CAPÍTULO 20: NÚMEROS COMPLEJOS (III)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 20: Números Complejos (III)

3. Relación entre función exponencial y funciones trigonométricas

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

8 diapositivas

CAPÍTULO XX

NUMEROS COMPLEJOS

3. RELACIÓN ENTRE FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

3. Relación entre Función Exponencial y Funciones Trigonométricas

Leonhard Euler, nace el 15 de Abril 1707 en Basilea, Suiza y muere el 18 de Septiembre 1783 en St.Petersburg, Rusia.

La actividad de Euler, en lo fundamental tuvo una orientación algorítmica. A la construcción de la teoría general llegaba partiendo de problemas concretos, los cuales tenían importancia práctica. En su herencia científica la práctica tiene un peso específico excepcionalmente grande.

Los rasgos algorítmicos son propios aún de sus trabajos de apariencia puramente teórica. Particularmente esto se advierte en los trabajos sobre análisis infinitesimal, el cual en esencia se construye como el aparato matemático de la mecánica clásica y la física.

Fórmula de Euler

$$e^{xi} = \cos x + i\, sen\, x$$

3. Relación entre Función Exponencial y Funciones Trigonométricas

La **definición** más natural es la siguiente:

e es el único número real cuyo logaritmo natural es 1:

$$\ln e = 1$$

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

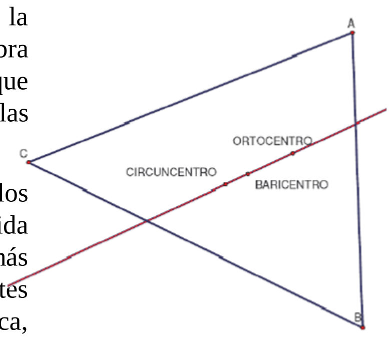
El número *e* tiene importantes implicaciones en el mundo que conocemos.
En biología, por ejemplo, una de sus principales aplicaciones es el **crecimiento exponencial**. Este tipo de crecimiento surge cuando no hay factores que limiten el crecimiento, como ocurre en ciertas poblaciones de bacterias, o en la recuperación de una superficie boscosa después de un incendio.
A la hora de datar un fósil, la constante de Euler también está presente. A mediados del siglo XX, un químico llamado Libby descubrió el carbono-14, un isótopo radiactivo del carbono que desaparece lentamente.

3. Relación entre Función Exponencial y Funciones Trigonométricas

De hecho Euler utilizó *i* para la raíz cuadrada de -1 en un manuscrito fechado en 1777, tal manuscrito no se publicó hasta 1794, de manera que fue la adopción de dicho símbolo por Gauss en su obra clásica *Disuisitiones arithmeticae*, de 1808, la que le aseguró un puesto definitivo en la historia de las notaciones matemáticas.

Los cinco números más importantes, tres símbolos ***e***, ***π*** e ***i*** de los que Euler fue en gran medida responsable, se relacionan con los dos enteros más importantes, ***0*** y ***1***, y las más importantes operaciones y la relación de toda la matemática, por medio de la famosa igualdad:

Línea de Euler



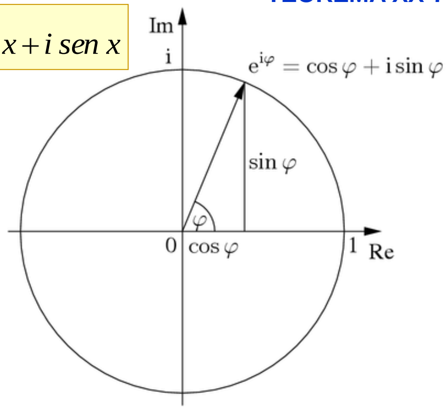
$$\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0}$$

Conocida como la "constante de Euler".

3. Relación entre Función Exponencial y Funciones Trigonométricas

TEOREMA XX-7

Fórmula de Euler $e^{x\,i} = \cos x + i\,sen\,x$



La fórmula puede interpretarse geométricamente como una circunferencia de radio unidad en el plano complejo.

Corolarios:

a) Si k es entero $e^{2\pi\,k\,i} = 1$

b) $e^{\pi\,(2k+1)\,i} = -1$

3. Relación entre Función Exponencial y Funciones Trigonométricas

TEOREMA XX-7

Fórmula de Euler $e^{x\,i} = \cos x + i\,sen\,x$

Pistas para la demostración:

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots = \sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{(x)^{(n-1)}}{(n-1)!}\right);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4n}}{(4n)!} - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\right)$$

Ref. Enciclopedia Libre Universal en Español. En Línea Internet. 22 de octubre de 2013. Accesible en: http://enciclopedia.us.es/index.php/F%C3%B3rmula_de_Euler_en_An%C3%A1lisis_complejo

3. Relación entre Función Exponencial y Funciones Trigonométricas

Ampliación de la definición de Logaritmo

Como $a+bi=r(\cos x+i\,sen\,x)=r\,e^{xi}=e^{(\ln r+xi)}$, y por otra parte $N=e^{\ln N}$, podemos definir que *ln*(a+bi)=*ln* r + xi , siendo r el módulo y x el argumento del complejo a + bi.

3. Relación entre Función Exponencial y Funciones Trigonométricas

Complejo elevado a complejo

Estamos en condiciones de elevar un número complejo $a+bi=r\angle\theta$ a un exponente complejo; obtenemos como resultado una potencia que es también un número complejo:

$$(a+bi)^{c+di}=\left(e^{\ln r+xi}\right)^{(c+di)}=e^{(\ln r+xi)(c+di)}=e^{m+ni}=M+N\,i$$