CAPÍTULO 24: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS (II)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 24: Resolución de Triángulos Esféricos (II)

B. Resolución de triángulos esféricos rectángulos

1. **Algunas fórmulas**
2. **Teorema**

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

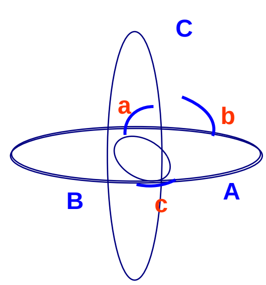
10 diapositivas

CAPÍTULO XXIV:RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

B. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS
   1. Algunas fórmulas
   2. Teorema

1. Algunas Fórmulas

Llamaremos **A al ángulo recto**; por analogía con los triángulos planos, al lado “**a**” le llamaremos **hipotenusa** y a **“b” y “c” catetos.**

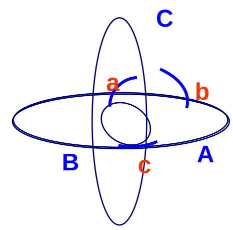


Dado que Sen A = 1 y Cos A = Cot A = 0 , algunas de las fórmulas anteriores se simplifican.

1. Algunas Fórmulas

El conjunto de fórmulas que exponemos a continuación, son suficientes para resolver cualquier triángulo rectángulo del que se tengan suficientes datos:

$$\boxed{\frac{senA}{sen\,a}=\frac{sen\,B}{sen\,b}=\frac{senC}{senc}}$$

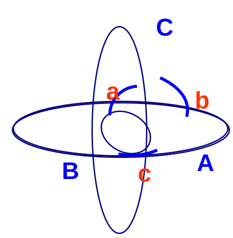


Proceden del **teorema de los senos**:

1. sen b = sen a . sen B
2. sen c = sen a . sen C

1. Algunas Fórmulas

$$\boxed{\begin{aligned}\cos a &= \cos b.\cos c + senb.senc.\cos A\\ \cos b &= \cos a.\cos c + sena.senc.\cos B\\ \cos c &= \cos a.\cos b + sena.senb.\cos C\end{aligned}}$$

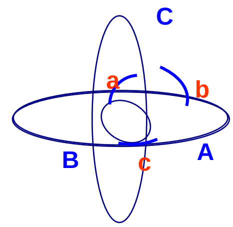


Proceden del **teorema de los cosenos de los lados**:

3. cos a = cos b . cos c

1. Algunas Fórmulas

$$\cos A = -\cos B.\cos C + senB.senC.\cos a$$
$$\cos B = -\cos A.\cos C + senA.senC.\cos b$$
$$\cos C = -\cos A.\cos B + sen\,A.senB.\cos c$$

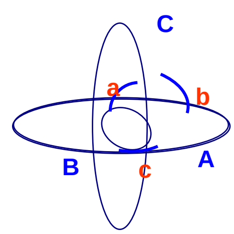


Proceden del **teorema de los cosenos de los ángulos**:

4. cos a = cot B . cot C
5. cos B = cos b . sen C
6. cos C = cos c . sen B

1. Algunas Fórmulas

$$\cot a.sen\,b = \cos b.\cos C + sen\,C.\cot A$$
$$\cot a.sen\,c = \cos c.\cos B + senB.\cot A$$
$$\cot b.sen\,a = \cos a.\cos C + sen\,C.\cot B$$
$$\cot b.sen\,c = \cos c.\cos A + senA.\cot B$$
$$\cot c.sen\,a = \cos a.\cos B + senB.\cot C$$
$$\cot c.sen\,b = \cos b.\cos A + senA.\cot C$$



Proceden del **fórmulas auxiliares, grupo B** :

7. cos C = cot a . tan b
8. cos B = cot a . tan c
9. sen c = cot B . tan b
10. sen b = cot C . tan c

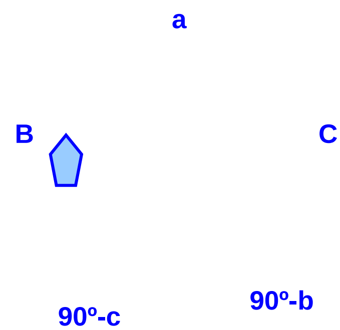
1. Algunas Fórmulas

Estas fórmulas son muy fáciles de obtener cuando se aplica la **regla mnemotécnica de Neper**:

"Puestos en orden circular los elementos 90º-b, 90º-c, B, a y C, se verifica que el coseno de cada elemento es igual al producto:

a) de las cotangentes de los adyacentes

b) de los senos de los opuestos".



Una buena manera de obtener el orden circular es dibujar el "**Pentágono de Neper**":

1. Algunas Fórmulas

Ejemplo:

a tiene como adyacentes **B** y **C**; luego :

cos a = cot B . cot C

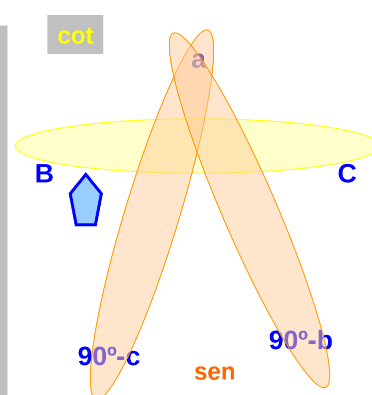
que coincide con la fórmula Nº 4 anterior.

a tiene como opuestos **90°- b** y **90°- c**; luego

cos a = sen(90-b).sen(90-c)

cos a = cos b . cos c

que coincide con la fórmula Nº 3 anterior.



Lo mismo puede hacerse con los restantes elementos del pentágono de Neper.

1. Algunas Fórmulas

A veces, al resolver un triángulo rectángulo, se presentan **ángulos que se obtienen en base a calcularlos a partir del seno**, lo que hace que se puedan obtener 2 valores del ángulo o del lado (uno de ellos agudo y otro obtuso); para eliminar las soluciones falsas es muy útil el teorema siguiente:

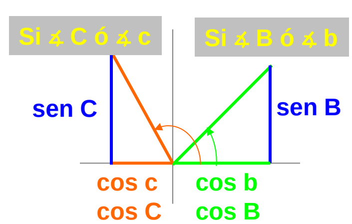
2. Teorema

TEOREMA XXIV-4

Un cateto y su ángulo opuesto son simultáneamente agudos u obtusos.

Demostración:

De las fórmulas 5 y 6 del apartado anterior:



$$\cos B = \cos b.senC$$

$$\cos C = \cos c.senB$$

Se deduce que, siendo sen C y sen B siempre positivos, cos B y cos b por un lado, y cos C y cos c por otro, tendrán el mismo signo; y por tanto corresponderán a parejas de ángulo y lado ambos agudos o ambos obtusos.