



UNIVERSIDAD  
DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL  
PIRHUA

# SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS CON NÚMEROS ENTEROS EN PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

Bertha Suyo-Huillca

Piura, diciembre de 2015

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Maestría en Ciencias de la Educación con mención en Didáctica de la Enseñanza de las  
Matemáticas en Educación Secundaria

Suyo, B. (2015). *Selección de estrategias heurísticas para resolver problemas con números enteros en primer grado de secundaria* (Tesis de maestría en Ciencias de la Educación con mención en Didáctica de la Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria). Universidad de Piura. Facultad de Ciencias de la Educación. Piura, Perú.



Esta obra está bajo una licencia

[Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

[Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura](https://repositorio.institucional.pirhua.edu.pe/)

**BERTHA SUYO HUILLCA**

**SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS  
PARA RESOLVER PROBLEMAS CON NÚMEROS  
ENTEROS EN PRIMER GRADO DE SECUNDARIA**



**UNIVERSIDAD DE PIURA**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**

**MENCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LAS  
MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA**

**2015**



## **APROBACIÓN**

---

La tesis titulada *Selección de Estrategias Heurísticas para resolver Problemas con Números Enteros en Primer Grado de Secundaria*, presentada por la Profesora. Bertha Suyo Huilca en cumplimiento con los requisitos para optar el Grado de Magíster en Educación con Mención en Didáctica de la Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria, fue aprobada por el asesor Dr. Manuel Eduardo Saavedra Núñez y defendida el 15 de diciembre de 2015 ante el Tribunal integrado por:

---

PRESIDENTE

---

SECRETARIO

---

INFORMANTE

---

## **AGRADECIMIENTO**

---

Agradezco profundamente a Dios y a María nuestra madre por permitirme llegar a este grandioso momento, sin su ayuda nada sería posible.

Al Dr. Marcos Zapata Esteves profesor de la Maestría de la Universidad de Piura, por su paciencia y sus grandes enseñanzas, estoy eternamente agradecida.

A todos mis profesores de la Maestría de la Universidad de Piura, que nos han brindado sus conocimientos, con mucha sabiduría, mi reconocimiento y aprecio personal, a todos los miembros de esta prestigiosa universidad, igualmente al Ministerio de Educación por su invaluable apoyo, realmente su ayuda ha sido muy valiosa, para el Magisterio peruano.

De igual manera agradecer a mi asesor el Dr. Manuel Eduardo Saavedra Núñez, por sus sugerencias y acertada dirección metodológica.

A mi familia que me permitió la ausencia espacial y temporal, mi esposo e hijos, muchas gracias sinceramente.



## **DEDICATORIA**

---

Los momentos de estudio y sacrificio a lo largo de toda mi carrera se los dedico:

A Dios, por ser mi guía en todo momento

A mis queridos Padres Gaspar e Irene, por brindarme su constante apoyo.

A mis hijos Cristian Wilmer, Jhoana Ioret y Cielo Celeste Rosali, razón de mi existencia, el motor de en mi vida y que me da fuerza, a mi esposo José Benito, por brindarme su constante apoyo, confianza y amor en todo momento. Por alentarme siempre y hacer posible mi realización personal y profesional.

A mis amigos y amigas, por su apoyo incondicional.

Y al departamento de Madre Dios, provincia Tambopata donde me desempeño como profesional.

Esperando poder darles un mejor futuro con todo mi amor.



## ÍNDICE DE CONTENIDOS

---

	<b>Pág.</b>
INTRODUCCIÓN	
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b>PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN</b>	
1.1. Caracterización de la problemática	<b>3</b>
1.2. Problema de investigación	<b>5</b>
1.3. Justificación de la investigación	<b>5</b>
1.4. Objetivos de investigación	<b>6</b>
1.4.1 Objetivo General.	<b>6</b>
1.4.2 Objetivos Específicos:	<b>6</b>
1.5. Antecedentes de estudio en el Perú	<b>6</b>
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b>MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN</b>	
2.1. Estrategias heurísticas	<b>11</b>
2.1.1. Historia de la heurística.	14
2.1.2. ¿Qué es la heurística?	15
2.1.3. Tipos de estrategias para la solución de problemas.	16
2.1.4. Procedimientos heurísticos:	24
2.2. Resolución de problemas.	26
2.2.1. ¿Qué es problema?	31
2.2.2 ¿Qué es la resolución de problemas?	32
2.2.3. Estrategias para resolución de problemas	35
2.2.4. Resolución de problemas en el currículo de educación secundaria.	39
2.2.5. Resolución de problemas matemáticos	41
2.2.5.1 Primer significado: resolver problemas como contexto	41
2.2.5.2. Segundo significado: resolver problemas como habilidad.	42

2.2.5.3. Tercer significado: resolver problemas es "hacer matemática"	42
2.2.6. Tipos de problemas en la enseñanza de las Matemáticas	43
2.2.7. Momentos en la resolución de un problema	44
2.2.8. Modelo de resolución de problema de Mason – Burton – Stacey	45
2.2.9. Modelo de Guzmán	46
2.2.10. El proceso de resolución de problemas	47
2.2.11. Clases de problemas matemáticos	49

### CAPÍTULO III METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Tipo de investigación.	<b>51</b>
3.2. Diseño de Investigación.	<b>51</b>
3.3. Categorías y subcategorías de investigación.	<b>53</b>
3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de información	<b>57</b>
3.5. Procedimiento de organización y análisis de resultados.	<b>57</b>

### CAPÍTULO IV PROPUESTA DIDÁCTICA DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Presentación	59
4.2. Justificación	<b>60</b>
4.3. Objetivos:	62
4.3.1. Objetivos generales	62
4.3.2. Objetivos específicos:	62
4.4. Fundamentos teóricos	62
4.4.1. Aproximación conceptual	62
4.4.2. Problema	63
4.4.3. Actividad cognitiva	63
4.4.4. Lenguaje:	64
4.4.5. Propositiones.	65
4.4.6. Procedimientos:	65
4.4.7. Argumentos:	65
4.4.8. ¿Es posible "enseñar" la resolución de problemas matemáticos?	66
4.5. Organización de aprendizaje:	67
4.5.1. Competencia, capacidades e indicadores en número y operaciones	67

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	
5.1. Conclusiones	133
5.2. Recomendaciones	134
FUENTES DE INFORMACIÓN	<u>137</u>
ANEXOS	<u>147</u>



## LISTA DE PROBLEMAS

---

	<b>Pág.</b>
Problema 1:.....	69
Problema 2:.....	71
Problema 3:.....	73
Problema 4:.....	74
Problema 5:.....	74
Problema 6:.....	76
Problema 7:.....	77
Problema 8:.....	79
Problema 9:.....	81
Problema 10:.....	84
Problema 11:.....	85
Problema 12:.....	87
Problema 13:.....	88
Problema 14:.....	89
Problema 15:.....	91

Problema 16: .....	91
Problema 17: .....	92
Problema 18: .....	94
Problema 19: .....	95
Problema 20: .....	97
Problema 21: .....	99
Problema 22: .....	101
Problema 23: .....	102
Problema 24: .....	103
Problema 25: .....	104
Problema 26: .....	105
Problema 27: .....	106
Problema 28: .....	109
Problema 29: .....	113
Problema 30: .....	114
Problema 31: .....	116
Problema 32: .....	117
Problema 33: .....	119
Problema 34: .....	120
Problema 35: .....	121
Problema 36: .....	122

Problema 37:.....	123
Problema 38:.....	126
Problema 39:.....	128
Problema 40:.....	131



## LISTA DE CUADROS

---

	<b>Pág.</b>
Cuadro 1: Diseño de investigación.....	53
Cuadro 2: Variable de la investigación .....	56
Cuadro 3: Fases en la resolución de Problemas .....	67
Cuadro 4: Problema 7 .....	78
Cuadro 5: Problema 8.....	80
Cuadro 6: conteos de la figura.....	82
Cuadro 7: Conteo de numero lados y de diagonales .....	82
Cuadro 8: Patrón para completar tabla .....	82
Cuadro 9: proceso de solución de gallina y borrego. ....	86
Cuadro 10: Problema 12.....	88
Cuadro 11: Ingreso - egreso .....	89
Cuadro 12: Tabulación de horas –metros.....	92
Cuadro 13: Suma de cuadrados del pirámide.....	93
Cuadro 14: Suma de cubos del pirámide.....	94
Cuadro 15: Soluciones de edades.....	98

Cuadro 16: Edades .....	99
Cuadro 17: Contando el tablero de ajedrez .....	108
Cuadro 18: Generalización de tablero de ajedrez. ....	109
Cuadro 19: Solución de corcholatas.....	132

## LISTA DE FIGURAS

---

	<b>Pág.</b>
Figura 1: Números enteros. ....	69
Figura 2: Sobre el volumen de la piscina .....	73
Figura 3. Plegado de papel .....	78
Figura 4: Animales en la granja.....	81
Figura 5. Figuras geométricas. ....	82
Figura 6: Parentesco familiar.....	85
Figura 7: Animales .....	86
Figura 8: Problema 15 .....	91
Figura 9: Recta numérica.....	92
Figura 10: La pirámide .....	92
Figura 11: Problema 18 .....	95
Figura 12: Problema 19 .....	96
Figura 13: Velocidades.....	96
Figura 14: Escala .....	97
Figura 15: Recta numérica.....	103

Figura 16: Problema 24.....	103
Figura 17: Vuelo de avión.....	104
Figura 18: Cangrejo .....	105
Figura 19: Tablero de ajedrez .....	106
Figura 20: Cuadrado 2x2.....	107
Figura 21: Cuadrado 3x3.....	107
Figura 22: Cuadrado 4x4.....	108
Figura 23: M. rombo, número de niños .....	112
Figura 24: M. Rombo, número de adultos .....	112
Figura 25: M. rombo, número de gallinas.....	114
Figura 26: Movimientos de fichas .....	131
Figura 27: Movimiento de una ficha.....	132
Figura 28: Movimiento de 2 fichas .....	132
Figura 29: Movimiento de 3 fichas .....	132

## LISTA DE GRÁFICOS

---

	<b>Pág.</b>
Gráfico 1. Número de computadoras vendidas .....	121



## INTRODUCCIÓN

---

Este trabajo presenta una Selección de estrategias heurísticas para resolver problemas de matemática en primer grado de secundaria utilizando números enteros

El marco teórico que sustenta este trabajo es la teoría de estrategias heurísticas para resolver problemas con números enteros. Este trabajo de investigación está estructurado en 4 capítulos como se detalla a continuación.

**En el capítulo 1**, se presenta el problema de investigación, los antecedentes, la formulación del problema, los objetivos de la investigación.

**En el capítulo 2**, se describe el marco teórico sobre la Teoría de Estrategias Heurísticas en la resolución de problema, para los estudiantes que le permitan superar sus dificultades y resolver los problemas Matemáticos, proponiendo así como método de miguel de guzmán como ayuda al aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos, a través del desarrollo del pensamiento lógico, uso de procesos mentales que intervienen en el razonamiento, sistema de la información, la toma de decisiones y con ello ayuda a que el ser humano pueda entender y transformar su entorno.

**En el capítulo 3**, se presenta los procedimientos metodológicos y desarrollo de las investigaciones de carácter **cualitativo**, al tener como finalidad básica la comprensión de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas con números enteros. En cuanto a la profundidad,

ésta es de carácter **exploratorio** y **descriptivo**, ya que su propósito es la de familiarizarse con el preparar el terreno para nuevos estudios, midiendo conceptos y definiendo variables. (Hernández, Fernández y Batista. 2014:89).

**En el capítulo 4**, se presenta el análisis de los resultados de la aplicación de los 40 problemas elaborados con una guía didáctica de estrategias heurísticas en la resolución de problemas con los enteros, se fundamenta en una estructuración de operaciones de la resolución de problemas matemáticos, considerando los elementos cognitivos, las habilidades como elementos esenciales al proceso de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de primer de secundaria.

**En el capítulo 5**, se presentan las conclusiones relacionadas con los objetivos planteados y las sugerencias para futuras investigaciones.

Finalmente podemos decir que entre los resultados destacados que hemos investigado se encuentran la realización de una Guía Didáctica, a partir de una selección de estrategias heurísticas para resolución de problemas de Primer Grado de Secundaria que servirá tanto para maestros como para los estudiantes.

# CAPÍTULO I

## PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

---

### 1.1. Caracterización de la problemática

La educación a nivel mundial ha mejorado notablemente, y esto ha traído consigo el avance de las civilizaciones en cuanto a su desarrollo económico y tecnológico, por eso vemos que los países llamados “potencias” invierten significativamente en este factor tan determinante para su desarrollo. Sin embargo en este contexto globalizado existen estándares educativos que todos los países consideran adecuados, esto proporcionado desde sus horas de estudio hasta que contenidos deben aprender los estudiantes. La educación en América Latina está saliendo favorablemente del estancamiento donde se encontraba. En el Perú, nuestras autoridades educativas están en la misma tarea desde hace muchos años, en consecuencia la educación peruana ha sido afectada por muchas reformas educativas, siendo el área de matemática y comunicación las áreas de mayor preocupación de nuestras autoridades.

Sin embargo paradójicamente el área de matemática para los estudiantes sigue siendo el área que menos entienden y por ende la que menos les gusta a pesar de los aparentes esfuerzos de los docentes.

Se puede sugerir, que una parte de esta problemática puede atribuirse al método de enseñanza que, a menudo, se sigue en el aula que generalmente se centra en realizar ejercicios que el profesor selecciona del libro. Posteriormente, el profesor encarga como trabajo extraescolar resolver ejercicios parecidos a los que se han resuelto en clase.

No es difícil darse cuenta que la enseñanza de la matemática que sigue este procedimiento: enseñar – memorizar – evaluar, es ineficiente con relación a los propósitos que busca la enseñanza de la matemática, dado que este procedimiento caracteriza al trabajo que normalmente es seguido por la mayoría de los profesores, por ello actualidad la cita de Polya (1965), *“plantear la actividad de resolución de problemas como un arte en el que la imitación del maestro y la práctica ayudan a interiorizar un modo de hacer”* en el procedimiento de enseñanza como el mencionado en este documento.

En el primer grado de secundaria se distinguen serios problemas presentados por los estudiantes especialmente en la resolución de problemas con números enteros, tal dificultad la arrastran a lo largo de toda la secundaria. Y es que pasa que algunos estudiantes no llegan a entender la ley de los signos por lo tanto no las aprenden, pasa también que algunos las aprenden de manera tradicional.

En consecuencia en la enseñanza aprendizaje de los números enteros se deben utilizar estrategias que permitan el desarrollo de habilidades y el logro de competencias las cuales les permitan actuar de manera independiente, consciente y comprometida, para resolver problemas con números enteros no solo en el área de matemática sino también en la vida real. Tales estrategias deben ser creativas, deben permitir que el estudiante procese la información, recupere conocimientos y los hagan suyos. Posteriormente aplicarlos en la solución de problemas. Las estrategias que permiten todo lo mencionado anteriormente son las estrategias heurísticas. La Heurística (del griego “eureka”, significa: hallar, descubrir, inventar). Según Lothar Klingberg (1970), el (método heurístico) es considerada generalmente como el método (donde el procedimiento heurístico es una parte del “aspecto interno” del método de enseñanza) por medio del cual la materia se desarrolla conjuntamente con el docente y los alumnos.

Es así que en el afán de dar solución al problema de la ausencia de estrategias heurísticas en la enseñanza - aprendizaje de la matemática y a la necesidad de desarrollar problemas en los estudiantes de secundaria y que les permita aprender de manera eficiente el tema de números enteros, es que en la presente investigación se propone indagar sobre los métodos heurísticos y la didáctica apropiada para enseñar de manera adecuada en los números enteros.

## **1.2. Problema de investigación**

¿Qué tipo de estrategias heurísticas se debe utilizar para resolver problemas con números enteros?

## **1.3. Justificación de la investigación**

Este trabajo propone estrategias heurísticas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas y especialmente el desarrollo de la resolución de problemas con números enteros. El profesor que sean más creativos y en el aula, de igual forma pretende que el estudiante no vea más los problemas matemáticos como algo complejo e incomprensible sino como una oportunidad para desarrollar sus capacidades y habilidades nuevas en la resolución de problemas.

Cambiar algunas estrategias didácticas en la enseñanza de matemática ya que según el resultado de las pruebas sabemos que se han alcanzado los desempeños esperados en los estudiantes que presentan en la resolución de problemas matemáticos, es más sabe realizar las cuatro operaciones matemáticas pero no sabe interpretar y razonar el enunciado del problema.

La preocupación por la resolución de problemas desde el punto de vista de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas ha pasado por varios momentos de interés para el mundo académico que fue percatándose cada vez más de su importancia. Existen diferentes propuestas sobre cómo abordar un problema matemático, algunos modelos como las estrategias heurísticas de estos autores como clásicos como George Polya (1949, 1981), Miguel de Guzmán 1995, y Mason burton y Stacey (1988).

El método Heurístico, entonces, está compuesto por los siguientes elementos: principios, sugerencias para hallar la solución: analogía y reducción; reglas que ayudan a encontrar los medios para resolver los problemas, entre las más empleadas se cuentan: separar lo dado de aquello buscado, confección de mapas, esquemas, utilización de números, reformulación de problemas.

En el ámbito de la Psicología, la heurística se encuentra estrictamente relacionada a la creatividad y se dice que se convirtió en una invalorable ayuda para el estudiante a la hora de las tareas matemática que en el caso

de no comprender un problema, lo mejor sería dibujar un esquema sobre él, si el problema en cuestión es abstracto esto es fundamental a la hora de orientar en la toma de decisiones y para explicar cómo se llega a un juicio o a la solución de un problema determinado.

Es por eso que el concepto de los números enteros y su resolución es importante en los estudiantes de secundaria pues les permite a los estudiantes desarrollar su pensamiento lógico matemático para la vida diaria. La formación en Matemáticas obedece a la necesidad de mejorar el potencial de los estudiantes para que obtengan un excelente desarrollo formal, crítico, conceptual y puedan aplicarlo a diferentes situaciones que demandan la generación de procedimientos propios para satisfacer y resolver problemas.

#### **1.4. Objetivos de investigación**

##### **1.4.1 Objetivo General.**

Seleccionar estrategias heurísticas para la resolución de problemas de los estudiantes de primer grado de secundaria utilizando números enteros.

##### **1.4.2 Objetivos Específicos:**

- Conocer sobre las estrategias heurísticas y la resolución de problemas.
- Desarrollar una serie de problemas tipos que utilizan números enteros en los cuales didácticamente emplearemos las heurísticas.
- Reconocer que las estrategias aplicadas, son viables teórica y didácticamente.
- Elaborar una Guía didáctica sobre estrategias heurísticas para la resolución de problemas con números enteros

#### **1.5. Antecedentes de estudio en el Perú**

La aplicación de estrategias Heurísticas en la resolución de problemas tiene mucha importancia porque propicia desarrollar actividades intelectuales, de observación, interpretación, comparación, esquematización, pensamientos críticos, reflexivos, habilidades y razonamiento matemático para resolver problemas en números enteros, y elevar la del Proceso Enseñanza Aprendizaje en nuestro país . la

publicación del presente trabajo se ha revisado diversas investigaciones sobre estudios realizados en la aplicación de estrategias heurísticas en la resolución de problemas, en números enteros encontrándose afines en la resolución de problemas en la biblioteca virtual de la unidad de Pos Grado de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, la investigación para obtener el grado de Magíster en Educación (Mención: Educación Matemática) “de la tesis: “influencia de la enseñanza de la matemática basada en la resolución de problemas en el mejoramiento del rendimiento académico”. De los ingresantes a la escuela de enfermería de la Universidad Alas Peruanas investigado por el estudiante de postgrado Roque (2009), su trabajo de investigación que tiene por objetivo general, determinar y analizar si existen diferencias significativas en el rendimiento académico del grupo de estudiantes que trabajan con la estrategia didáctica de la enseñanza de la matemática Basado en Resolución Problemas, con respecto al grupo de estudiantes al cual no se le aplica dicha estrategia.

El investigador tiene por conclusión, que la enseñanza de la matemática basada en la resolución de problemas ha mejorado significativamente pedagógica y didácticamente el rendimiento académico de los estudiantes ingresantes a la Escuela de Formación Profesional de Enfermería de la Facultad de Ciencias de la Salud de la Universidad Alas Peruana.

De igual manera la Tesis de Azañero (2013) “Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales”, sustentada en la Pontificia Universidad Católica del Perú, Escuela de Posgrado, para obtener el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas, teniendo por objetivo general identificar los errores que cometen los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver problemas con ecuaciones lineales.

Así, podemos concluir que al resolver problemas con ecuaciones lineales, los estudiantes muestran dificultades, de menos a más, en las siguientes transformaciones: tratamientos en el registro algebraico, pues en general resuelven satisfactoriamente ecuaciones lineales; conversiones del registro verbal al algebraico, pues llegan a plantear ecuaciones correspondientes a problemas sencillos enunciados verbalmente; conversiones del registro algebraico al verbal, pues fue una minoría la que

logró construir un enunciado verbal correspondiente a una información cuantitativa y con una incógnita, dada en un diagrama de Venn.

Señalando el autor además en las sugerencias lo siguiente:

Realizar investigaciones futuras sobre la resolución de problemas relacionados con ecuaciones lineales, teniendo como marco la teoría de registros de representación semiótica de Duval pero poniendo énfasis en la conversión del registro algebraico al verbal. Podría diseñarse una secuencia didáctica que estimule eficientemente la realización de estas conversiones. Diseñar investigaciones futuras que relacionen la conversión de los registros algebraicos al verbal, con la creación de problemas. Investigaciones integradas con el área de comunicación integral que permitan identificar los tratamientos en el registro verbal.

Otra tesis importante que podemos enunciar es la de Acuña (2010): “Resolución de problemas matemáticos y el rendimiento académico en alumnos de cuarto de secundaria del Callao” Presentado por el mencionado autor para optar el grado académico de Maestro en Educación en la Mención de Aprendizajes y Desarrollo Humano. En la Escuela de postgrado de la Universidad San Ignacio de Loyola. Programa académica de Maestría en educación para docentes de la Región de Callao. Que tiene por Objetivo:

Determinar la relación entre la resolución de problemas matemáticos y el rendimiento académico en el área de matemática de los alumnos del cuarto grado de secundaria de una Institución Educativa Militar del Callao.

La resolución de problemas es una actividad conformada por diferentes tipos de procesos y, en este sentido, constituye una vía mediante la cual los alumnos utilizan el conocimiento adquirido previamente declarativo o procedimental con el fin de satisfacer las demandas de una situación nueva, no familiar. La utilización de una estrategia de resolución de problemas influye positivamente en el aprendizaje de las matemáticas en los alumnos.

Asimismo, encontramos algunas sugerencias.

Proponer a las diversas instituciones educativas la aplicación de las estrategias de resolución de problemas con la finalidad de favorecer el

aprendizaje del área de matemática, que como muy bien sabemos tiene una enorme importancia para el desarrollo integral de los alumnos. Debemos recomendar también, que el Ministerio de Educación realice procesos de evaluación sobre estrategias que están utilizando los docentes en un intento de elaborar propuestas de mejora y que puedan resultar útiles en el proceso de formación integral de nuestros alumnos. Las conclusiones del presente estudio deben ser tomadas con cautela, ya que el enfoque a correlacionar sólo nos indica la existencia de un vínculo entre los elementos analizados. Investigaciones posteriores deben ahondar en el análisis de la naturaleza de ese vínculo, para averiguar si existe una relación causa-efecto (en una o en ambas direcciones), así como para investigar la presencia de otros elementos externos que estén mediatizando la relación entre la resolución de problemas y el rendimiento académico en el área curricular de matemáticas. Finalmente debemos sugerir que el Gobierno Regional del Callao pueda desarrollar programas de capacitación para apoyar a los docentes de la especialidad con el objeto de implementar la utilización de las estrategias heurísticas de resolución de problemas en los colegios, particularmente en el nivel secundario.

Consideramos importante incluir en el presente estudio la Tesis “El efecto de un programa de intervención pedagógica sobre el aprendizaje de las operaciones matemáticas básicas”.

Presentado por el licenciado Pirela (2011) para optar el título de Magister Scientiarum en Matemática, Mención Docencia Universitaria, en la República Bolivariana de Venezuela Universidad Del Zulia Facultad de humanidades y Educación División de Estudios para graduados Maestría en Matemática, mención Docencia.

Que tiene por objetivo: Analizar el efecto de un programa de intervención pedagógica sobre el aprendizaje operacional y estructural de los números enteros, en los estudiantes del primer año del nivel de educación media general en la Escuela Básica Nacional “Pedro Rincón Gutiérrez”.

Uno de los objetivos específicos está orientado a determinar el nivel de aprendizaje en las operaciones matemáticas básicas en el conjunto de los números enteros, objetivo específico conducente a establecer el nivel de aprendizaje operacional y estructural en las operaciones matemáticas básicas en el conjunto de los números enteros, pertenecientes al grupo control y experimental posterior a la aplicación de un programa de

intervención pedagógica, se concluye lo siguiente: Los estudiantes del grupo control lograron un nivel de conocimientos satisfactorio en las operaciones matemáticas básicas después de recibir las informaciones sobre esta unidad curricular; mientras el de grupo experimental se categorizó muy satisfactorio.

El tercer objetivo específico encauzado a comparar los niveles de aprendizaje operacional y estructural en las operaciones matemáticas básicas en el conjunto de los números enteros, de los estudiantes del primer año de la indicada institución educativa.

En ese mismo sentido también consideramos la Tesis “Concepciones prácticas de los estudiantes de pedagogía media en matemática con respecto a la resolución de problema y, diseño e implementación de un curso para aprender a enseñar a resolver problemas” Pino (2012). Para optar el grado de Doctor en la Universidad de Extremadura.

En este trabajo se trata de describir analizar, las creencias actitudes y emociones y las prácticas medias en matemática y se modifican después de participar en el curso taller de resolución de problemas, en el que estudiaran tenga noción de conceptos de resolución de problemas matemático y diversas herramientas heurísticas para aprender a resolver problemas, vinculado los aspectos cognitivos y afectivos en la resolución de problemas, llegando a la conclusión que tenemos que esclarecer las creencias y prácticas en los estudiantes sobre resolución de problemas matemáticos y cómo evolucionan desde el inicio hasta el final del curso. Además el estudio de caso demostró que los estudiantes en sus prácticas pedagógicas han modificado sus creencias iniciales sobre los `problemas de matemática y su resolución y mejorando sus capacidades para enseñar a resolver problemas a alumnos de secundaria.

El presente trabajo es necesario tomar en cuenta sobre la importancia en aplicación de estrategias heurísticas, en la resolución de problemas, en sus diferentes aspectos.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN

---

#### 2.1. Estrategias heurísticas

En el mundo de la ciencia y tecnología los especialistas se proponen actualmente una serie de retos al enfrentar y desarrollar en el estudiante las capacidades que le permite plantear y resolver con actitud analítica los problemas de su contexto y de su realidad. Sin embargo se reconoce como estrategias heurísticas a una serie de operaciones mentales en la resolución de problemas matemáticos que pueden ser considerados como métodos de descubrimiento e invención en la transformación de las soluciones de problemas en el cual interviene el razonamiento matemático.

“Heurística”, al igual que la palabra problema, provienen del griego, del vocablo “huriskin”, cuyo significado es “*servir para descubrir*’. *El término se ha utilizado en filosofía y lógica para referirse a la rama de la ciencia que estudia el razonamiento*” (Valverde, 2003:16).

Por lo tanto, la palabra heurística hace referencia al estudio de los métodos o procedimientos que conducen al descubrimiento en la resolución de los problemas de cualquier índole, no únicamente los planteados en la clase de matemática

Las estrategias heurísticas, también llamadas estrategias de búsqueda: haciendo referencia a ejemplos de resolución de problemas matemáticos, según las palabras de Valverde (2007:7), estas estrategias “*constituyen el método principal para buscar los medios matemáticos concretos que se necesitan para resolver un problema y para buscar la*

*idea fundamental de solución*”. Según Valverde (2003:19) las define como “*la táctica que se utiliza para lograr encontrar los medios necesarios para resolver un ejercicio*”.

En matemática, las estrategias utilizadas pueden ser de dos tipos:

El trabajo hacia adelante o método sintético: se parte de los datos (premisas) para a partir de los conocimientos previos los cuales permiten confeccionar un plan a seguir, y la incógnita es una guía para verificar si el plan pensado es el adecuado. El trabajo hacia atrás o método analítico: en este caso, se parte suponiendo que lo buscado es conocido y a partir de ello ir derivando en los resultados parciales.

Las estrategias heurísticas para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos en metas y obtener una solución.

De acuerdo con Monero y otros (1995) los procedimientos heurísticos son acciones que comportan un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza la consecución de un resultado óptimo como, por ejemplo, reducir el espacio de un problema complejo a la identificación de sus principales elementos.

Mientras que Duhalde y González (1997) señalan que un heurístico es “un procedimiento que ofrece la posibilidad de seleccionar estrategias que nos acercan a una solución”.

Los métodos heurísticos pueden variar en el grado de generalidad. Algunos son muy generales y se pueden aplicar a una gran variedad de dominios, otros pueden ser más específicos y se limitan a un área particular del conocimiento. La mayoría de los programas de entrenamiento en solución de problemas enfatizan procesos heurísticos generales como los planteados por Polya (1965) o Hayes (1981).

Kosztolányi (2006; citado por Szendrei, 2007., y Pino 2012), realizó una investigación, en Hungría, sobre la enseñanza de estrategias de resolución de problema, los resultados demostraron que existe un lugar para la enseñanza de estrategias heurísticas para la resolución de problemas en el tema de formación de docentes en matemáticas. La resolución de

problemas con la ayuda de preguntas orientadoras parece ser mucho más eficaz de ayudar a los estudiantes a adquirir ideas sobre las estrategias en lugar de recibir una conferencia sobre estrategias.

En Estados Unidos, a finales de los años 60, un pequeño número de investigadores como J. Kilpatrick, J. Lucas y M.G. Kantowski (Schoenfeld, 2007), motivados por G. Polya, comenzaron a identificar las prácticas heurísticas utilizadas por los estudiantes en la actividad de resolución de problemas.

Las estrategias heurísticas son considerados como reglas muy generales que consiguen transformaciones en la solución de problemas como los procesos que intervienen en los conocimientos matemáticos y los usen con flexibilidad en distintos contextos. Más bien el docente debe atender la necesidad de los retos de la sociedad actual en desarrollar la capacidad de resolución de problemas de interrelacionar y complementar en la medida que los estudiantes tengan la oportunidad de aprender matemática aplicando las estrategias heurísticas en la resolución de problemas de números enteros en el cual el estudiante debe saber operar con toda clase de situaciones de la vida cotidiana.

Actualmente al enfrentar los retos al mundo que vivimos en constante cambio, para hacer frente a esta realidad, se requiere poner a prueba muchas capacidades en la resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática, y comunicarse mediante distintas representaciones y contar con una estrategia heurística para resolver problemas de distintos contextos de la vida real.

Sin embargo, dentro del modelo de resolución de problemas elegido, para cada uno se sugieren una serie de heurísticas que sirven de guía en el proceso, ya que ayudan al alumno a aproximarse, comprender el problema y a ordenar eficientemente sus recursos para resolverlo.

El grado de complejidad de estas operaciones mentales es muy diverso. Pueden ir de la sencillez más evidente a la dificultad más desalentadora. Con todo, el alumno que desee abrirse camino en las resoluciones de problemas, debe ir haciéndose con un cierto equipo heurístico, en este sentido, resulta básico que el alumno tenga un modelo mental un proceso de resolución de un problema puesto que facilitará el acercamiento al mismo.

En este apartado podemos concluir que la capacidad heurística, es un rasgo característico de los humanos, es el arte y la ciencia del descubrimiento, de la invención, de resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente.

### **2.1.1. Historia de la heurística.**

La heurística a través de la historia se acerca más al descubrimiento de las fuentes de conocimiento para los hechos, que dan sustento a la investigación para resolver problemas.

Según Matute, (1999) la heurística es esencial en el proceso del trabajo historiográfico, por lo tanto, todo historiador debe conocer su significado y trascendencia, para argumentar o rebatir tal idea y explicar el arte de inventar con la búsqueda o investigación de documentos y fuentes históricos.

Sin embargo Gaos (1970) indica que la heurística es una acción ya proyectada a formular planteamientos de solución de problemas.

De modo que la heurística es una ciencia bastante definida y que se relaciona con la lógica, la filosofía o la psicología. Podemos afirmar también que la heurística ocupa un lugar cada vez más central en las prácticas y creencias que conforman el quehacer científico.

Por consiguiente (Polya, 2002:101) cuando se refiere a la heurística para resolver problemas manifiesta lo siguiente: *“Tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos del descubrimiento y de la invención”*, cuyo uso se ha vuelto manera normal en muchos medios académicos. Incluso en las publicaciones filosóficas del área de epistemología, los índices analíticos pocas veces que incluyen una entrada para el término "heurística"; Se pueden encontrar trazas de éste estudio entre los comentaristas de Euclides

En tanto que Velasco (2000) manifiesta una concepción popperiana, de la ciencia, la justificación metodológica es una etapa intermedia entre dos momentos heurísticos: el de la formulación de nuevas hipótesis y del planteamiento de nuevos problemas que apuntan hacia descubrimientos sorprendentes. Heurística, como adjetivo significa “servicio al investigador”

### 2.1.2. ¿Qué es la heurística?

Se denomina heurística a la capacidad de un sistema para realizar de forma inmediata innovaciones positivas para sus fines. Más bien la capacidad heurística es un rasgo característico de los humanos, desde cuyo punto de vista puede describirse como el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención o de resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente, tal como se afirma en la definición del Diccionario Pedagógico (Crisólogo: 1999).

Mientras que en el Diccionario de la lengua española (2001:771) define a la heurística como: *“Técnica de la indagación y del descubrimiento. Búsqueda o investigación de documentos o también “Métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas.”*

Según Real Academia Española (2009). La palabra heurística procede del término griego que significa «hallar, inventar» (etimología que comparte con eureka). La palabra heurística aparece en más de una categoría gramatical. Cuando se usa como sustantivo, identifica el arte o la ciencia del descubrimiento, una disciplina susceptible de ser investigada formalmente. Cuando aparece como adjetivo, se refiere a cosas más concretas, como estrategias heurísticas, reglas heurísticas o silogismos y conclusiones heurísticas.

La palabra heurus proviene del griego erus. Que definen la 'heurística' como un arte, técnica o procedimiento práctico o informal, para resolver problema que actualmente se han hecho adaptaciones en diferentes áreas. (Wikipedia – 2015).

Para Nikless (1987). La heurística es fundamentalmente una metodología de descubrimiento, no algorítmica ni demostrativa, que allana el camino de innovar, que posteriormente tendrán que ser sometidas a comprobación por medio de métodos más rigurosos y de mayor alcance cognitivo.

Haciendo referencia al proceso heurístico o también conocido bajo el nombre de “método heurístico” en escenario escolar, Torres lo define como:

*“el método mediante el cual la actividad del profesor consiste en conducir al alumno a hallar por sí mismo el conocimiento que se*

*desea que adquiera; el papel del maestro en este método es estimular al alumno al pensamiento reflexivo, guiarlo para que indague e investigue, para que llegue a conclusiones” (Torres, 2007:102)*

la Heurística, es método que conduce a la solución de problemas, en particular a las operaciones mentales, de modo que la heurística es como ciencia del descubrimiento, lo novedoso, lo opuesto y crítico a lo habitual y familiar, se basa en la aplicación de reglas, proposiciones y estrategias que conducen a él; es un instrumento metodológico que apoya y ofrece ayuda en las áreas del conocimiento con fundamento y desarrollo de los conocimientos previos.

El método heurístico para la solución de problemas es muy diferente en diversas disciplinas, actualmente se ha tomado desde una representación cognitiva, los métodos o procedimientos heurísticos deben entenderse como dependientes a la estructura algorítmica de la ciencia que predominan en el proceso de creación científica. Nuevos métodos y técnicas heurísticas son utilizadas a diario por científicos de diversos campos, por empresarios, por diseñadores, por desarrolladores de informática y cibernética para visualizar y hacer prospectivas con las cuales resolver problemas que antes eran demasiado complejos e impensables en las anteriores generaciones.

### 2.1.3. Tipos de Estrategias para la solución de problemas.

Los nuevos tipos de estrategias, métodos y técnicas heurísticas son utilizadas a diario por científicos en varios campos, por los administradores, por artistas, para desarrollar estrategias heurísticas que guían el descubrimiento de la informática y cibernética para visualizar y resolver problemas que antes eran demasiado complejas e impensables con los anteriores generaciones. Sin embargo con la heurística, se desarrollan metodológicamente las múltiples etapas de trabajo que van a facilitar la interpretación del desarrollo del problema.

En este sentido Polya (1965) propone una forma de enfrentar las diversas situaciones cognitivas a partir de la identificación y planteamiento acertado de problemas, a este proceso lo caracteriza como razonamiento heurístico; preguntarse de manera permanente y de forma pertinente sobre lo que se pretende conocer y cómo conocerle, sería la característica principal de todo razonamiento heurístico.

Las aportaciones de Polya incluyen más de 250 documentos matemáticos y tres libros que promueven un acercamiento al conocimiento y desarrollo de estrategias en la solución de problemas. Su famoso libro *Cómo Plantear y Resolver Problemas* que se ha traducido a 15 idiomas, introduce su método de cuatro pasos junto con la heurística y estrategias específicas útiles en la solución de problemas.

Mientras que es necesario mencionar por su importancia el Método de Cuatro Pasos de Polya. Además este método está enfocado a la solución de problemas matemáticos, por ello nos parece importante señalar alguna distinción entre "ejercicio" y "problema". Para resolver un ejercicio, uno aplica un procedimiento rutinario que lo lleva a la respuesta. Para resolver un problema, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales que no había ensayado antes para dar la respuesta. Entre los pasos mencionados tenemos:

### **Paso 1: Entender el Problema.**

Para poder resolver un problema primero hay que comprenderlo. Se debe leer con mucho cuidado y explorar hasta entender las relaciones dadas en la información proporcionada.

### **Pasó 2: Configurar un Plan.**

En este paso se busca encontrar conexiones entre los datos y la incógnita o lo desconocido, relacionando los datos del problema. Se debe elaborar un plan o estrategia para resolver el problema. Una estrategia se define como un artificio ingenioso que conduce a un final. Hay que elegir las operaciones e indicar la secuencia a realizar.

### **Paso 3: Ejecutar el Plan.**

Se ejecuta el plan elaborado resolviendo las operaciones en el orden establecido, verificando paso a paso si los resultados están correctos. Se aplican también todas las estrategias pensadas, completando si se requiere los diagramas, tablas o gráficos para obtener varias formas de resolver el problema. Si no se tiene éxito se vuelve a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

Implementar la estrategias que se escogiste hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción te sugiera tomar un nuevo curso.

Concédete un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o haz el problema a un lado por un momento (¡puede que "se te prenda el foco" cuando menos lo esperes!).

No tengas miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

#### **Paso 4: Mirar hacia atrás.**

En sus estudios, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba en el proceso de descubrir. Pero sus estudios, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados.

Según Miguel de Guzmán sobre la resolución de problemas como un modelo que consiste en adquirir hábitos mentales que capacite para resolver y tener un manejo eficaz en los problemas en la cual esquematiza en cuatro fases:

- Familiarización con el problema.
- Búsqueda de estrategias.
- Llevar adelante la estrategia.
- Revisar el proceso y sacar conclusiones de él.

**En la primera fase** intentaremos sacar todo el mensaje contenido en el enunciado mirando el problema pausadamente y con tranquilidad para saber claramente cuál es la situación de partida, cuál la de llegada y lo que hay que lograr.

**En la segunda fase**, se debe tratar de acumular distintas formas de ataque del problema. Se trata de que fluyan de la mente muchas ideas,

aunque en principio puedan parecer descabelladas, en ocasiones las más estrafalarias pueden resultar las mejores.

Para facilitar el flujo de ideas posibles, nos podemos ejercitar en la práctica de unas cuantas normas generales, que permiten construir diversas estrategias en la resolución de problemas.

**En la tercera fase**, es el momento de juzgar de entre todas las estrategias que han surgido, aquella o aquellas que tengan más probabilidad de éxito.

Después de elegir una la llevamos adelante con decisión y si no nos condujera a buen puerto volveríamos a la fase anterior de búsqueda de estrategias hasta conseguir dar con la o las adecuadas que nos conduzcan a la solución.

**En la cuarta fase**, ya se ha decidido finalizar el trabajo sobre la resolución del problema que nos ocupa, no importa mucho que se haya resuelto o no; a veces se aprende más de los problemas intentados con interés y tesón... y no resueltos, que de los que se resuelven casi a primera vista.

Por consiguiente el Modelo de Miguel de Guzmán, considera que cuando se trabajaron los proyectos de aprendizaje fue importante indicar los pasos para constatar después de su desarrollo si realmente tiene efecto en el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, entonces indica que las fases son:

**a) Familiarizarse con el problema.**

Sin prisa pausadamente y con tranquilidad, hay que tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones e incógnitas. Se trata de entender a fondo la situación, con tranquilidad, a su ritmo.

**b) Buscar estrategias.**

Cuando está entendido el problema se busca estrategias que permitan resolver. Apuntamos todas las ideas importantes que surgen en relación al problema, se puede formular hipótesis, se graficar, hacer esquemas. Es responsabilidad del docente generar las preguntas o esquemas para

determinar las estrategias y los estudiantes buscarán las que crean conveniente aplicar para la resolución de los problemas planteados en los proyectos de aprendizaje.

**c) Llevar adelante la estrategia.**

De las estrategias que tenemos, se escoge la necesaria con una gran confianza y sin prisa. Siempre se debe tener en cuenta que si no es la estrategia adecuada, se vuelve a la fase anterior y reiniciamos el trabajo. El trabajo del docente es reorientar a los estudiantes y ver el proyecto de aprendizaje si va con la importancia del caso que se merece, tratando que las situaciones planteadas sean leídas nuevamente, si falla la ruta que se está trabajando, buscamos siempre un nuevo camino que ayudará a seguir adelante con el proceso.

**d) Revisar el proceso y sus consecuencias.**

Cuando se tiene la solución sólo queda la fase más importante, la revisión del proceso, se reflexiona sobre los pasos que se ha seguido y la estrategia que se ha utilizado para la solución del problema, entonces nos ayudará a proponer alternativas para solucionar situaciones desconocidas. En este caso, las preguntas que nos debemos plantear son:

- ¿Qué hicieron para lograr el resultado del problema?
- ¿Hemos resuelto las situaciones problemáticas?
- ¿Cuál fue el primer paso?
- ¿Son correctos los pasos que se ha realizado y por qué utilizamos esos pasos?
- ¿A qué conclusión llegamos?
- ¿Se utilizó todas las estrategias para resolver el problema?
- ¿Por qué otras situaciones similares nos pueden ser de utilidad?

Según J. Mason, L. Burton y K. Stacey (1989) que aparece publicado en la obra “Pensar Matemáticamente” para su análisis valorativo, se fundamenta en las siguientes razones:

La resolución de problemas se concibe como un proceso dialéctico, donde las tareas pueden sufrir altibajos, es decir, se puede avanzar, también retroceder. Esta característica le otorga singularidad al modelo, a la persona que resuelve el problema tiene un papel fundamental, ya que sus características psicológicas son un recurso más a utilizar en el logro de su

aprendizaje. Además, la concepción del problema es de gran importancia didáctica, lo que se debe dar un enfoque positivo al hecho de no poder avanzar en la resolución del problema, donde le asigna una gran importancia a la fase de revisión, con frecuencia no abordada con suficiente profundidad.

El modelo no se presenta como un planteamiento estructurado sobre la resolución de problemas, sino que trasciende y analiza lo que constituye el pensamiento y la experiencia aportada por la Matemática, ilustrando una manera de enfocar la vida al mismo tiempo que posibilita conocerse uno mismo.

Sin embargo, cuando se reflexiona sobre el modelo, este tiene puntos concretos como el de “monitor interior” que puede constituir una dificultad para los estudiantes que no han desarrollado suficientemente la habilidad resolver problemas, lo que hace difícil adaptarlo al contexto del aula, por lo que en este caso, se considera más recomendable que el estudiante al presentar dificultades acuda a un “monitor exterior”, que puede ser el docente, un compañero de aula, material didáctico, lo que de inicio puede ser un recurso más efectivo para favorecer la resolución de problemas.

Según la Real Academia Española, (2012), se entiende por heurístico lo siguiente: *"Técnica de la indagación y del descubrimiento. En algunas ciencias, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas."*

Constituyen una serie de sugerencias concretas encuadradas en el proceso general de resolución de problemas que ayudan al alumno a desarrollar habilidades y actitudes positivas en el proceso. Las actividades sugeridas son usadas cuando necesitan comprender una situación o hacer progresos hacia la solución o analizar el proceso seguido.

Según El Ministerio de Educación (2015:50.): resolver problemas. A través de las Rutas de Aprendizaje propone construyen nuevos conocimientos matemáticos en la solución de problemas. Mientras que crean ambientes de aprendizaje que permiten la formación de un sujetos autónomos, críticos además adquieren formas de pensar, hábitos de perseverancia, curiosidad y confianza en situaciones no familiares que les sirvan fuera de la clase.

Por tal motivo el ministerio de educación mediante las Rutas de Aprendizaje se preguntan ¿Qué y cómo aprenden nuestros adolescentes? Mediante las estrategias Heurísticas propone esta capacidad de comprender de selección y uso flexible de estrategias con características de ser heurísticas, es decir, con tendencia a la creatividad para descubrir o inventar procedimientos de solución. En los se cuales menciona.

1. Utilizar el ensayo y erro
2. Hacer una lista sistemática.
3. Empezar por el final.
4. Razonar lógicamente.
5. Particularizar.
6. Generalizar.
7. Buscar patrones.
8. Plantear una ecuación.
9. Resolver un problema semejante pero más simple.

#### 1. **Utilizar el ensayo error.**

Tantear es una estrategia muy útil cuando se realiza de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones.

La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

#### 2.- **Hacer una lista sistemática.**

Hacer una lista sistemática en los casos en que requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo olistado organizado con el fin de no dejar de lado. Ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación, para encontrar espacios de muestreo y resolver problemas de permutaciones o combinaciones

### **3.- Empezar por el final.**

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se da mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final y también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

### **4.- Razonar lógicamente.**

El razonamiento lógico es muy importante, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas que se producen para el desarrollo y resolución de problemas.

### **5.- Particularizar.**

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema, de este modo es posible observar algún camino que guíe hacia la solución de un problema genérico.

### **6.- Generalizar.**

En algunos problemas puede ser muy útil averiguar si lo que se pide se refiere a un caso particular de alguna propiedad general. A esto se le conoce como la paradoja del inventor.

### **7.- Buscar Patrones.**

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrían emplear para llegar a la solución.

### **8.- Planear una Ecuación.**

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental lo constituye el planteo de ecuaciones.

Lo primordial para poder aplicarla con éxito es el entrenamiento en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.

## 9.- Resolver un problema semejante pero más simple.

Algunas veces, utilizar un método que nos dio resultado con un problema más simple que el propuesto nos conduce a la solución del problema original.

### 2.1.4. Procedimientos heurísticos:

“son formas de trabajo y de pensamiento que apoyan la realización consistente de actividades mentales exigentes” (Müller, citado por Jorge, 2007, p.3). Estos procedimientos pueden dividirse en tres, los que, a su vez, se subdividen en otras categorías más específicas:

1. Principios heurísticos: son las ideas o normas generales que surgen ante la intención de resolver un problema:
2. Principio de analogía: es cuando el sujeto asemeja los contenidos nuevos a otros ya adquiridos anteriormente.
  - a. Principio de generalización: es cuando el sujeto a partir de un caso particular infiere una suposición que se cumple en forma general.
  - b. Principio de la movilidad: es cuando el sujeto analiza los cambios que se producen especialmente en elementos geométricos, al mover el objeto y formula relaciones y suposiciones al respecto.
  - c. Este principio está íntimamente agregado al quehacer matemático sobre las figuras de análisis confeccionadas a la hora de resolver un problema geométrico.
  - d. Principio de inducción: es cuando el sujeto a partir del análisis de casos particulares, ya conocidos, obtiene una relación general.
  - e. Principio de medir y probar: es cuando el sujeto a partir de las mediciones y comparaciones realiza suposiciones, también es un proceder inductivo.

- f. Principio de reducción: es cuando el sujeto compara con otros problemas similares ya resueltos.
  - g. Principio de casos especiales o casos límites.
3. **Reglas heurísticas:** son impulsos en la búsqueda de solución, tienen carácter más específico ya que abarcan las acciones y las operaciones en este camino hacia la solución.
4. **Estrategias heurísticas** o también llamadas estrategias de búsqueda:

#### 2.1.5. Herramientas heurísticas para la solución de problemas.

Según Schoenfeld (1985; citado por Arcavi, et al. 1998, Pino 2014: p.47.), *“un tema central en el currículo de matemáticas corresponde a las heurísticas, que son reglas empíricas para resolver problemas con éxito, sugerencias generales que ayudan a un individuo a comprender mejor un problema o para avanzar hacia su solución”*.

Por lo tanto Labarrere y Valdivial (citados en Valverde, 2003, p.16), incluyen dentro de estos medios a

*“distintas imágenes y representaciones de objetos y fenómenos que se confeccionan especialmente para la docencia, que también abarcan objetos naturales e industriales, tanto en su forma normal como preparada, los cuales contienen información y se utilizan como fuente de conocimiento”*.

Puede afirmar que estas palabras hacen referencia a los materiales o recursos didácticos utilizados en la escuela, pero junto a estos medios que son presentados a quien resuelve el problema en un ambiente educativo, puede incorporarse las figuras de análisis, tema de estudio de este trabajo de investigación. Una diferencia bien marcada es que estas figuras de análisis deben ser elaboradas generalmente, por quien resuelve el problema, razón por la cual su uso a veces en lugar de favorecer el procedimiento y lograr llegar a la solución correcta se transforma en un obstáculo. Se ha aclarado que generalmente son realizadas las figuras de análisis por el sujeto frente al problema porque en algunos casos cuando se presenta el problema, por ejemplo en un libro de texto escolar viene acompañado de un dibujo que facilita la interpretación del enunciado.

## 2.2. Resolución de problemas.

La Resolución de problemas es un aprendizaje y la capacitación del hombre para la solución de problemas, sin embargo se sigue un proceso en adquirir conocimientos previos para situaciones nuevas y desconocidas y al poder utilizar matemática para resolver problemas es un punto muy discutido en el mundo pues se considera una actividad de gran importancia en la enseñanza y aprendizaje en su vida cotidiana que le obliga resolver problemas comúnmente.

Según (Arcavi y Friedlander, 2007; Yeap, Ferrucci, y Carter, 2006). La resolución de problemas ha sido uno de los focos principales de la educación matemática a nivel internacional, no es de extrañar la presencia importante en los currículos escolares de cualquier país del mundo tanto en educación primaria, como secundaria.

Según (Lorenzo, 2005) la resolución de problemas no solo se circunscribe a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sino que la adquisición de competencias en dichos procedimientos es de gran utilidad para cualquier disciplina científica.

Según Mayer (1983 *óp. cit.*, p.21) Los problemas matemáticos se presentan como un excelente laboratorio natural en el que se puede estudiar, con claridad y precisión, cómo las personas adquieren, elaboran y usan habilidades para resolver situaciones problemáticas.

También otra opinión sumamente importante es la de Polya (1965) Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.

Al respecto Miguel de (Guzmán 2001:274) plantea: *“Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llevar a otra, unas veces conocida; otras, un tanto confusamente perfilada y no conozco el camino que me pueda llevar de una a otra”*.

Es más Miguel de Guzmán sobre la resolución de problemas como un modelo que consiste en adquirir hábitos mentales que capacite para

resolver y tener un manejo eficaz en los problemas en la cual esquematiza en cuatro fases:

- Familiarización con el problema.
- Búsqueda de estrategias.
- Llevar adelante la estrategia.
- Revisar el proceso y sacar conclusiones de él.

Haciendo referencia al proceso de resolución de un problema por parte de los alumnos, no únicamente a los referidos al área de matemática, La barreré (citado en Mazarío, 2000:11) señala al respecto:

*“Es común pensar que el análisis de los problemas se realiza sólo en el plano mental, esto es; con predominancia de la reflexión interior; pero no es totalmente así, en muchas situaciones el análisis del problema transcurre también a partir de acciones en el plano externo; es decir, cuando el alumno manipula, opera de manera visible, el problema”* y continua diciendo: *“El análisis a partir de la acción (operación) en el plano externo, se observa en muchas ocasiones cuando el alumno, para comprender qué se plantea en un problema, y cuáles son sus elementos, emplea procedimientos gráficos, esquemáticos,, que en cierta medida reproducen o modelan el problema”*.

Como se dijo, en el momento de la resolución de un problema matemático, muchas personas seleccionan por realizar un dibujo para comprender los datos dados y organizarlos en una imagen gráfica que les permita exteriorizar las visualizaciones internas. Un tipo de pensamiento “No visual o Analítico”, donde prevalece el factor “lógico/verbal” muy bien desarrollado frente al factor “visual/pictórico” que es más tenue. Manejan esquemas abstractos por lo que no usan soportes visuales alguno.

En otra categoría incompatible a esta, establece un tipo de pensamiento “Visual o Geométrico” donde el componente “visual/pictórico” es más fuerte que el componente “lógico/verbal” que se encuentra poco desarrollado.

En un punto medio entre estos dos extremos, se encuentra un pensamiento de tipo “Intermedio o Armónico” en donde ambos factores mantienen un cierto equilibrio, pero dentro de esta clasificación Kruteskii realiza una sub clasificación.

*“Dentro de los estudiantes del tipo armónico se diferencian aquellos que pueden usar soportes visuales en la resolución de problemas pero prefieren no hacerlo (armónico abstracto) y aquellos que pueden usar soportes visuales en la resolución de problemas y prefieren hacerlo (armónico pictórico)”* (Ramírez, 2007:29).

Otros investigadores también priorizan la utilización de imágenes dando un lugar de gran importancia a la visualización en el proceso del aprendizaje de la matemática. Cunnigham avala que *“algunos estudiantes aprenden más eficientemente a partir de discusiones que combinan aspectos visuales con experiencias de trabajo analítico y simbólico”* (citado en Ramírez, 2007:39).

Otra definición parecida a la de Polya es la de (Krulik y Rudnik, 1980: p.274) un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma.

Es mas se trata de enseñar a resolver problemas, sino también de enseñar a plantearse problemas, a convertir la realidad en un problema que merece ser indagado y estudiado. Generar en el estudiante la actitud de buscar respuestas a sus propios preguntas, debe habituarse a hacerse preguntas en lugar de buscar sólo respuestas ya elaboradas por otros, sean del libro o del profesor, al respecto Pozo (2000) señala: *“El verdadero objetivo final de que el estudiante aprenda a resolver problemas es que adquiera el hábito de plantearse y resolver problemas como forma de aprender”* Pozo Muncio, Juan y Otros (2000) en “La Solución de Problemas” Pág. 17.

Según Guzmán, Miguel de (2001): “La enseñanza de las ciencias y la matemática”. Edit. Popular Pág. 103

Al respecto Pozo (1994), Juan señala. *“A los alumnos no se les puede enseñar a pensar a resolver problemas en general, al margen de los contenidos específicos de cada área del currículo”*

De acuerdo con Cuicas (1999), "en Matemática la resolución de problemas juega un papel muy importante por sus innumerables aplicaciones tanto en la enseñanza como en la vida diaria" (p. 21).

Según Mayer (citado por Poggioli: 1999,15) problemas tienen los siguientes componentes: a) las metas, b) los datos, c) las restricciones y d) los métodos".

De acuerdo con este autor, las metas son los objetivos que se pretenden alcanzar en una situación determinada. Los datos son los elementos numéricos o la información verbal que necesita el estudiante para analizar y resolver la situación problema; los datos pueden estar explícitos o implícitos en el enunciado de un problema. Las restricciones son los factores que limitan el camino para lograr solucionar la situación planteada y los métodos se refieren a las operaciones o procedimientos que deben aplicarse para alcanzar la solución.

Según las palabras de Carretero y García (1984):

*"Un problema surge cuando queremos conseguir algo y los sistemas que tenemos a nuestra disposición para conseguirlo no nos sirven. Es decir, existe una meta más o menos definida y no existe un camino claro y sencillo que nos conduzca hacia ella. Precisando un poco más la mayoría de los psicólogos consideran que un problema existe cuando hay algún obstáculo entre una situación dada y una situación meta. La existencia de ese obstáculo obliga al sujeto a considerar los posibles caminos que le pueden conducir a la situación meta". (p.185).*

Pero una de las definiciones destacada es la que ofrece Schoenfeld (1985). Para él, un problema es:

*"Una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverlo. Es más, esa dificultad debe ser un callejón sin salida intelectual en lugar de uno computacional. Para declarar las cosas más formalmente, si uno tiene acceso listo a un esquema de solución para una tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema". (Schoenfeld 1985:74)*

Por consiguiente procesos que forman parte de los conceptos relacionados con nuestra discusión de la noción de problema, son

conceptos tales como: resultado, solución y resolución. Para nuestro análisis seguiremos la distinción que hace Puig (1996)

*"usaremos el término resultado para indicar lo que contesta a la pregunta del problema, ya sea un número, una fórmula, una expresión algebraica, una construcción geométrica, una derivación lógica. El término solución lo usaremos para indicar la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita o de la hipótesis a la conclusión. Finalmente usaremos el término resolución para indicar el conjunto de las acciones del resolutor durante el proceso, que pueden conducir a obtener la solución o no"*  
(Puig, 1996: 34)

Según el Ministerio de Educación: resolver problemas implica encontrar un camino que no se conoce de antemano, es decir una estrategia para encontrar una solución. Para ello se requiere de conocimientos previos y capacidades. A través de ello muchas veces se construyen nuevos conocimientos matemáticos. A través de la resolución de problemas, se crean ambientes de aprendizaje que permiten la formación de sujetos autónomos, críticos además adquieren formas de pensar, hábitos de perseverancia, curiosidad y confianza en situaciones no familiares que les sirvan fuera de la clase.

Cabe destacar la resolución de problemas matemáticos. Es considerada la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea y docente se dedicara a buscar respuestas a las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos en cual enunciar problemas con soluciones exactas y contenido de los problemas deben tener una estructura y deben emplearse algoritmos.

Por esta razón, resolver problemas se ha convertido en el centro de la enseñanza de la matemática en la época actual, por lo que es necesario contar con una concepción de su enseñanza que ponga en primer lugar la capacidad de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento lógico. A partir de estas ideas centrales es que debe ser determinado el contenido de la enseñanza.

### 2.2.1. ¿Qué es problema?

La palabra problema es utilizada comúnmente, en la vida cotidiana y en el mundo de las matemáticas. Sin embargo, existe una aprobación que tiene un carácter polémico, no existe una única definición en la que todos estén de acuerdo. En la vida cotidiana decimos "tengo un problema". En las clases de matemáticas los estudiantes de todos los niveles educativos, se puede observar que resuelven problemas. Algunas ideas básicas, tales como "problema" y "resolución de problemas", pueden tener diferentes significados para diferentes personas. Por lo tanto, el supuesto caso sobre la importancia de la resolución de problemas nos dice mucho acerca de cuáles son los problemas y la solución de problemas, lo que significa, de hecho, que puede definir diferentes autores y personajes desde un punto de vista de lo que constituye un problema.

En el Diccionario de la Real Academia Española (2010:1203),

Versión en línea, un problema es una "cuestión que se trata de aclarar", una "proposición o dificultad de solución dudosa", un "conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin" o un "planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos".

Según el Diccionario Pedagógico (1985). *"Problema es una dificultad, cuestión o dilema que puede resultar o tratar de resolver mediante el pensamiento reflexivo"*

Según el Diccionario de las Ciencias de la educación de Santillán (1983:1147) un problema es un cuestión que hay que resolver, planteando en forma interrogativa que resuelven como consecuencias, de una vacío en los resultados de una resultados contradictorios de varias investigaciones bien hecho carecen de técnicas de indagación y del descubrimiento.

Según el Diccionario filosófico de Walter Brugger (1972:421) no toda pregunta recibe el nombre de problema sino únicamente aquella que a causa de los dificultades en ellas implicado no poder resolver sin especial esfuerzo, hay problemas que encierran sin dudas de explicación un planteamiento posible, pero no obstante son infecundos porque su solución aun siendo posible, debido a su escaza trascendencia no recompensa.

Precisamente la moderna filosofía de la educación (Dewey 1910, 1033:13) ha puesto de relieve la importancia del problema en la formación del pensamiento, al afirmar que este surge siempre ante un principio de la actividad educativa lleva necesariamente un componente memorístico, a buscar a la formación de la mente del alumno, poniendo de un modo directo frente a los problemas a situaciones problemáticas que pueden encontrarse en la vida real.

Según La definición que PISA (2012) da a esta competencia (OCDE, 2014:12) es la siguiente: La competencia para la resolución de problemas es la capacidad del individuo para emprender procesos cognitivos con el fin de comprender y resolver situaciones problemáticas en las que la estrategia de solución no resulta obvia de forma inmediata. Incluye la disposición para implicarse en dichas situaciones para alcanzar el propio potencial como ciudadano constructivo y reflexivo.

Según Rutas de aprendizaje. Un problema existe cuando una persona tiene una meta y no sabe cómo alcanzarla (Duncker, 1945). Esta definición se esquematiza en la siguiente figura:

Sin embargo, un problema pide activar capacidades matemáticas para realizar una serie de tarea que nos permite encontrar una respuesta o solución de una situación planteada. Mientras es el cambio de conocimiento que la persona tiene sobre el problema al principio. Los operadores son las acciones posibles de realizar para alcanzar “el estado de meta” que es el objetivo deseado con la ayuda de las herramientas disponibles.

### **2.2.2 ¿Qué es la resolución de problemas?**

Polya (1968) sugirió que la resolución de problemas está basado en procesos cognitivos que tiene como resultado “*encontrar una salida a una dificultad, una vía alrededor de un obstáculo, alcanzando un objeto que no era inmediatamente alcanzable*”

Para Dijkstra (1991, citado por Roque 2009) la resolución de problemas es un proceso cognoscitivo que involucra conocimiento almacenado en la memoria a corto y a largo plazo.

La resolución de problemas es un procedimiento y conceptos donde se aplican los conocimientos adquiridos previamente en situaciones nuevas, desconocidas y cognitivos complejos que involucran almacenar en la memoria de corto y largo plazo.

Sin embargo se afirma que la resolución de problemas consiste en un conjunto de actividades mentales y conductuales, en la que se implica factores de naturaleza cognoscitiva, afectiva y motivacional.

Por su parte Azinián (2002) señala que resolver un problema es establecer cómo se puede caracterizar, con el propósito de intentar modelizarla, cómo se puede definir en términos de problemas y cómo, encontrada la metodología de la resolución específica, se llega al modelo. Según Abrantes (2002:111)

*“Podemos resumir que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados”*

En tanto que es una situación en el cual se quiere hacer algo, pero se desconocen los pasos precisos para alcanzar lo que se desea es más es un conjunto de elementos que representa el conocimiento relacionado con el problema, del sujeto que analiza el problema, sus metas y datos y se forma una representación del problema en su sistema de memoria, también el sujeto opera sobre la representación para reducir la diferencia entre los datos y las metas en la solución de un problema está constituida por la secuencia de operaciones que pueden transformarse y operar sobre datos y las metas, que el sujeto está solucionado el problema utiliza la información.

En la literatura existen diversas definiciones de problemas, atendiendo cada una a diferentes puntos de vista, aunque diferentes conceptos, que presentan elementos comunes. Cuando, todas coinciden en señalar que un problema es una situación que presenta dificultades para las cuales no hay solución inmediata.

Como todo concepto de resolución de problema es muy importante para la didáctica, en la selección de los problemas a proponer a un grupo de

estudiantes hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que las personas requieren para su solución.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es que la persona quiera realmente hacer las transformaciones que le permiten resolver el problema, lo que significa que si no está motivada, la situación planteada deja de ser un problema al no sentir el deseo de resolverlo, en resumen, en la solución de problemas hay al menos dos condiciones que son necesarias: la vía tiene que ser desconocida y el individuo quiere resolver el problema.

Diariamente es necesario enfrentar problemas y conflictos a los cuales se les deben encontrar soluciones aceptables de acuerdo al contexto. El proceso de solucionar problemas implica una serie de capacidades y habilidades del pensamiento que es importante desarrollar y evaluar en la preparación académica.

Una de las capacidades más importantes en la resolución de problemas es la de hacer preguntas que permitan surgir de un conflicto y sortear la dificultad, algunas preguntas pueden servir para identificar el problema, otras para buscar alternativas. Es posible preguntarse: ¿qué es lo que hace problemática esta situación? ¿Qué me falta por saber? ¿Cuántos problemas están involucrados? ¿Cuál voy a intentar resolver? ¿Qué es lo que no funciona? ¿Cuáles son las alternativas que se pueden tomar? ¿Qué conozco sobre este tema? ¿Por dónde puedo empezar para que sea más fácil?

Diferentes autores han definido lo que es un problema, según su paradigma encontramos similitud y diferencias entre ellos.

Según Polya (1969:274) *“problema es la búsqueda consistente, con alguna acción apropiada, para lograr una meta claramente concebida pero no alcanzable inmediatamente”*.

Según Campistrous (1996: IX) *“situaciones la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo”*

También Echenique (2005, citado en Cruz, 2009), indica que *“un problema es una situación que un individuo o grupo quiere o necesita resolver y para lo cual no dispone, en principio de un camino rápido y directo que lo lleve a la solución”* (p.3).

Para Alonso y Martínez (2005, citados en Villalobos, 2008), un problema matemático es: Una situación matemática que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos; y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias.

La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser conocida y la persona debe querer hacer transformaciones.

Según el Ministerio de Educación que propone las Rutas de aprendizaje (2015) al resolver problemas se aprende a matematizar, lo que es uno de los objetivos básicos para la formación de los estudiantes. Con ello aumentan su confianza, tornándose más perseverantes y creativos y mejorando su espíritu investigador, proporcionándoles un contexto en el que los conceptos pueden ser aprendidos y las capacidades desarrolladas.

Por todo esto, la resolución de problemas está siendo muy estudiada e investigada por los educadores.

Una de las capacidades más importantes en la resolución de problemas es la de hacer preguntas que permitan surgir de un conflicto y sortear la dificultad, algunas preguntas pueden servir para identificar el problema, otras para buscar alternativas. Es posible preguntarse: ¿qué es lo que hace problemática esta situación? ¿Qué me falta por saber? ¿Cuántos problemas están involucrados? ¿Cuál voy a intentar resolver? ¿Qué es lo que no funciona? ¿Cuáles son las alternativas que se pueden tomar? ¿Qué conozco sobre este tema? ¿Por dónde puedo empezar para que sea más fácil?

### **2.2.3. Estrategias para resolución de problemas.**

Las estrategias para resolver problemas se definen como ciencias o arte; y cada docente en general, hace con sus alumnos a fin de lograr sus objetivos:

Con todo entusiasmarse o motivarse por la actividad que se realiza, que entiendan y sepan aplicar los conocimientos que se transmiten.

Que logren detenerse a pensar o analizar los distintos elementos que se maneja en la actividad a fin de buscar relaciones entre ellos.

Que asuman una determinada actitud en su quehacer diario, en sus obligaciones docentes (estudio individual y colectivo, atención a clase.)

Que sepan seleccionar los contenidos matemáticos que conduzcan a la solución de la actividad deseada.

Que sepan analizar la lógica de la respuesta obtenida.

Que pueda extraer experiencias positivas para enfrentar nuevas situaciones similares a la realizada; sepan realizar generalizaciones de los conocimientos obtenidos,

Polya (1965 ) destaca cuatro fases: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.

Sin embargo si analizamos estas fases nos damos cuenta que todos son estrategias muy similares, por ejemplo, la última fase en cada una de ellas, sino lo que se hace en cada fase.

Todos los docentes tiene una estrategias determinada para el desarrollo de su docencia, esta pueda ser buena, regular o mala, aunque todos pensamos que es buena, pues de lo contrario no la aplicaríamos.

El criterio de que nuestra estrategia es buena puede cambiar cuando la comparamos con otras empleadas por otras colegas y a las que llegamos por distintas vías, las cuales pueden ser.

Por observarla en un evento científico de carácter metodológico al que hemos asistido.

Por la lectura de libros o revistas que publican contenidos o artículos relacionados con la didáctica de nuestra ciencia.

Por los cursos a los cuales asistimos en busca de recursos didácticos que mejoren nuestro trabajo diario.

Por la orientación de alguna persona que puede ser un funcionario responsable con esta tarea o simplemente un amigo con quien hemos podido intercambiar conocimientos personalmente, o por la utilización de medios que el desarrollo de las comunicaciones ponen en nuestras manos.

Este hecho nos conduce a la idea de que hay que formar una estrategia general, comprobando que sea buena y que luego se siga desde el preescolar hasta la universidad. Es evidente que esta tarea no puede ser obra de un solo hombre, aquí deben concurrir muchos esfuerzos y alguien que sea capaz de llevar las ideas a todas partes del país a fin de uniformizar el trabajo. ¿Qué aspectos debe contemplar estas estrategias? , como línea general debe partir de la enseñanza a través de problemas, pues en definitiva, la escuela prepara el hombre para que en su futura vida laboral sepa resolver los problemas que se presente, ya sea en el ejercicio de su profesión o en cualquier actividad que la vida nos imponga.

De acuerdo con Poggioli (1999:26), las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos y obtener una solución. En este sentido, señala que estas estrategias comprenden los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente. Los métodos heurísticos son "*estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizados por los solucionadores de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución*" (ob. cit., p. 27). Cabe señalar que este método no constituye en sí mismo una estrategia sino un conjunto de procedimientos generales que permiten seleccionar las estrategias más adecuadas que acerquen a la solución. Los métodos heurísticos pueden ser: a) generales, como los planteados por Polya, Hayes, entre otros, (citado por Poggioli, 1999) y que se pueden aplicar a una gran área de dominio; b) específicos, que se refieren a un área de conocimiento en particular

Es más para ilustrar mejor este aspecto, Polva (1984) señala lo siguiente:

*"El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se le deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi ninguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro le ayuda demasiado, nada se le deja al*

*alumno. El maestro debe ayudarlo, pero no mucho ni demasiado poco, de suerte que le deje asumir una parte razonable del trabajo" (óp. cit., p. 23).*

Por consiguiente las estrategias a usar deben partir de los intereses de los alumnos y principalmente se deben tomar en cuenta las situaciones de la vida cotidiana para que puedan comprender de mejor forma lo que se les quiere enseñar. Hidalgo (2000:47), en cuanto a las estrategias de enseñanza indica que *“son el conjunto de procedimientos y técnicas que de manera flexible y adaptativa plantea el docente dentro del proceso de enseñanza aprendizaje, es el resultado de la sumatoria de intenciones e intereses tanto del alumno como del docente”*. De manera que, el docente debe tener mucha creatividad en la utilización de diversas estrategias de enseñanza para que los alumnos se sientan ávidos de aprender y resolver problemas.

Para Alonso y Martínez (2005, citados en Villalobos, 2008:39), un problema matemático es: Una situación matemática que contempla tres elementos: objetos, características de esos objetos y relaciones entre ellos; agrupados en dos componentes: condiciones y exigencias relativas a esos elementos; y que motiva en el resolutor la necesidad de dar respuesta a las exigencias o interrogantes, para lo cual deberá operar con las condiciones, en el marco de su base de conocimientos y experiencias.

Pojol y Fons (1981:18), afirman que *“ningún profesor enseña bien si sus alumnos no aprenden. De nada sirve que él crea que enseña bien si sus alumnos no alcanzan los objetivos de conocimientos o comportamientos que él esperaba”*. En la clase, el maestro puede utilizar diferentes métodos, los ya existentes, crear otros, unir varios de ellos, pero cada método persigue algo positivo. El método se debe elegir en función al alumno y su aprendizaje, que se adecúe a sus características, necesidades e intereses.

Capacidad de resolución de problemas es de suma importancia por su carácter integrador, ya que implica encontrar un camino que no se conoce de antemano, es decir, una estrategia para encontrar una solución, requiriendo de saberes previos y capacidades. Rico (1988, citado en Contreras, 2005:28) plantea: La resolución de problemas juega un papel trascendental en esta nueva aproximación a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. De hecho, se espera que el estudiante construya su conocimiento matemático al enfrentar, dentro del contexto social del salón de clase, problemas para los que no conoce de

antemano una estrategia de solución apropiada, lo suficientemente complejos para significar un reto y que ponen en juego un conocimiento matemático relevante.

Esta definición es coincidente con lo planteado por Villarroel (2008:2), quien señala que “la resolución de problemas es una actividad compleja que pone en juego un amplio conjunto de habilidades y que incluye elementos de creación debido a que la persona carece de procedimientos pre aprendidos para el efecto. Por esta razón, el desarrollo de la capacidad para resolver problemas es un proceso largo que requiere de una orientación permanente por parte del docente.

#### **2.2.4. Resolución de problemas en el currículo de educación secundaria.**

La resolución de problemas ocupa un lugar preferente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria; por ende, los currículos de todo el mundo intentan delimitar las funciones y los objetivos que esta parte importante de las matemáticas debe cumplir. Sin embargo, por diferentes razones, no siempre se llega a un consenso sobre cómo se debe enfocar el aprendizaje para que la resolución sea lo más provechosa posible. Este trabajo hace una breve revisión que puede contribuir a la reflexión y a realizar una interpretación flexible del currículo.

El Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria presenta: principios orientadores de la educación, en el que se apoya, fundamenta la propuesta; lineamientos teóricos generales, que definen, explican, sustentan el enfoque y los propósitos educativos; organización del currículo, que establece los distintos elementos curriculares a partir de los cuales se teje la malla curricular; orientaciones metodológicas, que garantizan la pertinencia y coherencia de la acción educativa; orientaciones para la evaluación, donde se establecen los lineamientos generales de la evaluación del aprendizaje; y finalmente la organización y distribución del tiempo-plan de estudios, en el que se orienta sobre la gestión del tiempo en las Instituciones Educativas.

La aplicación del Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria, consultado a nivel nacional y enriquecido con propuestas significativas como parte del proceso de validación, otorgará estabilidad al trabajo docente y procurará una educación con calidad y equidad,

organizando el sistema; posibilitando a los alumnos, padres y maestros, hablar un mismo lenguaje pedagógico, entendiéndose para seguir construyendo en el tema educativo.

Resolución de problemas, debe apreciarse como la razón de ser de la matemática pues los estudiantes siempre se encuentran con situaciones problematizadas que requieren solución y muchas veces no se observa una ruta para encontrar respuestas. Esta área busca fortalecer esta capacidad para lo cual es indispensable considerar la importancia de aprender a valorar el proceso de resolución de problemas en la misma medida en que valoran los resultados; así aprenderán en la práctica, a formular problemas a partir del mundo real, organizar datos y elaborar estrategias varias para resolver problemas. Los Contenidos Básicos además de servir como apoyo para el desarrollo de las capacidades, permiten ampliar sus conocimientos. Estos se trabajan de manera articulada considerando las capacidades específicas que se están trabajando. El estudiante debe interactuar directamente con el saber. Se considera además el desarrollo de actitudes que contribuya a la formación de la personalidad de los estudiantes. Así por ejemplo el desarrollo de un trabajo cooperativo se observará la responsabilidad individual y grupal.

La didáctica como actividad general ha tenido un amplio desarrollo en las cuatro últimas décadas de este siglo. Sin embargo, no ha acabado la lucha entre el idealista, que se inclina por potenciar la comprensión mediante una visión amplia de la matemática, y el práctico, que clama por el restablecimiento de las técnicas básicas en interés de la eficiencia y economía en el aprendizaje. Ambas posturas se pueden observar tanto en los grupos de investigadores, innovadores y profesores de matemáticas de los diferentes niveles educativos. Para una visión histórica del desarrollo de la didáctica, remitimos al lector interesado a la publicación de (Kilpatrick, Rico y Sierra, 1992), donde el primer autor muestra una amplia panorámica desde una perspectiva internacional.

## **2.2.5. Resolución de problemas matemáticos**

*“La resolución de problemas recientemente ha tomado auge, los docentes que enseñan matemática han aceptado la idea de que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención especial. Junto con este énfasis en la resolución de problemas, sobrevino la confusión. El término “resolución de problemas” se ha convertido en un slogan que acompañó diferentes concepciones sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemática en general y resolución de problemas en particular.” (Vilanova, 2003:)*

La utilización de los términos “problema” y “resolución de problemas” ha tenido múltiples y a veces contradictorios significados a través de los años, como se describe brevemente a continuación:

### **2.2.5.1 Primer significado: resolver problemas como contexto**

Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando cinco roles principales:

1. Como una justificación para enseñar matemática: al menos algunos problemas relacionados con experiencias de la vida cotidiana son incluidos en la enseñanza para mostrar el valor de la matemática.
2. Para proveer especial motivación a ciertos temas: los problemas son frecuentemente usados para introducir temas, con el convencimiento implícito o explícito de que favorecerán el aprendizaje de un determinado contenido.
3. Como actividad recreativa: muestran que la matemática puede ser “divertida” y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.
4. Como medio para desarrollar nuevas habilidades: se cree que, cuidadosamente secuenciados, los problemas pueden proporcionar a los estudiantes nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones relacionadas con algún tema.

5. Como práctica: la mayoría de las tareas matemáticas en la escuela caen en esta categoría. Se muestra una técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas.

Sin embargo, en cualquiera de estas cinco formas, los problemas son usados como medios para algunas de las metas señaladas arriba. Esto es, la resolución de problemas no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitador del logro de otros objetivos y tiene una interpretación mínima: resolver las tareas que han sido propuestas. (Guzmán, 1991).

### **2.2.5.2. Segundo significado: resolver problemas como habilidad.**

La resolución de problemas es frecuentemente vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el currículo. Esto es, resolver problemas no rutinarios es caracterizado como una habilidad de nivel superior, a ser adquirida luego de haber resuelto problemas rutinarios (habilidad que a su vez, es adquirida a partir del aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas básicas).

Es importante señalar que, aun cuando en esta segunda interpretación del término los problemas son vistos como una habilidad en sí misma, las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen son precisamente las mismas que las señaladas en la interpretación anterior: las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con problemas de práctica relacionados, para que las técnicas puedan ser dominadas.

### **2.2.5.3. Tercer significado: resolver problemas es "hacer matemática"**

Hay un punto de vista particularmente matemático acerca del rol que los problemas juegan en la vida de aquellos que hacen matemática. Consiste en creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones.

El matemático más conocido que sostiene esta idea de la actividad matemática es Polya. Nos hemos familiarizado con su trabajo a través del libro "How to solve it" (1954), en el cual introduce el término "heurística" para describir el arte de la resolución de problemas, concepto que desarrolla luego en "Matemática y razonamiento plausible" (1957) y "Mathematical Discovery" (1981).

La conceptualización de Polya sobre la matemática como una actividad se evidencia en la siguiente cita: se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben:

*“Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.”*

### **2.2.6. Tipos de problemas en la enseñanza de las Matemáticas**

En Matemáticas se ha entendido por problema cualquier tipo de actividad procedimental que se realice dentro o fuera del aula. No obstante, cualquier tarea (sea matemática o no matemática) no constituye un problema. Para que hablemos de la existencia de un problema, la persona que está resolviendo esa tarea tiene que encontrarse con alguna dificultad que le obligue a plantearse cuál es el camino que tiene que seguir hacia la meta.

Orientar el currículo hacia la solución de problemas implica buscar y diseñar situaciones lo suficientemente abiertas como para inducir en los estudiantes una búsqueda y apropiación de estrategias adecuadas para encontrar respuestas a preguntas no sólo escolares, sino también de su realidad cotidiana. Sin procedimientos eficaces – sin destrezas o estrategias - el estudiante no podrá resolver problemas.

Enseñar a resolver problemas no consiste sólo en dotar a los estudiantes de estrategias eficaces sino también de crear en ellos el hábito, la actitud de enfrentarse al aprendizaje como un problema al que hay que encontrar respuesta. No se trata sólo de enseñar a resolver problemas, sino también de enseñar a plantearse, problemas: a convertir la realidad en un problema que merece ser indagado y estudiado.

Esta última característica sería la que diferencie un verdadero problema de situaciones similares como pueden ser los ejercicios. Expresado con otras palabras, un problema se diferenciaría de un ejercicio en que, en este último caso, se dispone y utiliza mecanismos que nos llevan de forma inmediata a la solución. Por tanto, es posible que una misma situación constituya un problema para una persona mientras que para otra ese problema no existe, bien porque carece de interés por la situación, bien porque posee los mecanismos para resolverla sin apenas inversión de recursos cognitivos y puede reducirla a un mero ejercicio.

### **2.2.7. Momentos en la resolución de un problema**

La resolución del problema exige una comprensión de la tarea, la concepción de un plan que nos lleve hacia la meta, la ejecución del mencionado plan y, por último, un análisis que nos lleve a determinar si hemos alcanzado o no la meta.

Esta secuencia el matemático Polya (1945) estableció como necesaria para resolver un problema. Aunque Polya basó su libro en observaciones sobre la forma en que expertos matemáticos (incluido él mismo) solucionaban problemas, tanto la secuencia descrita acerca de cómo se deben resolver, como los consejos sobre la utilización e introducción de los problemas en el aula han servido de base para diseñar problemas en diversos ámbitos del saber.

Expresado con otras palabras, los momentos que se usan para resolver problemas y los métodos heurísticos para buscar esta solución descrito por Polya han sido consideradas como métodos generales de resolución de tareas independientes de su contenido.

De forma similar, gran parte de los modelos sobre cómo "enseñar a pensar y/a resolver problemas" desde este enfoque se han centrado también en tareas de carácter matemático o numérico que según se pretende, se pueden generalizar fácilmente a otras tareas.

Por tanto, según Polya y otros autores, el primer paso en la resolución de problemas consiste en la comprensión de lo mismo. Seguramente resulta evidente la afirmación de que es imposible resolver una tarea sin una comprensión previa de ella, pero comprender un problema no sólo significa entender las palabras, el lenguaje o los

símbolos en los que está planteado sino también asumir la situación como tal problema y adquirir una disposición de búsqueda de esa solución. Generalmente, para plantearse una situación como un problema se debe tomar conciencia de que se está ante una situación nueva, o de que se ha producido un cambio respecto a alguna situación anterior, o bien de que se enfrenta ante una tarea para la cual sólo se tiene una explicación insuficiente.

Expresado con otras palabras, comprender un problema implica darse cuenta de las dificultades e inconvenientes que presenta una tarea y la voluntad de intentar superarlas.

Para que se dé esta comprensión es, por supuesto, necesario que además de los elementos de novedad, el problema contenga aspectos ya conocidos que nos permitan guiar nuestra búsqueda de una correcta solución (Polya, 1942).

### **2.2.8. Modelo de resolución de problema de Mason – Burton – Stacey**

(Mason, 1988) Propone un marco de cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas:

1. Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.
2. Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles.
3. Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.
4. Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella.

En este modelo se pueden diferenciar también cuatro fases: Análisis, exploración, ejecución y comprobación.

Por su parte Schoenfeld retoma algunas ideas de George Polya, considerando a la vez la Teoría Psicológica del procesamiento de la información, se pueden observar cuatro dimensiones que se dan en el proceso de resolución de problemas:

1. Dominio de conocimientos y recursos: se expresa a través de lo que la persona conoce y la forma de aplicación de sus experiencias y conocimientos ante la resolución de un problema.
2. Estrategias Cognoscitivas: Conjunto de estrategias generales que pueden resultar eficaces a la hora de resolver un problema. Dentro de estas se consideran los recursos heurísticos (más adelante se tratará este tema) para abordar los problemas en matemática, tales como: analogía, inducción, generalización entre otro.
3. Estrategias meta cognitivas: Se caracteriza por la toma de conciencia mental de las estrategias necesarias utilizadas al resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo.
4. Sistema de creencias: está conformado por las ideas, concepciones o patrones que se tiene en relación con la Matemática y la naturaleza de esta disciplina. Además de la relación existente entre esta y la resolución de problemas.

#### **2.2.8. Modelo de Guzmán**

El modelo propuesto por Miguel de Guzmán en sus libros para pensar mejor y Aventuras matemáticas, este modelo consta de cuatro fases:

- Familiarización con el problema.
- Búsqueda de estrategias
- Llevar adelante la estrategia
- Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

Al inicio, en la familiarización, se debe actuar sin prisas, pausadamente y con tranquilidad. Hay que tener una idea clara de los elementos que intervienen: datos, relaciones e incógnitas. Una vez que se ha entendido el problema pasamos a buscar estrategias que nos permiten resolverlo. Apuntamos las ideas que nos surgen relacionadas con el problema.

Tras acumular varias estrategias se lleva a cabo la estrategia escogida, con confianza y sin prisas. Si no se acierta con el camino correcto se tiene que volver a la fase anterior y reiniciar el trabajo.

Al llegar a la solución queda la fase más importante, revisión del proceso y extraer consecuencias de él. Debemos reflexionar sobre el camino seguido, si podemos extender estas ideas a otras situaciones (Guzmán, 1991)

### **2.2.10. El proceso de resolución de problemas**

El proceso de resolución de problemas es esencial en el aprendizaje matemático, no como motivación inicial o aplicación final, sino como el medio mismo por el cual se aprende. Para lograr las competencias necesarias para resolver problemas, es necesario que:

- A. en contextos que les den significado. Las situaciones vinculadas con sus juegos, deportes, la vida familiar, cultura, historia, comunidad, son, en este sentido, si Esto es válido en general, pero debe tenerse presente que la realidad vista por un adulto no corresponde a la realidad percibida por los jóvenes. Considerando ello, se debe trabajar también situaciones imaginadas, fantásticas y creadas por ellos mismos. La situación también puede ser construida especialmente por el maestro porque las situaciones naturales no siempre permiten abordar el aprendizaje deseado. En todos los casos, los estudiantes aprenden en situaciones ligadas a un contexto para ser capaces de transferir posteriormente sus conocimientos a otras situaciones no conocidas y finalmente a situaciones descontextualizadas.
- B. Las situaciones varían continuamente.- Tanto en lo que se refiere al contexto, al lenguaje verbal o gráfico utilizado, como en la forma de tratar el concepto. Los problemas deben permitir utilizar el concepto en situaciones diferentes cada vez y en toda su amplitud.
- C. Los problemas deben variar también.- En relación con el tipo de dificultad: con datos completos, incompletos o inútiles, con información numérica o sin ella, con una o varias soluciones. Los problemas abiertos son especialmente importantes porque invitan a preguntar, a formular conjeturas, a buscar analogías, entre otros.
- D. Los problemas se deben formular en un lenguaje sencillo.- Teniendo en cuenta el nivel de lectura logrado por los estudiantes, para

que la comprensión verbal no sea obstáculo y se pueda centrar la atención en lo matemático.

- E. Los problemas deben corresponder a las capacidades reales de los estudiantes. Si son demasiado simples o ya conocidos por ellos, no existe el reto ni la emoción de trabajar algo nuevo; sencillamente ya no son un problema. Si, por el contrario, el nivel es demasiado alto, y está más allá de sus posibilidades, el esfuerzo resulta vano. Los estudiantes pierden interés, fracasan repetidas veces y, en todo caso, sólo memorizan el procedimiento para hallar la solución.
- F. Generalmente se maneja como problema una situación conocida.- Donde se le pide al estudiante que repita un procedimiento e incluso una respuesta, este tipo de problema no ayuda al desarrollo de habilidades matemáticas.
- G. Los estudiantes trabajan grupalmente. Para que intercambien ideas, contrasten sus caminos y soluciones hallados y lleguen a soluciones grupales. Pero también debe haber un trabajo individual que dé ocasión para que el estudiante reflexione sobre su propio aprendizaje.
- H. El docente está permanentemente alerta. Para conocer los procedimientos seguidos por los estudiantes, a fin de disminuir tensiones, estimularlos y formar actitudes de trabajo matemático como la perseverancia y la tenacidad en la búsqueda de soluciones. Este trabajo de observación y acompañamiento permite al docente, conocer y comprender el origen de los errores, para que, a partir de ellos, se pueda restablecer el equilibrio y ayudarlos en la construcción del conocimiento.

Por ello, el docente se convierte en el mediador entre los conocimientos que poseen el estudiante y los que se pretende que ellos construyan. La resolución de problemas es una capacidad compleja. El trabajo en el aula se centrará en el desarrollo de las habilidades, estrategias y actitudes que componen esta competencia transversal para todas las áreas del currículo y requiere:

- Comprender el problema, lo que significa saber reconocer que existe un problema, apropiarse de la situación, representarla, saber extraer e

identificar los datos, descubrir la pertinencia de éstos y explicar lo que se busca.

- Seleccionar el procedimiento adecuado a la naturaleza y condiciones del problema. Esto implica elaborar o seleccionar estrategias o técnicas y formular conjeturas sobre las posibles soluciones.
- Hallar la solución y evaluar la pertinencia de las respuestas.
- Comunicar sus hallazgos en forma oral, escrita, gráfica o simbólica.
- Tener confianza en la propia capacidad del estudiante para resolver problemas.
- Ser perseverante en la búsqueda de soluciones.

La resolución de problemas tiene la finalidad de aprender matemáticas a partir de la investigación y también de aplicar y conectar las matemáticas que se conocen. En la etapa primaria se ha de trabajar este procedimiento en dos sentidos, lo que debería llevar a ver a la matemática como un todo (no fragmentado en bloques o partes) y valorar su utilidad dentro y fuera de la escuela.

Ante las actitudes tan negativas de los estudiantes y de los sentimientos de fracaso de los docentes, hay que hacer una reflexión sobre este aspecto esencial del aprendizaje de la matemática y aplicar este procedimiento de manera que produzca el efecto deseado.

### **2.2.11. Clases de problemas matemáticos**

Problemas tipo (Parra, 1994) *“Los problemas tipo son aquellos en cuyo enunciado esta implícitamente expresada la operación que tiene que realizar el estudiante para obtener la respuesta del problema”*.

- **Problemas heurísticos**

Un problema es heurístico cuando en cuyo enunciado no se sugiere implícitamente el procedimiento a aplicar, incidiéndose más en la búsqueda de una estrategia para encontrar la solución, permite resolver problemas de planteo de ecuaciones, de manera práctica y sencilla.

- **Problemas derivados de proyectos.**

Un problema derivado de proyecto es aquél que se genera en la formulación de un proyecto a ejecutarse en una situación real.



## **CAPÍTULO III**

### **METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN**

---

#### **3.1. Tipo de investigación.**

La presente tesis es de carácter **cualitativo**, al tener como finalidad básica la comprensión de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas con números enteros. En cuanto al alcance temporal de la investigación, ésta se puede catalogar como estudio evolutivo, ya que se analiza una serie de investigaciones a lo largo del tiempo. En cuanto a la profundidad, ésta es de carácter **exploratorio** y **descriptivo**, ya que su propósito es la de familiarizarse con el preparar el terreno para nuevos estudios, midiendo conceptos y definiendo variables. (Hernández, Fernández y Batista. 2006).

La línea de acción del presente trabajo de investigación es: Conocimiento especializado del profesor de matemática, esta línea está compuesto de los procesos indagatorios dentro de la educación matemática y estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y la utilización de los conceptos matemáticos, tanto por el medio escolar como social. Se utiliza la didáctica de Miguel de Guzmán para conocer los procesos que se llevan a cabo en la obtención del conocimiento matemático.

#### **3.2. Diseño de Investigación.**

Como se puede apreciar el diseño metodológico empleado en la presente tesis es de carácter circular. Parte de conceptos teóricos aportados por diversos autores y del trabajo reflexivo del investigador. A partir de este cuerpo teórico se formulan proposiciones acerca de las variables de

estudio, y se realizan deducciones que llevan a la formulación de la propuesta didáctica el cual consideramos un gran aporte para futuras investigaciones. Nuevamente a través de la deducción se formulan vínculos entre los conceptos teóricos, las variables utilizadas y los indicadores que se utilizarán para representar estas variables. Esto permite viabilizar nuestro trabajo.

Como recursos y materiales que utilizaremos en nuestra investigación tenemos: los textos didácticos, tesis, revistas, pagina web, nuestra experiencia profesional, blog de matemática, textos sobre estrategias heurísticas en resolución de problemas en números Enteros, textos de primero de secundaria y textos de rutas de aprendizaje seleccionados por diferentes métodos, a esto incluimos los textos de Miguel de Guzmán, por medio del cual pretendemos analizar las potencialidades y dificultades que genera la instrucción y el uso, por parte de los alumnos, de un modelo de competencias para resolver problemas, usando estrategias heurísticas .Al mismo tiempo, analizamos las , heurísticas en resolución de problemas y meta cognitivas que los alumnos exteriorizan durante la resolución de los problemas.

Para Martínez M. (1997) la investigación interpretativa se inscribe en el contexto de una orientación pos positivista donde el conocimiento es el fruto o resultado de una interacción, de una dialéctica o diálogo entre el investigador y el objeto o sujeto investigado.

### **DISEÑO DE INVESTIGACION (INVESTIGACION CUALITATIVA)**

<b>OBJETIVOS ESPECIFICO</b>	<b>ACTIVIDADES</b>	<b>RECURSOS Y MATERIALES</b>	<b>FUENTES DE VERIFICACION</b>	<b>CRONOGRAMA</b>
Conocer sobre las estrategias heurísticas y la resolución de problemas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Realiza una revisión bibliográfica de las fuentes.</li> <li>➤ Realizan una revisión de diversas tesis sobre estrategias heurística en los números enteros relacionados con la resolución de problemas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Textos</li> <li>➤ Tesis</li> <li>➤ revistas</li> <li>➤ Página web</li> <li>➤ Experiencias profesionales.</li> <li>➤ Blog de matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Planteamiento del problema de investigación.</li> <li>➤ Marco teórico</li> <li>➤ Metodología de la investigación.</li> </ul>	Octubre al Noviembre de 2014

Seleccionar tipos de problemas que utilizan número enteros para su solución.	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Realizan una revisión bibliográfica sobre resolución de problemas en la enseñanza de números Enteros.</li> <li>➤ Realizan una revisión bibliográfica sobre tipos de problemas en números Enteros</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Tesis.</li> <li>➤ Textos sobre estrategias en resolución de problemas en Enteros.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Anexo (1)</li> <li>➤ Manual de problemas</li> </ul>	Octubre a diciembre del 2014
Diseñar y seleccionar estrategias heurísticas para resolver problemas con números enteros	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Elaborar en cuatro las estrategias heurísticas.</li> <li>➤ Realizan una revisión bibliográfica seleccionan de estrategias heurísticas.</li> <li>➤ Diseñan problemas de acuerdo a las estrategias heurísticas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Textos de primero de secundaria.</li> <li>➤ Textos de rutas de aprendizaje, en estrategias heurísticas.</li> <li>➤ Tesis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Anexo (2)</li> <li>➤ Cuadro de estrategias heurísticas</li> </ul>	Marzo a agosto de 2015
Diseñar seleccionar estrategias heurísticas para resolver problemas con números enteros.	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Resuelve los problemas seleccionadas por diferentes métodos.</li> <li>➤ Aplica las estrategias heurísticas</li> <li>➤ Aplica los procedimientos de MIGUEL DE GUZMAN</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Experiencia profesional.</li> <li>➤ Internet.</li> <li>➤ Esquema de propuesta.</li> <li>➤ Esquema de actividades.</li> </ul>	Manual de problemas y solución de números enteros	Marzo a agosto de 2015

Cuadro 1: Diseño de investigación

### 3.3. Categorías y subcategorías de investigación.

Se definen de manera operacional cada una de las variables y sub variables.

**Variables: Estrategias heurísticas tiene como sub categorías o dimensiones que son:**

#### a.- Utilizar el ensayo error,

Tantear es una estrategia muy útil cuando se realiza de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se realizan. En realidad,

algunos métodos específicos de solución como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

#### **b.- Buscar semejanza con otros problemas más simples**

Algunas veces, utilizar un método que nos dio resultado con un problema más simple que el propuesto nos conduce a la solución del problema original. El proceso heurístico se compone de dos elementos que a su vez están divididos en diferentes categorías según la forma de abordar el problema.

**Variable: Resolución de problemas tiene como sub categorías o dimensiones.**

#### **a.- Familiarización con el problema**

Interpreto y comprendo el problema: Consiste en comprender el problema, familiarizándose con él lo más posible. Supone la identificación, y la interpretación de los datos disponibles inicialmente, en pos de una idea útil. Supone la determinación de esta idea, reúne información acerca del problema y se pregunta: ¿Qué quiere (o qué es lo que se desconoce)? ¿Qué tiene (o cuales son los datos y condiciones)?

Indicadores:

- Identifica los datos y las variables.
- Discrimina secuencias, relaciones o repeticiones en los datos

#### **b.- Búsqueda de estrategia**

Elaboro un plan de solución: En este proceso el sujeto recurre a su experiencia pasada para encontrar una estrategia de solución. Supone la discriminación de relaciones y repeticiones, y compara modelos matemáticos. Se pregunta: ¿Conozco un problema relacionado? ¿Puedo formular el objetivo de una nueva forma utilizando mi experiencia pasada o puedo reordenar los datos de una nueva forma?

Indicadores:

- Organiza modelos matemáticos o estrategias adecuadas para la resolución.
- Elabora un esquema, una figura o un organizador gráfico, pasando de un modo de representación a otro.

**c.- Llevar adelante la estrategia**

Aplico una estrategia de solución: Se trata de la ejecución de un plan, aquel al que la "idea útil" dio inicio y que, en principio, permite la obtención de la solución al problema. Supone que ejecuta y comprueba cada uno de los pasos dados en la resolución, analiza la estrategia diseñada al llegar a la solución y se pregunta: ¿Puedes ver claramente que cada paso es correcto? ¿Qué consigo con esto?

Indicadores:

- Ejecuto y Compruebo cada uno de los pasos.
- Analiza la estrategia diseñada al llegar a la solución

**d.- Revisar el proceso y sacar conclusiones de él**

En esta etapa se evalúa la solución generada contrastándola con el criterio de solución empleado, estableciendo el correcto enlace de todos los operadores, desde el inicio hasta el final. El sujeto intenta verificar el resultado viendo como todo encaja, e infiere otro método de resolución y se pregunta: ¿Puedo utilizar este resultado o este método para resolver otros problemas?

Indicadores:

- Verifica y Generaliza el resultado obtenido, generalizando para otras situaciones.
- Infiere una nueva forma de resolver problemas.

## IDENTIFICACIÓN DE LAS VARIABLES O CATEGORÍAS DE LA INVESTIGACIÓN

VARIABLE DE ESTUDIO	DIMENSIONES /CATEGORIAS	INDICADORES
ESTRATEGIAS HEURISTICAS	UTILIZAR ENSAYO - ERROR	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolver problemas.</li> <li>• Probamos si esta solución satisface las condiciones del problema.</li> <li>• Modificamos la solución escogida en función del resultado obtenido y repetimos el proceso hasta obtener la solución correcta.</li> </ul>
	BUSCANDO SEMEJANZA CON OTROS PROBLEMAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estructure todo el problema en grupos de problemas más sencillos.</li> <li>• Aplicación un método de enseñanza – aprendizaje en el diseño de estrategias para la semejanza con otros problemas matemáticos, estimula el aprendizaje de los estudiantes en los contenidos que imparte.</li> </ul>
RESOLUCION DE PROBLEMAS	FAMILIARIZACION CON EL PROBLEMA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tener una idea clara de los elementos que intervienen en el problema.</li> <li>• Dedique tiempo a pensar, plantear y reconsiderar la estrategia antes de resolver el problema</li> <li>• Al llegar la solución es importante revisar del proceso y consecuencias del problema.</li> </ul>
	BUSQUEDA DE ESTRATEGIAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Buscar estrategias que nos permite resolver problemas.</li> <li>• Hacer un esquema, para resolver problemas.</li> <li>• Escoger un lenguaje apropiado, para resolver problemas.</li> <li>• Aplicar métodos de inducción.</li> </ul>
	LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te haya ocurrido en la fase anterior.</li> <li>• Al llegar la solución es importante revisar del proceso y secuencia del problema.</li> <li>• Encuentras un camino más simple</li> <li>• Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.</li> </ul>
	REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONCLUSIONES CON EL	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Corregir los pasos</li> </ul>

Cuadro 2: Variable de la investigación

### **3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de información**

Fundamentalmente hemos utilizado la observación indirecta y a continuación se detallará la forma en la cual se realizaron las observaciones.

Para realizar las observaciones o recogida de la información de las variables se utilizó la técnica de **revisión documental**. Considerando el carácter exploratorio y descriptivo de la investigación, además de la gran cantidad de información disponible en Internet acerca de las categorías y subcategorías estudiadas, se estimó que ésta sería la mejor técnica para acceder a la información necesaria para contrastar las variables y cumplir los objetivos de la tesis.

### **3.5. Procedimiento de organización y análisis de resultados.**

Previamente a elegir esta técnica se realizó una revisión preliminar en Internet para confirmar la existencia de las fuentes necesarias, creando un listado de documentos, páginas Web, bases de datos, publicaciones oficiales, que contuvieran información referente a las heurísticas y la resolución de problemas con números enteros

Una vez en la etapa de recogida de la información, se realizan fichas de resumen, en las cuales se registran los principales conceptos, ideas, referencias y los datos necesarios para poder aportar con las variables estudiadas. En estas no tan solo se registró aquella información que se consideró indispensable para contrastar las variables, sino que se registró toda aquella información general o específica que pudiera ayudar en la comprensión general de lo que estamos estudiando.

Además hemos considerado aspectos claves en la selección de la información: Que sean muy importantes aun cuando sean relativamente antiguos, innovadores, recientes, documentos de fuentes fidedignas y de crédito científico en el mundo de las heurísticas, la resolución de problemas.



## **CAPÍTULO IV**

### **PROPUESTA DIDÁCTICA DE LA INVESTIGACIÓN**

---

#### **4. Guía de estrategias heurísticas en la resolución de problemas con números enteros.**

##### **4.1. Presentación**

La presente guía didáctica de estrategias heurísticas en la resolución de problemas que planteamos se fundamenta en una estructuración de operaciones de la resolución de problemas matemáticos, considerando los elementos cognitivos, las habilidades como elementos esenciales al proceso de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de primer de secundaria.

Por lo tanto esta guía, trata de mostrar un camino lógico coherente y cuya finalidad, principal, es de mejorar la interpretación, la solución y comprobación de problemas matemáticos en los estudiantes de básica regular de Primer grado de educación Secundaria.

Didácticamente estas estrategias de enseñanza se validan como un procedimiento adecuado, pertinente, agradable y eficaz para contribuir al aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, proporcionando herramientas que faciliten la resolución de dichos problemas que en algunas situaciones no son claras para los estudiantes ya que la mayoría de ellos proceden directamente a realizar cálculos con los números que aparecen en el enunciado, utilizando estrategias de procesamiento superficial que suelen conducir a error. Se espera entonces, habituar a los estudiantes a seguir unos pasos secuenciales para

la resolución de los problemas que se les planteen, siguiendo las orientaciones heurísticas necesarias para lograrlo.

## **4.2 Justificación**

Este trabajo propone estrategias heurísticas para mejora en la solución de problemas con números enteros. Para potenciar sus habilidades y conocimientos cognitivos que refleja interés en el aula, que el estudiante sea analítico en los diferentes problemas matemáticos.

Existe la necesidad de cambiar permanentemente algunas estrategias didácticas en la enseñanza de la matemática ya que según el resultado de las pruebas sabemos que no se han alcanzado los desempeños esperados por lo que tratamos de presentar una guía adecuada, pertinente, a los cambios de aproximación a la realidad, al contexto que viven los estudiantes, dándole sentido, e importancia a lo que hacemos cotidianamente.

En este orden de ideas se ha considerado importante utilizar el método heurístico como un proceso analítico y reflexivo que permite mejorar el desarrollo de problemas matemáticos.

La preocupación por la resolución de problemas desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha pasado por varios momentos de interés para el mundo académico, es por ello ahora más que nunca reconocemos su gran importancia.

Sin embargo muchos docentes hemos podido constatar que no todas las estrategias didácticas mediante las cuales hemos intentado enseñar a resolver problemas matemáticos nos han conducido certeramente al objetivo propuesto, al menos no en todos los casos, a pesar del empeño puesto en su enseñanza. Y también es posible que hayamos participado de la sensación de incapacidad para responder a situaciones problemáticas de cierto alumnado que, sintiéndose “fuerte” en matemáticas, descubre grandes limitaciones en su posibilidad de resolver problemas.

En alguna ocasión nos hemos podido topar con la inquietud del alumno que, le interesa aprender, le pregunta a su profesor de

Matemáticas cómo puede aprender a resolver problemas, pues creyendo saber Matemáticas (comprende los contenidos, realiza correctamente los ejercicios), no es capaz de resolver ciertos “problemas”, aquellos precisamente que se presentan como eso, como problema.

Entonces enseñar a resolver problemas está íntimamente ligado a lo que llamamos “enseñar a pensar”, que es, ciertamente, la labor más difícil de la labor docente, aunque, si seguimos a Miguel de Guzmán (2006), verdadero entusiasta en este cometido, tendremos que reconocer que detrás de estos llamados fracasos se esconde la falta de un método adecuado y la ausencia, al lado del aprendiz, de un experto que le guíe, entonces es necesario, enseñar a pensar las matemáticas, ampliar la mente con inquietudes valderas, que harán al estudiante desenvolverse con mayor amplitud de criterio, el saber pensar, nos conlleva a soluciones certeras en la mayoría de los casos, tal como lo afirmaba Schoenfeld (1992, p. 334):

- “formar estudiantes para pensar creativamente”
- “preparar estudiantes para las competencias sobre problema”
- “aprender técnicas estandarizadas en determinados dominios”
- “proveer de un nuevo enfoque a las matemáticas remediales (habilidades básicas)”

En el ámbito de la Psicología, la heurística se encuentra estrictamente relacionada a la creatividad y se dice que se convirtió en una invaluable ayuda para el estudiante a la hora de las tareas matemática que en el caso de no comprender un problema, lo mejor sería dibujar un esquema sobre él, si el problema en cuestión es abstracto la misma es fundamental a la hora de orientar en la toma de decisiones y para explicar cómo se llega a un juicio o a la solución de un problema determinado.

Es por eso que el concepto de los números enteros es importante en los estudiantes de secundaria pues les permite a los estudiantes desarrollar su pensamiento lógico matemático para la vida diaria. La formación en Matemáticas obedece a la necesidad de mejorar el potencial de los estudiantes para que obtengan un excelente desarrollo formal, crítico, conceptual y puedan aplicarlo a diferentes situaciones.

### **4.3 Objetivos:**

#### **4.3.1. Objetivos generales**

Identificar las estrategias heurísticas que se aplican en la resolución de problemas de números enteros basada en los conocimientos científicos de diferentes especialistas para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos.

#### **4.3.2. Objetivos específicos:**

Aportar situaciones que faciliten la familiarización y comprensión de un problema planteado, de modo que conduzca a la identificación de los elementos que lo componen, es decir encontrar la incógnita, los datos y la condición.

- Brindar orientaciones que logren la idea de un plan de solución y su ejecución de modo que facilite la solución del problema planteado.

### **4.4 Fundamentos teóricos**

#### **4.4.1. Aproximación conceptual**

Deberíamos, previamente, realizar una aproximación conceptual de la cuestión, respondiendo a esta cadencia de cuestiones:

- a) ¿Qué es un problema o, sobre todo, qué no lo es?
- b) ¿Qué actividades cognitivas se desarrollan en la resolución de problemas?
- c) ¿Qué tipos de conocimientos están involucrados?
- d) ¿Puede realmente “enseñarse” a resolver problemas o lo que se trata es de estimular a que en el alumnado aflore la “chispa” de su ingenio?

Tras ellas seguiría la cuestión central: Si se puede enseñar, ¿cuáles serían las estrategias didácticas convenientes?

#### **4.4.2. Problema**

“Problema” podría ser definido genéricamente como cualquier situación prevista o espontánea que produce, por un lado, un cierto grado de incertidumbre y, por otro, una conducta tendente a la búsqueda de una solución. En la vida ordinaria se resuelve un problema para obtener un resultado; por el contrario, en el contexto escolar el resultado importa poco (a menudo es conocido) y sí lo es la propia resolución (Dumas-Carre, 1980; citado por Gil, Mtnz-Torregrosa, Ramírez, Dumas-Carré, Gofard, y Pessoa, 1992).

Para Parra (1990)

*"un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera inmediata"*

A la hora de diferenciar entre ejercicios y problemas la cuestión de la resolución de práctica de conocimientos y de técnicas que previamente se han estudiado. El problema sigue dos perspectivas diferenciadas. La primera vendría definida como justificación segunda sería la resolución de problemas a partir de un contexto o enunciado bien planteado.

Para algunos autores, resolver un problema significa buscar la respuesta a la cuestión planificada, sin necesidad de hacer experimentos reales, que a veces, incluso, son imposibles de realizar. Por tanto, se trata de buscar un determinado número de problemas, adecuados a su nivel de conocimientos y lenguaje que les facilite esta aplicación práctica de aquello que han aprendido.

#### **4.4.3. Actividad cognitiva**

En el contexto escolar, ese disponer de los elementos para comprender la situación que el problema describe supone que el sujeto que habrá de resolver el problema en cuestión ha tenido acceso o ha

construido aquel conocimiento declarativo ("construir significado: agregar lo que sabes a lo que estás aprendiendo").

Según, (Marzano, 1997: 13) y el respectivo conocimiento procedimental (conocimiento ligado al ejercicio práctico) que son citados como antecedente mínimo necesario para poder comprender información, establecer relaciones y utilizar procedimientos con el propósito de llegar a resolver el problema que se le ha planteado.

Según, Monereo (1998) diferencia entre procedimientos algorítmicos y procedimientos heurísticos. Llamamos a un procedimiento algorítmico cuando la sucesión de acciones que hay que realizar se halla completamente prefijada y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema o de la tarea. Cuando estas acciones comportan un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza la consecución de un resultado óptimo hablamos de procedimientos heurísticos.

#### **4.4.4.Lenguaje:**

Claridad en el enunciado, de modo que los alumnos perciban claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.)

El problema no sea demasiado grande y se descubre que la solución es alcanzable.

Los alumnos descubrir que es interesante o útil resolver el problema.

Los alumnos tienen conceptos previos suficientes para que descubre claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.).

Ayude establecer conexiones matemáticas, ya sea entre temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.

Ayude crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas diferenciaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente.

#### **4.4.5. Proposiciones.**

Los alumnos conocen proposiciones y propiedades suficientes para que la dificultad no sea demasiado grande y se perciba que la solución es alcanzable.

Ayude a establecer conexiones matemáticas, ya sea entre temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.

Ayude crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas diferenciaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente.

#### **4.4.6. Procedimientos:**

Hallar lo que se pide estimule procedimientos que:

Ayude conocer un camino para obtener la solución o conjeturar una solución.

Ayude hacer algunas verificaciones – eventualmente con ayuda de calculadoras o computadoras – para mantener o rechazar las conjeturas.

#### **4.4.7 Argumentos:**

Que la obtención de resultados parciales y el resultado final ayude hacer algunas verificaciones – eventualmente con ayuda de calculadoras o computadoras – para mantener o rechazar las conjeturas.

Finalmente podemos mencionar en cuanto a los recursos cognitivos podemos afirmar que es un conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.

Un constante ajuste de la actividad cognitiva del sujeto a los cambios y variaciones que presentan las diversas situaciones problemáticas que se le plantean.

La decisión de que conocimientos declarativos y procedimentales hay que recuperar y como hay que utilizar para dar respuesta a una situación específica.

El control del proceso que implica planificar las acciones a realizar, llevarlas a cabo y evaluar la pertinencia de las mismas en términos de si se logró alcanzar mediante ellas el objetivo deseado.

#### **4.4.8.¿Es posible "enseñar" la resolución de problemas matemáticos?**

De acuerdo con los planteamientos anteriormente expuestos podemos afirmar que esta pregunta puede hacerse parcialmente equivalente a la de ¿es posible enseñar estrategias de aprendizaje?

No sólo debemos responder positivamente, sino constatar que existen cada vez más proyectos y programas educativos centrados en la enseñanza de las estrategias de aprendizaje, entre ellos los de Nickerson, Perkins y Smith (1985); Nisbet y Shucksmith (1986); Presley et al. (1992).

Asimismo debemos indicar que existen una serie de fases en la resolución de problemas que necesariamente tenemos que tener en cuenta el cuadro adjunto 01 tomado de Cañadas et al. (1999), y complementado por Pino y Blanco (2008), resume las propuestas de algunos de los autores citados en nuestro marco teórico.

POLYA (1982)	MASON, BURTON Y STACEY (1988)	BRANDSFORD Y STEIN	DE GUZMÁN (1991)
<p><b>Comprender el problema</b> Estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partida.</p> <p><b>Idear un plan</b> de actuación que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta.</p> <p><b>Llevar a cabo el plan</b> ideado previamente.</p> <p><b>Mirar atrás para comprobar</b> el resultado y revisar el procedimiento.</p>	<p><b>Abordaje:</b> Comprender el problema Concebir un plan</p> <p><b>Ataque:</b> Llevar a cabo el plan</p> <p><b>Revisión:</b> Reflexión sobre el proceso seguido.</p> <p><b>Revisión del plan</b></p>	<p><b>Identificación del problema</b></p> <p><b>Definición y representación del problema</b></p> <p><b>Exploración</b> de posibles estrategias</p> <p><b>Actuación</b> fundada en una estrategia</p> <p><b>Logros.</b> Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.</p>	<p><b>Familiarización</b> con el problema</p> <p><b>Búsqueda</b> de estrategias</p> <p><b>Llevar adelante</b> la estrategia</p> <p><b>Revisar</b> el proceso y sacar consecuencias,</p>

Cuadro 3: Fases en la resolución de Problemas

#### 4.5 Organización de aprendizaje:

Se trabajan dos competencias matemáticas relacionadas con:

Resolución de situaciones problemáticas en número y operaciones con Resolución de situaciones problemáticas en cambio y relaciones.

##### 4.5.1. Competencia, capacidades e indicadores en número y operaciones

En número y operaciones se desarrolla la siguiente competencia.

##### Capacidades generales.

- Matematiza situaciones que involucran cantidades y magnitudes en diversos contextos.
- Representa situaciones que involucran cantidades y magnitudes en diversos contextos.

- Comunica situaciones que involucran cantidades y magnitudes en diversos contextos.
- Elabora estrategias haciendo uso de los números y sus operaciones para resolver problemas,
- Utiliza expresiones simbólicas, técnicas y formales de los números y las operaciones en la resolución de problemas.
- Argumenta el uso de los números y sus operaciones para resolver problema.

### **INDICADORES:**

- Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas.
- Justifica mediante procedimientos gráficos.
- Justifica procesos de resolución de problemas aditivos, multiplicativos, de potenciación y radicación en enteros.
- Experimenta y describe situaciones (ganancia-pérdida, ingreso-egreso, orden cronológico, altitud y temperaturas) que no se pueden explicar con los números enteros.
- Examina situaciones de cambio, agrupación, comparación escalar.
- Asigna a cantidades el signo positivo o negativo en situaciones contextualizadas.
- Ordena datos en esquemas de organización que expresan cantidades y operaciones aditivas y multiplicativas con números enteros, incluyendo la potenciación.
- Generaliza condiciones de los valores numéricos en torno al aumentar y disminuir, empleando la recta numérica.

### **Contenidos.**

#### **Números Enteros:**

Adición y sustracción de números Enteros  
 Problemas de aplicación de números Enteros  
 Resolución Gráfica métodos algebraicos,  
 Ecuaciones con suma y resta de enteros.  
 Problemas que se resuelven mediante la adición y sustracción de números Enteros.

### **Propuestas de problemas heurísticas en números enteros.**

Proponemos los 40 problemas con el uso de estrategias heurísticas con números enteros para primer grado de secundaria planteadas de acuerdo a la experiencia de la vida cotidiana en aula, el alumno descubrirá un camino seguro, y sobre todo de satisfacciones permanentes, encontrando sentido a lo que estudia y lo observa en su entorno.

#### **Problema 1:**

Hallar cinco números enteros consecutivos de los que la suma sea 60.



Figura 1: Números enteros.

Proceso de solución:

Lo más fácil es imaginarse 5 números consecutivos y sumarlos. Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5 son consecutivos y se suma observa que este valor está alejado de 60. Entonces se proponen otros 5 números consecutivos:

Podemos probar por ensayo y error de la siguiente manera: como se trata de 5 números, si cada uno fuera el 10 entonces su suma sería 50 aunque no serían consecutivos, sin embargo es una aproximación al 60. De esta manera, podemos partir del 10 y consideramos sus 4 consecutivos: 10, 11, 12, 13 y 14.

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** Este problema se puede resolver por ensayo – error.

Verificamos:

sean  $(x), (x+1), (x+2), (x+3), (x+4)$

Los cinco números consecutivos respectivamente cuya suma es igual a 60

$$\text{Es decir: } (x) + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 60$$

Resolvamos esta ecuación como sigue.

$$\text{Reduciendo paréntesis } x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 60$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$5x + 10 = 60$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad  $-10$  (Propiedad aditiva elemento neutro):

$$5x + 10 - 10 = 60 - 10$$

$$5x + 0 = 50$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5}$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por el inverso multiplicativo de 5 (Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$\left(\frac{1}{5}\right)5x = 50\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{50}{5}$$

$$x = 10$$

Por tanto, los números buscados son:

$$-1830 + 1830 = 1725 - 115a - 1380 = 345 - 115a$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 10 \\
 x_2 &= 10 + 1 = 11 \\
 x_3 &= 10 + 2 = 12 \\
 x_4 &= 10 + 3 = 13 \\
 x_5 &= 10 + 4 = 14
 \end{aligned}$$

Comprobando, se tiene que:  $10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$ .

**Problema 2:**

Entre 15 amigos han de pagar una deuda de \$1380. Como algunos no tienen dinero, cada uno de los restantes han pagado \$23 más de lo que les correspondía. ¿Cuántos son los amigos que no tienen dinero?

Proceso de solución:

El dinero que tienen que pagar los 15 amigos es \$1380, o sea, cada uno tiene que pagar:

$$\frac{1380}{15} = 92$$

Pero como hay algunos que no tienen dinero, los que si lo tienen pagarán \$23 más para cubrir el total de la deuda. Si todos pagaran \$23 más entonces cada uno pagaría.

$$92 + 23 = 115$$

y dividiendo 1380 entre 115 tendríamos:

$$\frac{1380}{115} = 12$$

y esto significa que con 12 personas se puede pagar el total de la deuda aportando cada uno de ellos \$115. Por lo tanto, los amigos que no tienen dinero son  $15 - 12 = 3$ .

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** Este problema se puede resolver, con **Plantear Casos particulares**.

Verificamos:

Sea al número de amigos que no cuentan con dinero. Luego, (15-a)

Representa el número de amigos que si tienen dinero.

Como se tiene que pagar \$1380 entonces la cantidad a aportar por los que sí tienen dinero se expresa por

$$\frac{1380}{15-a}$$

Pero esta cantidad es igual a lo que tenían que pagar los 15 amigos

$$\frac{1830}{15} + 23 \text{ esto es}$$

$$\frac{1830}{15-a} = \frac{1830}{15} + 23$$

$$\frac{1380}{15-a} = 92 + 23$$

$$\frac{1380}{15-a} = 115$$

Multiplicando en ambos miembros de la igualdad por  $15 - a$   
(Propiedad multiplicativa de la igualdad):

$$(15-a)\left(\frac{1380}{15-a}\right) = 115(15-a)$$

$$1380 = 1725 - 115a$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad  $-1380$  (Propiedad aditiva de la igualdad):

$$-1380 + 1280 = 1725 - 115a - 1380 = 345 - 115a$$

Sumando en ambos miembros de la igualdad  $115a$  (Propiedad aditiva de la igualdad)

$$115a + 0 = 345 - 115a + 115a$$

$$115 + 0 = 345 + 0$$

Simplificando (Suma de términos semejantes):

$$115a = 345$$

$$\left(\frac{1}{115}\right)(115a) = 345\left(\frac{1}{115}\right)$$

$$\frac{115}{115}a = \frac{345}{115}$$

$$a = 3$$

$$1 \times a = 3$$

$$a = 3$$

Respuesta; Por lo tanto el dinero es =3

### **Problema 3:**

Una piscina se ha estado desocupando durante 3 días hasta que solamente han quedado 10 galones de agua. En cada día se extraía la mitad más 4 galones de lo que había el día anterior. ¿Cuál es el volumen total de la piscina?



Figura 2: Sobre el volumen de la piscina

Proceso de solución:

	<b>Galones extraídos</b>	<b>Galones que quedan</b>
<b>1° día</b>	$\left\{ \begin{array}{l} \div 2 \rightarrow \div 2 \rightarrow 68 \times 2 = 136 \text{ (volumen total de la piscina)} \\ +4 \rightarrow -4 \rightarrow 64 + 4 = 68 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{cuando es } -2 \text{ viene a ser } +2 \\ \text{cuando } \div 2 \text{ viene a ser } \times 2 \end{array} \right.$
<b>2° día</b>	$\left\{ \begin{array}{l} \div 2 \rightarrow \div 2 \rightarrow 32 \times 2 = 64 \\ +4 \rightarrow -4 \rightarrow 28 + 4 = 32 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{cuando } \div 2 \text{ viene a ser } \times 2 \\ \text{cuando } -2 \text{ viene a ser } +2 \end{array} \right.$

$$3^{\circ} \text{ día } \begin{cases} \div 2 \rightarrow \div 2 \rightarrow 14 \times 2 = 28 & \text{cuando } \div 2 \text{ viene ser } \times 2 \\ +4 \rightarrow -4 \rightarrow 10 + 4 = 14 & \text{cuando es } -4 \text{ viene ser } +4 \end{cases}$$

Respuesta es 136 volúmenes

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** El problema se puede desarrollar, empezar por el final.

**Problema 4:**

Un cierto número lo multiplicamos por 9, al resultado lo añadimos 12 y a dicha suma la dividimos por 5 obteniendo finalmente 6 ¿cuál es el número?

Proceso de Solución:

**Operación directa    operación inversa.**

número inicial       $\rightarrow$  número inicial = 2

multiplicado por 9  $\rightarrow$  dividido entre 9

$$\frac{18}{9} = 2$$

añadimos 12  $\rightarrow$  restamos 12

$$30 - 12 = 18$$

dividimos entre 5  $\rightarrow$  multiplicamos por 5

$$6 \times 5 = 30$$

obtenemos 6 = 6

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** Este problema se puede resolver, empezar por el final.

**Problema 5:**

Si en una academia por aula se ubican 25 alumnos, se quedan sin aula 20 alumnos; y si se ubican 30 alumnos por aula, faltan 20 alumnos para completar la última aula: ¿Cuánto aulas y cuántos alumnos hay?

Proceso de Solución:

Por el método del rectángulo:

Aplicamos el método del rectángulo, obtenemos:

$$\left. \begin{array}{r} - \left\{ \begin{array}{l} 25 \text{ alumnos} \\ 30 \text{ alumnos} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{sobra: } 20 \text{ alumnos} \\ \text{falta: } 20 \text{ alumnos} \end{array} \right\} + \\ \quad \quad \quad \boxed{\text{n}^\circ \text{ de alumnos}} \end{array} \right\}$$

Luego:

$$\text{n}^\circ \text{ de aulas} = \frac{20 + 20}{30 - 25} = \frac{40}{5} = 8$$

\*primer caso:

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 25(8) + 20$$

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 200 + 20$$

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 220$$

respuesta: n° de alumnos 220

\*segundo caso:

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 30(8) - 20 = 220$$

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** Este problema se puede resolver, Ensayo - error.

**Verificamos:**

Por Método algebraico.

Sea:  $x = \text{n}^\circ \text{ de aulas}$

Del enunciado:

Se ubican 25 alumnos por aula, faltan 20 alumnos; esto significa que sobra 20 alumnos.

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 25x + 20 \dots \dots \dots (I)$$

Del enunciado:

Si se ubica 30 alumnos por aula, faltan 20 alumnos para completar la última aula.

$$n^{\circ} \text{ de alumnos} = 30x - 20 \dots\dots\dots (II)$$

ahora, igualamos las ecuaciones (I) y (II)

trasponiendo términos:

$$20 + 20 = 30x - 25x$$

$$40 = 5x$$

$$5x = 40$$

$$x = \frac{40}{5}$$

$$x = 8$$

respuesta: número de aulas 8

Luego reemplazamos el valor de  $x = 8$  en la ecuación (I)

$$n^{\circ} \text{ de alumnos} = 25x + 20 \dots\dots\dots (I)$$

$$n^{\circ} \text{ de alumnos} = 25(8) + 20$$

$$n^{\circ} \text{ de alumnos} = 200 + 20$$

$$n^{\circ} \text{ de alumnos} = 220$$

respuesta: 220 alumnos

### **Problema 6:**

A un cierto número lo dividimos entre 4, el resultado hallado le sumamos 8, a este resultado lo multiplicamos por 3 a este nuevo resultado lo restamos 8, a este resultado le extraemos la raíz cuadrada, obteniendo como resultado final 5 hallar dicho número.

Proceso de Solución:

#### **OPRACIONES DIRECTAS**

#### **OPRACIONES INVERSAS**

Numeros inicial → Numero inicial: 12

Dividimos entre 4 → Multiplicamos por 4

$$3 \times 4 = 12$$

Sumamos 8 → Restamos 8

$$11 - 8 = 12$$

Multiplicamos por 3 → Dividimos entre 3  
 $33/3 = 11$   
 Restamos 8 → Sumamos 8  
 $25 + 8 = 33$   
 Extraemos la raíz cuadrada → Elevamos al cuadrado  
 $5^2 = 25$   
 Obteniendo finalmente → = 5

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** Este problema se puede resolver, Empezar por el final.

**Verificamos:**

operaciones directas    operaciones inversas

$\div 4 \rightarrow 3 \times 4 = 12$  (numero perdido)  
 $+ 8 \rightarrow 11 - 8 = 3$   
 $\times 3 \rightarrow 33 \div 3 = 11$   
 $8 \rightarrow 25 + 8 = 33$   
 $\sqrt{\quad} \rightarrow 5^2 = 25$   
 $- 5 \rightarrow = 5$

**Operación directas realizadas    Operaciones inversas**

- 1)  $\div 4 \rightarrow 3 \times 4 = 12$  (numero pedido)
- 2)  $+ 8 \rightarrow 11 - 8 = 3$
- 3)  $\times 3 \rightarrow 33 \div 3 = 11$
- 4)  $8 \rightarrow 25 + 8 = 33$
- 5)  $\sqrt{\quad} \rightarrow 5^2 = 25$
- 6)  $= 5 \rightarrow = 5$

**Problema 7:**

Plegado de papel.

Se pliega una tira de papel, larga y delgada, 10 veces sucesivas por la mitad. Al desplegarla ¿cuántos dobleces se verá

Numero de pliegue 1  
Numero de dobleces 2

Número de pliegue 2  
Número de dobleces 3

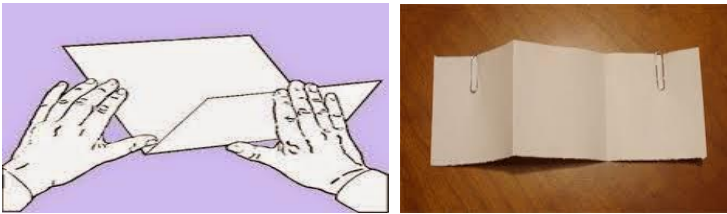


Figura 3. Plegado de papel

Proceso de solución:

- 1.- Coger una tira de papel larga y delgada. Pliégala por la mitad. Al desplegarla ¿cuántos dobleces crees que se verá?. Despliega la tira de papel, ¿cuántos dobleces ves? Vuelve a plegar la tira de papel por la mitad y luego pliégala otra vez por la mitad. Al desplegarla ¿cuántos dobleces crees que se verán? Despliega la tira de papel, ¿cuántos dobleces ves?
- 2.- Continúa haciendo sucesivos dobleces, siempre por la mitad. Elabora en tu cuaderno una tabla como la siguiente. En ella vas anotando el número de dobleces que observas cada vez que haces un nuevo doblez.

Numero de pliegue	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
Numero de dobleces	2	3	4	5	6	7	8	9	10	?	?

Cuadro 4: Problema 7

- 3.- Analiza la tabla que acabas de construir y procura descubrir la relación que hay entre el número de pliegues y el número de dobleces. Escribe la fórmula que relaciona el número de pliegues con el número de dobleces.

La fórmula es  $(n+1)$

**Verifica la solución:**

La fórmula que hallaste, calculando el número de dobleces para 3, 4, 5, 6 y 7 pliegues.

Reemplazo en la fórmula:

Numero de pliegues  $(n+1)$  = número de dobleces.

Pliegue  $1 + 1 = 2$  dobleces

Pliegue  $2 + 1 = 3$  dobleces

Pliegue  $3 + 1 = 4$  dobleces.

Pliegue  $4 + 1 = 5$  dobleces.

Pliegue  $5 + 1 = 6$  dobleces.

Pliegue  $6 + 1 = 7$  dobleces.

Pliegue  $7 + 1 = 8$  dobleces.

Pliegue  $8 + 1 = 9$  dobleces.

Pliegue  $9 + 1 = 10$  dobleces.

Compara tus resultados con los resultados de las observaciones que has hecho para completar la tabla.

Utiliza esa fórmula para calcular el número de dobleces que debe haber en la tira de papel al plegarla 10 veces.

**ESTRATEGIAS HEURISTICA**, para resolver este problema se utiliza patrón nos puede llevar a encontrar una regla general que puede ser escrita como una expresión algebraica.

### **Problema 8:**

José cría en su chacra solamente cuyes y gallinas. Un día, jugando, le dijo a su hijo: “Contando todas las cabezas de mis animales obtengo 60 y contando todas sus patas obtengo 188. ¿Cuántos cuyes y cuántas gallinas tengo?”

Proceso de Solución:

Se intenta hallar la solución dando valores al azar a la cantidad de cuyes y a partir de ellos obtener el número de gallinas. Para verificar si la respuesta es correcta se calcula el total de patas con esos valores. Se puede construir una tabla para que el trabajo sea más ordenado.

Datos:

En total hay 60 animales.

Todos no pueden ser gallinas porque entonces habría 120 patas.  
 Tampoco todos pueden ser cuyes porque entonces habría 240 patas.  
 Debe haber exactamente 188 patas.  
 Para poder continuar razonando vamos a hacer una tabla:

Nº de cuyes	Nº de gallinas	Nº de patas
0	60	120
60	0	240
30	30	360
34	26	188

Cuadro 5: Problema 8

RESPUESTA: Hay 34 cuyes y 26 gallinas.

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** Este problema se puede resolver, Ensayo -error.  
 Verificamos la solución:

Resolviendo el sistema de ecuaciones por método de reducción.

Plantear ecuaciones es una buena estrategia para resolver problemas con cualquier tipo de números. Esta estrategia funciona con mucha facilidad para resolver diversos problemas, sólo se requiere dominar el lenguaje algebraico

$$\begin{array}{l}
 l_1 \quad x + y = 60 \\
 l_2 \quad 4x + 2y = 188(-4)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 (-4) \quad x + y = 60 \\
 \hline
 4x + 2y = 188 \\
 -4x - 4y = -240 \\
 \hline
 4x + 2y = 188 \\
 -2y = -52 \\
 \hline
 y = \frac{-52}{-2} \\
 y = 26
 \end{array}$$

sustituyendo el valor.  $(l_1) x + y = 60$

$$x + 26 = 60$$

$$x = 60 - 26$$

$$x = 34$$

Respuesta: Hay 34 cuyes y 26 gallinas.



Figura 4: Animales en la granja

### **Problema 9:**

Cuál es el número de diagonales de un polígono de 10 lados

Proceso de Solución:

El problema pide que se determine el número de diagonales que tiene un polígono de 10 lados.

- 1) Podríamos dibujar este polígono de 10 lados y contar sus diagonales, pero dibujar un polígono de 10 lados con sus diagonales es bien difícil.
- 2) Para este tipo de problemas utilizamos la Estrategia de Generalizar.

Un modo de resolver este problema es utilizando la estrategia resolver un problema más sencillo antes; es decir, estudiar el número de diagonales de polígonos con menor número de lados.

Observa la figura

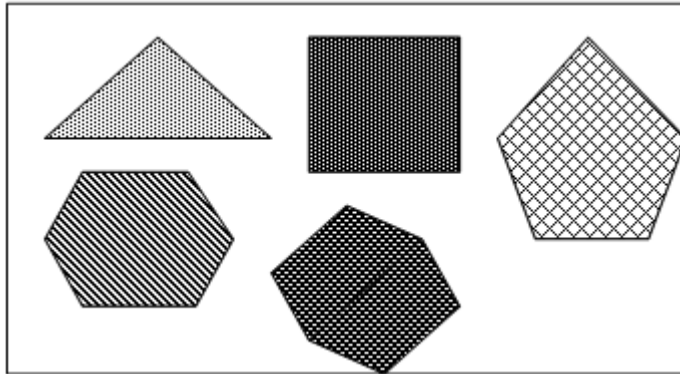


Figura 5. Figuras geométricas.

Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono
2 lados	4 lados	5 lados	6 lados
0 diagonales	2 diagonales	5 diagonales	9 diagonales

Cuadro 6: conteos de la figura

Colocamos en una tabla los valores que observamos en las figuras anteriores y analizamos la tabla para buscar algún patrón que nos ayude a comprobar.

N° de lados	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N° de diagonales	0	2	5	9	?	?	?	?	?	?

Cuadro 7: Conteo de numero lados y de diagonales

Usemos el patrón para completar la tabla

N° de lados	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N° de diagonales	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54

$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

Cuadro 8: Patrón para completar tabla

Respuesta: polígono de 12 lados debe tener 54 diagonales.

**ESTRATEGIAS HEURISTICA**, para resolver este problema se utiliza patrón nos puede llevar a encontrar una regla general que puede ser

escrita como una expresión algebraica. Este es un ejemplo de razonamiento inductivo.

Verificar la respuesta.

El polígono de 3 lados tiene 1 diagonales.

El polígono de 4 lados tiene 2 diagonales.

El polígono de 5 lados tiene  $2 + 3 = 5$  diagonal.

El polígono de 6 lados tiene  $2+3+4 = 9$  diagonal.

.....  
El polígono de 10 lados tiene  $2+3+4+5+6+7+8+9= 35$  diagonal.

Extendiendo este patrón:

Para el polígono de 11 lados:  $2+3+4+5+6+7+8+9 =44$ Para el polígono de 12 lados:  $2+3+4+5+6+7+8+9+10=54$

.....  
Para el polígono de  $n$  lados:  $2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n - 2)$  diagonales.

La expresión algebraica  $2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n - 2)$  representa el número de diagonales de un polígono de  $n$  lados.

**Verificar la respuesta con una formula.**

- 1) Verifica la expresión es correcta para calcular el número de diagonales que tiene los de polígonos de 3 a 10 lados. Compara tus resultados con la tabla anterior.
- 2) Aplicando esta expresión calcula el número de diagonales que debe tener un polígono de 15 lados.
- 3) Veamos otro razonamiento, inductivo también, para determinar el número de diagonales de un polígono de  $n$  lados.  
Piensa en un polígono de  $n$  lados. Ese polígono tendrá  $n$  vértices.
- 4) Como de cada vértice salen  $n - 3$  diagonales porque de él mismo y los 2 lados contiguos no salen diagonales, para calcular el número de diagonales que salen de cada vértice tenemos que hacer el producto:  
 $n$  vértices  $(n - 3)$
- 5) Tenemos que dividir entre 2 ese resultado porque al hacer el

producto estamos contando 2 veces cada diagonal, pues la diagonal que va de un vértice al otro y la que viene de ese vértice a sí mismo es la misma y se está contando 2 veces.

6) Por tanto la expresión algebraica  $[n \cdot (n - 3)] \div 2$  representa el número de diagonales que tiene un polígono de  $n$  lados.

7) Si  $d$  representa el número de diagonales de un polígono podemos escribir:

$$d = [n \cdot (n - 3)] \div 2$$

Esta última igualdad es la fórmula que permite calcular el número de diagonales que debe tener un polígono conociendo el número de lados que tiene.

Aplicando esta expresión calcula el número de diagonales que debe tener un polígono de 15 lados.

$$d = [15 \cdot (15 - 3)] \div 2$$

$$d = [180] \div 2$$

$$d = 90$$

Aplicando esta expresión calcula el número de diagonales que debe tener un polígono de 12 lados.

$$d = [12 \cdot (12 - 3)] \div 2$$

$$d = [12 \cdot (9)] \div 2$$

$$d = 54.$$

### **Problema 10:**

¿Qué parentesco tiene conmigo la hija de la esposa del único vástago de mi madre?

- a) Hermana   b) Prima   c) Sobrino   d) hija   e) Nieta.

Proceso de Solución:

Una Para mejor comprensión, hacemos el siguiente diagrama con la recomendación que es una problema que siempre se empieza analizar del ultimo hacia adelante, veamos.

Que parentesco tiene conmigo la hija de la esposa del único vástago de mi madre.

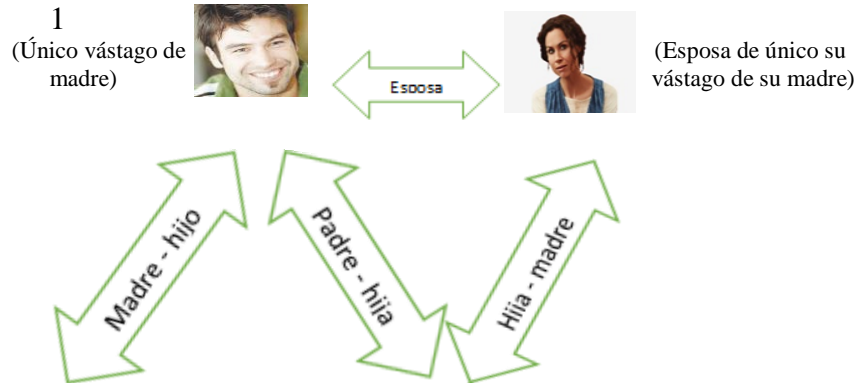


Figura 6: Parentesco familiar

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** El problema se puedes desarrollar, empezar por el final

**Problema 11:**

. En un corral hay 37 animales entre gallinas y borregos y en total 118 patas ¿Cuántos gallinas y borregos hay?



Figura 7: Animales

Proceso de Solución:

En el problema se supone que todas las gallinas tienen 2 patas y los borregos 4. Realizando una tabla y ensayando tenemos que los números que cumplen con el problema son: 15 gallinas y 22 borregos.

	CABEZA	PATAS
GALLINA	17	34
OVEJA	20	80
TOTAL	37	114
	CABEZAS	PATAS
GALLINA	16	32
OVEJA	21	84
TOTAL	37	116
	CABEZAS	PATAS
GALLINA	15	30
OVEJA	22	88
TOTAL	37	118

Cuadro 9: proceso de solución de gallina y borrego.

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** Para resolver este problema es buscar semejanza con otros problemas pero más simple.

Verificamos;

Si todas las cabezas fueran de gallinas se contarían  $37 \times 2 = 74$  patas, es decir, faltarían  $118 - 74 = 44$  patas.

Como cada borrego tiene 2 patas más que cada gallina entonces

$\frac{44}{2} = 22$  es la cantidad de borregos que hay y por consiguiente, hay 15 gallinas.

Verificando se tiene que  $22 \text{ borregos} + 15 \text{ gallinas} = 37 \text{ cabezas}$  y  
 $(22 \times 4) + (15 \times 29) = 88 + 30 = 118$

Es la cantidad total de patas.

O bien, si todas las cabezas fueran de borregos se contarían  
 $37 \times 4 = 148$  patas, por lo que sobrarían  $148 - 118 = 30$  patas.

Como cada gallina tiene 2 patas menos que cada borrego entonces:

$\frac{30}{2} = 15$  es el número de gallinas que hay y por consiguiente hay 22 borregos.

### **Problema 12:**

Un padre para estimular a su hijo a estudiar la asignatura de MATEMÁTICAS le dice: "Por cada problema que resuelvas bien te daré \$70 y por cada uno que metas la pata me darás \$50". Después de hacer 25 problemas él muchacho tiene \$550. ¿Cuántos problemas ha resuelto correctamente?

Proceso de Solución:

Este problema puede resolverse por ensayo y error de la siguiente manera: Si el número de problemas bien resueltos fueran 22 (por decir un número para ensayar), la cantidad en pesos sería de \$1540, ya que cada problema bien resuelto es pagado con \$70. En este caso serían 3 los problemas no correctos pero el padre, por cada incorrecto recibirá \$50. Así por estos 3 problemas incorrectos recibirá \$150. De esta manera, se tiene que. Es obvio que esta cantidad está muy alejada de los \$550. Por lo que podemos ensayar con otro número menor que 22. Por ejemplo, si fueran 20 los problemas correctos se tendrían \$1400 y los no correctos serían 5 y se tendrían \$250. Así, por los correctos menos los incorrectos tendríamos: Siguiendo con el ensayo, se observa que si los problemas correctos fueran 15 se tendrían \$1050 mientras que por los 10 no correctos se tendrían \$500. Así, lo que le quedaría al hijo sería Por lo tanto, el estudiante respondió 15 problemas correctamente.

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA;** para resolver este problema es ENSAYO - ERROR.

Verificamos la solución: Otra forma de resolver este problema es por medio de la construcción de una tabla que a continuación se presenta: Total de problemas 25.


Problemas bien resuelto	Problema mal resuelto	Diario ganando por cada problema bien	Diario perdiendo por problemas mal resueltas	Total
22	3	1540	1550	1390
20	5	1400	250	1150
18	7	1260	350	900
16	9	1120	450	670
15	10	1050	500	550

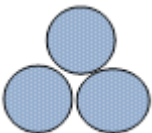
Cuadro 10: Problema 12

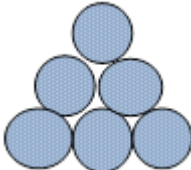
### Problema 13:

Balas de cañón. En la época en que los cañones lanzaban balas, éstas eran almacenadas en parques de artillería en forma de pirámides de base cuadrada; cada lado del cuadrado de la base contaba con 15 balas. ¿Cuál era el número de balas por pirámide?

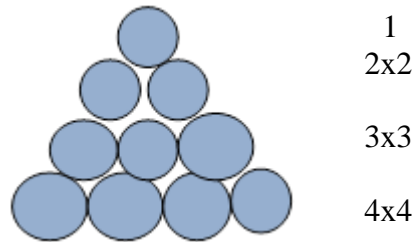
Proceso de solución: La dificultad inicial parece grande y el tamaño de la tratar de simplificar buscando primero cuántas balas hay en pirámides más pequeñas.

En una pirámide de base 1 tenemos sólo una bala  1

En una pirámide de base 2 tenemos las cuatro y la del nivel superior: de la base y de nivel superior  $2^2 + 1 = 5$  balas. Demasiado fácil  2X2

En una pirámide de base 3 tenemos en la base, 2x2 en el siguiente nivel 1 y en el tercerobalas  $3^2 + 2^2 + 1 = 14$   1  
2x2  
3x3

En una pirámide de base 4  
tenemos 4x4 en la  
3 x 3 en el primer nivel



2 x 2 en el segundo y 1

En el último

$$4^2 + 3^2 + 2^2 + 1 = 30 \text{ bala}$$

Ya vemos cual será la ley de formación y podemos deducir que en el caso de una pirámide de base 15 tendremos:

$$5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1 = 1240 \text{ balas,}$$

**ESTRATEGIA HEURISTICA:** para resolver aplicaremos razonar. Lógicamente.

**Problema 14:**

La familia de Alejandro Sebastián Díaz tiene el siguiente presupuesto:



INGRESOS - EGRESOS	MONTO
INGRESOS	\$ 3200.00
EGRESOS	
Recibo de luz	\$ 150
Recibo de agua	\$ 60
Alimentación	\$ 600
Transporte	\$ 245
Otros gastos	\$ 230
Ahorros	

Cuadro 11: Ingreso - egreso

Respectos los ingresos y egresos en la economía del hogar de la familiar. Presentar los ingresos, egresos y ahorro de diversas situaciones problemáticas respecto al presupuesto:

1. Explique cómo encuentran el dato que falta.
2. ¿Cómo se relacionan el ingreso, el egreso y el ahorro?

3. Si no consideramos otros gastos en el presupuesto, ¿qué ocurrirá? Justifica su respuesta.
4. ¿Cuál es la condición que debe existir entre los ingresos y los egresos en el entorno familiar?
5. Determinen una expresión matemática que les permita explicar cómo se obtiene el ahorro familiar.

Proceso de solución:

1. Explique cómo encuentran el dato que falta;

Sumando:  $150 + 60 + 600 + 245 + 230 = 1285$ .

Entonces restamos  $3200 - 1285 = 1915$ .

Esto sería para el EGRESO: \$ 1285.

Entonces la familia de Alejandro Sebastián Días el Ahorra \$ 1915.

2. ¿Cómo se relacionan el ingreso, el egreso y el ahorro?  
Se relaciona que el ingreso es la cantidad \$ 3200, el egreso es la cantidad que paga los servicios o los gastos que viene ser de \$ 1285 y el ahorro lo que queda de  $3200 - 1285 = 1915$ .
3. Si no consideramos otros gastos en el presupuesto, ¿qué ocurrirá? Justifiquen su respuesta. Tendrías los \$ 3200 si no pagas otros gastos.
4. ¿Cuál es la condición que debe existir entre los ingresos y los egresos en el entorno familiar? Es la resta de los ingreso menos el egreso.
5. Determinen una expresión matemática que les permita explicar cómo se obtiene el ahorro familiar.

Ingreso menos egreso = ahorro

$\$ 3200 - 1285 = 1915$

Aplicaremos la **ESTRATEGIA HEURISTICA** para resolver el problema representación gráfica numérica.

**Problema 15:**

En la ciudad de Juliaca el termómetro marcaba 3.

°C bajo cero a las 7:00 a. m.; al mediodía la temperatura había subido 12 °C respecto de lo cual bajó 4 °C en la noche. ¿Cuál era la temperatura a esa hora?

Proceso de solución:

La temperatura al medio día.

$$(-3) + (12) = 9$$

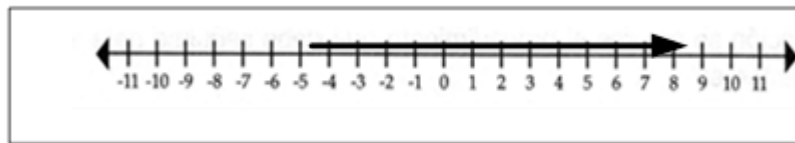
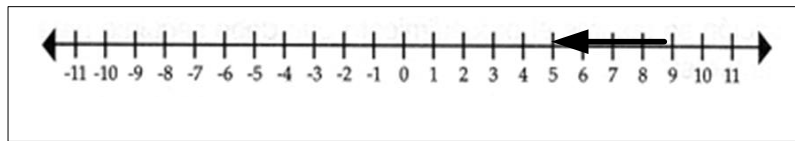


Figura 8: Problema 15

Desde -3 avanza 12 unidades

La temperatura por la noche  $(+ 9) + (-4) = 5$

Desde +9 retroceden + 4 unidades



Respuesta la temperatura por la noche 5°C

Aplicaremos la **ESTRATEGIA HEURISTICA** de representación gráfica numérica.

**Problema 16:**

Un buzo se encuentra a una profundidad de 32 metros y empieza a subir 4 metros por minuto. ¿A qué profundidad está al cabo de 5 minutos? ¿Cuántos metros le faltan en ese momento para llegar a la superficie? Expliquen cómo han realizado su representación para resolver este problema.

Proceso de solución:

1 minuto es a 4 metros  
 5 minutos a 20 metros  
 Entonces  $= 32 - 20 = 12$

Horas	32 metros							
	4m	4m	4m	4m	4m	4m	4m	4m
1 minuto	X							
2 minuto	X	X						
3 minuto	X	X	X					
4 minuto	X	X	X	X				
5 minuto	X	X	X	X	X			

Cuadro 12: Tabulación de horas –metros

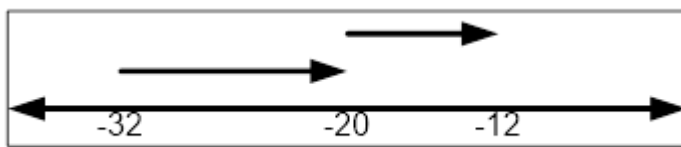


Figura 9: Recta numérica

Aplicaremos la **ESTRATEGIA HEURISTICA** para resolver el problema de representación gráfica numérica.

**Problema 17:**

Esta pirámide de números continúa bajo las nubes. La suma total de los números del primer nivel es 29.791 ¿Cuántos niveles de números tiene esta pirámide?

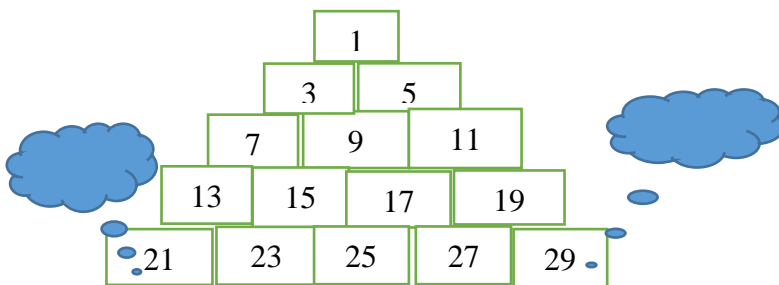
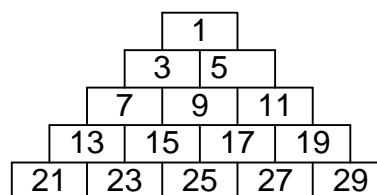


Figura 10: La pirámide

Proceso de solución:

Experimentamos con los diferentes niveles

1  
 $3 + 5 = 8$   
 $7 + 9 + 11 = 27$   
 $13 + 15 + 17 + 19 = 64$   
 $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$



Las sumas que estamos obteniendo 1, 8, 27, 64, 125, son muy reveladoras. Nos recuerdan los cubos de naturales los primeros números

$$1 = 1^3$$

$$8 = 2^3$$

$$27 = 3^3$$

$$64 = 4^3$$

$$125 = 5^3$$

Por tanto vemos que nos conviene considerar la pirámide en sentido inverso y considerar el nivel superior como el primero y el inferior como el último de esta serie.

Así tenemos:

nivel	suma	
1	1	$1^3$
2	8	$2^3$
3	27	$3^3$
4	64	$4^3$
5	125	$5^3$
...	....	$5^3$
¿?	29,791	$n^3$

Cuadro 13: Suma de cuadrados del pirámide

Se trata pues de averiguar cuál es el número que da como resultado 29.791 al elevarlo al cubo. Vamos a tratar de resolverlo sin necesidad de extraer raíces. Para ello podemos seguir experimentando, y observar

como son los cubos de primeros números naturales para ver si nos dan alguna pista sobre el número buscado:

Numero	Cubo	Termina en
1	1	1
2	8	8
3	27	7
4	64	4
5	125	5
6	216	6
7	343	3
8	512	2
9	729	9
10	1000	0

Cuadro 14: Suma de cubos del pirámide

Observamos que el número que buscamos tendrá que tener dos cifras y que debe acabar en 1. Luego podemos probar con 11, 21, 31,..., aunque ya podemos aventurar que será el 31. En efecto:  $31^3 = 29.791$

Así pues la pirámide tiene 31 niveles

La experimentación-observación es una de las **ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS** más útiles para el descubrimiento de propiedades comunes, leyes generales o generalización y reglas de formación. Es también una de las estrategias más utilizada en la resolución de problemas.

**Problema 18:**

Rodrigo tiene fichas y juega con sus amigos. El lunes pierde 3 fichas y el martes pierde el doble de lo que perdió el lunes. ¿Cuántas fichas perdió el martes?

Proceso de solución:

Coloco en los dos múltiplos de 3 fichas.

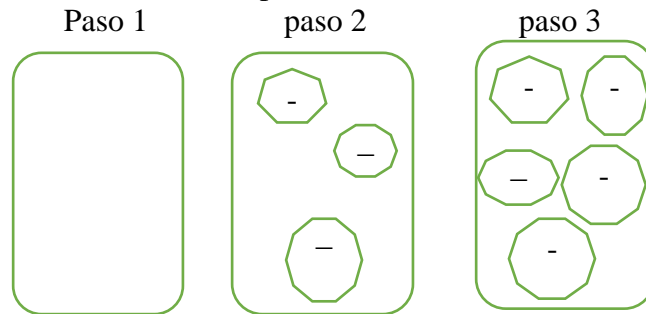


Figura 11: Problema 18

Entonces:  $2 \times (-3) = -6$

Paso 1 comienzo con el tapete vacío.

Paso 2 coloco el conjunto de tres fichas negativas.

Paso 3 Coloca el doble del conjunto inicial de fichas.

La cantidad final de fichas que aparece en el tapete es el resultado.

Aplicaremos, la **ESTRATEGIA HEURISTICA** para resolver el problema de representación gráfica numérica:

### **Problema 19:**

Supongamos que está manejando su auto a 40 kilómetros por hora. Si le preguntara dónde va a estar dentro de 3 horas, usted contestará: “Voy a estar a 120 kilómetros de acá”. Éste sería un ejemplo de que “más por más, es más”. O sea, aunque uno no escriba los símbolos (+) adelante, es como si estuviera diciendo.

Proceso de solución:

$(+40) \cdot (+3) = (+120)$  Uno representa los 40 kilómetros por hora, con (+40) y lo que “va a pasar” dentro de 3 horas, con (+3). Multiplica y tiene (+120), o sea, uno estará 120 kilómetros más adelante de donde está ahora. En una figura se ve así:

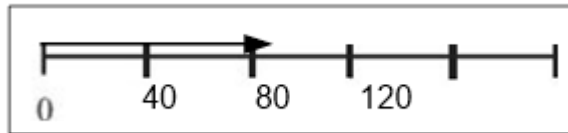


Figura 12: Problema 19

Si ahora, en lugar de ir a 40 kilómetros por hora hacia adelante, empezara a manejar su auto marcha atrás a la misma velocidad (o sea, a 40 kilómetros por hora pero hacia atrás), podría preguntarle: ¿dónde va a estar dentro de 3 horas?

$$(-40) \cdot (+3) = (-120)$$

Otra vez, si uno quiere representar en símbolos que está yendo marcha atrás, lo que hace es escribir  $(-40)$

Por otro lado, como uno quiere saber, otra vez, “qué va a pasar dentro de 3 horas”, usa el número  $(+3)$  para representarlo. En una figura se ve así:

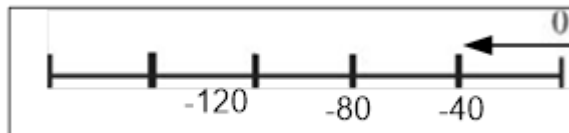


Figura 13: Velocidades

Es decir, si uno maneja el auto hacia atrás a 40 kilómetros por hora, dentro de 3 horas va a estar 120 kilómetros atrás del lugar del que partió. Esto corresponde –espero que se entienda con el ejemplo – a que menos por más es menos.

Ahora bien, lleguemos entonces a la última pregunta (que le pido que lea con cuidado y, sobre todo, que piense sola/o la respuesta). “Si usted viene como recién, manejando su auto a 40 kilómetros marcha atrás y yo, en lugar de preguntarle dónde va a estar dentro de 3 horas, le preguntara, ¿dónde estaba hace 3 horas? Usted, ¿qué contestaría? (Por favor, más allá de responder, trate de convencerse de que me entendió la pregunta). Ahora sigo yo: la respuesta es que uno estaba ¡más adelante! Más aún: estaba 120 kilómetros más adelante de donde está ahora. Si sigo usando los símbolos de más arriba, tengo que escribir:

$$(-40) \cdot (-3) = 120$$

Es decir, escribo  $(-40)$  porque estoy yendo marcha atrás, y escribo  $(-3)$  porque pregunto qué pasó hace 3 horas. Y como se advierte, uno, hace 3 horas estaba 120 kilómetros más adelante del punto donde está ahora. Y eso explica –en este caso– por qué menos por menos es más. En el dibujo es:

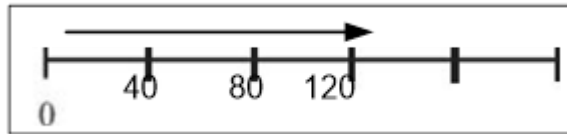


Figura 14: Escala

Aplicaremos, la **ESTRATEGIA HEURISTICA** para resolver el problema de representación gráfica numérica,

**Problema 20:**

Un padre y su hijo tienen en conjunto 55 años. Su edad respectiva está compuesta por las 2 mismas cifras pero colocadas al revés. ¿Cuáles son esas cifras?

Proceso de solución:

El problema se puede resolver probando con parejas de números que y exhaustiva en la búsqueda de soluciones conviene organizar los posibles ensayos o tanteos en forma de tablas como la que sigue y es fundamental analizar las soluciones y descartar las que no sean lógicas.

Edad de padre	Edad del hijo	Suma	¿Es posible?
11	11	22	...
21	12	33	...
31	13	44	....
41	14	55	si
....	...	....	...
22	22	44	...
32	23	55	no
....	...	...	...
50	05	55	si

Cuadro 15: Soluciones de edades

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA;** para resolver este problema es ENSAYO Y ERROR.

Por métodos algebraicos.

Sea: P la edad del padre y H la edad del hijo.

Si “x” e “y” son las dos cifras de las que se componen ambas edades, se tiene que.

$$p=10x + y \text{ miembros que } H=10y + x$$

$$p+H=55$$

$$10x + y + 10y + x = 55$$

$$11(x + y) = 55$$

$$x + y = \frac{55}{11}$$

$$x + y = 5$$

Luego las posibles respuestas son:

<b>Padre</b>	<b>Hijo</b>
50	05
41	14
32	23

Cuadro 16: Edades

Luego las posibles respuestas son:

Sin embargo la tercera respuesta no sería una solución posible.

### **Problema 21:**

Combinatoria y reproductor de CD

Supongamos que tiene un reproductor de CD que viene con un botón que permite “programar” el orden en el que va a escuchar las canciones. Es decir, en lugar de reproducirlas tal como vienen grabadas, las reproduce en el orden que usted elige, hasta agotarlas todas. Por ejemplo, supongamos que inserta un CD con 10 canciones. Usted podría seleccionar:

3-7-10-1-9-5-8-6-4-2    o    10-9-8-7-6-5-4-3-2-1,

Por poner sólo dos casos.

Proceso de solución:

Ahora, planteo un problema: si a usted le gustara mucho su CD y decidiera programar “un ordenamiento” diferente cada día, hasta agotar todos los posibles “órdenes”, ¿cuántos días tardaría en recorrerlos todos? Es decir, ¿cuántos días tendrán que pasar para que no le quede más remedio que repetir alguno anterior?

Usted puede, naturalmente, ir más abajo y leer la respuesta. Pero se privará del placer de pensar el problema (y por otro lado, ¿dónde está la gracia?). El planteo es muy sencillo, y muy “posible” como situación de la vida real. El resultado es notable y no necesariamente “esperable”. Antes de pasar a la solución, lo invito a que pensemos algo juntos. Si tuviera los números 1, 2 y 3, ¿de cuántas formas los puede ordenar? Piense una manera de “contar” sin necesidad de escribir todas las formas. La lista completa sería:

123, 132, 213, 231, 312, 321 (\*)

O sea que uno descubre que son seis formas. Pero esto es muy fácil, porque son pocos números. Por ejemplo, si tuviera diez números o veinte (por poner un ejemplo) se haría mucho más tedioso escribir todos los casos y lo más probable es que uno termine equivocándose porque son muchos casos a considerar. La idea es buscar alguna forma que permita contar sin tener que hacer una lista. Por ejemplo, aprovechando los datos que acabo de escribir en (\*) pensemos juntos cómo hacer si hubiera cuatro números en lugar de tres. Podríamos poner al número 4 delante de los seis elementos de la lista (\*). Tendríamos entonces esta nueva lista:

4123, 4132, 4213, 4231, 4312 y 4321.

Lo único que hice fue agregar el número 4 al principio de cada integrante de la lista (\*). Vuelvo a tener 6 formas. Esto no agota todas las posibilidades. Lo que tenemos que hacer ahora es intercalar el número 4 en el segundo lugar de cada integrante de la lista (\*). En ese caso, queda:

1423, 1432, 2413, 2431, 3412 y 3421.

O sea, otras seis formas.

Ya se habrá dado cuenta de lo que hay que seguir haciendo (si no, piénselo solo/a hasta advertir cómo seguir).

Ahora, intercalemos el número 4 en la tercera posición de la lista (\*). Se tiene entonces lo siguiente.

1243, 1342, 2143, 2341, 3142 y 3241

Y por último, ubicamos el número 4 al final de todos los miembros de la lista (\*):

1234, 1324, 2134, 2314, 3124 y 3214.

Y se terminó. Es decir, hemos agotado todas las posibilidades. Al número 4 lo hemos ubicado en todos los lugares y, como vimos, se trató de reproducir la lista original (\*) cuatro veces. Y como había en total seis elementos en la lista (\*), al multiplicarlo por 4, tenemos 24 posibilidades.

4123, 4132, 4213, 4231, 4312 y 4321.

1423, 1432, 2413, 2431, 3412 y 3421.

1243, 1342, 2143, 2341, 3142 y 3241.

1234, 1324, 2134, 2314, 3124 y 3214.

Si ahora apareciera un quinto número, lo que habría que hacer es intercalar el número 5 en todas las posiciones de la lista (\*\*), por lo que obtendríamos 5 veces la lista de 24 que ya teníamos. O sea,  $24 \times 5 = 120$  maneras. Si consideramos que.

Con 3 números hay  $3 \cdot 2 = 6$  formas,

Con 4 números,  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  formas,

Con 5 números,  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$  formas,

Con 6 números,  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$  formas,

Con 7 números,  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$  formas

Con 8 números,  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40,320$  formas,

Con 9 números,  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 362,880$  formas,

Con 10 números  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3,628,800$  FORMAS.

La experimentación-observación es una de las **ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS** más útiles para el descubrimiento de propiedades comunes, leyes generales o generalización y reglas de formación. Es también una de las estrategias más utilizada en la resolución de problemas.

### **Problema 22:**

Hallar la suma de números impares de 1, 3,5,7,11....etc

Supongamos que uno empieza a calcular la suma de números impares. En los primeros pasos se tropieza con estos datos.

Proceso de solución:

$$1 = 1$$

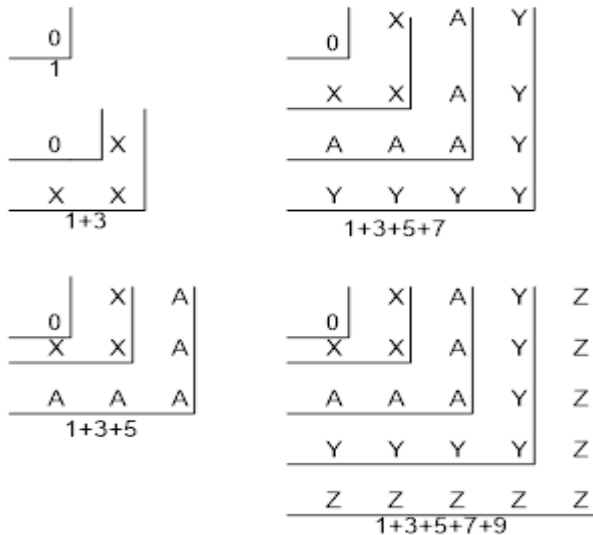
$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$



En general, entonces, la suma de los primeros  $n$  números impares es igual a  $n^2$

Es decir:  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$

La experimentación-observación es una de las **ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS** más útiles para el descubrimiento de propiedades comunes, leyes generales o generalización y reglas de formación. Es también una de las estrategias más utilizada en la resolución de problemas.

**Problema 23:**

Rosoli gasta S/3.00 cada vez que compra un sándwich. Esta semana comió 5 sándwiches. ¿Cuánto gastó en esta semana?

Proceso de solución:

Una forma de resolver.

$(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$

Otra forma de resolver

$(-5) (+3) = -15$

En esta semana gasto 15 soles

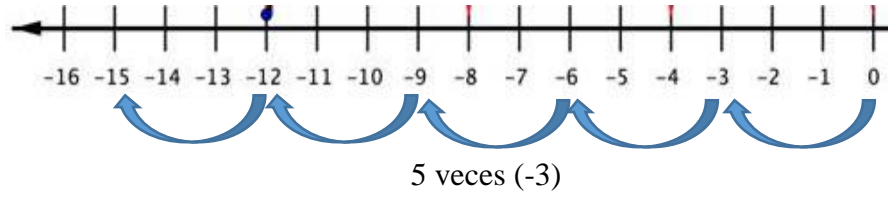


Figura 15: Recta numérica

Aplicaremos, la ESTRATEGIA HEURISTICA para resolver el problema de representación gráfica numérica.

**Problema 24:**

Un avión sube a una altura de 2500 metros, después baja 1800 metros, vuelve a subir 2000 metros y baja de nuevo 450 metros. ¿A qué altura se encuentra en este momento.

Proceso de solución:

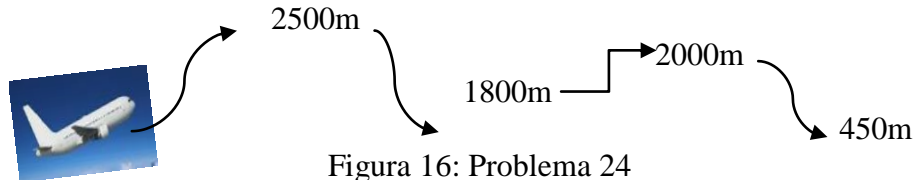


Figura 16: Problema 24

$$\begin{aligned}
 &25000 - 18000 \\
 &700 + 2000 \\
 &2700 - 450 = 2250
 \end{aligned}$$

Aplicaremos, la **ESTRATEGIA HEURISTICA** para resolver el problema representación gráfica numérica.

La segunda forma:

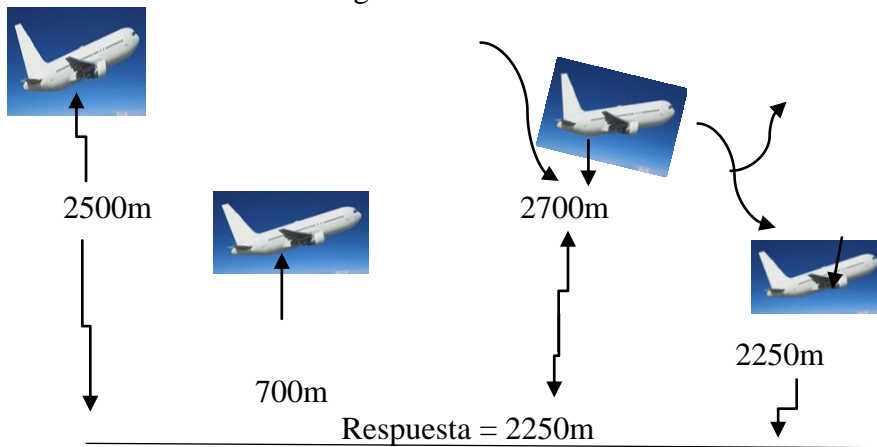
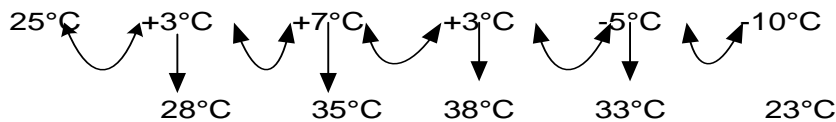


Figura 17: Vuelo de avión

**Problema 25:**

Registro de temperatura. Se registra la temperatura de una ciudad: de Puerto Maldonado a las siete de la mañana es de 25 °C sobre cero; de 7 a. m. a 9 a. m., la temperatura aumentó 3 °C; de 9 a. m. a 1 p. m., subió en 7°C; de la 1 p. m. a las 3 p. m., no varió; de 3 p. m. a 6 p. m., se elevó 3 °C; de 6 p. m. a 9 p. m., descendió 5 °C y de 9 p. m. a 12 p. m., bajó 10 °C. ¿Cuál es la temperatura a las 11 de la noche?

Proceso de solución:



RESPUESTA: A las 11 de la noche es 23°C

**ESTRATEGIA HEURISTICA** para resolver el problema de representación gráfica numérica

$$\begin{aligned} 9. \text{ a.m. } 1. \text{ p.m. } & 28^{\circ}\text{C} + 7^{\circ}\text{C} = 35^{\circ}\text{C} \\ 1. \text{ p.m. } 3. \text{ p.m. } & = 35^{\circ}\text{C} \\ 3. \text{ p.m. } 6. \text{ p.m. } & = 35^{\circ}\text{C} + 3^{\circ}\text{C} = 38^{\circ}\text{C} \\ 6. \text{ p.m. } 9. \text{ p.m. } & = 38 - 5^{\circ}\text{C} = 33^{\circ}\text{C} \\ 9. \text{ p.m. } 12. \text{ p.m. } & = 33^{\circ}\text{C} - 10^{\circ}\text{C} = 23^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

La respuesta es  $23^{\circ}\text{C}$

**Problema 26:**

El cangrejo estando en la playa avanza hacia el norte 20 pasos, retrocede hacia el sur 8 pasos, vuelve avanzar 6 pasos finalmente retrocede 5 pasos. ¿Cuántos pasos dio en total este cangrejo?  
¿Cuántos pasos se encuentra el punto de partida, y en qué sentido?



Figura 18: Cangrejo

Proceso de Solución:

- a. como nos pregunta cuantos pasos da en total el cangrejo, solo hay que sumar todos ellos, sin tomar en cuenta el avance o retroceso, es decir:  
 $20 + 8 + 6 + 5 = 39$ .

El cangrejo da 39 pasos.

- b. para hallar cuantos pasos se encuentran el punto de partida, consideramos a los pasos que avanza como positivos y a los pasos que retrocede como negativo luego:

$$(+20) + (-8) + (+6) + (-5) = +13$$

El cangrejo se encuentra a 13 pasos del punto de partida en sentido del norte.

Se aplica una **ESTRATEGIA HEURISTICA** para resolver el problema de una lista sistemática.

**Problema 27:**

Contando cuadrados en un tablero de ajedrez. ¿Cuántos cuadrados podemos contar en un tablero de ajedrez?

Proceso de solución:

Comprendamos el problema

El tablero de ajedrez tiene 8 filas y 8 columnas, entonces se puede decir que el tablero tiene 8 x 8, es decir 64 cuadraditos.

Pero, ¿y si añadimos el cuadrado grande, el del borde del tablero? Serían entonces 65 cuadrados.

Hay muchos cuadrados.

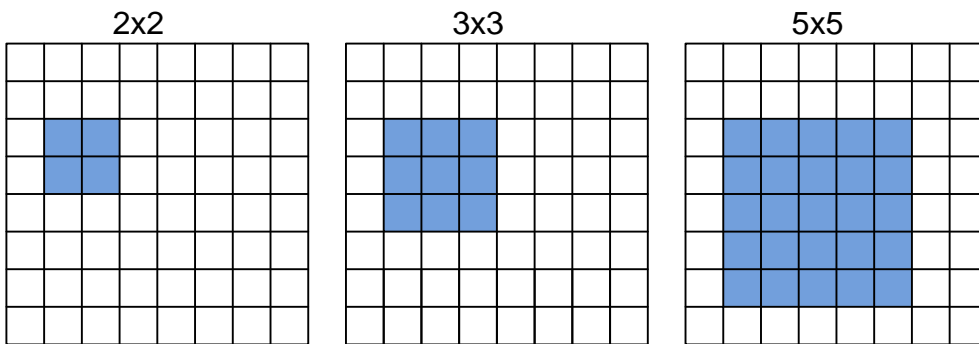


Figura 19: Tablero de ajedrez

Necesitamos contar:

El número de cuadrados es  $1 \times 1 \rightarrow$  que son 64

El número de cuadrado de cuadrados es  $2 \times 2$

El número de cuadrado de cuadrados es  $3 \times 3$

.....

El numero de  $8 \times 8 \rightarrow$  que es 1

.....

Vemos, entonces, que este es un problema de conteo. Por lo tanto, tenemos que encontrar una forma sistemática para poder contar todos esos cuadrados.

Una **ESTRATEGIA HEURISTICA** que puede ser conveniente para resolver este problema es “resolver primero un problema más simple”; esto es, empecemos trabajando con tableros más pequeños.

Vemos, entonces, que este es un problema de conteo. Por lo tanto, tenemos que encontrar una forma sistemática para poder contar todos esos cuadrados.

Una **ESTRATEGIA HEURISTICA** que puede ser conveniente para resolver este problema es “resolver primero un problema más simple”; esto es, empecemos trabajando con tableros más pequeños.

1) Comencemos considerando el siguiente tablero:

Tenemos 1 cuadrado  $2 \times 2$  y 4 cuadrados  $1 \times 1$



Figura 20: Cuadrado  $2 \times 2$

Número total de cuadrados  $1 + 4 = 5$  u  $1^2 + 2^2 = 5$

Nº total de cuadrados:  $1 + 4 = 5$

1) Consideremos ahora otro tablero:

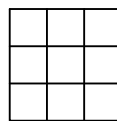


Figura 21: Cuadrado  $3 \times 3$

Tenemos 1 cuadrado 3x3 ,4 cuadrados 2x2 y 9 cuadrados  
 N° total de cuadrado:  $1 + 4 + 9 = 14$  u  $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

2) Observemos este otro.

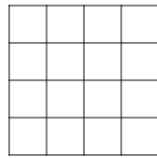


Figura 22: Cuadrado 4x4

Hay 1 cuadrado de 4 x 4; 9 de 3 x 3, de 2 x 2 y 16 de 1 x 1  
 N° total de cuadrados:  $1 + 4 + 9 + 16 = 30$  u  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

Expresando al problema original

Ahora resolvamos el problema original utilizando el razonamiento inductivo.

Para ello sería interesante utilizar una tabla:

Luego hacer la inducción:

Tamaño de tablero	Numero de cuadrados
1x1	$1 = 1$ $1^2 = 1$
2x2	$1 + 4 = 5$ $1^2 + 2^2 = 5$
3x3	$1 + 4 + 9 = 14$ $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
4x4	$1 + 4 + 9 + 16 = 30$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
5x5	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$
6x6	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$
...	.....
7x7	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$
8x8	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204$

Cuadro 17: Contando el tablero de ajedrez

Respuesta: En un tablero de ajedrez podemos contar 204 cuadrados.

- Generalizando.

Podemos generalizar nuestro resultado para tableros con muchos cuadrados más, para cuadrados de n filas y n columnas.

Tamaño de cuadrados	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	n x n
Numero de cuadrados.	64	49	36	25	16	9	4	1	$(9 - n)^2$

Cuadro 18: Generalización de tablero de ajedrez.

El número total de cuadrados en el tablero es:  
 $64+49+36+25+16+9+4+1=204$

Verifica la forma general que encontramos, comprobando en cada caso. Encontrar el tamaño cuadrado de 2, 5 y 7, Entonces remplazamos.

$$\begin{aligned}(9 - n)^2 \\(9 - 2)^2 &= (7)^2 = 49 \\(9 - 5)^2 &= (4)^2 = 16 \\(9 - 7)^2 &= (2)^2 = 4\end{aligned}$$

### **Problema 28:**

En un teatro las entradas de adultos costaba \$5.00 y la de niños \$ 2.00concurrieron 326 espectadores y se recaudaron \$1090 ¿Cuántos eran adultos y cuantos eran niños?

Proceso de solución:

Por método de ecuaciones.

Sean: x = número de niños; y = número de adultos  
 $x + y = 326$ .(1)

Del enunciado:

Recaudan = \$ 1090  
\$. 2x + \$.4y = \$. 1090

Dónde:  $2x + 4y = 1090$ .....(2)

De la ecuación (1); despejamos “x”

$$x + y = 326 \rightarrow x = 326 - y \text{ .....(3)}$$

Entonces: si lo que paga cada niño es \$. 2, entonces lo que pagaran los “x” niños serán: \$. 2x.

Si lo que paga cada adulto es \$. 5, entonces lo que pagaran los “y” adultos será \$. 5y,

Reemplazamos (3) en (2); obteniendo:

$$2(326 - y) + 5y = 1090$$

$$652 - 2y + 5y = 1090; \text{ trasponemos términos;}$$

$$-2y + 5y = 1090 - 652$$

$$3y = 438$$

$$y = \frac{438}{3}$$

$$y = 146$$

$$y = 146 \text{ (# de adultos)}$$

Ahora, reemplazamos el valor de  $y = 146$ ; en la ecuación (3):

$$x = 326 - y \text{ .....(3)}$$

$$x = 326 - 146$$

$$x = 180$$

Respuesta: el número de adultos es 146 y el de niños es 180

**ESTRATEGIA HEURISTICA** para resolver el problema es de plantear una ecuación.

Verificamos:

Segundo método de (falsa suposición)

Para resolver este tipo de problemas por este método, deben efectuarse los siguientes pasos; supuesto; recaudación total, error total cometido, error cometido por unidad, es decir:

Supuesto: que todos sean adultos.

Recaudación total: bajo este supuesto tenemos.

$$326 \times \$0.5 = \$1630$$

Error total cometido: en realidad se recaudado \$. 1090 (dato) pues quiere decir que estamos cometiendo un error de:  $\$1630 - \$1090 = \$540$  pero ¿de dónde proviene este error? proviene de nuestra falsa suposición inicial (al suponer que todos son adultos).

Error cometido por unidad: Al considerar un niño como un adulto estamos cometiendo, en la recaudación, error de:  $\$0.5 - \$0.2 =$  por cada niño que haya.

Luego.

Si cada niño se cometió un error de \$.3 ¿cuantos niño cometeré un error de \$.540?. La respuesta será.

$$\frac{540}{3} = 180 \text{ niños, que fueron tomados erróneamente como adultos.}$$

Entonces si los espectadores son 326 y los niños son 180, los adultos serán:

$$326 - 180 = 146 \text{ adultos.}$$

Comprobación:

$$\begin{cases} \text{n}^\circ \text{ de niños} & = 180 \\ \text{n}^\circ \text{ de adultos} & = 146 \end{cases}$$

$$\underbrace{\text{n}^\circ \text{ de niños} + \text{n}^\circ \text{ de adultos}} = \underbrace{\text{n}^\circ \text{ de espectadores}}$$

$$180 + 146 = 326$$

$$\text{Recaudacion} = \underbrace{180 \text{ niños} \times \$0.2c/u} + \underbrace{146 \text{ adultos} \times \$0.5c/u}$$

$$\$1090 = \$360 + \$730$$

Verificamos;

Donde:

A = # total de elementos (2da característica)

B = recaudación total (4ta característica)

En el vértice superior e inferior se coloca los valores unitarios (3ra característica)

Luego:

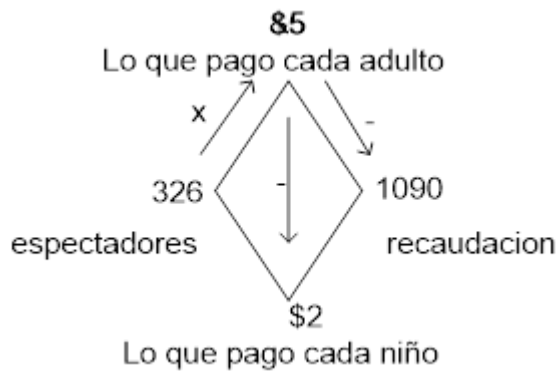


Figura 23: M. rombo, número de niños

$$\text{Niños} = \frac{326 \times 5 - 1090}{5 - 2} = \frac{1630 - 1090}{3} = \frac{540}{3}$$

# Niños = 180

Para hallar el numero de adultos

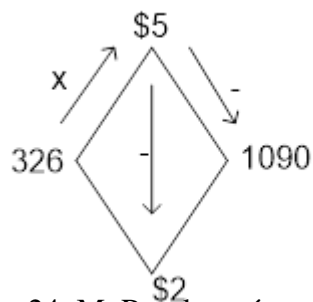


Figura 24: M. Rombo, número de adultos

$$\# \text{ Adultos} = \frac{326 \times 2 - 1090}{2 - 5} = \frac{652 - 1090}{-3} = \frac{-438}{-3}$$

# Adultos = 146.

Rpta. Numero de adultos es 146 y 180de niño.

**Problema 29:**

En un corral hay 92 patas y 31 cabezas; si lo único que hay son gallinas y conejos ¿Cuál es la diferencia entre el número de gallinas y conejos existentes?

Proceso de Solución:

Por el Método algebraico.

Sean: n° de gallinas =  $x$     n° conejos =  $y$   
n° de gallina + n° de conejos = n° de cabezas

$$x + y = 31$$

$$\text{Dónde: } x = 31 - y \dots\dots\dots (I)$$

\* Si una gallina tiene 2 patas en las “ $x$ ” en las gallinas habrá: “ $2x$ ” patas

\* si un conejo tiene 4 patas en los “ $y$ ” conejos habrá “ $4y$ ” patas.

$$\text{dónde: } 2x + 4y = 92 \dots\dots\dots (II)$$

$$2(31 - y) + 4y = 92$$

$$62 - 2y + 4y = 92$$

$$2y = 92 - 62$$

$$2y = 30$$

$$y = \frac{30}{2}$$

$$y = 15$$

15 números de conejos

Remplazamos el valor de:  $y = 15$ ; en (I)

$$x = 31 - y \dots\dots\dots (I)$$

$$x = 31 - 15$$

$$x = 16$$

$x = 16$  Número de gallinas.

Respuesta: La diferencia entre el número de gallinas y conejos es:

$$16 - 15 = 1$$

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA;** para resolver este problema es ensayo – error.

Verificamos.

Por el método del rombo,

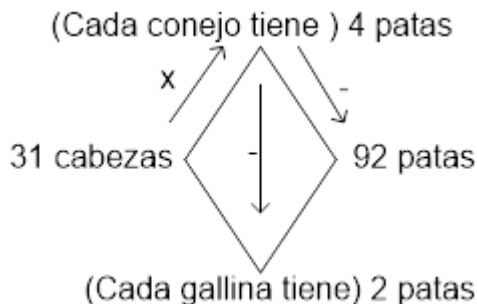


Figura 25: M. rombo, número de gallinas

$$* \text{ Número de gallinas} = \frac{31 \times 4 - 92}{4 - 2} = \frac{124 - 92}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Numero de gallinas es 16

Luego: n° de gallinas + n° de conejos = n° de cabezas

$$16 + \text{n° de conejos} = 31$$

$$\text{n° de conejos} = 31 - 16 = 15$$

Rpta: La diferencia entre el número de gallinas y conejos es  $16 - 15 = 1$

**Problema 30:**

Si le pago \$. 15 a cada uno de los obreros, me faltarían \$.400; pero si solo les pago \$. 8, me sobraría \$, 160. ¿Cuántos obreros tengo?

Proceso de Solución:

El problema se puede resolver aplicando el método del rectángulo cuando participan dos excluyentes, una menor que la otra, y se comparan en dos oportunidades, originándose un caso, un sobrante (o ganancia) y en otro, un faltante (o pérdida).

$$- \left\{ \begin{array}{ll} \$ .8 & \text{sobra } \$ .160 \\ \boxed{\text{dinero}} & \\ \$ .15 & \text{falta } \$ .400 \end{array} \right\} +$$

Aplicamos el método del rectángulo obtenemos.

¿Para saber cuánto dinero es lo que tengo, se aplica los siguientes casos:?

$$\begin{aligned} \text{n}^\circ \text{ de obreros} &= \frac{160+400}{15-8} = \frac{560}{7} = 80 \\ \text{n}^\circ \text{ de obreros} &= 80 \end{aligned}$$

Nota:

\* Primer caso:

$$\text{Dinero que tengo} = \$ .8 (80) + \$ .160 = \$ . 800$$

\* Segundo caso:

$$\text{Dinero que tengo} = \$ .15 (80) - \$ .400 = \$ .800$$

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA;** para resolver este problema se aplica ensayo - error.

Verificamos:

Método algebraico.

Sea:  $x$  = número de obreros que tengo.

Del enunciado:

Si le pago \$ . 15 a cada uno de los obreros, me faltarían \$ .400

$$\text{Dinero que tengo} = 15x - 400 \dots \dots \dots (I)$$

Del enunciado:

Pero si solo pago \$ . 8, me sobraría \$ , 160.

$$\text{Dinero que tengo} = 8x + 160 \dots \dots \dots (II)$$

Ahora igualamos las ecuaciones (I) y (II):

$$15x - 400 = 8x + 160$$

$$15x - 8x = 160 + 400$$

$$7x = 560$$

$$x = \frac{560}{7}$$

$$x = 80$$

Respuesta: número de obreros es 80

### **Problema 31:**

Un distribuidor debe repartir entre varios vendedores cierto número de periódico; si entrega 100 a cada uno le sobraría 90, pero si entrega 120 a cada uno le faltarían 210. ¿Cuántos vendedores son y cuál es el número de periódicos.

Proceso de solución:

$$- \left\{ \begin{array}{ll} 100 \text{ periodicos} & \text{sobran: } 90 \text{ periodicos} \\ \boxed{\text{N}^\circ \text{ de periodicos}} & \\ 120 \text{ periodicos} & \text{falta: } 120 \text{ periodicos} \end{array} \right\} +$$

Aplicando el método del rectángulo obtenemos:

$$\text{Luego } n^\circ \text{ de vendedores} = \frac{90+210}{120-100} = \frac{300}{20} = 15$$

Rpta el número de vendedores es 15.

Ahora hallamos el # de periódicos:

\* Primer caso:

$$n^\circ \text{ de periódicos} = 100(15) + 90 = 1590$$

\* Segundo caso:

$$n^\circ \text{ de periódicos} = 120(15) - 210 = 1590$$

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA;** para resolver este problema es **aplica** ensayo - error.

Verificamos, por el método algebraico:

Sea:  $x = n^\circ$  de vendedores

Del enunciado:

Si entregara 100 a cada uno le sobraría 90

n° de periódicos =  $100x + 90$ .....(I) Del enunciado:

Si entrega 120 a cada uno le faltaría 210

n° de periódicos =  $120x - 210$ .....(II)

Ahora igualamos la ecuación (I) y (II):

$$100x + 90 = 120x - 210$$

Trasposición de términos:

$$90 + 210 = 120x - 100x$$

$$300 = 20x$$

$$x = \frac{300}{20}$$

$$x = 15$$

15 número de vendedores.

Luego reemplazamos el valor de,  $x = 15$  en la ecuación (I)

$$\text{n° de periódicos} = 100x + 90 \dots\dots\dots(I)$$

$$\text{n° de periódicos} = 100(15) + 90$$

$$\text{n° de periódicos} = 1500 + 90$$

$$\text{n° de periódicos} = 1590$$

Respuesta. el número de periódicos es 1590.

**Problema 32:**

Si en una academia por aula se ubican 25 alumnos, se quedan sin aula 20 alumnos; y si se ubican 30 alumnos por aula, faltan 20 alumnos para completar la última aula: ¿Cuánto aulas y cuántos alumnos habrá?

Proceso de Solución:

Por el método del rectángulo:

Aplicamos el método del rectángulo, obtenemos:

$$- \left\{ \begin{array}{ll} 25 \text{ alumnos} & \text{sobran: 20 alumnos} \\ \boxed{\text{n}^\circ \text{ de alumnos}} & \\ 30 \text{ alumnos} & \text{faltan: 20 alumnos} \end{array} \right\} +$$

Luego:

$$\text{n}^\circ \text{ de aulas} = \frac{20+20}{30-25} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\text{n}^\circ \text{ de aulas} = 8 \text{ respuesta}$$

\* Primer caso:

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 25(8) + 20$$

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 200 + 20$$

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 220$$

Respuesta  $\text{n}^\circ$  de alumnos 220

\* Segundo caso:

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 30(8) - 20 = 220$$

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA:** para resolver este problema es ENSAYO -ERROR.

Verificamos.

Por el Método algebraico.

Sea:  $x = \text{n}^\circ$  de aulas

Del enunciado:

Si se ubican 25 alumnos por aula, faltan 20 alumnos; esto significa que sobra 20 alumnos.

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 25x + 20 \dots\dots\dots (I)$$

Del enunciado:

Si se ubica 30 alumnos por aula, faltan 20 alumnos para completar la última aula.

$$\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 30x - 20 \dots\dots\dots (II)$$

Ahora, igualamos las ecuaciones (I) y (II):

$$25x + 20 = 30x - 20$$

Trasponiendo términos:

Luego reemplazamos el valor de  $x = 8$  en la ecuación (I)

$$\begin{aligned} \text{n}^\circ \text{ de alumnos} &= 25x + 20 \dots\dots\dots(I) \\ \text{n}^\circ \text{ de alumnos} &= 25(8) + 20 \\ \text{n}^\circ \text{ de alumnos} &= 200 + 20 \\ \text{n}^\circ \text{ de alumnos} &= 220 \end{aligned}$$

Respuesta:  $\text{n}^\circ \text{ de alumnos} = 220$

**Problema 33:**

Para ganar \$. 560 en la rifa de una grabadora, se imprimieron 600 boletos; sin embargo, solo se vendieron 210 boletos, originándose una pérdida de \$ 220. Hallar el valor de la grabadora.

Proceso de Solución:

Aplicamos el método del rectángulo; obtenemos.

$$- \left\{ \begin{array}{ll} 600 \text{ boletos} & \text{ganancias: } \$560 \\ \text{valor de la grabadora} & \\ 210 \text{ boletos} & \text{perdida: } \$ 220 \end{array} \right\} +$$

Luego:

$$\begin{aligned} \text{Precio de cada boleto} &= \frac{560 + 220}{600 - 210} = \frac{780}{390} = 2 \\ \text{Precio de cada boleto} &= \$ 2. \end{aligned}$$

Ahora hallamos el valor de la grabadora:

\* Primer caso:

$$\text{Valor de la grabadora} = 600(2) - 560$$

$$\text{Valor de la grabadora} = 1200 - 560$$

$$\text{Valor de la grabadora} = 640$$

Respuesta: valor de la grabadora

\* Segundo caso:

$$\text{Valor de la grabadora} = 210(2) + 220$$

$$\text{Valor de la grabadora} = 420 + 220$$

$$\text{Valor de la grabadora} = 640 \quad \text{El costo de la grabadora es } 640.$$

**ESTRATEGIA HEURÍSTICA;** para resolver este problema aplicar ensayo - error.

Verificamos.

Método algebraico:

Sea:  $x$  = precio de cada boleto.

Del enunciado:

Para ganar \$. 560 en la rifa de una grabadora, se imprimieron 600 boletos

$$\text{Valor de la grabadora} = 600x - \$560 \dots\dots (I)$$

Del enunciado:

Solo se vendieron 210 boletos, originándose una pérdida de \$ 220.

$$\text{Valor de la grabadora} = 210x + \$220 \dots\dots(II)$$

Ahora, igualamos las ecuaciones (I) y (II):

$$600x - \$560 = 210x + \$220 \text{ trasponiendo términos.}$$

$$600x - 210x = \$220 + \$560$$

$$390x = \$780$$

$$x = \frac{\$780}{390}$$

$$x = \$2$$

El precio de cada boleto es \$.2

Luego reemplazamos el valor de:  $x = \$2$  en la ecuación (I)

$$\text{Valor de la grabadora} = 600x - \$560 \dots\dots\dots (I)$$

$$\text{Valor de la grabadora} = 600(2) - \$560$$

$$\text{Valor de la grabadora} = 1200 - \$560$$

$$\text{Valor de la grabadora} = 640$$

Respuesta: valor de la grabadora es 640.

**Problema 34:**

La temperatura en Macusani, una de las ciudades más frío de Puno, es de  $-7^{\circ}\text{C}$  por la tarde. Descubre en cuanto disminuye en temperatura por la noche, si llega a  $-10^{\circ}\text{C}$ .

Proceso de Solución:

Para resolver el problema aplicaremos la estrategia de ecuaciones para traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, Sea: x los grados que disminuye la temperatura, entonces.

$$(-7) - x = -10$$

$$(-7) + (-x) = -10$$

Por definición de sustracción aplicamos propiedad de monotonía, suma de opuestos por elemento de opuesto.

$$(-7) + (+7) + (-x) = -10 + (+7)$$

$$0 - x = -10$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

Respuesta: luego, por la noche, la temperatura en Macusani disminuye en 3°C.

Se aplica **ESTRATEGIA HEURÍSTICA** para resolver problema BUSCAR REGULARIDADES O UN PATRON. Esta estrategia empieza por considerar.

### Problema 35:

La grafica muestra el número de computadoras vendidas en 7 tiendas.

1er Bimestre

2do Bimestre

3er Bimestre

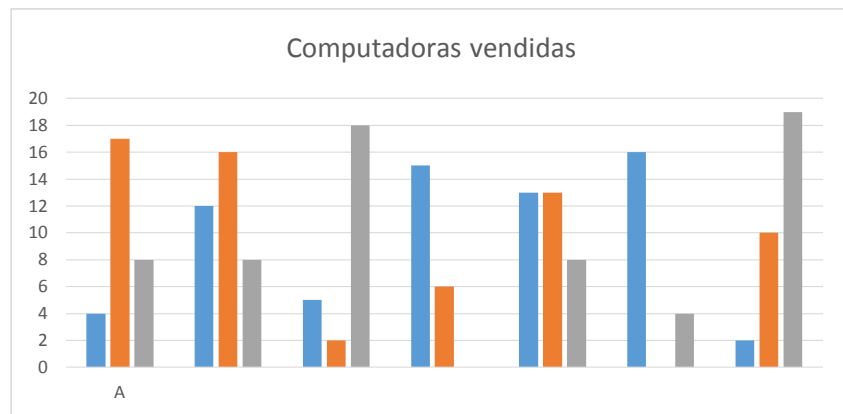


Gráfico 1. Número de computadoras vendidas

A partir de la gráfica anterior, responde.

¿Cuál de las tiendas presentó la mayor variación en sus ventas del 1er Bimestre al 2do Bimestre? ¿De cuánto fue esta variación?

Proceso de Solución.

Observar solo las barras naranjas (1er bimestre) y celeste (2do bimestre) en cada tienda y obtén la diferencia.

2do bimestre – 1er bimestre.

Para 1:  $17 - 4 = 13$

Para 2:  $16 - 12 = +14$

Para 3:  $2 - 5 = -3$

Para 4:  $6 - 15 = -9$

Para 5:  $13 - 13 = 0$

Para 6:  $0 - 16 = -16$

Para 7:  $10 - 2 = 8$

Luego la tienda 7 representa la mayor variación de ventas.

Aplicaremos estrategia **REPRESENTACION GRAFICA**, esta representación permite ubicar los datos del problema en la gráfica y nos muestra una visualización de lo que se tiene y podría realizar.

### **Problema 36:**

En una prueba de 20 preguntas, cuyo sistema de calificación es +5 puntos por pregunta bien contestada, 0 por cada pregunta sin contestar y -2 por pregunta mal contestada, un alumno que contesto correctamente 5 preguntas obtuvo +1 de calificación. ¿Cuántas preguntas mal contestadas tuvo y cuantos no?

Proceso de Solución:

Total de preguntas: 20, 5 preguntas bien contestadas, entonces  $5(+5) = +25$ .

Como las preguntas no contestadas tienen puntaje cero, para obtener +1 de calificación debe tener  $+1 - (+25) = -24$  puntos en

contra. Como cada pregunta mal contestada tiene un valor de  $-2$ , entonces  $-24 + -2 = 12$  pregunta mal contestada.

Finalmente, como en total son 20 preguntas, y respondió 5 correctas y 12 incorrectamente las respuestas:  $20 - 5 - 12 = 3$  preguntas no fueron contestadas.

Respuesta: luego, tuvo 12 preguntas mal contestadas y 3 no respondidas.

Para resolver este problema utilizar la estrategia de **PARTICULARIZAR**, para familiarizarse con el problema, de este modo es posible observar algún camino que guíe hacia la solución de un problema genérico.

### **Problema 37:**

En un grupo, la razón de hombres casados a solteros es de 5 a 3. Si hay 240 hombres en el grupo ¿Cuántos casados hay?

Proceso de Solución:

HC = Hombres casados

$$\rightarrow HC + HS = 240 \dots (I)$$

HS = Hombres solteros

$$\frac{HC}{HS} = \frac{5}{3} \quad HS = \frac{5}{3} HS \dots (II)$$

Reemplazando (II) en (I)

$$\frac{5}{3} HS + HS = 240$$

$$5HS + 3HS = 240 \times 3$$

$$HS = \frac{240 \times 3}{8}$$

$$HS = \frac{720}{8}$$

$$HS = 90$$

Hay hombres solteros = 90

Luego reemplazamos el valor de HS = 90 en la expresión (II):

$$HC = \frac{5}{3} (90) = 5(30) = 150$$

Hay hombres casados = 150

Respuesta: Hay hombres solteros = 90 y hombres casados=150

En la solución es, conviene utilizar la **ESTRATEGIA HEURÍSTICA** casos particulares y familiarizarse con el problema, de este modo es posible observar algún camino que guíe hacia la solución de un problema genérico.

Verificamos:

Si cada término de una fracción lo multiplicamos por una misma cantidad se obtiene una fracción equivalente.

Proceso de Solución:

HC = Hombres casados

$$\rightarrow HC + HS = 240.....(I)$$

HS = Hombres solteros

$$\text{O sea: } \frac{A}{B} = \frac{A.K}{B.K}$$

Además:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{HC}{HS} = \frac{5}{3} = \frac{5K}{3K} \\ \therefore \left. \begin{array}{l} HC = 5K \\ HS = 3K \end{array} \right\} \dots\dots\dots(II) \end{array} \right\}$$

Reemplazamos los valores de (II) en (I):

$$5K + 3K = 240$$

$$8K = 240$$

$$K = \frac{240}{8}$$

$$K = 30$$

Luego reemplazamos el valor de K = 30, en (II):

$$HC = 5K = 5(30) = 150$$

$$HS = 3K = 3(30) = 90$$

Respuesta: El número de hombres casados es 150 y hombres solteros es 90.

Verificamos:

Dado la proporción:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Entonces:  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

HC = Hombres casados

$$\rightarrow HC + HS = 240 \dots (I)$$

HS = Hombres solteros

Además:  $\frac{HC}{HS} = \frac{5}{3} \dots (II)$

Invertimos (II):  $\frac{HS}{HC} = \frac{3}{5}$

Aplicamos el teoremas 1 se tiene:

$$\frac{HS+HC}{HC} = \frac{3+5}{5} \dots (III):$$

Reemplazando la expresión (I) en (III):

$$\frac{240}{HC} = \frac{3+5}{5}$$
$$\frac{240}{HC} = \frac{8}{5}$$

Donde:

$$240 \times 5 = 8 \text{ HC}$$

$$\frac{240 \times 5}{8} = \text{HC}$$

$$\frac{1200}{8} = \text{HC}$$

$$150 = \text{HC}$$

Reemplazamos en la ecuación  $\frac{HC}{HS} = \frac{5}{3} \dots (II)$

$$\frac{HS}{HS} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{150}{HS} = \frac{5}{3}$$

$$150 \times 3 = 5 HS$$

$$450 = 5 HS$$

$$\frac{450}{5} = HS$$

$$90 = HS$$

Respuesta: El número de hombres casados es 150 y hombres solteros es 90.

**Problema 38:**

Dos números son entre si como 7 es a 3. Si la suma de dichos números es 800, hallar el menor.

Proceso de Solución:

Sea: a = número mayor  
 b = número menor

Del enunciado, planteamos la proporción siguiente:

$$\text{Mayor} \dots a = 7$$

$$\text{Menor} \dots b = 3$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$$

$$a = \frac{7b}{3} \dots \dots \dots (I)$$

Además la suma de dichos números es 800, o sea:  
 a + b = 800 \dots \dots \dots (II)

Reemplazamos (I) en (II) obtenemos:

$$7 + b = 800 \times 3$$

$$7b + 3b = 2400$$

$$10b = 2400$$

$$b = \frac{2400}{10}$$

$$b = 240$$

Respuesta: el menor de los números es igual 240

Se utilizara la **ESTRATEGIA HEURÍSTICA** de razonamiento lógico es muy importante, pues gracias a él podemos seguir los pasos y comprender las secuencias y cadenas que se producen para el desarrollo y resolución de problemas.

Verificamos:

Sean los números: “a” y “b”

Del enunciado, se obtiene que:

$$\left. \begin{array}{l} a = 7k \\ b = 3k \end{array} \right\} \dots\dots\dots(I)$$

Por dato  $a + b = 800$  (2)

Reemplazamos, los valores de (1) en (2):

$$7k + 3k = 800$$

$$10k = 800$$

$$K = \frac{800}{10}$$

Luego, reemplazamos el valor de  $k = 80$ , en (1); obteniendo:

$$a = 7k = 7(80) = 560 \text{ (n}^\circ \text{ mayor)}$$

$$b = 3k = 3(80) = 240 \text{ (n}^\circ \text{ menor)}$$

Respuesta: El menor de los números es igual a 240

Verificamos:

Sea los dos números: “a” y “b”

Del enunciado, se obtiene que:

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{3} \dots\dots\dots (I); \quad a + b = 800 \dots\dots\dots(II)$$

Aplicando el teorema 1 se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{7+3}{3} \dots\dots\dots (III)$$

Reemplazamos (II) en (III);

$$\frac{800}{b} = \frac{7+3}{3}$$

$$800 \times 3 = (7 + 3)b$$

$$2400 = 21b$$

$$\frac{2400}{21} = b$$

$$240 = b$$

Respuesta: El menor de los números es 240.

**Problema 39:**

Dos números son entre sí como 2 a 3; si la suma de sus cuadrados es 52, hallar el menor número positivo.

Proceso de solución:

$$(A/B)^n = \frac{A^n \times B^n}{C^n}$$

$$\bullet A^n = x$$

$$\bullet A = \sqrt[n]{x}$$

Sean los dos números: “a” y “b”

Del enunciado, obtenemos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

$$a = \frac{2b}{3} \dots\dots\dots(I)$$

Además:  $a^2 + b^2 = 52 \dots\dots\dots(II)$

Reemplazamos (I) en (II):

$$\left(\frac{2b}{3}\right)^2 + b^2 = 52$$

$$\frac{2^2 b^2}{3^2} + b^2 = 52$$

$$\frac{4b^2}{9} + b^2 = 52$$

$$4b^2 + 9b^2 = 52 \times 9$$

$$13b^2 = 468$$

$$b^2 = \frac{468}{13}$$

$$b^2 = 36$$

$$b = \sqrt{36}$$

$$b = 6$$

Luego, reemplazamos el valor de  $b = 6$ ; en (I)

$$a = \frac{2b}{3} \dots\dots\dots(I)$$

$$a = \frac{2 \times 6}{3}$$

$$a = \frac{12}{3}$$

$$a = 4$$

Respuesta: el menor de los números es 4

Siempre utilizar **ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS**, de casos particulares, para familiarizarse con el problema, de este modo es posible observar algún camino que guíe hacia la solución de un problema genérico.

Verificamos.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} \rightarrow \frac{a^n + b^n}{b^n} = \frac{c^n + d^n}{d^n}$$

Sean: los dos números: “a” y “b”

Del enunciado, obtenemos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots(I) ;$$

$$\text{además: } a^2 + b^2 = 52 \dots\dots\dots(II)$$

De la expresión (I):

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} ; \text{ elevamos al cuadrado ambos miembros:}$$

Obteniendo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{2^2}{3^2}$$

Recuerda:  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$  Aplicamos el teorema 1, en esta última expresión

se tiene que:

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{2^2 + 3^2}{3^2} \dots\dots\dots (III)$$

Reemplazamos en (II) en (III)

$$\frac{52^2}{b^2} = \frac{2^2 + 3^2}{3^2}$$

$$\frac{52^2}{b^2} = \frac{4 + 9}{9}$$

Dónde:  $52 \times 9 = 13 \times b^2$

$$\frac{468}{13} = b^2$$

$$36 = b^2$$

$$\sqrt{36} = b$$

$$6 = b$$

Reemplazamos el valor de  $b = 6$  ; en (I)

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

$$a = \frac{2}{3}(6)$$

$$a = \frac{12}{3}$$

$$a = 4$$

Respuesta: el menor de los números es 4 .

Verificamos.

Sean los dos números “a” y “b”

Del enunciado, se obtiene que:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2k \\ b = 3k \end{array} \right\} \dots\dots\dots(I)$$

Por dato:  $a^2 + b^2 = 52 \dots\dots\dots(2)$

Reemplazamos los valores de (1) en (2):

$$\begin{aligned} (2k)^2 + (3k)^2 &= 52 \\ 2^2k^2 + 3^2k^2 &= 52 \\ 4k^2 + 9k^2 &= 52 \\ 13k^2 &= 52 \\ k^2 &= \frac{52}{13} \\ k^2 &= 4 \\ K &= \sqrt{4} \\ K &= 2 \end{aligned}$$

Luego reemplazamos los valores de (1) en (2)

$$\begin{aligned} a &= 2k = 2(2) = 4 \\ a &= 4 \\ b &= 3k = 3(2) = 6 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Respuesta: el menor de los números es 4

**Problema 40:**

Juego de las corcho latas. En los tableros de las figuras hay corcho latas de dos colores. Pues bien, debes conseguir intercambiar las posiciones de las corcho latas teniendo en cuenta que ellas solo pueden avanzar ocupando la casilla que tienen delante si está vacía sobre una corcho lata de color distinto y ocupando la siguiente casilla siempre que esta esté vacía. ¿Cuántos movimientos como mínimo se realizarán para pasar todas las fichas grises al lugar de las naranjas y viceversa en la figura A

Figura: A



Figura 26: Movimientos de fichas

Proceso de solución:

Primero el juego con una corcholata de cada color, luego el de dos corcholatas de cada color, después el juego con tres corcholatas de cada color y, finalmente, el juego con cuatro corcholatas de cada color. Hay que registrar los movimientos que vayas efectuando en la tabla que se facilita e indicar el número de movimientos mínimos necesarios en cada caso:

Figura: B, hay 3 movimientos



Figura 27: Movimiento de una ficha

Figura: C, hay 8 movimientos



Figura 28: Movimiento de 2 fichas

Figura: D, hay 15 movimientos.



Figura 29: Movimiento de 3 fichas

En el juego lúdico se aplica la **ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS** más útiles para leyes generales o generalización y reglas de formación. Es también una de las estrategias más utilizada en la resolución de problemas

Verificación:

Completando la tabla.

Numero de figura	Numero de corcholatas	Orden de movimiento de los corcho latas según el color	Numero de movimientos mínimos
B	1	AGA 111	$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$
C	2	AGGAAGGA 12221	$8 = 9 - 1 = 3^2 - 1$
D	3		$15 = 16 - 1 = 4^2 - 1$
			$n^2 + 2n = n^2 - 1$

Cuadro 19: Solución de corcholatas

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

### 1. CONCLUSIONES.

- El presente trabajo de investigación nos permite afirmar que sea cumplido el objetivo general, y los objetivos específicos, como detallamos a continuación:
- Se seleccionaron las estrategias heurísticas de Miguel de Guzmán y de Polya, para la resolución de problemas de los estudiantes de primer grado de secundaria utilizando números enteros.
- El objetivo específico: 1 Se da, a conocer sobre la investigación de estrategias de problemas y una exhaustiva revisión bibliográfica sobre estrategias heurística en los números enteros, relacionados con la resolución de problemas. Tomando en cuenta el criterio de los grandes especialistas matemáticos como George Polya y Miguel de Guzmán, ellos aplican los pasos y secuencias para comprender y resolver problemas heurísticos.
- El objetivo específico: 2. Se desarrolló una serie de problemas tipos que se utilizaron con números enteros en los cuales se emplearon didácticamente las heurísticas.
- Objetivo específico: 3, Se cumplió con la secuencia de diseñar y seleccionar problemas aplicando estrategias

heurísticas para resolver problemas con números enteros con una secuencia de problemas aplicando tipos de estrategias didácticas para su aprendizaje y motivación adecuada.

- Objetivo específico: 4. Se desarrolló una Guía didáctica sobre estrategias heurísticas para resolución de problemas con números enteros. Así, podemos concluir que al aplicar estrategias heurísticas en los diferentes tipos de problemas, estamos escogiendo un camino sencillo y de fácil aplicación para tener éxito en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

## **2. RECOMENDACIONES**

- Realizar investigaciones futuras sobre las estrategias heurística en la resolución de problemas relacionados con números entero , teniendo como marco la teoría de registros de representación a los grandes matemáticos pero poniendo énfasis aplicando estrategias heurísticas
- Diseñar investigaciones integradas con el área de comunicación que permitan comprender, analizar para resolver problemas aplicando estrategias heurísticas relacionadas con los números entero.
- Que se deben proponer unidades didácticas en la cual se consideren las estrategias heurísticas para resolver problemas en el primer año de secundaria utilizando números enteros, tal como se indican en la presente guía didáctica.
- Proponer a las diversas instituciones educativas la aplicación de las estrategias de resolución de problemas con el propósito de beneficiar el aprendizaje del área de matemática, que como muy bien sabemos tiene una enorme importancia para el desarrollo integral de los alumnos.
- Debemos recomendar también, que el Ministerio de Educación realice procesos de evaluación sobre estrategias que están utilizando los docentes en un intento de elaborar

propuestas de mejora y que puedan resultar útiles en el proceso de formación integral de nuestros alumno

- Finalmente sugerir que el Gobierno Regional de Madre de Dios pueda desarrollar programas de capacitación para con el apoyo los docentes de la especialidad con el objeto de implementar la utilización de las estrategias heurísticas de resolución de problemas en los colegios, particularmente en el nivel secundario.



## FUENTES DE INFORMACIÓN

---

### **Bibliografía:**

- Acuña, R. (2010). *”Resolución De Problemas Matemáticos y el Rendimiento Académico en Alumnos de Cuarto de Secundaria Del Callao”* Tesis Maestría. Universidad San Ignacio De Loyola.
- Abrantes, Paulo y Otros (2002): *La Resolución de Problemas en Matemáticas. Teoría y Experiencias*. España. Editorial Laboratorio Educativo.
- Azañero, L. (2013). *”Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales”*. Tesis Maestría, Pontificia Universidad Católica Del Perú.
- Ávila, R. (2003). *La investigación-acción pedagógica. Experiencias y lecciones*. Bogotá-Colombia: Ediciones Antropos.
- Abrantes, Paulo y Otros (2002): *La Resolución de Problemas en Matemáticas. Teoría y Experiencias*. España. Editorial Laboratorio Educativo.
- Arcavi y Friedlander, (2007); Yeap, Ferrucci, y Carter, (2006). *curriculum developers and problem solving the case of Israeli elementary school projects: ZDM mathematics education*. Brihuega; M. Molero; A. Salvador. (1994) (2002) *didáctica de las*

matemáticas. Formación de profesores de educación. Secundaria. Editorial complutense. Madrid.

- Caballero, A. (2013). *“Diseño aplicación y evaluación de un programa de intervención en control emocional y resolución de problemas matemáticos para Maestros de formación Inicial”* Tesis Doctoral. España. Universidad de Extremadura
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Editorial Pueblo y Educación. C. H. Cuba.
- Cuicas, M. (1999). Procesos Meta cognitivos desarrollados por los alumnos cuando resuelven problemas matemáticos. *Enseñanza de la Matemática*, 8(2), 21-29
- Contreras, B. (2005). *“La integración de la tecnología y la resolución de problema, un escenario de enseñanza aprendizaje en la asignatura de matemática. Tesis para optar el grado de Magister en Educación C/M. Informática Educativa. Universidad de Chile”*. Recuperado el 3 de julio del 2015 en: [http://www.cybertesis.cl/tesis/uchile/2005/contreras\\_b/sources/contreras\\_b.pdf](http://www.cybertesis.cl/tesis/uchile/2005/contreras_b/sources/contreras_b.pdf)
- Celi, C, F. (2014). *” Propuesta metodológica basada en los conocimientos científicos de george polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos, de los estudiantes de décimo año de educación general básica del “itsdab”, 2012-2013, de la ciudad de Loja – Ecuador”*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Piura
- Dewey, J. (1910). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona. Editorial Paidós Traducción al castellano 1989.
- Dijkstra, E. (1991). Instructional design models and the representation of knowledge and skills. *Educational Technology*, pp.19-26.
- Diccionario de la lengua española (2001:771) de Real Academia Española

- Diccionario de la lengua española (2009) Real Academia Española
- Diccionario Pedagógico (Crisólogo: 1999).
- Gaos, J. (1974) “*Notas sobre la historiografía*”, en Álvaro Matute, *La teoría de la historia en México, 1940-1973*, México, Sep, 1974.
- Diccionario de la Real Academia Española (2010:1203)
- Diccionario Pedagógico (1985).
- Diccionario de las Ciencias de la educación de Santillán (1983:1147)
- Diccionario filosófico de Walter Brugger (1972:421)
- Gil, D. (1993). Contribución de la Historia y de la Filosofía de las Ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación. *Enseñanza de las Ciencias* 11 (2), 197-212.
- Guzmán, M. (1994). El papel del matemático en la Educación Matemática. Actas del 8vo. Congreso Internacional de Educación Matemática.
- Guzmán, M. (1991): Para pensar mejor. Labor, Barcelona.
- Guzmán, M (2001:274) La enseñanza de las ciencias y la matemática. España. Editorial Popular
- Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). Metodología de la Investigación (4th ed.). México: McGraw-Hill.
- Hidalgo, B. (2000). Nuevas estrategias para facilitar el aprendizaje significativo. Lima: Editorial INADEP
- Mason, F. (1985). Phenomenography. Describing conceptions of the world arounds Instructional Science, 10, (pp. 117-200).
- Mazarío, I. (2000). Propuesta de un sistema de acciones para estructurar

la habilidad resolver problemas. En Colectivo de autores de Universidad del Ministerio de Educación Superior (Eds.), Resolución de problemas, pp. 10-15. Cuba: Editorial Universitaria del Ministerio de Educación Superior.

Mason, J., Burton, L., STACEY, K. (1988): Pensar matemáticamente. Labor-M.E.C., Barcelona

Martínez-Otero, V. (1997). Los adolescentes ante el estudio. Madrid: Fundamentos.

Martínez, M. J. (2005). Problemas escolares: dislexia, descalfar, dislalia. Editorial Cincel. Madrid

Nikless .T (1987). Methodology, heuristics and rationality.

Monero (1995:P20) método de estrategias heurísticas  
<https://fofohr.files.wordpress.com/2009/10/los-metodos-heuristicos.docx>

Duhalde y González (1997:p 106) método heurístico  
<https://fofohr.files.wordpress.com/2009/10/los-metodos-heuristicos.docx>

Mayer, R. (1993). Resolución de problemas y cognición. Barcelona: Editorial Paidós.

Mayer, R (1983). Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición. (Trad. Graziela Baravalle). Serie Cognición y Desarrollo Humano. Paidó

Micheline, Ch. y Glaser, R. (1986). Capacidad de resolución de problemas. En Las capacidades humanas. (pp. 293-323). Ed. Labor Universitaria. Barcelona. España.

Ministerio de Educación que propone las Rutas de aprendizaje (2015).

OCDE. PISA. (2012). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco para la evaluación. Ministerio de*

*Educación, Cultura y Deporte*. Madrid, España: INCE.

Parra, C. (1994). Didáctica de las matemáticas. Quito - Ecuador: Pardos.

Pino Ceballos, J. P. (2012) “*Concepciones prácticas de los estudiantes de pedagogía media en matemática con respecto a la resolución de problema y, diseño e implementación de un curso para aprender a enseñar a resolver problemas*” Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura.

Pirela, W. (2011). “*El efecto de un programa de intervención pedagógica sobre el aprendizaje de las operaciones matemáticas básicas*” Tesis Maestría. Universidad del Zulia, república bolivariana de Venezuela.

Pérez Rodríguez (2005) propone diseño instruccional la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje en la matemática

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving*. Vol. 1. Ed. John Wiley and Sons, Inc. USA.

Polya, 1965, p. 102). Sobre la resolución de problemas; en. *Operaciones trillas México*.

Polya, G. (1987): cómo plantear y resolver problemas. trillas, México.

Polya, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas* (3ra. ed.). México D F: Trillas.

Polya, G. (1942). *Como plantear y resolver problemas*. Trillas.

Polya (1945 como plantear y resolver problemas: Trillas

Puig, L., (1996). *Elementos de resolución de problemas*. España: Comares.

Poggioli (1999:26), descripción teórica: resolución de problemas:

- Pozo M, Juan y Otros (1994): La Solución de Problemas. Madrid. Editorial Santillana S.A.
- Pujol Balcells, J. y Fons M, J. L. (1981) Los Métodos en la Enseñanza Universitaria EUNSA. Pamplona
- Proyecto ALDA EDUCA. Material de apoyo, elaborado en base al libro “Para pensar mejor” del autor Miguel de Guzmán (Labor, Barcelona, 1991)
- Ramírez, M. (2007) Estrategias didácticas para una enseñanza de la matemática centrada en la resolución de problemas. (Tesis Doctoral). Lima, Perú: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- RAE, 2012,: *"Técnica de la indagación y del descubrimiento. Para resolver problema mediante métodos no rigurosos"*
- Roque Sánchez, J, W. (2009).” *Influencia de la enseñanza de la matemática basada en la resolución de problemas en el mejoramiento del rendimiento académico*”
- El Ministerio de Educación (2015:50.): resolver problemas. A través de las Rutas de Aprendizaje propone. Tesis Maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Schoenfeld, A. (1987). Mathematics, Technology and Higher Order Thinking. In Technology in Education Series. (pp. 67- 95). LEA Publishers. New Jersey. USA.
- Schoenfeld, A. (1992).learning to think Mathematically, problem solving. Matecognition, sense making in mathematics.In D.A. Grouws (ed) Homdbook of research on mathematies teaching and learning New York Macmillan
- Schoenfeld, A. (1985). Sugerencias para la enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. Madrid. En Separata del libro “*La enseñanza de la matemática a debate*”. Ministerio de Educación y Ciencia.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. California: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. California: Academic Press.

Torres, M., Lajo, R., Campos, E. y Riveros, M. (2007:102). Rendimiento académico de los alumnos de una facultad de educación de una universidad pública de Lima y su percepción de la calidad académica de los docentes. *Revista IIPSI*. Facultad de Psicología. Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Vygostky, L. (1991). *Problemas teóricos*.

Valera, T. (2006). *”Estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los alumnos de 7mo grado de educación básica”*. Tesis Maestría, Venezuela, Universidad del Zulia.

Van Hiele levels and achievement in secondary school Geometry, Department of Education, University of Chicago, 1986

### **Web grafía:**

Amanda, Ruth (2005) *La Investigación en el Aula y la Innovación Pedagógica*. En: Autores Varios. *Experiencias Docentes, Calidad y Cambio Escolar*. Recuperado en <http://www.lablaa.org/blaavirtual/educación/expedocen/expedocen8a.htm>

Azinian, H: Resolver problemas matemáticos. Recuperado en <http://www.unlu.edu.ar/~dcb/matemat/como1.htm>

Contreras, B. (2005). *“La integración de la tecnología y la resolución de problema, un escenario de enseñanza aprendizaje en la asignatura de matemática. Tesis para optar el grado de Magister en Educación C/M. Informática Educativa. Universidad de Chile”*. Recuperado el 3 de julio del 2015 en: [http://www.cybertesis.cl/tesis/uchile/2005/contreras\\_b/sources/contreras\\_b.pdf](http://www.cybertesis.cl/tesis/uchile/2005/contreras_b/sources/contreras_b.pdf)

- Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la RSME. Recuperado de <http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf>
- Dunker .D (1945) propuso problemas de cajas para estudiar solución de problemas [psicologo.com/2014/08/el-problema-de-la-vela-de-dunker.html](http://psicologo.com/2014/08/el-problema-de-la-vela-de-dunker.html)
- Contreras, B. (2005). “La integración de la tecnología y la resolución de problema, un escenario de enseñanza aprendizaje en la asignatura de matemática. Tesis para optar el grado de Magister en Educación C/M. Informática Educativa. Universidad de Chile”. Recuperado el 3 de julio del 2015 en: [http://www.cybertesis.cl/tesis/uchile/2005/contreras\\_b/sources/contreras\\_b.pdf](http://www.cybertesis.cl/tesis/uchile/2005/contreras_b/sources/contreras_b.pdf)
- Matute,A (1999) historia dela heurística aprender a aprender [http://computo.ceiich.unam.mx/webceiich/docs/libro/Heuristica\\_e\\_historia.pdf](http://computo.ceiich.unam.mx/webceiich/docs/libro/Heuristica_e_historia.pdf)
- Lorenzo (2005) adquisición de las competencias básicas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Recuperado en 14 de Abril [www.ehu.es/ikastorratza/10\\_alea/matematika.pdf](http://www.ehu.es/ikastorratza/10_alea/matematika.pdf)
- Poggioli, Lisette. Estrategias de Resolución de problemas. Recuperado en marzo 23 2015 en <http://www.fpolar.org.ve/poggioli/pogg>
- Viar Pérez (4 de Noviembre de 2005) introducción de que es problema. Recuperado en: <https://www.unizar.es/ttm/2005-06/>
- Valverde, L. (2003). Los métodos de enseñanza-aprendizaje. Sesión 4. La heurística. Diplomado en didáctica Universitaria. Universidad de Medellín, Colombia. Recuperado el 22 de marzo de 2015, de [dohttp://webapps.udem.edu.co/RenovacionCurricular/Descargas/DiplomadoDidactica/OtroDocumentos/La%20Heuristica.pdf](http://webapps.udem.edu.co/RenovacionCurricular/Descargas/DiplomadoDidactica/OtroDocumentos/La%20Heuristica.pdf)

Vilanova, S. (s.f) *El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje.* Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/203vilanova.pdf>

Villalobos, X. (2008). Resolución de problemas matemáticos: un cambio epistemológico con resultados metodológicos. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación.* 3 (1) 36 - 58. Recuperado el 5 de enero del 2015 en: <http://www.rinace.net/arts/vol6num3/Vol6,3.p>

Zabala, M. El proceso de la investigación cualitativa en educación. *Rev Cient CEPIES* [online]. 2009, vol.1, n.1 [citado 2015-05-26], pp. 113-130. Disponible en: <[http://www.revistasbolivianas.org.bo/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1490-23512009000100010&lng=es&nrm=iso](http://www.revistasbolivianas.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1490-23512009000100010&lng=es&nrm=iso)>. ISSN 1490-2351.



## ANEXOS

---

### Anexo 1. Matriz de problema de investigación

TEMA	PROBLEMA	OBJETIVO GENERAL
SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS CON NÚMEROS ENTEROS EN PRIMER GRADO SECUNDARIA.	¿Qué tipo de estrategias heurísticas se debe utilizar para resolver problemas en números enteros?	Seleccionar estrategias heurísticas para la resolución de problemas de los estudiantes de primer grado de secundaria utilizando números enteros.

## **Anexo 2. MATRIZ DE PROBLEMA DE INVESTIGACION**

PROBLEMA	OBJETO DE ESTUDIO	VARIABLES ESTUDIO	VARIABLES/CATEGORIAS
¿Qué tipo de estrategias heurísticas se debe utilizar para resolver problemas en números enteros?	Selección de estrategias heurísticas para resolver problemas de matemática en los números enteros,	ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ESTRATEGIAS HEURISTICAS:               <ul style="list-style-type: none"> <li>● Utilizar Ensayo Error</li> <li>● Buscar semejanza con otros problemas.</li> </ul> </li> <li>➤ RESOLUCION DE PROBLEMA:               <ul style="list-style-type: none"> <li>● Familiarización con el problema</li> <li>● Búsqueda de estrategia</li> <li>● Llevar adelante la estrategia</li> <li>● Revisar el proceso y sacar conclusiones de el</li> </ul> </li> </ul>
<b>RESULTADO DE ANALISIS MADIANTE LA TECNICA DE ARBOL DE PROBLEMAS</b>			
<b>OBJETIVOS GENERALES:</b> Seleccionar estrategias heurísticas para la resolución de problemas de los estudiantes de primer grado de secundaria utilizando números enteros	<b>CAUSAS:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Inadecuada comprensión de lectura para resolver problemas.</li> <li>● Los docentes desconocen estrategias y métodos heurísticos para la resolución de problemas en los enteros,</li> <li>● Los docentes no aplican adecuadamente estrategias y métodos en la resolución de problemas con los enteros,</li> </ul>		<b>CONSECUENCIAS:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Poco interés en la solución de problemas.</li> <li>● Alumnos desmotivados.</li> <li>● No resuelven problemas y no desarrollan su capacidad de razonamiento.</li> </ul>
	<b>OBJETIVOS ESPECIFICOS:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Conocer sobre las estrategias heurísticas y la resolución de problemas.</li> <li>● Desarrollar una serie de problemas tipos que utilizan números enteros en los cuales didácticamente emplearemos las heurísticas.</li> <li>● Reconocer que las estrategias aplicadas, son viables teórica y didácticamente.</li> <li>● Elaborar una Guía didáctica sobre estrategias heurísticas para la resolución de problemas con números enteros.</li> </ul>		<b>RESULTADOS ESPERADOS:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>● Que el docente debe buscar nuevas soluciones, ser innovador en búsqueda de nuevas estrategias.</li> <li>● Sesiones más motivados para la solución de problemas</li> <li>● Estudiantes más creativos y activos para desarrollar problemas, de todo tipo con estrategias heurísticas</li> </ul>

**Anexo 3. IDENTIFICACIÓN DE LAS VARIABLES O CATEGORÍAS DE LA INVESTIGACIÓN**

PROBLEMA	OBJETIVOS	VARIABLES (CATEGORIAS)	SUB CATEGORIAS / DIMENSIONES
¿Qué tipo de actividades se deben seleccionar para aplicar las estrategias heurísticas en la resolución de problemas con números enteros?	Seleccionar actividades para aplicar estrategias heurísticas en la resolución de problemas con números enteros	ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS	Utilizar el ensayo error
			Buscar semejanza con otros problemas
		RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Familiarización con el problema
			Búsqueda de estrategia
			Llevar adelante la estrategia
			Revisar el proceso y sacar conclusiones de él.

**Anexo 4. IDENTIFICACIÓN DE LAS VARIABLES O CATEGORÍAS DE LA INVESTIGACIÓN**

VARIABLE DE ESTUDIO	DIMENSIONES /CATEGORIAS	INDICADORES
ESTRATEGIAS HEURISTICAS	UTILIZAR ENSAYO - ERROR	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolver problemas.</li> <li>• Probamos si esta solución satisface las condiciones del problema.</li> <li>• Modificamos la solución escogida en función del resultado obtenido y repetimos el proceso hasta obtener la solución correcta.</li> </ul>
	BUSCANDO SEMEJANZA CON OTROS PROBLEMAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Estructure todo el problema en grupos de problemas más sencillos.</li> <li>• Aplicación un método de enseñanza – aprendizaje en el diseño de estrategias para la semejanza con otros problemas matemáticos, estimula el aprendizaje de los estudiantes en los contenidos que imparte.</li> </ul>
RESOLUCION DE PROBLEMAS	FAMILIARIZACION CON EL PROBLEMA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tener una idea clara de los elementos que intervienen en el problema.</li> <li>• Dedique tiempo a pensar, plantear y reconsiderar la estrategia antes de resolver el problema</li> <li>• Al llegar la solución es importante revisar del proceso y consecuencias del problema.</li> </ul>
	BUSQUEDA DE ESTRATEGIAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Buscar estrategias que nos permite resolver problemas.</li> <li>• Hacer un esquema, para resolver problemas.</li> <li>• Escoger un lenguaje apropiado, para resolver problemas.</li> <li>• Aplicar métodos de inducción.</li> </ul>
	LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te haya ocurrido en la fase anterior.</li> <li>• Al llegar la solución es importante revisar del proceso y secuencia del problema.</li> <li>• Encuentras un camino más simple</li> <li>• Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.</li> </ul>
	REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONCLUSIONES CON EL	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Corregir los pasos</li> </ul>

**Anexo 5. DISEÑO DE INVESTIGACION (INVESTIGACION CUALITATIVA)**

OBJETIVOS ESPECIFICO	ACTIVIDADES	RECURSOS Y MATERIALES	FUENTES DE VERIFICACION	CRONOGRAMA
Conocer sobre las estrategias heurísticas y la resolución de problemas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Realiza una revisión bibliográfica de las fuentes.</li> <li>➤ Realizan una revisión de diversas tesis sobre estrategias heurística en los números enteros relacionados con la resolución de problemas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Textos</li> <li>➤ Tesis</li> <li>➤ revistas</li> <li>➤ Página web</li> <li>➤ Experiencias profesionales.</li> <li>➤ Blog de matemática</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Planteamiento del problema de investigación.</li> <li>➤ Marco teórico</li> <li>➤ Metodología de la investigación.</li> </ul>	Octubre al Noviembre de 2014
Desarrollar una serie de problemas tipos que utilizan números enteros en los cuales didácticamente emplearemos las heurísticas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Realizan una revisión bibliográfica sobre resolución de problemas en la enseñanza de números Enteros.</li> <li>➤ Realizan una revisión bibliográfica sobre tipos de problemas en números Enteros</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Tesis.</li> <li>➤ Textos sobre estrategias en resolución de problemas en Enteros.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Anexo (1)</li> <li>➤ Manual de problemas</li> </ul>	Octubre a diciembre del 2014
Reconocer que las estrategias aplicadas, son viables teórica y didácticamente.	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Elaborar en cuatro las estrategias heurísticas.</li> <li>➤ Realizan una revisión bibliográfica seleccionan de estrategias heurísticas.</li> <li>➤ Diseñan problemas de acuerdo a las estrategias heurísticas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Textos de primero de secundaria.</li> <li>➤ Textos de rutas de aprendizaje, en estrategias heurísticas.</li> <li>➤ Tesis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Anexo (2)</li> <li>➤ Cuadro de estrategias heurísticas</li> </ul>	Marzo a agosto de 2015
Elaborar una Guía didáctica sobre estrategias heurísticas para la resolución de problemas con números enteros.	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Resuelve los problemas seleccionadas por diferentes métodos.</li> <li>➤ Aplica las estrategias heurísticas</li> <li>➤ Aplica los procedimientos de MIGUEL DE GUZMAN</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Experiencia profesional.</li> <li>➤ Internet.</li> <li>➤ Esquema de propuesta.</li> <li>➤ Esquema de actividades.</li> </ul>	Manual de problemas y solución de números enteros	Marzo a agosto de 2015