1 Conocimiento especializado al analizar las definiciones dadas.....	45
4.1.1 <i>Análisis de la definición de Pablo</i>	46
4.1.2 <i>Análisis de la definición de Ana</i>	50
4.1.3 <i>Análisis de la definición de Gaby</i>	52
4.1.4 <i>Análisis de la definición de Luis</i>	54
4.1.5 <i>Síntesis</i>	57
4.2 Conocimiento especializado al construir una definición de polígono.....	58
4.2.1 <i>Características y propiedades que atribuye a polígono</i>	58
4.2.2 <i>Características de una definición matemática</i>	63
4.2.3 <i>Síntesis</i>	69
4.3 Conocimiento especializado al representar polígonos y no polígonos.....	70
4.3.1 <i>Imagen conceptual de polígono</i>	70
4.3.2 <i>Características de las representaciones gráficas</i>	75

4.3.3 <i>Coherencia entre las representaciones de polígono y su definición construida</i>	78
4.3.4 <i>Síntesis</i>	81
4.4 Conocimiento especializado sobre las características que debe tener una definición matemática.	82
Conclusiones	87
Referencias	89



Lista de tablas

Tabla 1 Ejemplos de elementos estructurantes y características críticas en una definición de polígono	21
Tabla 2 Desempeños de la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización asociados al concepto de polígono	25
Tabla 3 Definiciones de polígono por distintas editoriales.....	32
Tabla 4 Subdominios, categorías y descriptores del MTSK respecto del concepto polígono analizados en el cuestionario	39
Tabla 5 Elementos estructurantes y características críticas en los polígonos trazados	40
Tabla 6 Características en los ejemplos de NO polígonos.....	41
Tabla 7 Clasificación de representaciones graficas en estereotipadas y no estereotipadas.....	42
Tabla 8 Análisis de las definiciones que construyen los futuros profesores a partir de los estudios de Pascual et al. (2019) y el de Zazkis y Leikin (2008).....	43
Tabla 9 Valoración de las características que debe tener una buena definición matemática	44
Tabla 10 Definiciones elegidas por los futuros profesores para analizarlas.....	45
Tabla 11 Elementos estructurantes y características criticas analizados en la definición construida..	60
Tabla 12 Elementos accesorios y características no críticas de polígono analizados en la definición construida.....	62
Tabla 13 Análisis de la integración de los estudios de Pascual et al. (2019) y el de Zazkis y Leikin(2008) para el análisis de las definiciones que construyen los futuros profesores.....	64
Tabla 14 Análisis de los elementos estructurantes y sus características críticas en los ejemplos de polígonos trazados	70
Tabla 15 Análisis de las características identificadas en los ejemplos trazados de NO polígonos	73
Tabla 16 Análisis de la clasificación de representaciones graficas en estereotipadas y no estereotipadas.....	75
Tabla 17 Análisis de las características que debe tener una buena definición matemática haciendo una semejanza a las descritas por Pascual et al. (2019)	82
Tabla 18 Características de una buena definición matemática, según los futuros profesores	83

Lista de figuras

Figura 1 Organización de la Educación Básica Peruana	23
Figura 2 Competencias del área de Matemáticas, desde el nivel inicial hasta secundaria	24
Figura 3 Definición de polígono como línea poligonal, para 1° de secundaria.....	29
Figura 4 Definiciones de polígono para 1°, 2° y 4° de secundaria.....	30
Figura 5 Definición de polígono para 3° de secundaria	31
Figura 6 Representación del MTSK	34
Figura 7 Cuestionario para recoger datos, ítem 1.....	37
Figura 8 Cuestionario para recoger datos, ítems 2-4.....	38
Figura 9 Evidencias de que incluir la clasificación de polígono en su definición es un error.....	47
Figura 10 Evidencias de que generalizan el concepto de polígono en polígonos irregulares	48
Figura 11 Evidencias de los conceptos que están confundiendo entre los polígonos cóncavos con los convexos.....	49
Figura 12 Evidencia de la existencia de polígonos irregulares.....	49
Figura 13 Evidencias de las ideas válidas acerca de la definición de Pablo	50
Figura 14 Evidencia de la inclusión implícita del término prototipo.....	51
Figura 15 Evidencia de la falta de precisión en las características lados y ángulos de un polígono.....	52
Figura 16 Evidencia en la que se considera error la inclusión de la fórmula $180^\circ(n - 2)$	53
Figura 17 Evidencia de ideas confundidas.	54
Figura 18 Evidencia de la idea errónea acerca de los puntos no deben cruzarse	55
Figura 19 Evidencia de ideas confundidas acerca de los puntos no deben cruzarse.....	56
Figura 20 Evidencia de las ideas validas en la definición de Luis	56
Figura 21 Evidencia de los elementos estructurantes y las características críticas en la definición de Polígono.....	61
Figura 22 Evidencia de no considerar la característica formada por la unión de tres o más puntos no colineales.....	71
Figura 23 Evidencia del trazo de figuras geométricas cerradas e inclusión de sólidos geométricos por parte de tres futuros profesores	74
Figura 24 Evidencia de considerar las características que se contrastan con las de polígono.	75
Figura 25 Evidencia de los ejemplos trazados son estereotipadas.....	76
Figura 26 Evidencia de los ejemplos de polígonos con una representación no estereotipada.....	77
Figura 27 Evidencia de ejemplos de polígonos con una representación no estereotipada; al menos una estereotipada; dos representaciones estereotipadas y dos no estereotipadas.	78
Figura 28 Incoherencia entre la definición verbal y la representación gráfica de polígono, mostrada por A3	79

Figura 29 Incoherencia entre la definición verbal de polígono y los ejemplos y contraejemplos, mostrada por A12..... 79

Figura 30 Evidencia de la coherencia entre la definición verbal e imagen conceptual de polígono 80



Introducción

La presente investigación describe el conocimiento evidenciado por futuros profesores de matemática de secundaria, en el campo de los conceptos geométricos, específicamente en el de polígono. Adquirir un concepto implica construir un esquema que integre la imagen conceptual y la definición conceptual. Dado que los estudios señalan que se tiene un predominio de la imagen evocada de un concepto y no su definición, buscamos que nuestros informantes examinen definiciones de polígono, construyan una y, posteriormente, tracen ejemplos y contraejemplos para dicho concepto. Así pues, los desafíos que los futuros profesores enfrentan es determinar la coherencia entre las representaciones gráficas trazadas de polígono con las ideas manifestadas en torno a este concepto.

Nuestro estudio tiene su cimiento en la necesidad de conocer y describir el conocimiento evidenciado por los estudiantes para profesor sobre el tema de polígonos, en el contexto de la asignatura Práctica Pre Profesional B, correspondiente a la licenciatura en Educación, especialidad Matemática y Física. La relevancia de este estudio radica en la descripción de las evidencias de conocimiento sobre el concepto de polígono y sobre la práctica matemática de definir. Lo primero implica reportar los atributos que asocian a polígono, la consideración de estos al trazar representaciones gráficas de dicho concepto y si aquellas son prototípicas o estereotipadas. Sobre el segundo aspecto, la práctica matemática de definir, esperamos conocer si los estudiantes tienen idea de cómo es una definición matemática, tanto en sus características como en su estructura.

Este trabajo de investigación lo organizamos en cuatro capítulos. En el primer capítulo presentamos la caracterización del problema, justificamos la importancia de la investigación y establecemos los objetivos del estudio. Además, reseñamos las investigaciones antecedentes.

En el segundo capítulo abordamos la formación de conceptos geométricos, la importancia de la definición y la práctica de definir en matemática, acerca del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, para lo cual tomamos como referencia el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge-MTSK). Asimismo, ponemos atención a la definición de polígono y su relevancia dentro del currículo educativo, así como a las características de las definiciones de polígono en los libros de texto de diferentes editoriales.

En el tercer capítulo detallamos la metodología utilizada para analizar y describir el conocimiento que evidencian futuros profesores de matemática de secundaria al examinar y proponer definiciones y representaciones gráficas de polígonos. Empleamos un paradigma interpretativo para desarrollar una investigación básica de nivel descriptivo, siguiendo un enfoque metodológico cualitativo que se complementa con un recuento de respuestas de los informantes, según se considere necesario. Así pues, analizamos las respuestas dadas por los futuros profesores a cuatro ítems que indagan la conceptualización de polígono, su ejemplificación gráfica y las características de una definición matemática.

En el cuarto capítulo comunicamos los resultados encontrados en función de las tareas que realizan los futuros profesores al desarrollar el cuestionario, estas son: analizar definiciones dadas de polígono, construir una definición verbal de este concepto, representar gráficamente qué es y qué no es un polígono y, finalmente, indicar qué características debe tener una buena definición matemática. Además, se ofrecen ejemplos de respuestas de los futuros profesores al desarrollar las tareas mencionadas, para ilustrar el conocimiento que movilizan.

Finalmente, presentamos las conclusiones de la investigación las cuales resaltan los errores, conceptos confundidos e ideas válidas que identifican los futuros profesores al examinar distintas definiciones de polígonos. También, la consideración de dichos aspectos al momento de construir una definición verbal de polígono y la coherencia entre esta y las representaciones gráficas que traza para ejemplificar dicho concepto. Así pues, la descripción que se logra elaborar respecto del conocimiento matemático que evidencian los futuros profesores, llama la atención a revisar la formación inicial de profesores y plantea la necesidad de emplear tareas formativas que promuevan la reflexión sobre el conocimiento que se tiene y que debería tenerse, como oportunidad de aprendizaje.



Capítulo 1. Planteamiento de la investigación

1.1 Caracterización de la problemática

La educación básica peruana introduce las primeras nociones de Geometría desde el nivel Inicial, lo cual coincide con muchos currículos de otros países (p.ej Chile y Ecuador). Este hecho evidencia la importancia de esta rama de la Matemática lo cual justifica nuestro interés por los conceptos geométricos, específicamente por el de polígono. El término “polígono” aparece en la Programación Curricular de Matemática, explícitamente, en uno de los desempeños de cuarto grado de primaria (9-10 años): “modelar características geométricas de los objetos con formas bidimensionales (polígonos)” (Ministerio de Educación, 2016a, p. 152). Sin embargo, la idea de polígono aparece desde el nivel inicial, pues se promueve el establecimiento de relaciones entre las formas de los objetos que están en su entorno y entre las formas geométricas que conoce utilizando diversos materiales. De esta manera, el estudiante empieza a formarse una imagen conceptual que, conforme avance hasta el nivel secundaria se espera sea más rica y contenga las propiedades necesarias y suficientes del concepto mencionado.

Pese a la temprana iniciación en el conocimiento geométrico, en la enseñanza de la geometría debemos tener en cuenta un obstáculo primitivo relativo al aprendizaje de las figuras geométricas. Mesquita (1992) lo llama *doble estatus de los objetos geométricos*, es decir, todo aquello que se apoya en objetos abstractos y generales no puede ser expresado más que por una configuración con objetos concretos y particulares. Al respecto, Fischbein (1993) distingue en las figuras geométricas una doble naturaleza de caracteres: figurales y conceptuales, que involucran representaciones mentales con propiedades espaciales (forma, posición y magnitud). Ambos estudios (Mesquita, 1992 y Fischbein, 1993) orientan a que en la formación de conceptos se tenga en cuenta que, en diversas ocasiones, la naturaleza figural vinculada a la imagen del concepto puede imponerse sobre la naturaleza conceptual que se relaciona con la definición verbal. Este hecho puede ocasionar la adquisición de un conocimiento insuficiente o parcializado que lleva a que los estudiantes cometan errores.

A cerca de la formación de conceptos matemáticos, Vinner (1991) señala que adquirir un concepto implica construir un esquema que integra la imagen conceptual y la definición conceptual. Este autor explica que los estudiantes tienden a evocar la imagen de un concepto y no su definición, debido a que esta se vuelve inactiva cuando es difícil de entender, no se logra aprender o se olvida. A pesar del predominio de la imagen conceptual: “los profesores suelen poner más énfasis en las definiciones que en los ejemplos, sin darse cuenta de que son los últimos los que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo” (Gutiérrez y Jaime, 1996, p.146). Por lo anterior, en la enseñanza-aprendizaje de la geometría se debe ejemplificar con representaciones gráficas variadas del concepto, que muestren sus características críticas y eviten limitarse al uso de prototipos o de representaciones gráficas estereotipadas (Scaglia y Moriena, 2005).

Poner la atención en las características críticas involucra también a las definiciones que se construyen. En este sentido, debemos tener en cuenta que, la acción de definir un objeto matemático tiene un papel esencial en la práctica matemática, ya que de ese proceso resulta un conjunto de propiedades que caracterizan el objeto y que son la base para establecer relaciones con otros elementos matemáticos.

La relevancia de la adquisición de conceptos matemáticos lleva a tener en cuenta las dificultades que emergen en dicho proceso y en el de construir definiciones. Así, por un lado, se pone atención al conocimiento del contenido matemático y, por otro lado, a la práctica matemática de definir. En cuanto al proceso de adquirir el *conocimiento del contenido matemático* (específicamente de los conceptos geométricos), las dificultades que se presentan radican en que los futuros profesores de matemática desconocen conceptos base (subconceptos) en los que se apoya el concepto, evidenciando errores originados por unas imágenes conceptuales muy pobres basadas en ejemplos prototípicos (libros de texto y/o dibujos en el pizarrón) que no incluyen elementos importantes. Por otro lado, en cuanto a la *práctica matemática de definir*, los alumnos conocen los conceptos geométricos de forma teórica pero poco práctica, ocasionando que se memoricen las definiciones. Ante esto se debe plantear un análisis matemático de las definiciones junto a un análisis didáctico, para que así los alumnos puedan interpretar los subconceptos y comprender la definición del concepto principal (Gutiérrez y Jaime, 1996). Conocer dichas dificultades ayuda a reflexionar, a desarrollar una enseñanza y un aprendizaje más significativo con el fin de mejorar las imágenes conceptuales, plantear diversas actividades centradas en provocar conflictos y contradicciones, además generar ideas correctas o incorrectas para analizar y comprender el motivo de los errores en los estudiantes para profesor.

Si bien se han realizado estudios sobre el conocimiento de las definiciones y representaciones gráficas en geometría en distintos niveles, ponemos interés por aquellos realizados en estudiantes para profesor de matemática (p. ej. Gutiérrez y Jaime, 1996; Pascual et al., 2019). De este modo decimos que: definir es una de las prácticas matemáticas que los docentes deben promover en el aula. Para desarrollar esta práctica correctamente es necesario saber qué significa definir, con qué finalidad se define en el ámbito escolar y qué característica debe poseer una buena definición (Pascual et al., 2019). El estudio del conocimiento del profesor, en general, se originó a partir del trabajo de Shulman (1986) que puso énfasis en la especificidad del conocimiento profesional en relación con la materia a enseñar, centrándose en el carácter específico del contenido para la enseñanza. A partir de su trabajo se han desarrollado diversos modelos para estudiar el conocimiento del profesor de matemática. Por ejemplo, Ball et al. (2008) propusieron un modelo que ofrece una categorización del conocimiento matemático requerido para la enseñanza, de la cual destaca el subdominio de conocimiento especializado del contenido. Las limitaciones y potencialidades de este modelo han sido la base para

que Carrillo y su equipo de la Universidad de Huelva propongan el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2013). Este es un marco analítico que reconoce en el conocimiento del profesor de matemática un carácter especializado y, según él, propone una mirada integral para estudiar dicho conocimiento.

Luego de describir la dualidad de los conceptos geométricos y las dificultades que se generan en la adquisición de estos, tanto en relación al conocimiento del concepto de polígono como a la práctica de definir, planteamos como pregunta de investigación *¿Qué conocimiento matemático evidencian los estudiantes para profesor sobre el concepto de polígono, cuando construyen una definición verbal y trazan representaciones gráficas del mismo?*

1.2 Objetivos general y específicos

El objetivo general del estudio que presentamos es: *Describir el conocimiento que evidencian futuros profesores de matemática de secundaria al examinar y proponer definiciones y representaciones gráficas de polígonos.*

Según el objetivo general, formulamos como objetivos específicos los siguientes:

- Examinar el contenido y la estructura de las definiciones de polígono, para identificar el conocimiento matemático evidenciado por los futuros profesores.
- Estudiar las representaciones gráficas de polígono y no polígono propuestas por los futuros profesores, para determinar las características que le atribuyen a este concepto.
- Contrastar las representaciones gráficas trazadas en torno a polígono con las ideas manifestadas sobre este concepto, para determinar la coherencia entre estas.

1.3 Antecedentes

1.3.1 Antecedentes locales

Carreño, E. (2021). *Conocimiento geométrico especializado en estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a los polígonos*

Esta tesis doctoral se enfocó en describir cualitativamente los atributos del conocimiento especializado que muestran estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria, al abordar situaciones de enseñanza y aprendizaje, respecto del tema de polígonos, en un contexto de simulación, correspondiente a la asignatura Práctica Profesional A, que se cursa en el penúltimo año de la carrera de Educación de una universidad privada de Piura (Perú). La investigación se basa en un paradigma interpretativo y se recogen los datos mediante un cuestionario, un plan de clase que diseñan los informantes para el tema asignado por la docente formadora, y la ejecución de dicho plan de clase. Sobre la relevancia de este estudio, se destaca la importancia de trabajar en la formación de profesores la comprensión profunda de conceptos matemáticos, específicamente, de Polígonos. También, incentivar la definición como práctica matemática, puesto que es una oportunidad para reflexionar e

identificar aspectos conceptuales y didácticos que requieren atención para reorientar la estructura formativa docente.

Este trabajo sirve como punto de partida para la investigación que se presenta pues, permite estructurar un marco teórico para entender el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas. Además, estos hallazgos proporcionan una base para discutir nuestros propios resultados, especialmente en relación con las definiciones y representaciones gráficas de polígonos.

1.3.2 Antecedentes nacionales

Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I, Montes, M. (2022). *Conocimiento especializado del profesorado de matemática en formación inicial acerca de los polígonos.*

Este estudio tiene como objetivo comprender el conocimiento especializado que muestra una profesora de educación secundaria en formación, cuando enseña polígonos como parte de su práctica preprofesional en el último año de su carrera. Se utiliza el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) creado por el grupo de investigación de la Universidad de Huelva en España, con el fin de explorar dicho conocimiento. Ellos basan sus estudios en una metodología de investigación cualitativa y desde el paradigma interpretativo permite identificar, describir y comprender el conocimiento geométrico de la maestra referente a los polígonos. La recogida de información se realizó a través de observación no participante, mediante videgrabaciones realizadas durante tres sesiones de clase con estudiantes de quinto grado de educación secundaria. Como resultado se tiene la sistematización de la información obtenida, mediante el modelo MTSK, lo cual ayuda a comprender cómo está organizado el conocimiento que moviliza la profesora informante cuando enseña polígonos. Los investigadores concluyen que su estudio contribuye a la formación inicial de profesores de matemática de educación secundaria al destacar la importancia de abordar contenidos matemáticos desde el dominio matemático y didáctico, así mismo fortalecer el diseño de tareas y estrategias de enseñanza que desarrollen habilidades en ambos dominios.

Este trabajo aporta argumentos a nuestra investigación sobre el potencial que ofrece el MTSK como herramienta para profundizar en la caracterización y comprensión del conocimiento del profesor. Así pues, queda evidenciado que su uso resulta favorable en la formación inicial de docentes de educación secundaria, ya que permite reflexionar acerca de la necesidad de tener un conocimiento matemático y didáctico sobre el contenido a enseñar.

1.3.3 Antecedentes internacionales

Moreno, A. M. y Climent, N (2021). *Conocimiento matemático especializado movilizado por estudiantes para maestro durante el análisis de situaciones de aula sobre polígono.*

Esta investigación hace un estudio de caso con estudiantes para maestro con el objetivo de describir qué conocimiento matemático especializado movilizan durante el análisis de una situación real de enseñanza de la definición de polígono. Para hacer el análisis se toma en cuenta el modelo

analítico de Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK). Este estudio se basa en un paradigma interpretativo, y un estudio instrumental de caso. La investigación se desarrolló con un grupo de 70 estudiantes del grado de maestro en la Universidad de Huelva, que cursaban la asignatura *Didáctica de la Matemática en la educación primaria: las formas, las figuras y sus propiedades*. De los 70 estudiantes, 58 entregaron datos para esta investigación. La información se recogió durante el desarrollo habitual de las sesiones, como tareas dentro de la propia materia. El formador de este grupo era del área de Didáctica de la Matemática, con más de 30 años de experiencia en dicha formación, que había participado anteriormente en varios proyectos formativos. Los resultados permiten determinar que los maestros en formación inicial movilizan conocimiento limitado en cuanto a definir como práctica matemática. En cambio, activan una amplia variedad de conocimiento didáctico del contenido, en lo relativo a dificultades de los alumnos y en ejemplos como medio para enseñar.

Este trabajo contribuye a nuestra investigación pues proporciona evidencia empírica sobre como los estudiantes para maestro comprenden y aplican el concepto de polígono en sus actividades, siendo esta una referencia para analizar nuestros resultados y discutirlos.

Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P. y Carrillo, J. (2019). *Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono.*

Este estudio tiene como objetivo describir las definiciones de polígono enunciadas por los estudiantes para maestro, habiendo recibido una instrucción previa. Para ello se hace un análisis teniendo en cuenta las características que la literatura considera imprescindibles en una definición y la identificación de los elementos matemáticos que son comunes a todas las definiciones de polígono, haciendo una diferencia entre el grado de rigurosidad de una definición en el contexto formal y escolar. Se aplica un enfoque de análisis de contenido sobre la tarea que realizan 101 estudiantes para maestro, de los cuales se examina las producciones escritas por 90, pues 11 no respondieron la tarea. Los resultados mostraron que los estudiantes para maestro presentan dificultades para definir el concepto de polígono de manera precisa y que existen diferencias entre el grado de rigurosidad en la definición en contextos formal y escolar. Este estudio destaca la importancia de analizar cómo los estudiantes para maestro comprenden y definen conceptos matemáticos básicos y también, resalta la necesidad de diseñar estrategias de enseñanza para potenciar su formación y su futura práctica docente.

Esta investigación se alinea con el objetivo de esta tesis, pues aporta elementos para profundizar en el análisis de la estructura de las definiciones matemáticas construidas por estudiantes para maestros, sobre polígono y sobre las características que debe tener una definición matemática.

Morato, A (2017). *Conocimiento especializado de un maestro de Primaria en torno a la definición de polígono.*

Esta investigación tiene como objetivo analizar, profundizar, comprender e interpretar el conocimiento de un maestro en su propio contexto, es decir en el aula de matemáticas, para ello se hace una descripción del conocimiento especializado (MTSK) del maestro de primaria. El docente mencionado forma parte de un grupo que desarrolla un Proyecto de Investigación Educativa (PIC), que tiene como fin la aplicación de la investigación en el aula y la formación de maestros. Este trabajo se basa en un paradigma interpretativo, bajo el cual se desarrolla un estudio instrumental de casos. Se utiliza una grabación en video de un docente con sus alumnos de 5to de primaria cuando realizan la construcción y la reflexión del concepto de polígono, fomentando la argumentación. En el video se observa la construcción de una definición de polígono de manera colaborativa, a partir de unos ejemplos dados por el maestro, logrando una clasificación entre polígono y no polígono. En el cual se puede identificar el conocimiento que posee, para así sustentar su práctica y, posteriormente, elaborar una propuesta del conocimiento especializado deseable.

Esta tesis aporta a nuestra investigación argumentos para justificar la importancia de comprender el conocimiento que requiere un maestro para la enseñanza de las matemáticas, de tal manera que tenga que hacer uso de su conocimiento sobre la práctica matemática y ser capaz de diseñar y analizar actividades específicas que permitan construir la definición de Polígono, así como también la construcción de otros conceptos. También, se muestra que la adaptación de estrategias didácticas que hace el docente es crucial para abordar las necesidades de los estudiantes y así tener un impacto en su enseñanza.

1.4 Justificación de la investigación

La matemática es una ciencia incluida en toda la Educación Básica Regular. En ese sentido, se estipula que los estudiantes peruanos deberían alcanzar un perfil de egreso en el que una de las competencias que lo caracteriza es “El estudiante interpreta la realidad y toma decisiones a partir de conocimientos matemáticos que aporten a su contexto” (Ministerio de Educación, 2016b, p. 9). Lograr esta competencia supone familiarizarse con los conceptos, desde su reconocimiento terminológico hasta su definición. Dado que definir un objeto requiere analizar y discriminar características necesarias y suficientes para diferenciarlo de otro, crear y usar definiciones matemáticas es una actividad esencial y generalmente difícil para los estudiantes (Rasmussen et al., 2005). En consecuencia, es necesario considerar el desarrollo de la práctica de definir en la formación de maestros, para que puedan promoverla cuando ejerzan la docencia.

Vista la relevancia de la definición matemática y del conocimiento del profesor en el ámbito de la formación inicial de profesores, así como del concepto de polígono en el ámbito de la educación básica, este trabajo resulta relevante por abordar dichos constructos. Dado que en el contexto local y

nacional se han desarrollado pocas investigaciones al respecto, el estudio que se presenta constituye un aporte teórico al campo de la investigación en educación matemática. También, al indagar el conocimiento de los futuros profesores de matemática de secundaria sobre el tema de polígonos, durante la formación inicial, este trabajo puede representar un aporte práctico, en la medida que motive la revisión de los planes de formación de profesores de matemática y de las tareas formativas que se emplean en esa etapa para el aprendizaje de los conceptos geométricos y de la matemática en general, si se toma como referencia el modelo MTSK. Sobre este modelo, podría ser un instrumento que guíe la organización y desarrollo de la formación inicial de los futuros profesores, tanto en su planificación como ejecución.



Capítulo 2. Marco teórico

2.1 Formación de conceptos geométricos

Entre los investigadores que estudian la formación de conceptos tomaremos como referencia a Vinner (1991) quien sostiene que adquirir un concepto matemático implica construir un esquema que integra la imagen conceptual y la definición conceptual. Así pues, el concepto es algo abstracto porque solo existe en nuestra mente, al nombrarlo es una entidad lingüística, también llamada una noción o un término que tiene un aspecto físico (visual o vocal). El aspecto físico visual, llamado imagen conceptual, es el conjunto de imágenes mentales, impresiones o experiencias que el pensamiento evoca de ese concepto. También incluye las formas verbales del concepto (el nombre del concepto). Así pues, la definición conceptual es un enunciado verbal que explica el significado de dicho concepto. Las palabras usadas para especificarlo pueden ser de carácter personal o formal, siendo esta última la que es aceptada por la comunidad matemática.

Así mismo, Vinner (2002) explica que en la mente de los estudiantes predomina la imagen del concepto y no su definición, puesto que esta definición se vuelve inactiva por ser difícil de entender, porque nunca la aprendieron o porque se olvida o se ignora. Considerando lo anterior, se debería hacer un esfuerzo por formar imágenes correctas en la mente del estudiante, pues cuando es capaz de identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal y como éste está concebido por la comunidad matemática, se dice que ha adquirido un concepto geométrico. Cada concepto posee unos atributos relevantes, que son las propiedades necesarias que lo definen como tal y que permiten diferenciar unos ejemplos de otros, y atributos irrelevantes, que son propiedades no necesarias a ese concepto. Por ejemplo, para definir el concepto de cuadrilátero, un atributo relevante es ser un polígono de cuatro lados; sin embargo, sería un atributo irrelevante el paralelismo de sus lados.

La formación de los conceptos geométricos se promueve desde la educación básica, puesto que son los profesionales de la educación en Matemática los encargados de la enseñanza de dichos conceptos. Gutiérrez y Jaime (1996) explican que usualmente los maestros emplean dos métodos de enseñanza:

- i) Enunciar una definición matemática de dicho concepto (más o menos formal, según el curso) y, a continuación, plantear ejercicios de memorización y de reconocimiento de algunas figuras concretas, o ii) presentar ejemplos de figuras que representan ese concepto, haciendo una descripción de sus características matemáticas (y, a veces, físicas), a continuación, enunciar una definición matemática del concepto y, por último, plantear ejercicios de memorización de la definición y de reconocimiento de otras figuras concretas. (p. 146)

De la cita anterior, puede verse que ambos métodos se centran en las definiciones más que en los ejemplos visuales que son los que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo (Vinner, 1991). Por consiguiente, la experiencia propia del estudiante

y los ejemplos que ha visto y/o utilizado, tanto en el contexto escolar y extraescolar, juega un papel muy importante en la formación de la imagen del concepto. En relación con esto, los ejemplos que se visualizan en los libros de texto son escasos y con alguna característica visual peculiar. Esto ocasiona que los estudiantes asocien dicha imagen a un concepto determinado, convirtiéndose así en un prototipo y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos. Por lo tanto, es necesario mostrar al alumnado un gran número de ejemplos diferentes y lograr así que tengan una imagen conceptual correcta y más completa. Según esto, la imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos gráficos de ese concepto y cuando las características que lleva asociadas son todas relevantes.

Con frecuencia, los estudiantes asocian una imagen prototipo a un concepto. Este prototipo es “el ejemplar, real o ideal, con los atributos más frecuentes” (Pozo, 1993, p. 97). En relación con esto, Schwartz y Hershkowitz (1999) señalan que:

Cada concepto tiene uno o varios ejemplos prototípicos que se adquieren primero; estos ejemplos prototípicos son en general los que tienen la mayor lista de atributos, todos los atributos críticos del concepto como también algunos atributos propios (aquellos atributos que sólo tienen los ejemplos prototípicos)”. Se suele usar como modelo esquemático con el que comparan las representaciones gráficas de las figuras geométricas. (p. 364)

Teniendo en cuenta todo lo anterior, Gutiérrez y Jaime (1996) proponen presentar al alumnado una colección rica de diferentes ejemplos y contraejemplos de cada concepto que les permita identificar qué atributos son relevantes y cuáles no lo son. Así pues, el concepto geométrico se debe ejemplificar con representaciones gráficas variadas, que muestren las características críticas del concepto y que no se limiten a prototipos de objetos geométricos, ni a representaciones gráficas estereotipadas (Moriena y Scaglia, 2003). Estas autoras explican que el prototipo se construye por la utilización frecuente de representaciones gráficas estereotipadas, las cuales aparecen con mayor frecuencia en los libros de texto y, muy posiblemente, en los dibujos que realiza el docente en la pizarra. Debido a esto, son fundamentales para el aprendizaje de los conceptos geométricos, ya que constituyen puntos de referencia cognitivos, aunque establecen el origen de ciertas dificultades que tienen algunos alumnos durante la identificación de figuras geométricas (Scaglia y Moriena, 2005).

En relación a las representaciones gráficas, ha de tenerse en cuenta que Fischbein (1993), distingue una doble naturaleza de caracteres figurales y conceptuales en las figuras geométricas. La naturaleza conceptual alude a que se trata de entidades ideales abstractas, conceptos genuinos definidos formalmente. La naturaleza figurale de las figuras geométricas se refiere a que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y magnitud):

Por lo tanto, una figura geométrica puede describirse a partir de sus propiedades intrínsecamente conceptuales. Sin embargo, una figura geométrica *no* es un mero concepto,

es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen: incluye una representación mental de propiedad espacial (Fishbein, 1993, p. 141).

El predominio de la naturaleza figural sobre la conceptual originado por un conocimiento geométrico insuficiente, obliga a tener en cuenta un obstáculo primitivo del aprendizaje de la geometría: el “doble estatus de los objetos geométricos” (Mesquita, 1992). Este consiste en que todo aquello que constituye un objeto general y abstracto, no puede ser expresado más que por una configuración específica que implica objetos concretos y particulares. Por lo tanto, “los conceptos en Geometría son distintos de sus representaciones externas por lo que son difícilmente dissociables de ellas” (Barrantes y Zapata, 2008, p. 63).

En conclusión, el profesor o futuro profesor debe evitar la utilización exclusiva de representaciones gráficas estereotipadas, ofreciendo una mayor variedad de ejemplos seleccionados cuidadosamente y una definición verbal más precisa, que no origine ambigüedades para así poder superar los juicios prototípicos y tener características conceptuales relevantes. Sobre esto último, la precisión de las definiciones verbales, consideramos dos aspectos: las características críticas del objeto y los elementos estructurantes que lo componen. La denominación *característica crítica* es propuesta por Carreño (2021) para referirse a las cualidades que definen un objeto como tal y que permiten diferenciarlo de otros. Dicha denominación es equiparable como atributo relevante (Vinner, 2002), atributo crítico (Schwartz y Hershkowitz, 1999) y propiedad intrínsecamente conceptual (Fishbein, 1993). Además, dentro de cada característica crítica reconocemos *elementos estructurantes*, entendiendo estos como aquellos que constituyen el objeto y por tanto, han de estar incluidos en la definición verbal. Por ejemplo, si decimos que el polígono es *una figura geométrica cerrada, formada por la unión de 3 o más puntos no colineales mediante segmentos, que cumplen las siguientes condiciones: a) No hay dos segmentos que se intersequen, excepto en sus puntos extremos; b) No hay dos segmentos con un mismo punto extremo que sean colineales*; podemos diferenciar los siguientes elementos estructurantes con sus respectivas características críticas (**Tabla 1**):

Tabla 1

Ejemplos de elementos estructurantes y características críticas en una definición de polígono

Elementos estructurantes	Características críticas
Figura geométrica	(Figura geométrica) cerrada
3 o más puntos	(3 o más puntos) no colineales
Segmentos	(segmentos) unidos por sus extremos, no hay dos que se intersequen, no hay dos segmentos con un mismo punto extremo que sean colineales

Nota. Elaboración propia.

2.2 Importancia de la definición y la práctica de definir en matemática

Una de las prácticas matemáticas que el maestro debe desarrollar en el aula es la de definir y para ello debe conocer con profundidad que significa definir, cual es el papel de esta práctica en el aprendizaje de la matemática y que requerimientos debe satisfacer una definición.

La acción de definir un objeto matemático tiene un papel esencial en la práctica matemática, ya que de ese proceso resultan el conjunto de propiedades que caracterizan el objeto y que son la base para establecer relaciones con otros elementos matemáticos. A su vez, una definición puede ser el origen de un nuevo concepto tras un proceso de diferenciación y reconocimiento de propiedades particulares (Mariotti y Fischbein, 1997; De Villiers, 1998). Consideramos definir como un proceso de prescripción del significado de una palabra o frase de forma muy específica en términos de una lista de características que tienen que ser todas verdaderas y que tienen como producto una definición. Dicho proceso implica la diferenciación y reconocimiento de propiedades particulares del objeto matemático que se desee definir (Oliveros et al., 2018).

Según Zamora (2016), una de las acepciones de la palabra *definición* en el Diccionario de la Real Academia Española, es “Proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de algo material o inmaterial”. Para el caso de la Matemática, tendremos entonces que, una definición matemática será aquella “proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de los objetos matemáticos”. En relación con esto, Rasmussen et al. (2005) destacan que la creación y utilización de definiciones matemáticas constituye una actividad fundamental, pero comúnmente desafiante para los estudiantes. Esta consideración es compartida por Zazkis y Leikin (2008) quienes sostienen que las definiciones de conceptos matemáticos, las estructuras subyacentes de las definiciones y el proceso de definir deben ser componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemáticas.

Si bien enunciar una definición no asegura la comprensión del concepto (Gutiérrez y Jaime, 1996; Vinner 1991), las tareas que promueven su construcción o el análisis de definiciones dadas posibilitan encontrar evidencias de lo que se entiende por un concepto específico. En matemáticas podemos distinguir dos tipos de definiciones: las descriptivas y las constructivas (De Villiers et al., 2009; Sinclair et al., 2016). Las *definiciones descriptivas* se logran cuando el individuo tiene como punto de partida la imagen conceptual y empieza a determinar un listado de propiedades (necesarias y suficientes), de manera que a partir de un subconjunto del total de propiedades podemos deducir el resto, por consiguiente, estas definiciones tienen como papel sistematizar el conocimiento existente. Mientras que las *definiciones constructivas* surgen de una definición conceptual de la que se identifican propiedades, para que al cambiarlas por algún proceso lógico (generalización, reemplazo, exclusión), se construya una nueva definición y así posibilite establecer una imagen conceptual. Cabe resaltar que este proceso de definición busca la producción de un nuevo conocimiento.

Por su parte Zazkis y Leikin (2008) establecen una distinción entre definiciones apropiadas e inapropiadas a partir de las categorías *corrección* y *riqueza*. La primera está en función del uso de características necesarias y suficientes mediadas por el rigor, mientras que la *riqueza* depende del uso de elementos no tradicionales, aunque esto no asegura su corrección. Si bien ambas categorías son un lente organizativo en el análisis de definiciones, Zazkis y Leikin (2007, 2008) proponen, además, la *accesibilidad* y *generalidad* como categorías para analizar el espacio de ejemplos. Sin embargo, la visualización de la primera (accesibilidad) depende del diseño metodológico, mientras que la generalidad se considera intrínseca a la definición en sí misma.

Pascual et al. (2019) proponen que una definición matemática sea: no contradictoria, no ambigua y mínima. La característica de que una definición sea *no contradictoria* conlleva a que las características empleadas deben ser consistentes. De otro lado, decimos que una definición es *no ambigua* cuando hay caracterización de manera unívoca de interpretar todas las condiciones, es decir, se requiere precisión en la definición. Finalmente, para que sea *mínima* ha de cumplirse que no haya redundancia de las características, esto es que ninguna de las características deduce del resto. El cumplimiento de las características que propone Pascual et al. (2019) resulta coherente con la consideración de elementos estructurantes y características críticas de un objeto, según lo desarrollado al finalizar el apartado anterior (2.1).

2.3 Definición de polígono en la Educación Peruana: presencia en el Currículo Nacional

La educación básica peruana se estructura en tres niveles: inicial, primaria y secundaria. En cada uno de estos niveles se diferencian ciclos y grados en los cuales se estudian distintas áreas curriculares (**Figura 1**).

Figura 1

Organización de la Educación Básica Peruana

NIVEL	EDUCACIÓN INICIAL		EDUCACIÓN PRIMARIA						EDUCACIÓN SECUNDARIA				
CICLOS	I	II	III	IV	V		VI	VII					
GRADOS/ EDADES	0-2	3-5	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
ÁREAS CURRICULARES	Comunicación	Comunicación*	Comunicación						Comunicación				
		Castellano como segunda lengua**	Castellano como segunda lengua**						Castellano como segunda lengua**				
			Inglés						Inglés				
			Arte y cultura						Arte y cultura				
	Personal social	Personal social	Personal social						Desarrollo personal, ciudadanía y cívica				
			Educación religiosa***						Educación religiosa***				
	Psicomotriz	Psicomotriz	Educación física						Educación física				
	Descubrimiento del mundo	Ciencia y tecnología	Ciencia y tecnología						Ciencia y tecnología				
		Matemática	Matemática						Educación para el trabajo				
			Matemática						Matemática				
		Tutoría y orientación educativa											

Nota. Extraída del Currículo Nacional de Educación Básica (Ministerio de Educación, 2016b, p. 161)

La educación básica peruana se rige por un Currículo Nacional desde el 2016, en el cual se comunican los retos para la educación básica y el perfil de egreso, los enfoques transversales para el desarrollo de dicho perfil, las competencias, capacidades y estándares de aprendizaje, la organización de la Educación Básica, las orientaciones pedagógicas para el desarrollo de competencias así como para la evaluación formativa de estas y para la diversificación curricular (Ministerio de Educación, 2016b).

En el nivel Inicial se proponen siete áreas curriculares, en el nivel Primaria tenemos nueve áreas y en el nivel Secundaria se han establecido once áreas (**Figura 1**). En el caso del área de Matemática su enfoque está centrado en la resolución de problemas, promueve el desarrollo de cuatro competencias, de las cuales nos ocuparemos de la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización”. Esta competencia, al igual que la de Resuelve problemas de Cantidad, se trabaja desde el nivel Inicial lo cual muestra su relevancia de estudio (**Figura 2**).

Figura 2

Competencias del área de Matemáticas, desde el nivel inicial hasta secundaria

EDUCACIÓN INICIAL				EDUCACIÓN PRIMARIA EDUCACIÓN SECUNDARIA	
CICLO I		CICLO II			
DESCUBRIMIENTO DEL MUNDO	Construye la noción de cantidad	MATEMÁTICA	Construye la noción de cantidad	MATEMÁTICA	Resuelve problemas de cantidad
	Establece relaciones espaciales		Establece relaciones espaciales		Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
					Resuelve problemas de movimiento, forma y localización
					Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Nota. Extraída del Currículo Nacional de Educación Básica (Ministerio de Educación, 2016b, pp. 162-163)

La educación básica obligatoria en nuestro país introduce las primeras nociones de geometría en el nivel inicial. El concepto específico de polígono, empieza a trabajarse al reconocer diversas formas geométricas, las que luego se estudian con más profundidad, tal como se refleja en los desempeños de aprendizaje propuestos por competencia, para cada grado de estudios. A continuación, presentamos un cuadro que contiene los desempeños que el estudiante debe adquirir desde el nivel inicial, en torno al concepto de polígono. Así pues, los estudiantes empiezan a establecer relaciones entre las formas de los objetos que están en su entorno y las formas geométricas que conoce utilizando diversos materiales, hasta llegar a establecer relaciones y clasificar las formas geométricas según sus características y propiedades (**Tabla 2**).

Tabla 2

Desempeños de la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización asociados al concepto de polígono

Nivel	Ciclo	Grados	Desempeños
Inicial ¹	I	0-2 años	Establece <i>relaciones de espacio y medida</i> , se organiza y organiza los objetos al sortear obstáculos que están en su camino, transportar los objetos, empujarlos, arrastrarlos u ordenarlos a partir de la exploración con su cuerpo y todos sus sentidos, y en interacción con los otros. Lo hace según sus intereses, y desde sus posibilidades de movimiento y desplazamiento.
	II	3-5 años	Establece relaciones, entre las <i>formas de los objetos</i> que están en su entorno y las <i>formas geométricas</i> que conoce, utilizando material concreto.
Primaria	III	1°	Establece relaciones entre las características de los <i>objetos del entorno</i> y las asocia y representa con <i>formas geométricas</i> tridimensionales y <i>bidimensionales</i> que conoce, así como con la medida cualitativa de su longitud. Hace afirmaciones sobre algunas <i>propiedades físicas o semejanzas de los objetos</i> y las prueba con ejemplos concretos. Ejemplo: El estudiante podría decir: “Algunos objetos con puntas no ruedan”, “Estos dos objetos tienen la misma forma (pelota y canica)” etc.
		2°	Expresa con material concreto y dibujos su comprensión sobre algún elemento de las <i>formas</i> tridimensionales (número de puntas, número de caras, formas de sus caras) y <i>bidimensionales</i> (número de lados, vértices, lados curvos y rectos). Asimismo, describe si los objetos ruedan, se sostienen, no se sostienen o tienen puntas o esquinas usando lenguaje cotidiano y algunos términos geométricos Hace afirmaciones sobre las semejanzas y diferencias entre las <i>formas geométricas</i> , y las explica con ejemplos concretos y con base en sus conocimientos matemáticos. Ejemplo: El estudiante afirma que todas las figuras que tienen tres lados son triángulos o que una forma geométrica sigue siendo la misma aunque cambie de posición.
	IV	3°	Establece relaciones entre las características de los <i>objetos del entorno</i> , las asocia y representa con <i>formas geométricas bidimensionales</i> (figuras regulares o irregulares), sus elementos y con sus medidas de longitud y superficie; y con formas tridimensionales (cuerpos redondos y compuestos), sus elementos y su capacidad Expresa con dibujos su comprensión sobre los elementos de las <i>formas</i> tridimensionales y <i>bidimensionales</i> (número de lados, vértices, eje de simetría). Hace afirmaciones sobre algunas relaciones entre elementos de las formas, su composición o descomposición, y las explica con ejemplos concretos o dibujos. Asimismo, explica el proceso seguido. Ejemplo: El estudiante podría decir: “Todos los cuadrados se pueden formar con dos triángulos iguales”.

¹ El primer ciclo de este nivel está comprendido de 0 a 2 años, tiene un carácter opcional en la formación de los estudiantes.

	4°	<p>Establece relaciones entre las características de objetos reales o imaginarios, los asocia y representa con <i>formas bidimensionales (polígonos)</i> y sus elementos, así como con su perímetro, medidas de longitud y superficie; y con formas tridimensionales (cubos y prismas de base cuadrangular), sus elementos y su capacidad.</p> <p>Expresa con dibujos su comprensión sobre los elementos de cubos y prismas de base cuadrangular: caras, vértices, aristas; también, su comprensión sobre los elementos de los <i>polígonos</i>: ángulos rectos, número de lados y vértices; así como su comprensión sobre líneas perpendiculares y paralelas usando lenguaje geométrico.</p> <p>Hace afirmaciones sobre algunas relaciones entre elementos de las formas y su <i>desarrollo en el plano</i>, y explica sus semejanzas y diferencias mediante ejemplos concretos o dibujos con base en su exploración o visualización.</p>	
V	5°	<p>Establece relaciones entre las características de objetos reales o imaginarios, los asocia y representa con formas bidimensionales (cuadriláteros) y sus elementos, así como con su perímetro y medidas de la superficie; y con formas tridimensionales (prismas rectos), sus elementos y su capacidad.</p> <p>Expresa con dibujos su comprensión sobre los elementos de prismas rectos y cuadriláteros (ángulos, vértices, bases), y propiedades (lados paralelos y perpendiculares) usando lenguaje geométrico.</p> <p>Plantea afirmaciones sobre las relaciones entre los objetos, entre los objetos y las formas geométricas, y entre las formas geométricas, así como su desarrollo en el plano, y las explica con argumentos basados en ejemplos concretos, gráficos y en sus conocimientos matemáticos con base en su exploración o visualización. Así también, explica el proceso seguido.</p>	
	6°	<p>Establece relaciones entre las características de objetos reales o imaginarios, los asocia y representa con formas bidimensionales (triángulos, cuadriláteros y círculos), sus elementos, perímetros y superficies; y con formas tridimensionales (prismas rectos y Cilindros), sus elementos y el volumen de los prismas rectos con base rectangular.</p> <p>Expresa con dibujos su comprensión sobre los elementos y propiedades del prisma, triángulo, cuadrilátero y círculo usando lenguaje geométrico.</p> <p>Plantea afirmaciones sobre las relaciones entre los objetos, entre los objetos y las formas geométricas, y entre las formas geométricas, así como su desarrollo en el plano cartesiano, entre el perímetro y la superficie de una forma geométrica, y las explica con argumentos basados en ejemplos concretos, gráficos, propiedades y en sus conocimientos matemáticos con base en su exploración o visualización, usando el razonamiento inductivo. Ejemplo: “Dos rectángulos pueden tener diferente área, pero el mismo perímetro”, “El área de un triángulo la puedo obtener dividiendo por la mitad el área de un paralelogramo”.</p>	
Secundaria	VI	1°	<p>Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios. Asocia esas características los representa en formas bidimensionales. Establece relaciones de semejanza entre triángulos o figuras planas.</p> <p>Expresa, con dibujos, construcciones con regla, con material concreto y con lenguaje geométrico su comprensión sobre las propiedades de los triángulos y cuadriláteros.</p> <p>Lee textos o gráficos que describen características, elementos o propiedades de las formas geométricas bidimensionales.</p>

		Plantea afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos y formas geométricas. Las justifica con ejemplos y sus conocimientos geométricos. Reconoce errores en las justificaciones las corrige.
	2°	<p>Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios. Asocia esas características los representa en formas bidimensionales. Establece relaciones de semejanza y congruencia entre formas poligonales.</p> <p>Expresa, con dibujos, construcciones con regla, con material concreto y con lenguaje geométrico su comprensión sobre las propiedades de los polígonos</p> <p>Lee textos o gráficos que describen características, elementos o propiedades de las formas geométricas bidimensionales.</p> <p>Plantea afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos y formas geométricas. Las justifica con ejemplos y sus conocimientos geométricos. Reconoce errores en las justificaciones las corrige y en las de otros y los corrige.</p>
VII	3°	<p>Expresa, con dibujos, construcciones con regla, con material concreto y con lenguaje geométrico su comprensión sobre las propiedades de los polígonos, así como su clasificación, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.</p> <p>Selecciona y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar la longitud, el área de formas bidimensionales irregulares empleando unidades convencionales y coordenadas cartesianas</p> <p>Plantea afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos y formas geométricas. Las justifica con ejemplos y sus conocimientos geométricos. Comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante ejemplos, propiedades geométricas y razonamiento inductivo o deductivo.</p>
	4°	<p>Plantea afirmaciones sobre relaciones y propiedades que descubre entre los objetos, entre objetos y formas geométricas, y entre las formas geométricas, sobre la base de experiencias directas o simulaciones. Comprueba o descarta la validez de una afirmación mediante un contraejemplo, propiedades geométricas, y razonamiento inductivo o deductivo.</p>
	5°	<p>Expresa, con dibujos, con construcción con regla y compas, con material concreto, y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las transformaciones geométricas y la clasificación de las formas geométricas por sus características y propiedades, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.</p> <p>Plantea y contrasta afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos, entre objetos y formas geométricas, y entre las formas geométricas, sobre la base de experiencias directas o simulaciones. Comprueba la validez de una afirmación opuesta a otra, o de un caso especial mediante contraejemplos, conocimientos geométricos y razonamiento inductivo y deductivo.</p>

Nota. Elaborado a partir de los Programas Curriculares para el nivel Primaria (Ministerio de Educación, 2016a), nivel Inicial (Ministerio de Educación, 2016c) y nivel Secundaria (Ministerio de Educación, 2016d).

A partir del análisis de la tabla podemos concluir lo siguiente:

- *Nivel inicial de 3 a 5 años*, se empieza a introducir la idea de polígono porque el estudiante tiene la capacidad de agrupar objetos de su entorno considerando semejanzas y diferencias en la forma y en el tamaño, y explica el criterio que ha utilizado; por ejemplo, si el objeto es redondo, tiene puntas, etc. Arma, desarma y crea formas bidimensionales (como rectángulo, círculo, triángulo y cuadrado) y tridimensionales usando plastilina, papel, palitos, cajas, etc.
- *Nivel Primaria, ciclo III, 1° y 2°*, se empieza a introducir características de polígonos en donde los objetos con puntas representan a los ángulos y si no ruedan es porque los lados son rectos y no curvos, en este ciclo los estudiantes pueden representar objetos de su entorno con formas bidimensionales y tridimensionales básicas utilizando diversos materiales; por ejemplo, Geoplano, Tangram, papel, cuadriculado, cajas, plastilina, cuerda, etc. Asimismo, clasifica formas y objetos (en círculos, óvalos, cuadrados, rectángulos, triángulos y figuras de 5 lados), por el número de lados, caras, vértices o esquinas, y explica el criterio tomado en cuenta para dicha clasificación.
- *Nivel Primario, ciclo IV, 3° y 4°*, se empieza a introducir de manera intuitiva el concepto de polígono regular y polígono irregular mediante formas geométricas, así mismo relaciona conceptos como por ejemplo cuadrado y triángulo. A partir de cuarto de primaria aparece por primera vez el término polígono y así el estudiante caracteriza polígonos haciendo referencia a tres de sus elementos: lados, vértices y ángulos. Representa formas tridimensionales con material concreto; por ejemplo, arma cubos con cañitas y limpiatipo o plastilina, puede componer y descomponer formas bidimensionales a partir de otra. Ejemplo ¿En cuántas figuras iguales se puede descomponer este hexágono? Para representar diferentes formas bidimensionales que tienen el mismo perímetro, usan material concreto (sogas, Geoplano, etc.). Se hace una vinculación entre cuerpo geométrico y figura geométrica, al desarrollar el plano de un cuerpo geométrico y los estudiantes puedan ver que está formado por una figura geométrica determinada conocida.
- *Nivel Primaria, ciclo IV, 5° y 6°*, el estudiante es capaz de construir formas bidimensionales usando instrumentos de medida y dibujo o recursos tecnológicos; por ejemplo, construye un rectángulo usando escuadras, un círculo usando compás y regla y un ángulo usando transportador. Clasifica triángulos por la medida de sus lados y de sus ángulos.
- *Nivel Secundaria, ciclo VI, 1° y 2°*, el estudiante es capaz de identificar las características suficientes y necesarias para construir formas bidimensionales básicas; por ejemplo, reconoce que para construir un cuadrado debe considerar 4 lados iguales, 4 ángulos rectos y diagonales perpendiculares entre sí. Identifica y justifica grupos de figuras semejantes y congruentes. Puede ampliar o reducir formas bidimensionales y describir la semejanza de la figura transformada con la original.

- *Nivel Secundaria, ciclo VII, 3°, 4° y 5°, el estudiante es capaz de resolver situaciones en las que requiere generar información a partir de las propiedades de las formas en una construcción. Ejemplo: Identifica propiedades comunes entre formas poligonales de la misma familia; por ejemplo, elabora un organizador visual respecto a la clasificación de cuadriláteros o triángulos donde se observe la inclusión de clases.*

2.4 Definición de polígono según libros de texto

Al igual que en el currículo escolar, el concepto de polígono también ocupa un lugar importante en los libros de texto. Una revisión por varios de ellos muestra las distintas definiciones que se proponen. Algunas, se apoyan en definiciones preliminares como línea poligonal (**Figura 3**) o línea quebrada: “Se llama polígono a una línea quebrada cerrada simple (situada toda ella en un plano)”. Antes de esta definición, se indica que la línea quebrada “es la unión de segmentos no colineales en la cual el extremo de cada segmento es el comienzo del siguiente” (Coveñas, s/a, p. 287).

Figura 3

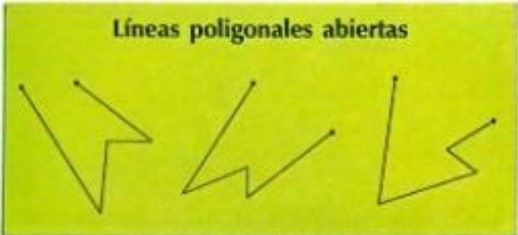
Definición de polígono como línea poligonal, para 1° de secundaria

El polígono y sus elementos

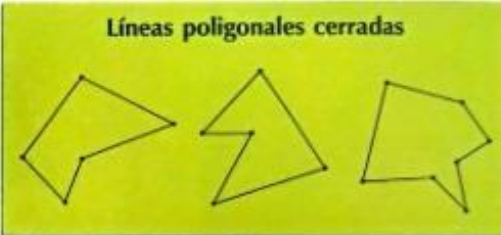
Línea poligonal

Es una línea formada por segmentos de recta, hay líneas poligonales abiertas y cerradas.

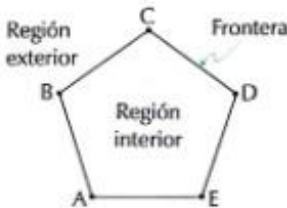
Líneas poligonales abiertas



Líneas poligonales cerradas



Las líneas poligonales cerradas reciben el nombre de **polígonos**.



- Un polígono determina en el plano una **región interior** y una **región exterior**.
- El polígono es la **frontera** entre la región interior y la exterior.
- La unión de un polígono y su región interior recibe el nombre de **región poligonal**.

Elementos

- **Lados** de un polígono son cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal.
- **Vértices** de un polígono son cada uno de los puntos donde se unen los lados y se representan mediante letras mayúsculas. Este polígono se nombra así: Polígono A B C D E.
- **Ángulos** de un polígono son los ángulos interiores que forman los lados de dicho polígono.
- **Diagonales** de un polígono son los segmentos que unen dos vértices no vecinos.
- **Perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados.

Nota. Extraído de MateMax 1 (2009, p. 523)

Otro aspecto observado es que, a medida que se avanza en la educación secundaria, las definiciones son más formales en algunas editoriales. Es decir, hacen uso de simbología propia de la matemática (**Figura 4**).

Figura 4

Definiciones de polígono para 1°, 2° y 4° de secundaria

Un **polígono** está formado por una línea poligonal cerrada. Es una superficie limitada por 3 o más segmentos con las siguientes características:

- Solo se intersecan en los extremos.
- Ningún par de segmentos es colineal.
- Cada extremo de un segmento es extremo de dos segmentos.
- Los extremos de los segmentos son los vértices, y los segmentos, los lados del polígono.

(1° de secundaria)

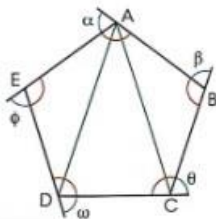
Los **polígonos** son figuras formadas por una secuencia finita y consecutiva de segmentos de recta que se cierran dejando en su interior una zona denominada región poligonal.

(2° de secundaria)

Las figuras planas que se obtienen por la unión de 3 ó más segmentos de recta no alineados, en la cuál además los segmentos extremos coinciden en un solo punto, se denominan **polígonos**.

Definición y elementos

- Sean $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$, distintos puntos no colineales del plano. Si trazamos los segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ y A_nA_1 , entonces la unión de estos segmentos recibe el nombre de polígono.
- Los elementos de todo polígono son:



- Vértices: A, B, C, D y E
- Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$
- Ángulos interiores: $\sphericalangle EAB, \sphericalangle ABC, \sphericalangle BCD, \dots$
- Ángulos exteriores: $\alpha, \beta, \theta, \omega$ y ϕ
- Diagonales: $\overline{AD}, \overline{AC}, \dots$

(4° de secundaria)

Nota. Extraído de Matemática 1 (2008, p. 121); Matemática 2 (2016, p. 96) y Matemática 4 (2008, p. 192).

En la **Figura 4** se puede visualizar las definiciones de polígono para 1°, 2° y 4° de secundaria. En 1° de secundaria se define en base a como está formado dicho concepto, por una línea poligonal cerrada, y que además es una superficie limitada por tres o más segmentos que cumplen cuatro características (los segmentos se intersecan en los extremos, ningún par de segmentos es colineal, cada extremo de un segmento es extremo de dos segmentos, los extremos de los segmentos son los

vértices y los segmentos son los lados del polígono). Esta definición es acorde al grado puesto que describe características y elementos del polígono de manera sencilla y clara.

En 2° de secundaria se define polígono como una figura formada por una secuencia finita y consecutiva de segmentos de recta que se cierran, además se incluye una nueva característica denominada región poligonal, se puede constatar que en ambos grados va aumentando la formalidad al definir el concepto de polígono. Lo antes mencionado se corrobora en 4° de secundaria porque incluye términos matemáticos con sus respectivas simbologías, sin embargo, al ser un libro de texto escolar de educación básica del nivel secundario, previo a la definición formal propia del área de matemática, se da una interpretación y/o explicación acorde al grado. Cabe señalar que esta definición tiene relación con los libros preuniversitarios porque emplea un lenguaje formal matemático, utilizando términos y simbología propia de esta ciencia. Una definición con esas características es la siguiente:

Sean $P_1, P_2, P_3 \dots P_{n-1}, P_n$ puntos distintos de un plano $n > 2$, al unir los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3} \dots \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$, forma una línea cerrada, la cual recibe el nombre de polígono. Dicho polígono tiene las siguientes propiedades: Dos segmentos con un punto común no deben estar en línea recta, Dos segmentos cualesquiera solo pueden intersectarse en sus extremos. En cada extremo común concurren solamente dos segmentos. (Asociación Fondo de Investigadores y Editores, 2011, p. 262)

Además, en el manual citado se menciona la notación de un polígono y sus elementos: lados, vértices, diagonales y ángulos internos y externos.

Luego de revisar distintas definiciones de diversas etapas formativas, concluimos que a mayor grado de estudios las definiciones son más complejas y formales. También, se ha identificado definiciones que incluyen clasificaciones, propiedades y fórmulas relacionadas (**Figura 5**).

Figura 5

Definición de polígono para 3° de secundaria

Polígonos

Un polígono es una figura plana delimitada por segmentos rectos consecutivos y no alineados llamados lados. Los polígonos pueden ser convexos o cóncavos.

- En todo polígono de n lados, la suma de los ángulos internos es $180^\circ (n - 2)$ y la suma de los ángulos externos es 360° .
- En un polígono regular de n lados, un ángulo interno mide $i = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$ y un ángulo externo mide $e = \frac{360^\circ}{n}$.
- En un polígono de n lados, el número de diagonales desde un vértice es $(n - 3)$ y el total de diagonales es $D = \frac{n(n - 3)}{2}$.

Nota. Extraído de Matemática 3 (2016, p. 58)

Dado que 4° de secundaria es el último grado en el que se trata el tema de polígono en los libros de texto, hemos puesto atención a tres definiciones de polígono de editoriales distintas (**Tabla 3**).

Tabla 3

Definiciones de polígono por distintas editoriales

Definición de polígono	Libro de texto
Es la figura geométrica cerrada que se forma al unir de manera consecutiva tres o más puntos no colineales mediante segmentos, de modo que dicha figura limita una región del plano.	Ojeda, E. (2017). <i>Matemática IV</i> . Corefo.
Sean $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$ puntos distintos y no colineales de un plano con $n \geq 3$ entonces la unión de los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$, llamados lados, recibe el nombre de polígono. Según esta definición el polígono es una figura plana cerrada en la que cualquier par de lados consecutivos no son colineales y tienen solo un extremo en común.	Aucallanchi, F. (s/a). <i>Math Active</i> . Racso editores.
Sean $A_1; A_2; A_3; \dots; A_{n-1}; A_n$ distintos puntos no colineales del plano. Si trazamos los segmentos $\overline{A_1A_2}; \overline{A_2A_3}; \overline{A_3A_4} \dots; \overline{A_{n-1}A_n}$ y $\overline{A_nA_1}$, entonces la unión de estos segmentos recibe el nombre de polígono.	<i>Lógicamente 4</i> . (2008). Grupo Editorial Norma.

Nota. Elaboración propia.

Al analizar las definiciones anteriores se observa que: en el texto de la editorial Corefo una de las características que le atribuye a polígono es “Figura geométrica cerrada”, mientras que, la editorial Racso indica “Figura plana cerrada”. Probablemente, el concepto de *figura geométrica* sea homólogo al de *figura plana*, es decir, que tienen dos dimensiones. En ambos casos, coinciden en señalar que es *cerrada*. Además, en las tres editoriales se indica que el polígono se forma por la *unión de tres o más puntos no colineales mediante segmentos*. Otro aspecto observado es el uso de simbología matemática en las dos últimas definiciones (editoriales Norma y Racso). Esto remarca lo señalado sobre la definición del texto de editorial Lumbreras, es decir, que a medida que se avanza en la formación, las definiciones son más complejas y simbólicas.

Tras analizar la definición de polígono de los diferentes libros de texto para educación básica y preuniversitaria, en este estudio se toma como referencia la siguiente definición: *Polígono es una figura geométrica cerrada, formada por la unión de 3 o más puntos no colineales mediante segmentos, que cumplen las siguientes condiciones: a) No hay dos segmentos que se intersequen, excepto en sus puntos extremos; b) No hay dos segmentos con un mismo punto extremo que sean colineales.*

2.5 Conocimiento especializado del profesor de matemáticas: el modelo MTSK

El conocimiento del profesor es estudiado desde hace varias décadas, siendo el trabajo de Shulman (1986) un aporte importante en el desarrollo de investigaciones e implementaciones

curriculares para la formación de futuros profesores. Se le reconoce como pionero porque pone énfasis en la especificidad del conocimiento profesional en relación con la materia a enseñar, centrándose en el carácter específico del contenido para la enseñanza. En vista de que el conocimiento didáctico del contenido podía relacionarse con distintas áreas, se requería investigaciones en matemáticas, de tal modo que en base a la propuesta de este autor surgen diversos estudios y modelos para caracterizar el conocimiento del profesor.

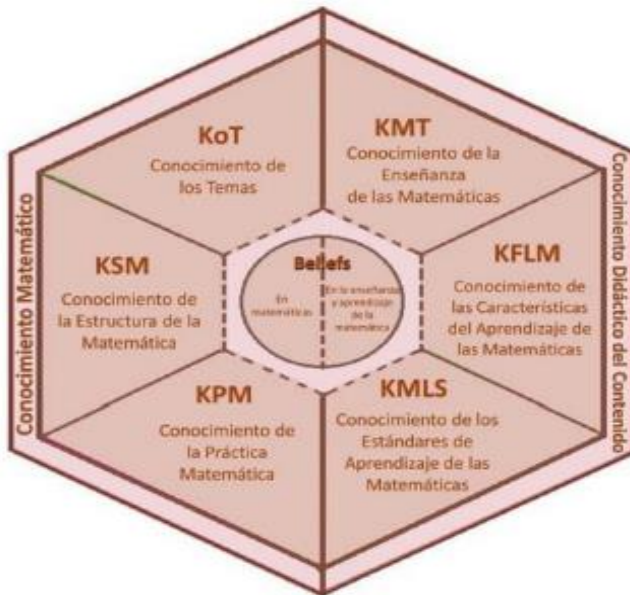
Destacamos el modelo Mathematics Knowledge for Teaching (MKT) propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008). Este al igual que el modelo de Shulman (1986) propone dos dimensiones, una ligada al contenido matemático y otra referida al conocimiento didáctico del contenido. En el dominio matemático destaca el subdominio de conocimiento especializado del contenido en la enseñanza de la matemática. Se dice que es especializado porque es exclusivo del profesor de matemáticas, por lo tanto, no es compartido con otro profesional de la matemática o persona formada en esta materia que no necesita enseñar esta ciencia. En este sentido este modelo inicia una reflexión profunda sobre el contenido y las características que ha de tener el conocimiento del profesor de matemática.

Las dificultades y limitaciones emergidas en el uso analítico del MKT llevó a proponer el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Este modelo nos sirve como marco analítico para comprender mejor el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera integral. En general, existen dos tipos de conceptualización y uso de la noción de especialización en los modelos de conocimiento del profesor, la intrínseca y la extrínseca (Scheiner et al., 2019). Ambas se diferencian, fundamentalmente, en qué determina el carácter especializado del conocimiento. En el caso de la caracterización extrínseca, dicho carácter viene dado por la comparación con otros usuarios de la matemática, mientras que, en la intrínseca, viene dado por la propia utilidad de este conocimiento para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Así, MTSK asume una visión intrínseca de la idea de especialización, exigiendo dos características a los elementos de conocimiento considerados en el modelo: la utilidad para la enseñanza de la matemática, y la vinculación con el contenido matemático. En este sentido, la enseñanza de la matemática se entiende de una forma amplia, considerando esta como todo momento en el que el profesor desarrolle actividades profesionales (p.ej. planificación de clases, momento de aula, reflexión posterior, discusión con pares, etc.).

El MTSK se estructura en dos grandes dominios: el conocimiento matemático (mathematical knowledge-MK) y el conocimiento didáctico del contenido (pedagogical content knowledge-PCK). El primero está ligado a la matemática en sí misma, como disciplina que necesita conocer el profesor para enseñar un contenido determinado. Por su parte, el PCK conjuga aquel conocimiento disciplinar con los conocimientos pedagógicos, psicológicos y curriculares que se precisan para desarrollar las tareas de enseñanza (**Figura 6**).

Figura 6

Representación del MTSK



Nota. Extraído de Muñoz-Catalán et al., 2015, p. 596.

En el MK se incluyen los siguientes subdominios: Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT), Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). Con respecto al *Conocimiento de los Temas (KoT)*, el contenido de este subdominio contemplamos el conocimiento del profesor sobre Fenomenología y aplicaciones; Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; y Procedimientos. Aquí se ubican no solo los objetos matemáticos, sino también las conexiones intraconceptuales, es decir, las que tienen lugar dentro del mismo tema para definirlo o determinarlo por sus fundamentos (Vasco et al., 2017). El *Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM)* se enfoca en el conocimiento matemático del profesor, el cual debe incluir un sistema integrado de conexiones que le permita comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante el tratamiento a través de una visión avanzada. Así mismo el Conocimiento de la *Práctica Matemática (KPM)* se enfoca en el conocimiento del profesor acerca de cómo demostrar y los tipos de demostraciones, cómo hacer deducciones e inducciones, el rol de los contraejemplos en la demostración y cómo desarrollarlos, el rol de las conjeturas y cómo son construidas, o el conocimiento de cómo definir y las características de las definiciones. Además, es parte de este subdominio el conocimiento de estrategias de resolución de problemas y aspectos de la comunicación matemática como la precisión en el uso del lenguaje (Carrillo et al., 2013; Carrillo et al., 2017; Carrillo et al., 2018).

En el PCK se incluyen tres subdominios: Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS). En cuanto al *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)* incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales. Conocer la potencialidad de recursos, ejemplos o modos de representación (Shulman,1986) para hacer comprensible un contenido determinado. Por otro lado, el *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)* hace referencia al conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, así como de errores, dificultades u obstáculos posibles. Finalmente, el *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)* es el conocimiento que posee el profesor acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado. Es aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos. Consideramos, además de lo prescrito en el currículo institucional, lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos acerca de logros de aprendizaje.

Además del uso analítico del MTSK para estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemática, este modelo representa una herramienta para organizar la formación de profesores, mediante el diseño de tareas y su puesta en práctica. Incluso podría considerarse un recurso para el autoaprendizaje de conocimiento matemático y para la mejora de su propia práctica o de la de otros profesores.

Capítulo 3. Aspectos metodológicos

3.1 Características de la investigación

El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo (Pérez-Serrano, 2008) y constituye una investigación básica de nivel descriptivo, “mediante el cual se establece la caracterización de un evento, fenómeno, individuo o grupo con el propósito de precisar su estructura o comportamiento”. (Arias, 2012, p. 24). En tal sentido, nos enfocamos a describir, de manera profunda, la comprensión del concepto de polígono que evidencian futuros profesores de matemática de secundaria, a partir de definiciones y representaciones gráficas de dicho concepto.

Desarrollamos esta investigación bajo un enfoque metodológico de tipo cualitativo, desde este, seguimos el diseño no interactivo, específicamente de análisis de conceptos, debido a que:

En el análisis de conceptos educativos resulta crucial la selección de empleos [ejemplos] representativos del concepto y de contraejemplos. El analista utiliza un muestreo intencional al escoger ejemplos que demuestran los significados implícitos en el lenguaje, que se analizan lógicamente con posterioridad (McMillan y Schumacher, 2005, p. 534).

Así pues, analizamos las respuestas dadas por los futuros profesores sobre la definición de polígono, la ejemplificación de estas para comprender el conocimiento que tienen sobre dicho concepto, y las características de una definición matemática, complementándose con un recuento de respuestas de los informantes, respecto de elementos que consideramos relevantes para el estudio.

3.2 Contexto e informantes de la investigación

Los datos se recogen de 20 estudiantes para profesor que cursaban la asignatura Práctica Pre Profesional B de una universidad privada de Piura (Perú). Esta asignatura se desarrolla en el VIII ciclo de la carrera de Educación, nivel secundaria, especialidad Matemática y Física². En este momento de la formación inicial, los estudiantes han cursado asignaturas de conocimiento geométrico (Geometría y su didáctica), de programación curricular (Programación y evaluación en la matemática) y ejercicio docente (Práctica Pre Profesional A).

La Práctica Pre Profesional B es una asignatura en la que los estudiantes para profesor desarrollan pruebas escritas de conocimiento disciplinar, así como ejecutan sesiones de clase en contextos simulado y real. En el contexto simulado, el profesor de la asignatura les indica uno o dos temas para que planifiquen sesiones de clase que las ejecutan ante sus compañeros, quienes simulan ser estudiantes de Educación Secundaria. En el contexto real, los estudiantes para profesor ejecutan sesiones de clase en colegios públicos o privados, en cualquiera de los grados de Educación Secundaria.

² La carrera universitaria de Educación tiene una duración de 5 años. En cada año se desarrollan 2 ciclos académicos cuya duración es, aproximadamente, 4 meses.

3.3 Recogida de información: Prueba de conocimiento disciplinar y didáctico

La recolección de datos se hace con la técnica de encuesta pues se “pretende obtener información que suministra un grupo o muestra de sujetos acerca de sí mismos, o en relación con un tema en particular” (Arias, 2012, p. 72). En ese sentido, se emplea un cuestionario de respuesta abierta, que ya había sido propuesto por la docente responsable de la asignatura, como parte de la evaluación de la asignatura Práctica Pre Profesional B de una universidad privada de Piura. El cuestionario consiste en una prueba, relativa a conocimiento de estadística y geometría. Sin embargo, para este estudio, solo consideramos los 4 ítems de la parte geométrica (**Figura 7**).

Figura 7

Cuestionario para recoger datos, ítem 1

4. Analice la siguiente situación y responda a las preguntas propuestas.

Situación: Al iniciar el tema de Polígonos en 2° de secundaria, Laura pide a sus alumnos que piensen *¿Qué es un polígono y cómo lo definirían?* Tras unos minutos, les pide que escriban en una hoja la definición que han pensado. A continuación, Laura hace una tabla en la pizarra y salen algunos alumnos a escribir la definición que han construido:

Alumno	Definición
Pablo	Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares.
Ana	Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales.
Gaby	Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180°, su fórmula sería $180^\circ(n-2)$.
Luis	Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.

- 1) Si usted estuviera en el caso de Laura (la profesora) y tuviera que valorar **dos** de las definiciones dadas ¿qué errores identificaría? ¿qué conceptos considera que confunden? ¿qué ideas son válidas en la definición de polígono? Haga una breve justificación en cada caso.

Definición dada por:	Errores de la definición	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)	Ideas válidas/ justificación de tal consideración

Nota. Extraído de prueba escrita de la asignatura Práctica Pre Profesional B.

En el primer ítem (**Figura 7**) se debe hacer un análisis de las 4 definiciones de polígono, hipotéticamente elaboradas por estudiantes de secundaria. Así pues, el futuro profesor de matemática debe situarse en el rol docente y valorar dos de las definiciones construidas, para identificar los errores, los conceptos que confunden y las ideas válidas de estos.

En el segundo ítem (**Figura 8**), el futuro profesor de matemática construye una definición verbal para estudiantes de segundo de secundaria.

En el tercer ítem, el futuro profesor de matemática traza ejemplos y contraejemplos de polígonos, considerando la definición que ha construido.

En el cuarto ítem, los informantes deben analizar y mencionar las características que consideran ha de tener una buena definición matemática y corroborar si estas se ajustan a la definición elaborada en el segundo ítem.

Figura 8

Cuestionario para recoger datos, ítems 2-4

- 2) ¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a los estudiantes de 2° de secundaria (de la situación propuesta). Enúnciela.

- 3) Trace tres dibujos, lo más variados posibles, que ejemplifiquen la definición que ha construido en (2) y tres dibujos que no estén considerados en ella.

Ejemplos de polígono	Ejemplos de NO polígono

- 4) ¿Qué características cree que debe tener una buena definición matemática? ¿La definición dada en (2) se ajusta a las características que propone?

Nota. Extraído de prueba escrita de la asignatura Práctica Pre Profesional B.

3.4 Análisis de los datos

El estudio de los datos se realiza mediante la técnica de análisis de contenido (Flick, 2007). Este es un procedimiento para analizar el material textual, que va desde productos de medios de comunicación a datos de entrevista. Uno de sus rasgos esenciales es el uso de las categorías, que con frecuencia se derivan de modelos teóricos, pero no siempre se limitan a estos. Este procedimiento implica la categorización y codificación de datos, lo que permite a los investigadores extraer información valiosa de amplio contenido, con la finalidad de estructurarla, ya sea de manera cuantitativa o cualitativa, dependiendo de los objetivos de la investigación. Además, se identifica y diferencia unidades de significado. Así pues, se entiende por categorización aquel proceso que consiste en clasificar información en categorías según ciertos criterios, con el objetivo de entender y analizar un fenómeno de manera integral. Implica descomponer la información en partes más pequeñas, para luego agruparlas en categorías que tengan características o elementos comunes.

Considerando lo anterior, presentamos las categorías determinadas en función de los objetivos del estudio (**Tabla 4**), tomando como referencia los subdominios y categorías del dominio matemático del modelo Conocimiento matemático especializado del profesor de matemática (MTSK). En este sentido tomamos parte de las tablas para el análisis propuestas por Carreño (2021).

Tabla 4

Subdominios, categorías y descriptores del MTSK respecto del concepto polígono analizados en el cuestionario

Subdominio	Categoría	Descriptor	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4
KoT- Conocimiento de los temas	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Características que atribuye a polígono	X	X	X	
		Propiedades de polígonos	X	X		
		Definición verbal	X	X		
		Imagen conceptual de polígono	x	X	X	
	Registros de representación	Características de las representaciones gráficas				X
KPM- Conocimiento de la práctica matemática	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Características de una definición matemática		X		X

Nota. Adaptada de Carreño (2021, p. 116)

De la tabla anterior, puede verse que las *características que se atribuye a polígono y la imagen conceptual* que se tiene de este, se estudian en 3 ítems: cuando se analizan las definiciones dadas, al construir una definición de polígono y al ejemplificar gráficamente esta. Así pues, se diferencian

elementos estructurantes y las características críticas de polígono (Apartado 2.1), tal como se muestra en la (**Tabla 5**)

Tabla 5

Elementos estructurantes y características críticas en los polígonos trazados

EPP	Elementos estructurantes y características críticas en los polígonos trazados			
	Figura geométrica	(Figura geométrica) cerrada	Formada por la unión de tres o más puntos no colineales	Segmentos que no se cruzan
A1				
A2				
A3				
A4				
A5				
A6				
A7				
A8				
A9				
A10				
A11				
A12				
A13				
A14				
A15				
A16				
A17				
A18				
A19				
A20				

Nota. Elaboración propia.

Además, de los elementos estructurantes y de las características críticas de polígono, también ponemos atención a las características de los no polígonos que traza cada futuro profesor, las cuales se establecen por contraposición (**Tabla 6**).

Tabla 6

Características en los ejemplos de NO polígonos

EPP	Características de los ejemplos trazados como No Polígonos							Formada por la unión de tres o más puntos colineales	Segmentos que se cruzan
	Sólido geométrico	Figura geométrica					Cerradas con segmentos mixtos (rectos y curvos)		
		Abierta con segmentos rectilíneos	Abierta con segmentos curvilíneos	Abierta con segmentos mixtos (rectos y curvos)	Cerrada (segmentos curvilíneos)				
A1									
A2									
A3									
A4									
A5									
A6									
A7									
A8									
A9									
A10									
A11									
A12									
A13									
A14									
A15									
A16									
A17									
A18									
A19									
A20									
Total									

Nota. Elaboración propia.

El trazado de ejemplos de polígonos y no polígonos también permite estudiar las características de estos, considerando lo propuesto por Scaglia y Moriena (2005). Así, diferenciamos en representaciones estereotipadas y no estereotipadas (**Tabla 7**).

Tabla 7

Clasificación de representaciones graficas en estereotipadas y no estereotipadas

EPP	Representación gráfica estereotipada			Representación gráfica No estereotipada
	Posición	Simetría	Forma	
A1				
A2				
A3				
A4				
A5				
A6				
A7				
A8				
A9				
A10				
A11				
A12				
A13				
A14				
A15				
A16				
A17				
A18				
A19				
A20				

Nota. Elaboración propia.

Para el análisis de las características de una definición matemática hemos profundizado en las propuestas de Pascual et al. (2019), De Villiers et al. (2009), Zazkis y Leikin (2008). De estos, optamos por tomar de referencia el trabajo de Pascual et al. (2019) y de Zazkis y Leikin (2008), tanto para el análisis de las definiciones construidas, como valorar la coherencia entre estas y las representaciones gráficas que trazan (**Tabla 8**).

Tabla 8

Análisis de las definiciones que construyen los futuros profesores a partir de los estudios de Pascual et al. (2019) y el de Zazkis y Leikin (2008)

EPP	Zazkis y Leikin (2008)					Pascual et al. (2019)				
	Def. Apropriadas		Def. Inapropiadas			Mejorable	No Rigurosa	No contradictoria	No ambigua	Mínima
	Corrección	Riqueza	Corrección							
	Rigurosas	No rigurosa	Condiciones necesarias y no suficientes	Condiciones suficientes y no necesarias	Condiciones no necesarios y no suficiente					
A1										
A2										
A3										
A4										
A5										
A6										
A7										
A8										
A9										
A10										
A11										
A12										
A13										
A14										
A15										
A16										
A17										
A18										
A19										
A20										

Nota. Elaboración propia.

Finalmente, el futuro profesor de matemática debe determinar las características que debe tener una buena definición matemática y reflexionar si estas se ajustan a la definición que elaboró en el ítem 2. Sobre esto último, hacemos una valoración que corrobora o no, el resultado de la reflexión de cada futuro profesor (**Tabla 9**).

Tabla 9

Valoración de las características que debe tener una buena definición matemática

EPP	Características que debe tener una buena definición matemática			La definición dada (2) se ajusta a las características que propone (ítem 4)		Valoración sobre el ajuste de las características en la definición que propone	
	Según Pascual et al (2019)			SI	NO	SI	NO
	No contradictoria	No ambigua	mínima				
A1							
A2							
A3							
A4							
A5							
A6							
A7							
A8							
A9							
A10							
A11							
A12							
A13							
A14							
A15							
A16							
A17							
A18							
A19							
A20							
Total							

Nota. Elaboración propia.

Capítulo 4. Resultados y discusión

En este capítulo se muestra el análisis realizado según tres categorías del MTSK: Definiciones, propiedades y sus fundamentos, Registros de representación y Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (**Tabla 4**). Esto permite inferir, de las producciones de cada estudiante para profesor, el conocimiento especializado que movilizan en torno al concepto de polígono, de tal manera que se pueda tener una visión integrada y complementaria respecto de: los atributos de los polígonos, las características de las representaciones que trazan de ellos los futuros profesores y los aspectos estructurales de las definiciones que construyen. Al finalizar el capítulo, se presenta la discusión de resultados obtenidos en esta investigación, comparándolos con resultados obtenidos en los estudios de los antecedentes y el marco teórico. Los resultados se reportan en función de las tareas que realizan los futuros profesores al desarrollar el cuestionario, estas son: analizar definiciones dadas de polígono, construir una definición verbal de este concepto, representar gráficamente qué es y qué no es un polígono y, finalmente, indicar qué características debe tener una buena definición matemática.

4.1 Conocimiento especializado al analizar las definiciones dadas

El análisis de las definiciones propuesto en la pregunta 1 en la que se muestran 4 definiciones de polígono dadas por hipotéticos estudiantes de secundaria, permite que, al identificar los errores en las definiciones, las ideas que confunden y las que consideran válidas, los futuros profesores dejen ver las características que le atribuyen a polígono. En el discurso se presenta en cursiva las respuestas relevantes de algunos futuros profesores.

Tabla 10

Definiciones elegidas por los futuros profesores para analizarlas

	Definición de Pablo	Definición de Ana	Definición de Gaby	Definición de Luis
	Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares.	Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales	Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180° , su fórmula sería $180^\circ(n-2)$.	Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.
A1		X	X	
A2	X			X
A3	X	X		
A4	X	X		
A5		X	X	
A6		X	X	
A7	X	X		
A8			X	X
A9		X	X	
A10			X	X
A11	X	X		

	Definición de Pablo	Definición de Ana	Definición de Gaby	Definición de Luis
	Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares.	Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales	Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180° , su fórmula sería $180^\circ(n-2)$.	Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.
A12	X	X		
A13	X	X		
A14	X	X		
A15	X	X		
A16		X	X	
A17	X		X	
A18	X	X	X	X
A19	X		X	
A20	X	X		
Total	13	15	10	4

Nota. Elaboración propia.

4.1.1 Análisis de la definición de Pablo

Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares.

Esta definición es analizada por 13 futuros profesores. De estos, doce (A2, A3, A4, A11, A12, A13, A14, A15, A17, A18, A19 y A20) señalan que es una **idea errónea** definir polígono como *cuerpo geométrico* y, salvo A20, también indican que es un error señalar que *los polígonos tienen lados y ángulos diferentes*. De modo contrario A20 y A7 reconocen como error señalar que *el polígono tiene ángulos y lados de diferentes medidas, pero no que se le defina como cuerpo geométrico*. Así pues, doce futuros profesores (A2, A3, A4, A7, A11, A12, A13, A14, A15, A17, A18 y A19) reconocen como *error que el polígono tiene lados y ángulos de diferentes medidas*.

También, tres futuros profesores (A18, A19, A20) consideran un error incluir la clasificación de polígonos en la definición de este (**Figura 9**).

Figura 9

Evidencias de que incluir la clasificación de polígono en su definición es un error

	A18	A19	A20
Definición dada por:	Errores de la definición	Errores de la definición	Errores de la definición
Pablo	* ángulos diferentes * cuerpo. * clasificación	• El error en Pablo está en afirmar que tiene lados y ángulos diferentes, no justamente, porque en polígonos se tiene también los polígonos regulares y aquellos tienen ángulos y lados iguales.	Cuerpo Cóncavos Convexos
Luis	no hay error pero no enuncia de manera entendible	• Al decir que son cóncavos, convexos, regulares e irregulares, los polígonos son regulares e irregulares.	

Nota. Elaboración propia.

De las respuestas de A19 y A20 se tiene la certeza de que es un error decir que los polígonos se clasifican en cóncavos y convexos, lo que lleva a concluir que solo aceptan la clasificación de polígonos regulares e irregulares. Esto no puede asegurarse para A18, pues al señalar que la “clasificación” es un error de la definición de Pablo, puede pensarse que: en una definición no debe ir la clasificación o que la clasificación indicada no es correcta.

En cuanto a **ideas que confunden**: 6 estudiantes (A2, A12, A13, A14, A15 y A17) señalan que en la definición de Pablo se confunde figura geométrica con cuerpo geométrico. De estos, A2 junto a A14, señalan que Pablo omite los polígonos regulares, mientras que los futuros profesores A15 y A17 indican una ausencia de conocimiento o conocimiento parcial sobre el concepto de polígono. En relación con esto, 6 futuros profesores (A3, A4, A7, A12, A13 y A19) generalizan el concepto de polígono con el de polígonos irregulares (Figura 10).

Figura 10

Evidencias de que generalizan el concepto de polígono en polígonos irregulares

	A7	A13	A19
Definición dada por:	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)
Pablo	Generaliza el concepto de polígono a los irregulares, a pesar de que reconoce que también hay regulares.	* Figuras con cuerpos geométricos. * La clasificación de los polígonos, ya que pueden ser regulares o irregulares; así como cóncavos o convexos.	• Están confundiendo el concepto de polígonos con polígonos irregulares. - Los polígonos irregulares son aquellos que tienen ángulos y lados diferentes y los polígonos son aquellas figuras geométricas cerradas que tienen lados, ángulos, vértices, entre otras.

Nota. Elaboración propia.

De la respuesta de A7 se evidencia una generalización explícita del concepto de polígono irregular mientras que A13 evidencia una generalización implícita, porque se infiere al mencionar a las clases de polígonos, en cambio A19 para justificar, define polígono y polígono irregular.

Por otro lado, probablemente A11 (Figura 11) reconoce que no hay una correspondencia correcta entre la característica *tiene lados y ángulos diferentes* con las clases de polígonos indicados. Además, este futuro profesor tiene confundidas las definiciones de los polígonos cóncavos con los convexos, similar a la idea que confunde A20 quien diferencia cuadriláteros cóncavos y convexos, lo cual no deja claro lo que quiere transmitir y lleva a pensar que, al indicar: cuadriláteros cóncavos y cuadriláteros convexos, ejemplifica la clasificación dado por Pablo. Así mismo, A20 no evidencia conocimiento del concepto cuerpo geométrico porque este lo asocia al estudio de la Física (Figura 11). El estudiante A18 no elabora respuesta, en cuanto a las ideas que confunde Pablo al definir el concepto de polígono.

Figura 11

Evidencias de los conceptos que están confundiendo entre los polígonos cóncavos con los convexos

	A11	A20
Definición dada por:	<p>Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)</p>	<p>Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)</p>
Pablo	<p>- Se confunde los medidos de los ángulos de un polígono (cóncavos Menos a 180° y convexo Mayor a 180°) con la clasificación de tipo de polígonos. ¿quieren?</p>	<p>- Cuadriláteros convexos y no convexos. - cuerpo se habla en física.</p>

Nota. Elaboración propia.

Con respecto a las **ideas válidas**: 9 futuros profesores (A2, A3, A11, A12, A13, A14, A15 A17 y A19) están de acuerdo al mencionar la clasificación de polígonos (regular, irregular, cóncavo y convexo). De estos, A13 excluye a los polígonos regulares de la clasificación, probablemente porque no hay una correspondencia con la característica señalada por la definición de Pablo "lados y ángulos diferentes". En cambio, A11 y A20 consideran válido clasificar al polígono en *regular e irregular* pero no mencionan a los polígonos cóncavos y convexos como parte de la clasificación, debido a que no tienen claro dichas definiciones. También el estudiante A7 indica como idea válida la existencia de polígonos irregulares, generalizando el concepto de polígono en polígonos irregulares. Por lo tanto, sobre A7, A11 y A20 podemos inferir que tienen un conocimiento parcial de las clases de polígono (Figura 12).

Figura 12

Evidencia de la existencia de polígonos irregulares

	A7	A13	A11	A20
Definición dada por:	<p>Ideas válidas/justificación de tal consideración</p>	<p>Ideas válidas/justificación de tal consideración</p>	<p>Ideas válidas/justificación de tal consideración</p>	<p>Ideas válidas/justificación de tal consideración</p>
Pablo	<p>La existencia de polígonos irregulares en los que efectivamente los lados y ángulos son diferentes medidas.</p>	<p>Los polígonos irregulares tienen ángulos y lados diferentes. + según sus ángulos pueden ser cóncavos o convexos.</p>	<p>Los polígonos se clasifican en regulares e irregulares y en cóncavos y convexos no?</p>	<p>Los polígonos son figuras geométricas cerradas que a la vez se clasifican en polígonos regulares e irregulares.</p>

Nota. Elaboración propia.

Por otro lado, el estudiante A15 indica que piden definir, y no clasificar, por lo que se infiere que no corresponde incluir la clasificación en una definición. Así mismo, este estudiante y el A19 señalan que es correcto que un polígono tiene lados y ángulos, evidenciando falta de precisión en la definición. En cambio, A4 añade que *los lados y ángulos pueden ser iguales o diferentes (Figura 13)*, lo cual coincide con A19, pero se contradice con A15. Así pues, en la respuesta de A4 se puede inferir que hace falta precisar los elementos en la definición y dejar abierta la posibilidad de que en esta se deba incluir la clasificación. En la línea de la precisión, se observa que A4 (Figura 13) y A20 (Figura 12) afirman que el polígono es una figura geométrica, pero solo este último le agrega el término *cerrada*. Esto lleva a pensar en que A20 nota la necesidad de hacer más precisiones.

Figura 13

Evidencias de las ideas válidas acerca de la definición de Pablo

	A4	A15	A19
Definición dada por:	Ideas válidas/ justificación de tal consideración	Ideas válidas/ justificación de tal consideración	Ideas válidas/ justificación de tal consideración
Pablo	Figura geométrica que tiene lados y ángulos, que pueden ser iguales o diferentes.	<ul style="list-style-type: none"> • Es correcto que tiene lados y tiene ángulos. • La clasificación es correcta, aunque le piden definición, nos no clasificación. 	<ul style="list-style-type: none"> • Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos.

Nota. Elaboración propia.

4.1.2 Análisis de la definición de Ana

Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales

La definición de Ana es analizada por 15 futuros profesores. De estos, 7 (A1, A3, A6, A9, A13, A14 y A15) indican que una **idea errónea** al definir polígono es **generalizarlo a un polígono regular**. Por su parte, A3 reconoce como error no precisar que la **figura geométrica debe ser cerrada**, mientras que A1 señala como erróneo que el polígono tiene **lados y ángulos de medidas iguales**. Esta misma idea es compartida por los futuros profesores A4, A5, A7, A11, A12, A16 y A20. En cambio, A18 probablemente tiene un conocimiento parcial sobre la definición de polígono, al no identificar errores en el enunciado dado.

En cuanto a las **ideas que confunden** los futuros profesores, solo 14 (A1, A3, A4, A5, A6, A7, A9, A11, A12, A13, A14, A15, A16 y A20) señalan la **generalización del concepto polígono a un polígono regular**. Esta idea ya fue reconocida como errónea por 7 futuros profesores, en el párrafo anterior. Llama la atención que A6 y A15 muestran un reparo en las representaciones gráficas comunes pues señalan: “deberían mostrar polígonos de forma no tan común (regulares e irregulares)” y “visualizar triángulos o cuadrados con medidas exactas sin considerar otras figuras como rectángulos, rombos, etc.”, respectivamente (**Figura 14**).

Figura 14

Evidencia de la inclusión implícita del término prototipo

	A6	A15
Definición dada por:	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)
Ana.	Generalizar el concepto de un polígono como algo que posea medidas iguales esto debido al visualizar triángulos o cuadrados con medidas exactas sin considerar otras figuras como rectángulos, rombos, etc.	• Pero ella solo muestra los polígonos regulares por lo que se le deberían mostrar polígonos de forma no tan común (concavos, irregulares)

Nota. Elaboración propia.

Lo que indica A15 lleva a pensar en los polígonos más usados en la enseñanza (prototípicos) y por ello, sugiere mostrar polígonos de forma no tan común. Por otro lado, A16 reconoce que Ana confunde la definición de polígonos con su clasificación y, además, reduce estos a equiláteros y equiángulos. Finalmente, solo el estudiante A18 afirma que la definición no tiene ideas confusas.

En cuanto a las **ideas válidas** tenemos que 11 estudiantes (A1, A3, A5, A6, A11, A12, A14, A15, A16, A18 y A20) reconocen que el polígono es una figura geométrica. De estos, solo A20 le añade el término "cerrada", lo que lleva a pensar en que A20 nota la necesidad de hacer más precisiones en la definición. No obstante, al no indicar que la figura cerrada está formada por segmentos, no excluye a la circunferencia de ser polígono. Este futuro profesor junto con A9 y A6 indican como idea válida que **la medida de los lados y ángulos pueden ser iguales o diferentes**, además A6 menciona que el polígono se **ubica en un solo plano (no tridimensional)**, cuyos elementos **lados y ángulos** pueden tener una diversidad de medidas, según sea el polígono que se está estudiando.

También, los futuros profesores A1, A4, A6, A7, A9, A13, A18 y A19 indican como idea válida considerar que el polígono tiene **lados y ángulos de igual medida, reduciendo con ello los polígonos a polígonos regulares**. Sin embargo, podemos observar que los estudiantes A12 y A15 afirman que el polígono tiene lados y ángulos, pero no especifican si son iguales o diferentes (**Figura 15**).

Figura 15

Evidencia de la falta de precisión en las características lados y ángulos de un polígono

	A12	A15
Definición dada por:	Ideas válidas/ justificación de tal consideración	Ideas válidas/ justificación de tal consideración
Ana.	Figura geométrica. - tiene lados y ángulos (en su mayoría). Excepto el círculo no. Tiene lados. considera que en su mayoría tienen lados y ángulos.	- Es correcto que es una figura geométrica y que tiene lados y ángulos, aunque le falta mencionar los adecuadas características de estos.

Nota. Elaboración propia.

Por último, el estudiante A18 afirma que está correcta la definición, lo cual supone que equipara polígono con polígono regular.

4.1.3 Análisis de la definición de Gaby

Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180° , su fórmula sería $180^\circ(n-2)$.

De los 10 futuros profesores que eligieron la definición de Gaby, solo 7 estudiantes (A1, A8, A9, A10, A16, A17, A19) señalan como idea errónea definir polígono indicando que **sus ángulos miden más de 180°** . De estos, además A19 junto a A5 consideran un error la inclusión de la fórmula $180^\circ(n-2)$, aunque dejan evidencia de que saben el significado de la fórmula (**Figura 16**).

Figura 16

Evidencia en la que se considera error la inclusión de la fórmula $180^\circ(n-2)$

	A5	A19
Definición dada por:	Errores de la definición	Errores de la definición
Gaby	<p>Más de 180°</p> <p>→ La fórmula $180(n-2)$ se usa para hallar la suma de los ángulos interiores del polígono.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • El error está en decir que sus ángulos miden más de 180°, aquello es falso, no siempre • No exactamente la fórmula del polígono es $180^\circ(n-2)$ <p>aquella es la fórmula para saber la sumatoria de todos los ángulos de un polígono.</p>

Nota. Elaboración propia.

Relacionado con la fórmula para calcular la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono, se tiene a A6 indica que en un triángulo dicha suma no supera los 180° , consideración que es errónea. Por su parte, A18 afirma que la definición no tiene ideas erróneas, lo cual lleva a pensar que A18 tiene claro que un polígono tiene 3 o más lados, sus ángulos podrían ser cóncavos y además, no repara en qué debe incluirse en una definición y por ello, no cuestiona la presencia de la fórmula.

Sobre las **ideas confundidas**, A1 y A8 consideran la aplicación de la fórmula $180^\circ(n-2)$, mientras A1, A5, A16, A17 señalan que sus ángulos miden más de 180° ; en cuanto A8, A9, A10 indican que la suma de sus ángulos interiores suma más de 180° (Figura 17).

Figura 17

Evidencia de ideas confundidas.

	A8	A9	A10
Definición dada por:	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)
Gaby	<p>- Su fórmula sería $180^\circ (n-2)$.</p> <p>Justificación</p> <p>• No se especifica para qué fórmula es, esta solo es para hablar la suma de los ángulos interiores.</p> <p>• Faltaría para una suma de ángulos externos, y del número de diagonales.</p>	<p>⇒ que sus ángulos miden más de 120°</p> <p>→ confundido con la definición de la suma de los ángulos de un triángulo</p>	<p>Están confundiendo la suma de los ángulos interiores de un triángulo y piensa que un polígono es una figura geométrica que tenga más de 180° la suma de sus ángulos</p>

Nota. Elaboración propia.

De las respuestas, A8 hace referencia a que en la definición de Gaby se excluye al triángulo como polígono. Probablemente A9 crea que la fórmula no debe ir en la definición. Para A10 el triángulo puede estar generando restricciones para comprender la definición.

Sobre las **ideas válidas**, A5, A6, A8, A10, A16, A17, A18 y A19, señalan que **el polígono es una figura geométrica**, estos mismos futuros profesores indican que dicho concepto **posee más de dos lados**, excepto A5 que no menciona características sobre sus lados. Por su parte, A1 denota que los ángulos pueden medir más o menos de 180° , lo cual podría significar que A5 sabe que un polígono puede tener ángulos cóncavos y convexos. Además, A6, A9, A10 y A19, consideran como idea válida la aplicación de la fórmula $180^\circ(n-2)$ para hallar la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono. Probablemente, estos informantes han valorado la corrección de la fórmula sin cuestionar si deba o no ir en una definición.

4.1.4 Análisis de la definición de Luis

Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.

La definición de Luis es analizada por 4 futuros profesores (A2, A8, A10 y A18). De estos dos de ellos A2 y A10 señalan como **idea errónea** que **los puntos no deben cruzarse** (Figura 18).

Figura 18

Evidencia de la idea errónea acerca de los puntos no deben cruzarse

	A2	A10
Definición dada por:	Errores de la definición	Errores de la definición
LWIS	"Los puntos no deben cruzarse"	Unión de 3 o más puntos los puntos no deben cruzarse.

Nota. Elaboración propia.

De las respuestas de los dos futuros profesores, A2 tiene claro el concepto de polígono al mencionar que es una figura geométrica cerrada, ocupa un lugar en el plano, y que tienen al menos 3 vértices. Por lo antes mencionado, se infiere que los segmentos de un polígono no deben cruzarse. Por su parte, A10 indica como idea errónea que el polígono esté compuesto por la unión de 3 o más puntos, sin precisar las características de estos elementos, es decir, que dichos puntos son no colineales y forman (o definen) segmentos de recta dos a dos. Además, A18 considera que la definición no es entendible y A8 no responde, ni señala ideas erróneas.

En cuanto a las **ideas confundidas** los estudiantes A2, A8 y A10 precisan que lo que **no debe cruzarse son los segmentos, no los puntos (Figura 19)**. Además, A10 señala que se está confundiendo vértice (punto) con los lados (segmentos). Así mismo, A18 no coloca una respuesta en el cuestionario sobre las ideas confundidas.

Figura 19

Evidencia de ideas confundidas acerca de los puntos no deben cruzarse

	A2	A8	A10
Definición dada por:	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)	Conceptos que están confundiendo (interpretación del error)
Luis	Los segmentos que unen los puntos del polígono no deben cruzarse.	<ul style="list-style-type: none"> - ocupa un lugar en el plano. - Los puntos no deben cruzarse. <p>justificación</p> <ul style="list-style-type: none"> - Al ser una figura geométrica cerrada se supone que está en 2 dimensiones y que va a estar en un plano, por lo que sería algo que ya se está definiendo antes. <p>No especifica cómo, estos pueden ser por sus diagonales o directamente algunos puntos que son sus lados.</p>	están confundiendo vértice (puntos) por los (lados) o segmentos.

Nota. Elaboración propia.

En cuanto a **ideas válidas**, tres futuros profesores (A2, A8, A10) señalan que el polígono es una **figura geométrica** que **tiene al menos tres vértices**. De estos los estudiantes A2 y A10 indican que el polígono encierra un **área delimitada por sus lados**, este último estudiante junto al futuro profesor A8 señalan que **los segmentos no deben cruzarse** (Figura 20), finalmente A18 menciona que no define o es ambigua la definición de polígono dada por Luis.

Figura 20

Evidencia de las ideas válidas en la definición de Luis

	A8	A10	A2
Definición dada por:	Ideas válidas/justificación de tal consideración	Ideas válidas/justificación de tal consideración	Ideas válidas/justificación de tal consideración
Luis	<ul style="list-style-type: none"> * Figura geométrica cerrada. * compuesta por la unión de 3 o más puntos. <p>justificación</p> <ul style="list-style-type: none"> * una polígono siempre será una figura geométrica cerrada. * Siempre parte desde el triángulo como un polígono como tal. 	<ul style="list-style-type: none"> Figura geométrica cerrada, ocupa un lugar en el plano. compuesta por la unión de 3 o más segmentos los segmentos no deben cruzarse. 	<ul style="list-style-type: none"> Figura geométrica cerrada: puesto que los polígonos encierran un área delimitada por sus lados. Los polígonos tienen al menos 3 vértices. <p>✓ Ocupa un lugar en el plano.</p>

Nota. Elaboración propia.

4.1.5 Síntesis

Después de haber descrito el análisis del primer ítem, en el cual cada uno de los futuros profesores de matemática asumió el rol de la profesora Laura, para valorar los errores, conceptos confundidos e ideas válidas de dos de las definiciones construidas por hipotéticos estudiantes de secundaria; se concluye lo siguiente:

En cuanto a las *ideas erróneas* encontradas en la definición de Pablo, tenemos 2 ideas predominantes: los futuros profesores consideran que es erróneo **definir el polígono como cuerpo geométrico** y considerar que tiene **lados y ángulos de diferentes medidas**. Ambas ideas están relacionadas con las características críticas de polígono, lo que permite reconocer que es un polígono para los futuros profesores es una figura geométrica que tiene lados y ángulos cuya medida podría coincidir en algunos casos (ser equiláteros, equiángulos o regulares) o no (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Un tercer error que reconocen es la **inclusión de la clasificación de polígono en dicha definición**, esta idea se vincula a lo que debe ir o no en una definición matemática (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Para el caso de la definición de Ana, los futuros profesores identifican dos ideas erróneas: que no se precise que el polígono es una figura geométrica **cerrada** y que se reduzca polígono a polígono regular (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Nótese que la primera idea se enfoca en las características críticas de polígono (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), y también en las características de una definición matemática pues se reconoce la falta de precisión (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). En la definición de Gaby, los futuros profesores señalan dos ideas erróneas: **indicar que los ángulos del polígono miden más de 180° e incluir la fórmula $180(n-2)$ en la definición**. La primera idea probablemente hace referencia a que un polígono pueda o no ser cóncavo (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), mientras que la segunda idea se vincula con qué se debe incluir en una definición (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Finalmente, en la definición de Luis, se reconoce como erróneo indicar que **los puntos no deben cruzarse**, pues interpretan que debió decirse que los segmentos no deben cruzarse. Esto denota conocimiento en los elementos y características del polígono, así como la exclusión de que los polígonos puedan tener los lados cruzados (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos).

En cuanto a las *ideas confundidas* en la definición de Pablo señalan que se confunde **figura geométrica con cuerpo geométrico**, lo cual evidencia que los futuros profesores diferencian ambos conceptos y que, por lo tanto, uno corresponde al plano y otro al espacio (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Quienes señalaron como error sostener que el polígono tiene **lados y ángulos de diferentes medidas**, también reconocen que se confunde el concepto de polígono con el de polígono irregular (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Sobre la definición de Ana, los futuros profesores indican que se confunde polígono con polígono regular, y en su explicación

mencionan ejemplos típicos tales como triángulos y cuadrados (**Figura 10**). Respecto de la definición de Gaby, los futuros profesores indican que se confunde la medida de un ángulo del polígono con suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono, o tal vez, cuestionan si un polígono puede tener ángulos cóncavos. Otra idea confusa es que los futuros profesores indican que en la definición no se precisa para que se utiliza **la fórmula $180^\circ(n-2)$** . Finalmente, sobre la definición de Luis, los futuros profesores reconocen que se confunde puntos con segmentos (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos)

Respecto de las ideas válidas en la definición de Pablo, lo que se observa es que los futuros profesores se limitan a calificar como válido el conocimiento asociado a polígono y no si corresponde incluirlo en la definición. De allí que indiquen que es una idea válida clasificar a los polígonos como: cóncavos, convexos, regulares e irregulares. Solo A15 indica que se pide definir y no clasificar, por lo que se infiere que este futuro profesores considera que no corresponde incluir la clasificación en una definición (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Así mismo reconocen que **el polígono es una figura geométrica**, añadiéndole el término “cerrada”, lo cual denota que identifican la necesidad de hacer precisiones, indicando que la **figura cerrada debe estar formada por segmentos**, para así excluir a la circunferencia de un polígono. También señalan que tiene **lados y ángulos**, sin añadir ninguna característica de estos. Las ideas válidas identificadas en la definición de Pablo, coinciden con las que se indican para la definición de Ana. A estas añaden que las medidas de los **lados y ángulos de un polígono pueden ser iguales o diferentes**. También, afirman que el polígono se ubica en un solo plano (no tridimensional) (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). En cuanto a la definición de Gaby, mencionan como ideas válidas la aplicación de la fórmula $180^\circ(n-2)$ sin cuestionar si deba o no ir en la definición, lo cual evidencia una ausencia de conocimiento sobre las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones). Así mismo, indican que el polígono **posee más de dos lados**, lo que lleva a pensar que los futuros profesores saben que un polígono tiene, como mínimo, 3 lados. Esto se corresponde con reconocer como válido, de la definición de Luis, que un polígono **tiene al menos tres vértices**, los cuales se unen mediante segmentos que no deben cruzarse.

4.2 Conocimiento especializado al construir una definición de polígono

4.2.1 Características y propiedades que atribuye a polígono

Para el análisis del contenido de las definiciones propuestas por los futuros profesores se toma de referencia la definición declarada en el apartado 2.4 (p. 32): *Polígono es una figura geométrica cerrada, formada por la unión de 3 o más puntos no colineales mediante segmentos, que cumplen las siguientes condiciones: a) No hay dos segmentos que se intersequen, excepto en sus puntos extremos; b) No hay dos segmentos con un mismo punto extremo que sean colineales.*

Es necesario para este análisis hacer una diferenciación entre elementos estructurantes y sus características críticas, de los elementos accesorios y sus características no críticas. En el primer grupo se incluye a: figura geométrica cerrada, puntos no colineales, puntos unidos por el extremo y segmentos que no se cruzan (**Tabla 11**). En el segundo grupo, se considera accesorio a aquello que amplía las características del objeto definido o da más información sobre él, esto es: tiene por elementos a ángulos, vértices y lados o incluso a la diagonal; delimita una región poligonal, puede clasificarse de distinta manera (p.ej. cóncavos y convexos, regulares e irregulares), se incluye fórmulas como las que permiten el cálculo de la suma de las medidas de los ángulos interiores: $180(n-2)$ o la cantidad de diagonales de un polígono: $\frac{n(n-3)}{2}$ (**Tabla 12**).

Considerando lo anterior, los *elementos estructurantes y las características críticas* identificadas son:

- *Figura geométrica*: es señalada por diecisiete futuros profesores. De los tres que no la indicaron (A3, A7 y A12) se ha observado que A3 al proponer su definición de polígono confunde cuerpo geométrico con figura geométrica, A7 se refiere a figura cerrada en lugar de figura geométrica y A12 indica región cerrada lo cual está vinculado al concepto de área.
- *Cerrada*: es indicada por quince futuros profesores. De estos, solo trece (A2, A4, A5, A8, A9, A10, A13, A15, A16, A17, A18, A19 y A20), señalan esta característica para el concepto *figura geométrica*, mientras que A7 indica figura cerrada y A12 menciona región cerrada.
- *Formada por la unión de tres o más puntos no colineales*: es indicada por siete futuros profesores (A5, A7, A9, A10, A14, A15 y A16), mientras que cuatro (A2, A3, A8, y A12) no especifican como deben ser esos puntos. También se ha identificado que tres futuros profesores (A6, A11 y A17) indican que el polígono posee más de dos lados, lo cual se equipara con la unión de 3 o más puntos, aunque hace falta mayores precisiones respecto a que los puntos deben ser no colineales y que no hay dos segmentos (lados) con un mismo punto extremo que sean colineales.
- *Segmentos que no se cruzan (que no se intersequen, excepto en sus puntos extremos)*: es señalada por cuatro futuros profesores A2, A9, A10 y A15.

Tabla 11*Elementos estructurantes y características críticas analizados en la definición construida*

EEP	Elementos estructurantes y las características críticas			
	<i>Figura geométrica</i>	<i>Cerrada</i>	<i>Formada por la unión de tres o más puntos no colineales</i>	<i>Segmentos que no se cruzan (que no se intersequen, excepto en sus puntos extremos)</i>
A1	X			
A2	X	X		X
A3				
A4	X	X		
A5	X	X	X	
A6	X			
A7		X	X	
A8	X	X		
A9	X	X	X	X
A10	X	X	X	X
A11	X			
A12		X		
A13	X	X		
A14	X		X	
A15	X	X	X	X
A16	X	X	X	
A17	X	X		
A18	X	X		
A19	X	X		
A20	X	X		

Nota. Elaboración propia.

De estos veinte informantes; diecinueve han considerado al menos uno de los elementos estructurantes y sus características críticas, sin embargo, solo uno (A3) no los considera. Se observa que, al proponer su definición de polígono, confunde cuerpo geométrico con figura geométrica, y al mencionar la unión de 3 o más puntos, no especifican como deben ser esos puntos.

Después de lo analizado, se concluye que A9, A10 y A15 se aproximan a la definición de polígono que tomamos como referencia (**Figura 21**)

Figura 21

Evidencia de los elementos estructurantes y las características críticas en la definición de Polígono.

Definición dada por:	¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a los estudiantes de 2° de secundaria (de la situación propuesta). Enúnciela.
A9	<p>Polígono es una figura geométrica plana ^{cerrada} que está constituido por la unión de 3 o más puntos coplanarios y no colineales; la unión de tales puntos (segmentos) no se cruzan entre sí.</p>
A10	<p>Un polígono es una figura geométrica cerrada compuesta por 3 o más segmentos los cuales no deben cruzarse, se unen por los extremos el cual se les llama vértice y estos segmentos no son colineales (es decir no están en la misma dirección y no tienen el mismo sentido.) (2,0 puntos)</p>
A15	<p>Un polígono es una figura geométrica cerrada y bidimensional, compuesta por la unión de 3 o más puntos, en el que dichos puntos no deben pertenecer a una misma recta y no deben cruzarse.</p>

Nota. Elaboración propia.

Los tres futuros profesores mencionados antes, señalan como elemento estructurante y característica crítica *figura geométrica cerrada*, aunque A9 y A15 indican como elementos accesorios y sus características *decir que se encuentra en un plano* y *es bidimensional* respectivamente, siendo redundante para la definición. Así mismo estos dos informantes mencionan que el polígono está formado por la unión de 3 o más puntos no colineales (no deben pertenecer a una misma recta), por otro lado, solo A9 y A10 indican *elemento estructurante* y *característica crítica* *segmentos que no se cruzan* (que no se intersequen, excepto en sus puntos extremos), mientras que A15 menciona que dichos puntos que no están en una misma recta no deben cruzarse.

Sobre los *elementos accesorios* y *las características no críticas* de polígono se ha identificado lo siguiente (Tabla 12):

- *Elementos de un polígono (ángulos, vértices y lados o incluso a la diagonal)*: es señalada por 6 futuros profesores (A1, A3, A4, A8, A18 y A19).
- *Región poligonal*: es indicada solo por A7.

- *Clasificación de polígonos*: es indicada por trece futuros profesores, de los cuales ocho (A1, A3, A4, A6, A11, A18, A19 y A20) clasifican los polígonos en regulares e irregulares, cuatro (A2, A13, A14 y A17) clasifican los polígonos en cóncavos o convexos, regulares e irregulares y uno (A8) los clasifica en cóncavos o convexos, equiláteros, equiángulos o regulares.
- *Fórmula de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono $180(n-2)$* : es indicada por dos futuros profesores (A3 y A18).
- *Fórmula para hallar las diagonales de un polígono $\frac{n(n-3)}{2}$* : es indicada por solo un futuro profesor de matemática (A18).
- *Plano*: es señalada solo por siete futuros profesores (A1, A3, A6, A9, A14, A15 y A16). De estos, cuatro (A1, A6, A9 y A14) indican figura geométrica plana, lo cual puede ser redundante si, se considera que la figura geométrica tiene dos dimensiones.

Tabla 12

Elementos accesorios y características no críticas de polígono analizados en la definición construida

EPP	<i>Elementos accesorios y características no críticas de polígono</i>					
	Elementos de un polígono	Región poligonal	Clasificación de polígonos	Fórmula $S_{Di} = 180^\circ(n - 2)$	Fórmula $\#d = \frac{n(n-3)}{2}$	Plano
A1	X		X			X
A2			X			
A3	X		X	X		X
A4	X		X			
A5						
A6			X			X
A7		X				
A8	X					
A9						X
A10						
A11			X			
A12						
A13			X			
A14			X			X
A15						X
A16						X
A17			X			
A18	X		X	X	X	
A19	X		X			
A20			X			

Nota. Elaboración propia.

De estos veinte informantes, tres (A5, A10 y A12) no han incluido en su definición de polígono, los elementos accesorios y sus características no críticas, mientras que diecisiete futuros profesores han incluido al menos una de ellas.

En el siguiente apartado se retomará el análisis del contenido para analizar qué características tienen dichas definiciones en base a la estructura y características de una definición matemática que puede denominarse matemáticamente correcta.

4.2.2 Características de una definición matemática

Para analizar la estructura de las definiciones matemáticas construidas por los futuros profesores hemos integrado Pascual et al. (2019) y el de Zazkis y Leikin (2008) para analizar las definiciones que construyen los futuros profesores. Por su parte Pascual et al. (2019), establece como criterios para analizar las definiciones de polígono construidas: ser no contradictoria, ser no ambigua desde la perspectiva escolar, ser no ambigua desde la perspectiva formal y ser mínima (incluir condiciones necesarias y suficientes), mientras Zazkis y Leikin (2008) establecen los siguientes criterios: accesibilidad y corrección, riqueza y generalidad, lo cual permite diferenciar definiciones apropiadas e inapropiadas (**Tabla 8**).

Nuestro análisis se centra en evaluar la adecuación de las definiciones de polígono proporcionadas por 20 futuros profesores de matemáticas de secundaria. Estas definiciones descriptivas (De Villiers, 1998) permiten examinar su comprensión de la estructura y los elementos críticos de una definición matemática, así como su capacidad para distinguir entre características esenciales y accesorias (**Tabla 13**).

Tabla 13

Análisis de la integración de los estudios de Pascual et al. (2019) y el de Zazkis y Leikin(2008) para el análisis de las definiciones que construyen los futuros profesores

EPP	Zazkis y Leikin (2008)					Pascual et al. (2019)				
	Def. Apropriadas		Def. Inapropiadas			Mejorable	No Rigurosa	No contradictoria	No ambigua	Mínima
	Corrección		Corrección		Condiciones necesarias y no suficientes					
	Rigurosas	No rigurosa	Riqueza	Condiciones suficientes y no necesarias		Condiciones no necesarios y no suficiente				
A1					X		X	X		
A2			X			X		X	X	
A3					X		X			
A4					X		X	X		
A5			X			X		X	X	
A6					X		X			
A7					X		X			
A8					X	X		X		
A9			X			X		X	X	
A10	X		X					X	X	
A11					X		X			
A12					X		X			
A13					X	X				
A14					X		X			
A15			X			X		X	X	
A16			X			X		X	X	
A17					X		X	X		
A18					X	X		X		
A19					X	X		X		
A20					X	X		X		

Nota. Elaboración propia.

A continuación, vamos a señalar, el análisis de la estructura de las definiciones matemáticas según Zazkis y Leikin (2008), lo que nos permite identificar patrones y tendencias en la forma en que los informantes abordan la definición de polígono, clasificándolas en apropiadas e inapropiadas.

- *Definiciones apropiadas:* indicamos que solo la definición del informante A10, pertenece a esta clasificación, porque al analizar su *corrección es rigurosa*: La definición establece condiciones necesarias y suficientes para definir un polígono, como la unión de 3 o más segmentos que no se cruzan, se unen por los extremos (vértices) y no son colineales. La definición es precisa y no deja lugar a ambigüedades. Al analizar la *riqueza*: La definición proporciona una descripción detallada y completa de las características de un polígono, incluyendo la condición de que los segmentos no se cruzan, se unen por los extremos y no son colineales. La definición cubre todos los aspectos esenciales de un polígono.
- *Definiciones inapropiadas:* señalamos que las definiciones de 19 futuros profesores se encuentran dentro de esta clasificación. De estos A2, A5, A9, A15 y A16, referente a su *corrección* tiene **condiciones necesarias y no suficientes**: A5 y A16 mencionan “Un polígono es una *figura geométrica cerrada* compuesta por la unión de 3 o más puntos no colineales”, esta *condición es necesaria*, porque es un elemento estructurante donde todos los polígonos deben estar formados por puntos no colineales. Sin embargo, esta *condición no es suficiente* para definir un polígono de manera única, porque otras figuras geométricas también pueden estar formadas por puntos no colineales. Por ejemplo, un círculo puede estar formado por puntos no colineales, pero no es un polígono. A diferencia de A16 en su definición le añade “se unen por medio de segmentos”, lo cual no es suficiente debe ser más precisa su definición. A comparación de A2, A9 y A15, incluyen en sus definiciones otro elemento estructurante *segmentos que no se cruzan*, esta condición es necesaria y esencial en el polígono, mientras A2 incluye elementos accesorios “clasificación de polígonos”, lo cual es una condición no suficiente. Al analizar su riqueza diremos que es *mejorable* en A2, A9 y A15 porque menciona aspectos no tradicionales (p.ej. Segmentos que no se cruzan al interior del polígono). Por su parte A5, A15 y A16, dotan de riqueza es *mejorable* al mencionar aspectos no tradicionales (p.ej. puntos no colineales), porque incluye aspectos importantes, pero pueden ser más claras y concisas.

Por otro lado, A8, A13, A18, A19, y A20, con respecto a su *corrección* tiene **condiciones suficientes y no necesarias**, en decir se incluye características que son adicionales (elementos accesorios) para describir algunos tipos de polígonos, pero no son esenciales (elementos estructurantes) para definir un polígono en general. Dentro de las características no necesarias para definir un polígono, tenemos: A8 indica la presencia de diagonales y apotema, la clasificación en cóncavos o convexos, equiláteros, equiángulos o regulares; A13 señala la clasificación en regulares o irregulares, cóncavos o convexos, A18 menciona la clasificación en regulares o irregulares, las fórmulas para calcular la medida de los ángulos y la cantidad de diagonales son propiedades de los polígonos,

pero no son necesarias para definir un polígono, A19 y A20 indican la clasificación en regulares o irregulares, sin embargo este último informante menciona polígono irregular como "lados iguales pero ángulos diferentes" y coloca como ejemplo el rombo. Esta idea evidencia una concepción incompleta de A20 sobre los polígonos irregulares, porque no considera que podrían tener lados diferentes y ángulos iguales (como el rectángulo) y lados y ángulos diferentes. Al analizar la riqueza de su definición diremos que es *mejorable* ya que incluye algunos elementos estructurantes, así como elementos accesorios (información adicional), también hace que las definiciones presentadas, consideradas como **condiciones suficientes y no necesarias**, sea un poco confusa, por lo que puede mejorarse para que sea clara y concisa.

Por su parte A1, A3, A4, A6, A7, A11, A12, A14 y A17, referente a su *corrección* tiene **condiciones no necesarios y no suficientes**, es decir no es necesario incluir *elementos accesorios* para definir un polígono (condiciones no necesarias) y no proporciona suficiente información sobre los *elementos estructurantes* de los polígonos (Condiciones no suficientes). Además, pueden incluir inconsistencias. De estos A1, A3, A4, A6, A11, A14 y A17 incluyen características no necesarias, entre ellas tenemos: A1, A3, A4, A6 y A11 señalan la clasificación en regulares e irregulares, mientras que A14 y A17 indican la clasificación de regulares e irregulares, cóncavos y convexos, por consiguiente A1, A3 y A4 indican elementos de polígono, así como A1, A3 y A6 mencionan que están en un plano, solo A7 indica región poligonal y por último A3 incluye la fórmula de la suma de las medidas de los ángulos de un polígono $180(n-2)$, estos elementos accesorios no son esenciales para definir un polígono.

En cambio, A3 al proponer su definición de polígono confunde cuerpo geométrico con figura geométrica, crea inconsistencia, mientras que A7 se refiere a figura cerrada en lugar de figura geométrica, A12 indica región cerrada lo cual está vinculado al concepto de área. Por su parte A1, A6, A9 y A14 indican figura geométrica plana, lo cual puede ser redundante, al atribuir al concepto dos dimensiones. Encontramos que A2, A3, A8, y A12, no especifican como deben ser esos puntos, también pudimos analizar que A6, A11 y A17 indican que el concepto posee más de dos lados, lo cual se equipara con la unión de 3 o más puntos, aunque se debe precisar que estos deben ser no colineales y además no hay dos segmentos (lados) con un mismo punto extremo que sean colineales. De las definiciones mencionadas ninguna menciona explícitamente *Segmentos que no se cruzan (que no se intersequen, excepto en sus puntos extremos)*, lo que las hace insuficientes. Al analizar su *riqueza* diremos que se presenta definiciones *no rigurosas* porque es demasiado vaga y no proporciona suficientes detalles para definir de manera precisa un polígono. (p.ej. A3 al proponer su definición de polígono confunde cuerpo geométrico con figura geométrica), creando inconsistencias.

A continuación, vamos a señalar, el análisis de la estructura de las definiciones matemáticas elaboradas por nuestros 20 informantes. Según Pascual et al. (2019), una definición es correcta y apropiada cuando cumple con estas tres características: no contradictorio, no ambigua y mínima,

enfaticamos que son características necesarias y suficientes, cabe resaltar si una definición cumple con solo dos de estas características y no con la tercera, son consideradas incorrectas e inapropiadas.

- *Definiciones correctas:* indicamos que solo la definición del informante A10 presenta las tres características antes mencionadas, es no contradictoria porque las características son consistentes, no ambigua hay precisión en la definición y es mínima porque no hay redundancia.
- *Definiciones incorrectas:* señalamos que las definiciones de 19 futuros profesores se encuentran dentro de esta clasificación. De estas, **7 definiciones** (A1, A4, A8, A17, A18, A19 y A20), presentan una sola característica de ser *no contradictorias* porque no contiene elementos matemáticos opuestos entre sí. Indicamos que estas definiciones son ambiguas y no mínimas. Son ambiguas porque no tiene precisión en la definición, mencionan características que no son esenciales (polígonos regulares e irregulares), mencionaremos dos ejemplos A8 y A20: A8 es ambigua porque no menciona como deben ser esos puntos, falta de precisión, estrictamente necesaria para definir un polígono, este además menciona a los ángulos exteriores, diagonales y apotema, A20 es ambigua porque utiliza términos que pueden interpretarse de diferentes maneras, como "lados iguales, pero ángulos diferentes", no es una característica precisa para definir un polígono irregular. No son mínimas o se aproxima a ser mínima al señalar que es una figura geométrica cerrada incluyen elementos accesorios y también son redundantes. Mencionamos ejemplos: A1 al decir figura geométrica plana, hace referencia que tiene dos dimensiones, y es redundante. A18 incluye elementos accesorios como la fórmula para la medida de los ángulos y cantidad de diagonales.

Por su lado **A9, A15 y A16** indicamos que cumplen con las características de ser *no contradictorias* y *no ambiguas*; es no contradictoria porque las características son consistentes y no ambigua porque hay precisión en la definición. Presenta ausencia de minimalidad por incluir elementos o características redundantes, mencionamos ejemplos: A9 indica "Figura geométrica plana cerrada" y "puntos coplanares", A15 señala "figura geométrica cerrada" y además es "bidimensional", y A16 tiene redundancia en la frase "llamaremos lados del polígono", ya que se ha mencionado que los segmentos que unen los puntos son los lados del polígono.

En cambio, **A2 y A5** son no contradictorias y mínimas; es mínima porque no hay redundancia y no contradictoria porque no contiene elementos matemáticos opuestos o incompatibles entre sí. Ambas definiciones son ambiguas, por su parte A2 no menciona como deben ser esos puntos, falta de precisión y A5 es parcialmente ambigua esta definición es clara en cuanto a los puntos no deben ser colineales, pero no especifica que los segmentos que unen los puntos no se cruzan entre sí. Esto puede llevar a interpretaciones erróneas o confusiones, especialmente en casos donde los segmentos se cruzan.

Por último, **A3, A6, A7, A11, A12, A13 y A14** no presentan ninguna de estas características propuestas por Pascual:

- ✓ A3: Es no contradictoria: No, porque combina términos incompatibles como "cuerpo geométrico" y "figura geométrica". Es no ambigua: No, porque no especifica como deben ser los puntos, si pueden ser colineales, etc. Es mínima: no porque incluye información adicional no esencial, como la suma de sus ángulos internos y la posibilidad de que los lados y ángulos sean iguales o diferentes.
- ✓ A6: Es no contradictoria: No, porque menciona que el polígono está ubicado en un plano unidimensional, lo que es contradictorio porque un polígono se define en un plano bidimensional. Es no ambigua: No, porque utiliza términos vagos como "más de dos lados" y no especifica claramente qué es un polígono regular o irregular. Es mínima: No, porque incluye información adicional no esencial, como ejemplos de polígonos y la mención de la clasificación en regulares e irregulares.
- ✓ A7: Es no contradictoria: No, porque la ambigüedad de "figura cerrada" y la falta de claridad sobre la unión de los segmentos podría llevar a una contradicción implícita. Es no ambigua: No, porque la expresión "figura cerrada" es ambigua y no especifica claramente que los segmentos no se cruzan entre sí. Es mínima: No, porque proporciona información innecesaria para definir un polígono como "región poligonal".
- ✓ A11: Es no contradictoria: No, porque al mencionar "los cuales pueden ser regulares e irregulares", lo cual no es cierto ya que está generalizándolo y la falta de claridad sobre la unión de los segmentos podría llevar a una contradicción implícita. Es no ambigua: No, porque tiene bajo nivel de precisión " unión de 3 o más lados unidos entre sí por sus extremos o vértices" y además decir Figura geométrica es ambigua.
- ✓ A13: Es no contradictoria: No, porque la definición establece que un polígono puede ser cóncavo si tiene un ángulo mayor a 180° , pero también establece que puede ser convexo si todos los ángulos son menores a 180° , lo que puede ser contradictorio. Es no ambigua: No, porque la definición utiliza términos como "regulares" e "irregulares" que pueden ser interpretados de diferentes maneras, y también utiliza la clasificación según los ángulos de manera confusa. Es mínima: No, porque la definición incluye detalles como la clasificación según los lados y los ángulos, que no son estrictamente necesarios para definir un polígono.
- ✓ A14: Es no contradictoria: No, porque la mención de "puntos no consecutivos" podría ser contradictoria con la idea de que los puntos se unen para formar una figura. Es no ambigua: No, porque la definición utiliza términos como "cóncavos y convexos, regulares e irregulares" que podrían ser interpretados de diferentes maneras. Es mínima: No, porque la definición incluye información adicional como la clasificación en cóncavos y convexos, regulares e irregulares, que no es esencial para definir un polígono.

4.2.3 Síntesis

Después de haber descrito el análisis del segundo ítem, en el cual cada uno de los futuros profesores de matemática construyeran definiciones sobre el concepto de polígono, se concluye lo siguiente:

Al realizar el análisis del contenido, evidenciamos que de las 20 definiciones elaboradas por los futuros profesores, solo A9, A10 y A15 se aproximan a la definición de polígono que tomamos como referencia, puesto que incluyen elementos estructurantes y sus características críticas: los tres informantes mencionan como *elemento estructurante y característica crítica figura geométrica cerrada* (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), por otro lado, solo A9 y A10 indican otro *elemento estructurante y característica crítica segmentos que no se cruzan (que no se intersequen, excepto en sus puntos extremos)*, se enfoca en las características críticas de polígono (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Mientras que A15 menciona que dichos puntos que no están en una misma recta, no deben cruzarse. También, A9 y A15 indican como *elementos accesorios y sus características decir que se encuentra en un plano y es bidimensional* respectivamente, siendo redundante para la definición.

En cuanto al análisis de la estructura de la definición matemática del concepto de polígono destacamos que de las 20 definiciones elaboradas por los futuros profesores, solo A10 es considerada definición apropiada, al presentar condiciones necesarias y suficientes según Zazkis y Leikin (2008), porque al analizar su *corrección es rigurosa*: La definición establece condiciones necesarias y suficientes (KPM-Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones) para definir un polígono, como la unión de 3 o más segmentos que no se cruzan, se unen por los extremos (vértices) y no son colineales (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos). La definición es precisa y no deja lugar a ambigüedades. Al analizar la *riqueza*: La definición proporciona una descripción detallada y completa de las características de un polígono (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), incluyendo la condición de que los segmentos no se cruzan, se unen por los extremos y no son colineales. La definición cubre todos los aspectos esenciales de un polígono. Así mismo según Pascual et al (2019) clasificamos esta definición como correcta porque presenta las tres características, es no contradictoria porque las características son consistentes, no ambigua hay precisión en la definición y es mínima porque no hay redundancia. En concordancia con lo anterior diremos que 19 informantes han elaborado definiciones inapropiadas según Zazkis y Leikin (2008), y a su vez estas definiciones presentan ausencia de al menos una característica (No contradictoria, No ambigua y mínima) para considerarse como definición incorrecta según Pascual et al (2019).

Según el análisis del contenido A9 y A15, son definiciones correctas, en cambio según la estructura de las definiciones son inapropiadas porque al analizar su *corrección* presenta condiciones necesarias y no suficientes y con respecto a la *riqueza* es mejorable Zazkis y Leikin (2008). Estas

respuestas incluyen en sus definiciones otro elemento estructurante *segmentos que no se cruzan* (KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos), esta condición es necesaria y esencial en el polígono, pero no es suficiente, al analizar su riqueza diremos que es *mejorable* porque menciona aspectos no tradicionales (p.ej. Segmentos que no se cruzan al interior del polígono). A15 denota riqueza mejorable al mencionar aspectos no tradicionales (p.ej. Puntos no colineales), porque incluye aspectos importantes, pero puede ser más clara y concisa. Sin embargo, se consideran *no contradictorias* y *no ambiguas*; es no contradictoria porque las características son consistentes y no ambigua porque hay precisión en la definición. Según Pascual et al (2019) presenta ausencia de minimalidad por incluir elementos o características redundantes, mencionamos ejemplos: A9 indica *figura geométrica plana cerrada* y *puntos coplanares*, A15 señala *figura geométrica cerrada* y además es *bidimensional*.

4.3 Conocimiento especializado al representar polígonos y no polígonos

4.3.1 Imagen conceptual de polígono

Para identificar la imagen conceptual de polígono se analizan las representaciones gráficas que traza el futuro profesor de matemática, para ejemplificar qué es y qué no es un polígono. Dicho análisis se basa en los elementos estructurantes y en las características críticas consideradas para el análisis de las definiciones verbales (apartado 4.2.1)

De los 20 futuros profesores, al ejemplificar el concepto de polígono se observa que todos ellos consideran como elementos estructurantes y características críticas las siguientes: figura geométrica, cerrada, formada por la unión de tres o más puntos no colineales y segmentos que no se cruzan (**Tabla 14**).

Tabla 14

Análisis de los elementos estructurantes y sus características críticas en los ejemplos de polígonos trazados

EPP	Elementos estructurantes y características críticas en los polígonos trazados			
	Figura geométrica	(Figura geométrica) cerrada	Formada por la unión de tres o más puntos no colineales	Segmentos que no se cruzan
A1	X	X	X	X
A2	X	X	X	X
A3	X	X	X	X
A4	X	X	X	X
A5	X	X	X	X
A6	X	X	X	X
A7	X	X	X	X
A8	X	X	X	X
A9	X	X	X	X
A10	X	X	X	X
A11	X	X	X	X
A12	X	X		X

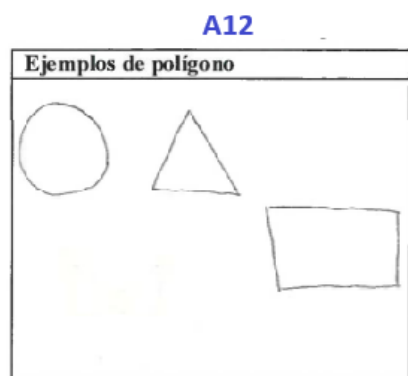
A13	X	X	X	X
A14	X	X	X	X
A15	X	X	X	X
A16	X	X	X	X
A17	X	X	X	X
A18	X	X	X	X
A19	X	X	X	X
A20	X	X	X	X

Nota. Elaboración propia.

Sin embargo, de los elementos anteriores, A12 no considera la característica *formada por la unión de tres o más puntos no colineales*, lo cual justificaría que considere a la circunferencia como polígono (**Figura 22**). Esta consideración resulta contradictoria con el hecho de haber indicado que los segmentos no se cruzan, pues una circunferencia no tiene segmentos (rectos).

Figura 22

Evidencia de no considerar la característica formada por la unión de tres o más puntos no colineales.



Nota. Elaboración propia.

Así pues, de los ejemplos dados por A12 se puede inferir que la imagen conceptual que tiene de polígono solo abarca representaciones simples (segmentos no cruzados) y convexas. Probablemente, asocia polígono con toda figura geométrica, siempre que esta sea cerrada. Dicha conclusión podría tener sus raíces en el uso que se hace de los bloques lógicos³ desde la Educación Inicial. De allí que incluya a la circunferencia dentro de los ejemplos de polígono.

Al analizar los ejemplos de no polígonos en los 20 futuros profesores, hemos determinado las siguientes características que contrastan con lo que es un polígono: sólido geométrico; figura geométrica abierta con segmentos rectilíneos, segmentos curvilíneos o segmentos mixtos (rectos y

³ Los bloques lógicos son un material concreto conformado por círculos, cuadrados, rectángulos y triángulos de distintos colores y tamaños.

curvos); figura geométrica cerrada con segmentos curvilíneos o segmentos mixtos (rectos y curvos); formada por la unión de tres o más puntos colineales y segmentos que se cruzan. El conteo global se hace por estudiante.

De la **Tabla 15** se observa que la característica *figura geométrica abierta* es representada por diecisiete (A2, A3, A5, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19 y A20) de los veinte futuros profesores. Dentro de estos diecisiete, catorce (A2, A3, A5, A7, A8, A9, A10, A11, A13, A14, A16, A17, A18, y A20) trazan solo figuras abiertas con segmentos rectilíneos; dos (A12 y A15) muestran que sea abierta con segmentos rectilíneos y abierta con segmentos mixtos (rectos y curvos); y uno (A19) indica que sea abierta con segmentos rectilíneos y curvilíneos.

Tabla 15

Análisis de las características identificadas en los ejemplos trazados de NO polígonos

EPP	Sólido geométrico	Figura geométrica					Formada por la unión de tres o más puntos colineales	Segmentos que se cruzan
		Abierta con segmentos rectilíneos	Abierta con segmentos curvilíneos	Abierta con segmentos mixtos (rectos y curvos)	Cerrada (segmentos curvilíneos)	Cerradas con segmentos mixtos (rectos y curvos)		
A1	X				X			
A2		X						X
A3		X			X	X		
A4	X				X			
A5		X					X	X
A6					X	X		
A7		X				X		
A8		X					X	
A9		X					X	X
A10		X					X	X
A11		X						X
A12		X		X			X	
A13		X			X			
A14		X			X		X	
A15		X		X			X	
A16		X					X	
A17		X						X
A18		X			X			
A19		X	X					X
A20		X			X			
		17	1	2	8	3		
Total	2		17			9	8	7

Nota. Elaboración propia

De la **Tabla 15** también se puede observar que tres futuros profesores (A1, A4 y A6) solo trazan figuras geométricas cerradas (**Figura 23**).

Figura 23

Evidencia del trazo de figuras geométricas cerradas e inclusión de sólidos geométricos por parte de tres futuros profesores

A1	A4	A6
Ejemplos de NO polígono	Ejemplos de NO polígono	Ejemplos de NO polígono

Nota. Elaboración propia.

En la **Figura 23** se evidencia el trazo de figuras geométricas cerradas e inclusión de sólidos geométricos por parte de tres futuros profesores. Así pues, se observa que A1 y A4 proponen los mismos tipos de no polígonos: una figura geométrica cerrada y curvilínea (circunferencia) y dos sólidos geométricos (cilindro y cono), mientras que A6 traza tres figuras cerradas en la que combina segmentos rectos y curvos o solo curvos.

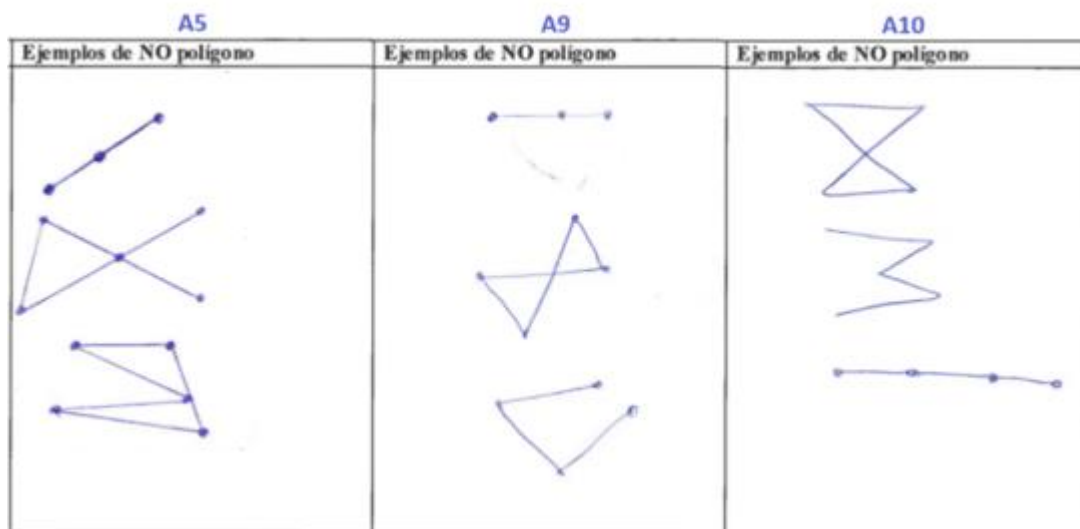
En concordancia con lo antes mencionado tenemos que nueve (A1, A3, A4, A6, A7, A13, A14, A18 y A20) señalan como característica *figura geométrica cerrada*. De estos, seis (A1, A4, A13, A14, A18 y A20) trazan solo figuras cerradas con segmentos curvilíneos; dos (A3 y A6) dibujan figuras cerradas con segmentos curvos y cerrada con segmentos mixtos (rectos y curvos). Por su parte, solo un futuro profesor (A7) traza figuras cerradas con segmentos mixtos (rectos y curvos). Mientras que once (A2, A5, A8, A9, A10, A11, A12, A15, A16, A17 y A19) indican que son solo figuras geométricas abiertas.

Podemos analizar también que ocho (A5, A8, A9, A10, A12, A14, A15 y A16), consideran en su imagen conceptual la característica de estar formadas *por la unión de tres o más puntos colineales* y por último siete (A2, A5, A9, A10, A11, A17 y A19) trazan representaciones con la característica de tener *segmentos que se cruzan*.

Observamos que, de 20 futuros profesores, solo tres (A5, A9 y A10) consideran en sus representaciones gráficas: figura geométrica abierta con segmentos rectilíneos, formada por la unión de tres o más puntos colineales y segmentos que se cruzan (**Figura 24**).

Figura 24

Evidencia de considerar las características que se contrastan con las de polígono.



Nota. Elaboración propia.

4.3.2 Características de las representaciones gráficas

Para identificar la influencia de las representaciones gráficas estereotipadas se analizan las características de los ejemplos de polígono trazados por los futuros profesores. Este análisis se basa en la clasificación de representaciones estereotipadas y no estereotipadas, propuesta por Scaglia y Moreira (2005). Para determinar uno u otro grupo, se evalúa el que predomina. Así, si un futuro profesor presenta dos representaciones estereotipadas y una no estereotipada, se concluirá que sus representaciones son estereotipadas debido a su mayor frecuencia.

Tabla 16

Análisis de la clasificación de representaciones gráficas en estereotipadas y no estereotipadas

EPP	Representación gráfica estereotipada			Representación gráfica No estereotipada
	Posición	Simetría	Forma	
A1	X	X	X	
A2				X
A3	X	X	X	
A4	X	X	X	
A5				X
A6	X	X	X	
A7				X
A8	X	X	X	
A9	X	X	X	

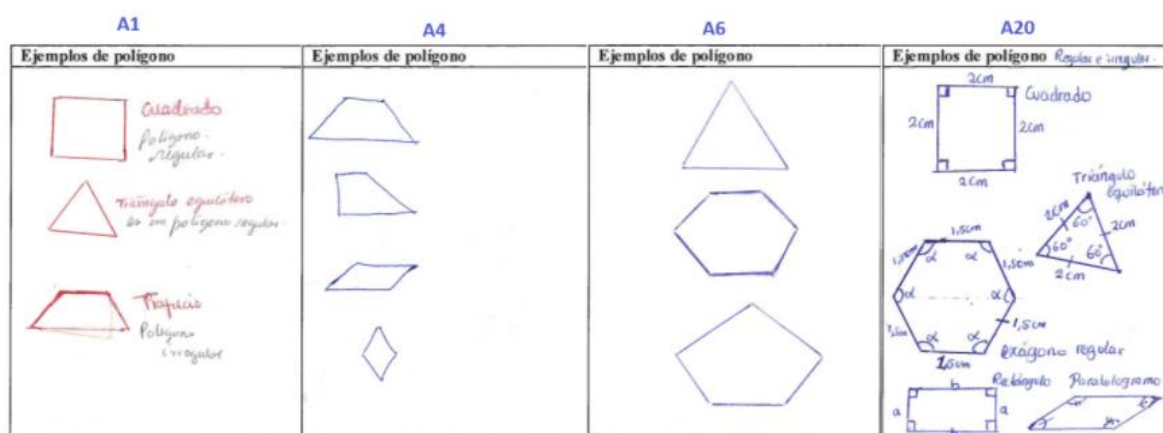
A10				X
A11				X
A12	X	X	X	
A13				X
A14				X
A15				X
A16				X
A17				X
A18				
A19	X	X	X	
A20	X	X	X	

Nota. Elaboración propia.

De los 20 futuros profesores, nueve (A1, A3, A4, A6, A8, A9, A12, A19 y A20) trazan representaciones gráficas estereotipadas. De estos, cuatro (A1, A4, A6 y A20) muestran todos sus ejemplos estereotipados (**Figura 25**).

Figura 25

Evidencia de los ejemplos trazados son estereotipados



Nota. Elaboración propia.

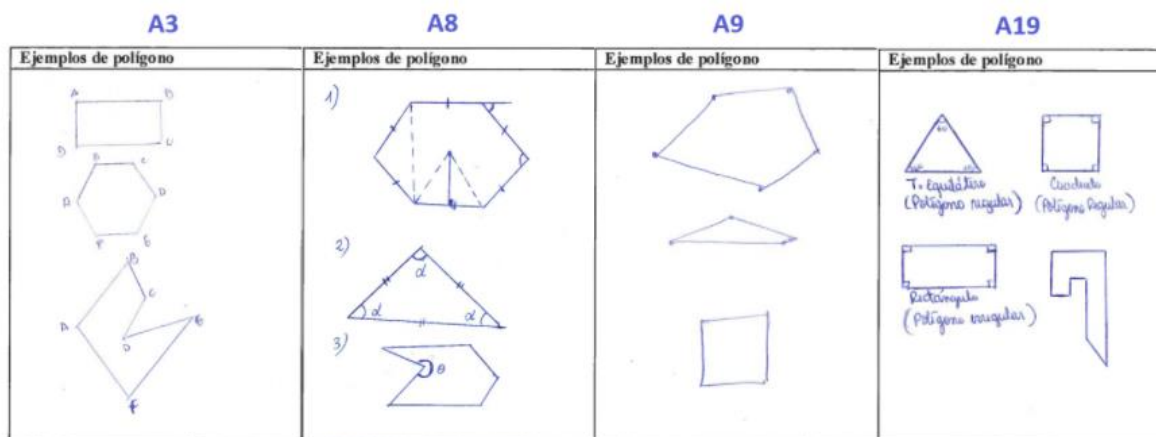
Como puede verse en la **Figura 25**, los ejemplos de polígonos trazados por A1, A4, A6 y A20 presentan base horizontal (paralela al eje x imaginario), la mayoría sigue alguna regularidad⁴, es decir: lados iguales, ángulos iguales o ambas características. De hecho, A1 y A20 explicitan haber trazado un

⁴ Esta expresión no debe confundirse con la definición de polígono regular (aquellos que tienen lados y ángulos iguales, a la vez), sino con el hecho de permiten visualizar algunos elementos congruentes.

cuadrado y un triángulo equilátero. Por su parte, A20 indica que uno de sus dibujos es un hexágono regular. También, se observa que las figuras trazadas aparecen con frecuencia en los libros de texto. Mientras cuatro (A3, A8, A9 y A19) tienen al menos es sus representaciones una no estereotipada (**Figura 26**); por su parte uno (A12) tiene una representación que no es polígono (círculo) y dos representaciones estereotipadas.

Figura 26

Evidencia de los ejemplos de polígonos con una representación no estereotipada



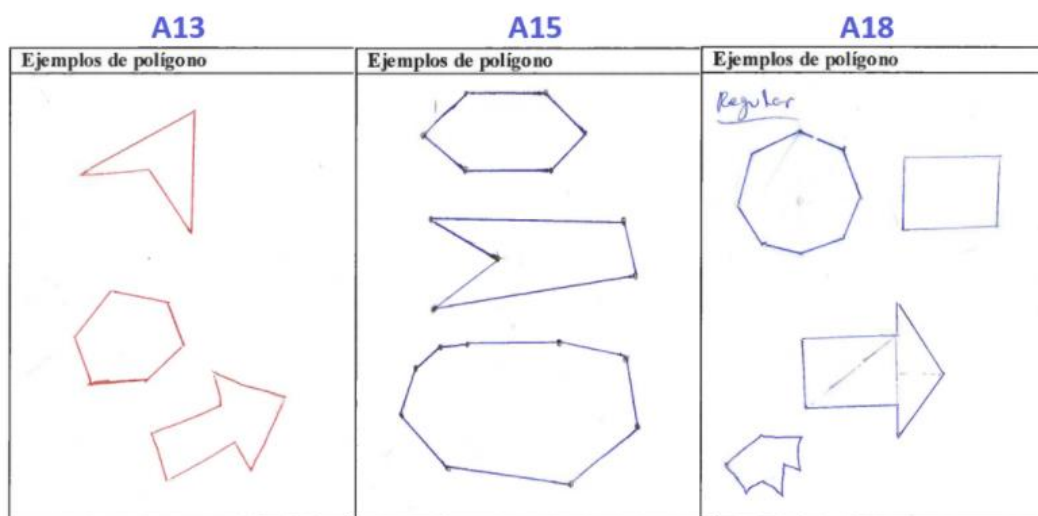
Nota. Elaboración propia.

Como puede verse en la **Figura 26**, los ejemplos de polígonos trazados por (A3, A8, A9 y A19) presentan base horizontal, la mayoría sigue alguna regularidad; es decir: lados iguales, ángulos iguales o ambas características, lo que facilita su reconocimiento y comprensión. De hecho, A8 y A19 explicitan haber trazado un hexágono regular, un cuadrado, un rectángulo y un triángulo equilátero. Mientras que A3 y A9, aparece de manera implícita estas mismas figuras antes mencionadas. Cada futuro profesor ha ejemplificado el concepto polígono considerando una representación no estereotipada.

Se analiza que diez (A2, A5, A7, A10, A11, A13, A14, A15, A16 y A17) trazan representaciones gráficas no estereotipadas; de estas seis (A5, A10, A11, A13, A14 y A16) presentan todos sus ejemplos no estereotipados, ya que no siguen patrones regulares ni reconocibles, no tienen simetría ni proporciones claras, lo que hace que su reconocimiento y comprensión sean más complejos; mientras cuatro futuros profesores (A2, A7, A15 y A17) trazan en sus ejemplos al menos una estereotipada y el resto no estereotipadas. Por su parte solo uno (A18) no se puede determinar la clasificación, ya que traza un octógono regular y un cuadrilátero, estas son figuras estereotipadas, así mismo que la flecha (heptágono) y el octógono irregular son no estereotipadas (**Figura 27**).

Figura 27

Evidencia de ejemplos de polígonos con una representación no estereotipada; al menos una estereotipada; dos representaciones estereotipadas y dos no estereotipadas.



Nota. Elaboración propia.

4.3.3 Coherencia entre las representaciones de polígono y su definición construida

Las representaciones gráficas del concepto de polígono trazadas por los futuros profesores se comparan con las definiciones construidas por ellos. Esto nos permite evaluar su comprensión y conocimiento de dicho concepto.

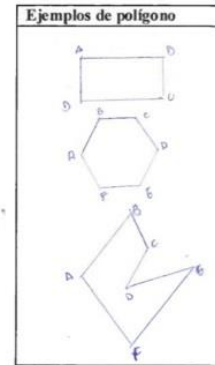
De los veinte futuros profesores, diecinueve (A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19 y A20), consideran en la definición de polígono construida y su ejemplificación, al menos uno de los siguientes elementos estructurantes y/o características críticas: figura geométrica, cerrada, formada por la unión de tres o más puntos no colineales, segmentos que no se cruzan. Por su parte, uno (A3) no considera ninguno de los elementos antes señalados en la definición que construye, pero sí en la ejemplificación de polígono, creando una incoherencia (**Figura 28**).

Figura 28

Incoherencia entre la definición verbal y la representación gráfica de polígono, mostrada por A3

¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a los estudiantes de 2° de secundaria (de la situación propuesta). Enúnciela.

Es un cuerpo geométrico o figura geométrica cerrada que se representa en un plano, compuesta por la unión de 3 o más puntos, lados y ángulos y que la suma de sus ángulos internos deben ser igual o mayor a 180° la medida de sus lados y ángulos pueden ser iguales o diferentes.



Nota. Elaboración propia.

Como puede verse en la **Figura 28**, solo (A3) no considera los elementos estructurantes y sus características. Así pues, al proponer su definición de polígono, confunde cuerpo geométrico con figura geométrica, y al mencionar la unión de 3 o más puntos, no especifica como deben ser esos puntos. En cuanto a los elementos accesorios y sus características no críticas observamos que alude a cuatro de ellos: plano (*se representa en un plano*), elementos de un polígono (*lados y ángulos*), medidas de los ángulos interiores de un polígono (*la suma de sus ángulos internos deben ser igual o mayor a 180°*) y clasificación de polígonos (*la medida de sus lados y ángulos pueden ser iguales o diferentes*). Al relacionar la definición de polígono con la ejemplificación de este concepto, visualizamos que traza figuras geométricas y no cuerpos geométricos. Además, los ejemplos muestran los cuatro elementos estructurantes y sus características críticas: figura geométrica, cerrada, formada por la unión de tres o más puntos no colineales, segmentos que no se cruzan.

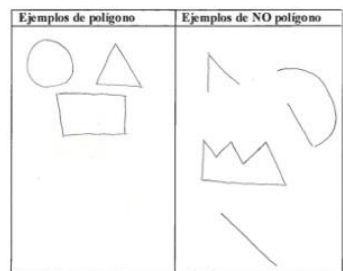
Continuando con el análisis de los diecinueve futuros profesores antes señalados, encontramos que en los ejemplos de polígono trazados por A12 se consideran todos los elementos estructurantes y sus características, excepto “formada por la unión de tres o más puntos no colineales”, en cambio en la definición verbal de polígono solo considera como elemento estructurante y su característica de ser “cerrada” (**Figura 29**).

Figura 29

Incoherencia entre la definición verbal de polígono y los ejemplos y contraejemplos, mostrada por A12

¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a los estudiantes de 2° de secundaria (de la situación propuesta). Enúnciela.

Región ^{cerrada} delimitada por la unión de puntos al menos 3 puntos, de los cuales al menos 2 son no colineales



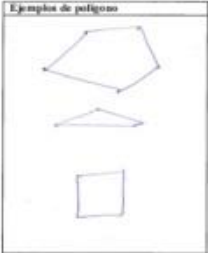

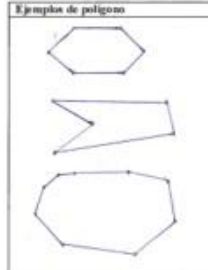
Nota. Elaboración propia.

Como puede verse en la **Figura 29**, solo A12 en la construcción de la definición de polígono enuncia lo siguiente: “Región cerrada delimitada por la unión de al menos 3 puntos, de los cuales al menos 2 son no colineales”. De los elementos estructurantes anteriores, no considera de manera explícita la característica formada por la unión de tres o más puntos no colineales, sin embargo, en sus representaciones gráficas podemos visualizar que lo considera. Este mismo informante en la definición señala como único elemento estructurante y característica crítica “cerrada”, lo cual no se cumple en uno de los ejemplos elaborados y considerados como no polígonos (heptágono). Así pues, inferimos que predomina el dominio de las representaciones estereotipadas (figuras simples) sobre las representaciones no estereotipadas.

Mientras que en el análisis de la definición de polígono referente al contenido, construidas por los futuros profesores encontramos que tres (A9, A10, y A15) se acercan a la definición de polígono que tomamos como referencia “Polígono es una figura geométrica cerrada, formada por la unión de 3 o más puntos no colineales mediante segmentos, que cumplen las siguientes condiciones: a) No hay dos segmentos que se intersequen, excepto en sus puntos extremos; b) No hay dos segmentos con un mismo punto extremo que sean colineales” (**Figura 30**).

Figura 30

Evidencia de la coherencia entre la definición verbal e imagen conceptual de polígono

A9	<p>¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a los estudiantes de 2° de secundaria (de la situación propuesta). Enúnciela.</p> <p><i>Polígono es una figura geométrica plana ^{cerrada} que está constituido por la unión de 3 o más puntos coplanarios y no colineales; ^{donde} la unión de tales puntos (segmentos) no se cruzan entre sí.</i></p>	<p>Ejemplos de polígono</p> 
A10	<p>¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a los estudiantes de 2° de secundaria (de la situación propuesta). Enúnciela.</p> <p><i>Un polígono es una figura geométrica cerrada compuesta por 3 o más segmentos los cuales no deben cruzarse, se unen por los extremos el cual se les llama vértice y estos segmentos no son colineales (es decir no están en la misma dirección y no tienen el mismo sentido).</i></p>	<p>Ejemplos de polígono</p> 
A15	<p>¿Cuál sería la definición de polígono que usted les daría a los estudiantes de 2° de secundaria (de la situación propuesta). Enúnciela.</p> <p><i>Un polígono es una figura geométrica cerrada y bidimensional, compuesta por la unión de 3 o más puntos, en el que dichos puntos no deben pertenecer a una misma recta y no deben cruzarse.</i></p>	<p>Ejemplos de polígono</p> 

Nota. Elaboración propia.

Por lo tanto, encontramos en estos tres informantes, una coherencia y correspondencia entre la definición verbal e imagen conceptual de polígono (Vinner, 1991) por la relación mutuo dependiente que tienen sobre este concepto. Además, destacamos en A10 la utilización de ejemplos de polígonos no estereotipados, debido a la posición no estándar y poco usuales de encontrar en un libro de texto o en el desarrollo de una clase dibujadas en la pizarra. Por su parte A9 y A15 utilizan representaciones estereotipadas y no estereotipadas, proporcionando una variedad que hacen pensar en una imagen conceptual de polígono restringida a los simples (sus lados no se interceptan entre sí), convexos o cóncavos, pero de distinto número de lados.

4.3.4 Síntesis

Después de haber descrito el análisis del tercer ítem (ejemplos de polígono y no polígono), para contrastarlos y verificar la coherencia con la definición verbal construida en el segundo ítem, y determinar si las representaciones de polígono son estereotipadas o no estereotipadas, concluimos lo siguiente:

De las representaciones gráficas trazadas y las definiciones verbales construidas de polígono, por los veinte futuros profesores, se visualiza una correspondencia al considerar en ambas tareas, al menos uno de los elementos estructurantes y sus características críticas (figura geométrica, cerrada, formada por la unión de tres o más puntos no colineales, segmentos que no se cruzan). Incluso, centrados en las representaciones gráficas, se observa que todos los elementos estructurantes y sus características críticas están incluidas en lo trazado por los veinte informantes. Así pues, todas las representaciones gráficas trazadas como polígonos, se caracterizan por ser simples (segmentos no cruzados), constituidas por distinto número de lados (triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos y nonágonos), del tipo cóncavas, convexas, regulares e irregulares.

Además, de los veinte futuros profesores; nueve trazan representaciones estereotipadas pues, su posición muestra una base horizontal y son de uso común en los libros de texto. También, se concluye que diez futuros profesores trazan representaciones no estereotipadas, es decir, la posición no es estándar y son poco usuales de encontrar en un libro de texto. Lo anterior, permite afirmar que las representaciones poseen riqueza porque no son prototipos (Herskowitz, 1990). Mientras que, de las representaciones trazadas como no polígonos, solo siete son representaciones complejas (segmentos cruzados), del tipo cóncavas e irregulares (**Tabla 15**).

Respecto al contenido de las definiciones verbales construidas, encontramos que incluyen, al menos uno, de los elementos estructurantes. Incluso, tres futuros profesores (A9, A10, y A15) evidencian la necesidad de considerar aspectos a cuidar en una definición matemática (KPM- Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

4.4 Conocimiento especializado sobre las características que debe tener una definición matemática.

Para analizar las características que debe tener una buena definición matemática, consideradas por los futuros profesores en su descripción en el Ítem 4, hemos tomado como base a Pascual et al. (2019), quien establece los siguientes criterios: ser no contradictoria, ser no ambigua desde la perspectiva escolar, ser no ambigua desde la perspectiva formal y ser mínima (incluir condiciones necesarias y suficientes). Este análisis nos permite contrastar y corroborar si estas se ajustan a la definición elaborada en el ítem 2.

En la **Tabla 17** se muestra información detallada sobre las características que debe tener una buena definición matemática haciendo una semejanza a las descritas por Pascual et al. (2019). Por otro lado, hacemos una valoración si estas se ajustan o no a dicha definición del concepto de polígono.

Tabla 17

Análisis de las características que debe tener una buena definición matemática haciendo una semejanza a las descritas por Pascual et al. (2019)

EPP	Características que debe tener una buena definición matemática			La definición dada (2) se ajusta a las características que propone		Valoración sobre el ajuste de las características en la definición que propone.	
	Según Pascual et al (2019)			SI	NO	SI	NO
	No contradictoria	No ambigua	Mínima				
A1		1		1			1
A2	1	1		1			1
A3		1	1	1			1
A4	1						
A5	1						
A6		1	1	1			1
A7		1	1	1			1
A8		1	1	1			1
A9		1	1	1			1
A10		1		1			1
A11		1	1				
A12			1				
A13		1		1			1
A14	1			1			1
A15		1	1	1			1
A16	1	1		1		1	
A17							
A18			1	1			1
A19		1		1			1
A20	1			1		1	
Total	6	13	9	15		2	13

Nota. Elaboración propia.

Con respecto a las características que debe tener una buena definición matemática, hemos transcrito⁵ las respuestas de los veinte futuros profesores para ayudar en la comprensión de lo que se describe y analiza.

Tabla 18

Características de una buena definición matemática, según los futuros profesores

Definición dada por	¿Qué características cree que debe tener una buena definición matemática?
A1	Las características que debe englobar, es diferenciar lo que es un polígono y lo que no es. Otra de las características de un polígono puede ser la forma de representar y que forma toma las figuras.
A2	Debe abarcar una generación en donde se encuentren todos los posibles ejemplos de lo definido, de manera que aunque se presenten ejemplos diferentes a los explicados o presentados con anterioridad, solo a partir de la definición puedan ser acogidos o descartados.
A3	No debe haber palabras ambiguas o poco claras y que estén al nivel del alumno de manera que se asegure la comprensión.
A4	Debe describir las cualidades del concepto; y deben explicar el (qué) de ese concepto. Debe decir: qué es; luego debe describir alguna característica y una breve mención de su clasificación.
A5	Una buena definición ha de considerar un sustantivo que denote al grupo que pertenece la palabra y de esta forma permita discriminarla de otro tipo de palabras; así mismo ha de considerar las características que se tenga en palabra a fin de diferenciarla de otros significados.
A6	Los conocimientos de la definición deben adecuarse a los conceptos que poseen los estudiantes de acuerdo a los desempeños del currículum nacional. Además debe ser clara, emplear un léxico entendible y en relación al nivel intelectual de la persona, empleando palabras técnicas solo cuando sea necesario. También es necesario el uso de ejemplificaciones para estrapolar la definición a la vida cotidiana de la persona.
A7	Ser precisa. Clara y concisa para que con solo la descripción de la definición el alumno tenga una idea y como en este caso es sobre "polígono" sea capaz de dibujarlo sin problemas.
A8	Las características que debe tener es que sea lo más precisa posible, que trate de diferenciar entre otras definiciones claramente, no sea tan redundante y que trate de colocar los datos en que se encuentra.
A9	Una definición en matemática tiene que ser clara, breve y sencilla; definir es decir "Que es" por lo tanto, es innecesaria agregar más cosas en la definición, lo correcto es desarrollarlas como subtemas o subapartados.
A10	Debe ser clara y precisa, esa definición es como una guía para que el alumno pueda hacer un bosquejo de lo que dice.
A11	La definición matemática debe ser precisa clara y breve
A12	Expresar claramente que es, sintetizar las características primordiales.
A13	Debe ser clara, precisando lo que es, más no lo que no es. Al clasificarlo, se debe tener en cuenta, según que característica del objeto/ cosa se está clasificando.

⁵ En la transcripción se ha respetado el escrito original de los futuros profesores, aun cuando estos presentan errores ortográficos o gramaticales.

A14	Especificar el tipo de concepto que se quiere definir, ya sea figura, operación, procedimiento, leyes, que características tiene y su clasificación.
A15	Una buena definición matemática debe ser lo más precisa posible y sin ambigüedades, además debe usar la terminología adecuada, Debe también adaptarse a la característica del lector.
A16	Debe ser clara, precisa, coherente, que se deba demostrar, no debe admitir ideas ambiguas.
A17	
A18	Debe englobar el concepto de lo que nos referimos. Debe comprobarse con facilidad y adecuarse al momento de aplicar lo dicho en el concepto.
A19	Primero debe decir " que es", luego de que está conformado o mejor dicho su composición y sus características.
A20	Una buena definición matemática yo creo que debe tener un significado etimológico, origen.

Nota. Elaboración propia.

De los 20 futuros profesores; de cuatro (A4, A5, A14 y A20), se puede inferir que indican de manera implícita la característica de ser solo No contradictoria, puesto que la definición debe ser consistente y no contener afirmaciones opuestas. Mencionaremos ejemplos que nos permitan corroborar esta deducción: A4, A5 y A14 destacan, respectivamente, la importancia de describir las características "Debe decir: qué es; luego debe describir alguna característica", "Así mismo ha de considerar las características que se tenga en palabra a fin de diferenciarla de otros significados" y "Qué características tiene"; y A20 "Significado etimológico", ya que conocer el origen de un concepto puede ayudar a entender su evolución y desarrollo, evitando contradicciones y asegurando coherencia en la definición.

Así mismo cuatro (A1, A10, A13 y A19) se puede deducir que indican de manera implícita la característica de ser solo No ambigua, ya que enfatizan la importancia de la claridad y precisión en la definición, para evitar ambigüedades. Mencionaremos dos ejemplos: A1 "Diferenciar lo que es un polígono y lo que no es", A10 "Precisa y clara", A13 "Debe ser clara", precisando lo que es y A19 busca que la definición explique claramente "qué es" el concepto, evitando confusiones

También, de A12 y A18 se puede inferir que indican de manera implícita la característica de ser solo mínima; ambos buscan que la definición sea concisa y contenga solo la información esencial y estrictamente necesaria para identificar el concepto. Deducimos que A12 se centra en "sintetizar las características primordiales", mientras que A18 hace referencia a "Englobar el concepto de lo que nos referimos"

Respecto de los futuros profesores A2 y A16, pensamos que indican de manera implícita el ser No contradictoria y No ambigua; A2 indica "De manera que, aunque se presenten ejemplos diferentes a los explicados o presentados con anterioridad, solo a partir de la definición puedan ser acogidos o descartados": Esto se relaciona con la característica de ser "no contradictoria", ya que la definición

debe ser consistente y no dejar lugar a interpretaciones contradictorias, además la definición debe ser suficientemente clara para guiar la inclusión o exclusión de ejemplos sin ambigüedad. Así mismo A16 describe "Debe ser clara, precisa, coherente" lo cual deducimos que no debe existir ambigüedades y la coherencia se asemeja a la característica de ser no contradictoria.

Siguiendo con el análisis, siete futuros profesores (A3, A6, A7, A8, A9, A11 y A15) indican No ambigua y mínima:

- A3: "No debe haber palabras ambiguas o poco claras": Esto se relaciona directamente con la característica de ser "no ambigua", ya que la definición debe evitar el uso de palabras o frases que puedan ser interpretadas de manera diferente. Además, indica "Que estén al nivel del alumno", lo relacionamos característica de ser "mínima", ya que la definición debe ser lo suficientemente clara y concisa para que el alumno pueda entenderla
- A6: "Además debe ser clara, emplear un léxico entendible" lo que se alinea con la característica de no ambigua; por otro lado y "en relación al nivel intelectual de la persona", la propuesta sugiere emplear palabras técnicas solo cuando sea necesario, lo que se relaciona con la característica de ser mínima, es decir, no incluir información innecesaria y enfocándose en la importancia de considerar el nivel intelectual del estudiante y emplear ejemplificaciones para hacer la definición más accesible y relevante.
- A7: "Precisa y clara", Se relaciona con la característica de ser no ambigua, ya que una definición precisa y clara no contenga afirmaciones opuestas. además "Concisa", se relaciona con la característica de ser mínima, ya que una definición concisa evita incluir información innecesaria.
- A8: "Precisa posible" se relaciona con la característica de ser no ambigua, ya que una definición precisa deja poco espacio para interpretaciones erróneas.
- A9: "Claro" se relaciona con la característica de ser no ambigua, ya que una definición clara evita confusiones y malentendidos; "Breve y sencilla", "Qué es" y "no sea redundante" se relaciona con la característica de ser mínima.
- A11: "Debe ser precisa y clara", lo que se relaciona con la característica de Pascual de ser no ambigua, es decir, que no deje lugar a interpretaciones erróneas. Decir "Breve", se relaciona con la característica de ser mínima
- A15: "Sin ambigüedades", lo que se relaciona directamente con la característica de Pascual de ser "no ambigua". Debe usar la "terminología adecuada", lo que se relaciona con la característica de Pascual de ser "mínima".

Por su parte, solo en uno (A17) no se visualiza ninguna característica de Pascual et al. (2019).

Como puede verse, de los veinte futuros profesores, quince (A1, A2, A3, A6, A7, A8, A9, A10, A13, A14, A15, A16, A18, A19 y A20) mencionan que la definición construida en el ítem 2, se ajusta a las características que propone, mientras cinco (A4, A5, A11, A12 y A17) no evidencian respuesta en sus cuestionarios. Al contrastar las características que debe tener una buena definición matemática (Apartado 4.2.2) con las que propone, hacemos una valoración sí estas se ajustan o no a dicha definición del concepto de polígono. De esos quince futuros profesores se visualiza que solo dos (A16 y A20) coinciden y se ajustan a la definición, A16 evidencia ser No contradictoria y No ambigua, mientras A20 destaca la característica de ser No contradictoria. Por su parte, de los otros trece, no se ajustan las características a la definición. Así tenemos que cuatro (A2, A9, A10 y A15) coinciden con al menos una característica que debe tener una buena definición matemática, por su lado nueve futuros profesores (A1, A3, A6, A7, A8, A13, A14, A18 y A19) no evidencian dichas características en su definición.

Conclusiones

A continuación, presentamos las conclusiones de nuestra investigación

Primera. Tras analizar las investigaciones sobre el conocimiento que evidencian los futuros profesores de matemática de secundaria al examinar, proponer definiciones y representaciones gráficas de polígonos, reportadas entre 1991 y 2022, se destaca la diversidad de fuentes utilizadas, que incluyen artículos de revistas, capítulos de libros, y de una tesis. No obstante, se identifica una carencia de documentos relevantes en el año 2023 hasta el noveno mes del 2024. La metodología de los trabajos revisados revela el uso de un enfoque interpretativo del nivel descriptivo, lo cual es aplicable en nuestra investigación.

Segunda. Respecto al análisis de los dos primeros ítems, ambos se relacionan porque buscan evaluar la calidad de las definiciones de polígono. El primer análisis se enfoca en el contenido, en donde se identifica errores y conceptos confundidos, mientras que el segundo análisis se enfoca en el contenido y la estructura de las definiciones matemáticas, se evalúa la corrección y la precisión de estas. Por otro lado, en los tres primeros ítems, se identificaron elementos estructurantes y características críticas del concepto de polígono: figura geométrica, cerrada, los segmentos que no se cruzan, y la condición de que los puntos no estén en una misma recta. Esto sugiere que estos elementos son fundamentales para definir un polígono. Como resultado obtuvimos que tres futuros profesores se aproximan a considerar en la construcción de definición de polígono, todos los elementos estructurantes y características críticas, mientras dieciséis consideran al menos uno de estos elementos y solo un futuro profesor no incluye ningún de ellos. Al contrastar estas definiciones construidas con las representaciones gráficas tenemos que todos los futuros profesores de matemática incluyen, estos elementos en sus trazos de polígono, salvo uno que no incluye el elemento estructurante "*formada por la unión de tres o más puntos no colineales*", lo cual justificaría que considere a la circunferencia como polígono.

Tercera conclusión: Tras la identificación de definiciones apropiadas según Zazkis y Leikin (2008) y correctas según Pascual et al. (2019), encontramos que solo un futuro profesor, de los tres que consideramos tener todos los elementos estructurantes y sus características críticas en su definición, cumple con esta clasificación, con respecto a la estructura de la definición matemática de polígono. Cabe mencionar que al analizar según lo propuesto por Pascual et al. (2019), las definiciones construidas muestran las tres características antes mencionadas: es no contradictoria porque las características son consistentes, no ambigua hay precisión en la definición y es mínima porque no hay redundancia. Mientras según Zazkis y Leikin (2008) su corrección es rigurosa: La definición establece condiciones necesarias y suficientes para definir un polígono, como la unión de 3 o más segmentos que no se cruzan, se unen por los extremos (vértices) y no son colineales. La definición es precisa y no deja lugar a ambigüedades. Al analizar la riqueza: La definición proporciona una descripción detallada

y completa de las características de un polígono, incluyendo la condición de que los segmentos no se cruzan, se unen por los extremos y no son colineales. La definición cubre todos los aspectos esenciales de un polígono.

Cuarta. Respecto al análisis de las representaciones gráficas de polígono y no polígono proporcionadas por los futuros profesores de matemática. Los resultados mostraron que todas las representaciones gráficas de polígono son simples (segmentos que no se cruzan). Además, se encontró que nueve son estereotipadas, es decir, presentaban una base horizontal y eran de uso común en los libros de texto y diez son no estereotipadas. Lo anterior implica que los futuros profesores comprenden profundamente las propiedades y características de los polígonos, pueden relacionar los polígonos con otros conceptos matemáticos, fomentar la comprensión y la exploración activa de los polígonos en sus estudiantes. Por lo tanto, pueden hacer trazos de representaciones, no estándar, más ricas y variadas de lo que es polígono.

Quinta. El presente trabajo puede contribuir en la comprensión del concepto de polígono en la educación matemática, específicamente en la formación de futuros profesores de matemática, pues los resultados obtenidos en los ítems han permitido identificar patrones y tendencias en la comprensión del concepto de polígono, así como en la definición y representación gráfica de este concepto. Dichos patrones y tendencias son: incluir elementos accesorios o no relevantes en las definiciones, utilizar ciertas formas o estructuras estándar en las representaciones gráficas, omitir ciertas características críticas en las definiciones o representaciones gráficas.

Referencias

- Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I., y Montes, M. (2022). Conocimiento especializado del profesorado de matemática en formación inicial acerca de los polígonos. *Uniciencia*, 36(1), 1-17. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.7>
- Arias, F. (2012). *El proyecto de investigación: introducción a la metodología científica*. Episteme.
- Asociación Fondo de Investigadores y Editores. (2011). *Geometría: una visión de la planimetría*. Lumbreras editors. Lima
- Aucallanchi, F. (2012). *Geometría: Fundamentos y Aplicaciones*. Racso editores.
- Ball, D., Thames, M. H, y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Barrantes, M., y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71.
- Carreño, E. (2021). *Conocimiento geométrico especializado en estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a los polígonos* [Tesis doctoral] Universidad de Huelva. <http://hdl.handle.net/10272/20140>
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., & Muñoz, M. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In Ubuz, B., Haser, C. & Mariotti, M. (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Ribeiro, M. (2017). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) in the "dissecting an equilateral triangle" problem. *Revista Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática*, 7(2), 88-107. <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/ripem/article/view/1233>
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M., & Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Coveñas, M. (s/a). *Matemática 4*. Editorial Monterrico S.A. Lima.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd annual conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 248–255). PME.
- De Villiers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in Geometry. In T. Craine & R. Rubinstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World* (pp. 189–203). NCTM.
- Fischbein, E. (1993), "The Theory of Figural Concepts", *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Ediciones Morata, S.L. Madrid
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, S. et al. (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 145-169). Comares.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning of Geometry. En Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70-95). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- Lógicamente 4. (2008). Grupo Editorial Norma
- Mariotti, M., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219–248.
- Matemática 1. (2008). Grupo Editorial Norma
- Matemática 2. (2016). Grupo Editorial Norma
- Matemática 4. (2008). Grupo Editorial Norma
- Matemática 3. (2016). Grupo Editorial Santillana
- MateMax 1 (2009). Grupo Editorial Bruño
- McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa. Una introducción conceptual*. Pearson Addison Wesley.
- Mesquita, A. L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural topology*, 18, 19-30.
- Ministerio de Educación. (2016a). *Programa Curricular de Educación Primaria*
<https://hdl.handle.net/20.500.12799/4549>
- Ministerio de Educación del Perú. (2016b). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima, Perú.
<https://hdl.handle.net/20.500.12799/4551>
- Ministerio de Educación (2016c). *Programa Curricular de Educación Inicial*
<https://hdl.handle.net/20.500.12799/4548>
- Ministerio de Educación (2016d). *Programa Curricular de Educación Secundaria*
<https://hdl.handle.net/20.500.12799/4550>
- Morato, A (2017). *Conocimiento especializado de un maestro de Primaria en torno a la definición de polígono* [Trabajo fin de máster]. Universidad Internacional de Andalucía. Repositorio institucional. <https://dspace.unia.es/handle/10334/3829>
- Moreno, A. y Climent, N (2021). Conocimiento matemático especializado movilizado por estudiantes para maestro durante el análisis de situaciones de aula sobre polígono. *UNIÓN-Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, 17(61), pp. 1-20.
<https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/252/94>

- Moriena, S., y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5-19. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40515101>
- Muñoz, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. y Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 18(3), 1801–1817.
- Ojeda, E. (2017). *Matemática IV*. Corefo. Lima
- Oliveros, I., Pascual, M., Codes, M. y Martín, J. (2018). El conocimiento de la práctica matemática compartido por estudiantes para maestro a través del análisis de videos. En Rodríguez, L., Muñiz, L., Aguilar, A., Alonso, P., García, F. y Bruno, A. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 407-416). Gijón, España: Universidad de Oviedo.
- Pascual, M., Codes, M., Martín, J. y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En Marbán, J., Arce, M., Maroto, A., Muñoz, J. y Alsina, A. (Eds.), *Investigación en matemáticas XXIII* (pp. 463-471). Valladolid: SEIEM.
- Pérez, G. (1998). *Investigación cualitativa*. Retos e interrogantes. Editorial La Muralla, S.A.
- Pérez, G. (2008). La educación como respuesta a los retos que plantea la escuela. *Revista de Pedagogía Bordón*, 60, 15-29.
- Pozo, J. (1993). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Ediciones Morata. Madrid.
- Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51-73. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_4
- Scaglia, S., y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17(3), 105-120. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40517306.pdf>
- Scheiner, T., Montes, M., Godino, J., Carrillo, J., y Pino, L. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 153–172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Schwarz, B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 362-389. <https://doi.org/10.2307/749706>
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14

- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M.G., de Villiers, M. *et al.* Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education* **48**, 691–719 (2016).
<https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 64–81). Kluwer Academic Publishers.
- Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Kluwer. Doi: 10.1007/0-306-47203-1_5
- Vasco, D., Moriel, J., y Contreras, L. (2017). Subdominios del mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK). In Carrillo, J. y Contreras, L. (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de la III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 29–37). Huelva: CGSE.
https://www.researchgate.net/publication/326479672_The_mathematics_teacher’s_specialised_knowledge_MTSK_model
- Zamora, W. (2016). En matemática es importante tanto la teoría como la práctica: el papel de las definiciones. En Murillo (Edit.) *Memorias: 10 Festival internacional de matemática* (44-50). Limón, Costa Rica.
- Zazkis, R., y Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 15–21.
- Zazkis, R., y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131–148.