



UNIVERSIDAD  
DE PIURA

REPOSITORIO INSTITUCIONAL  
**PIRHUA**

# CAPÍTULO 20: NÚMEROS COMPLEJOS (I)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas



Esta obra está bajo una [licencia](#)  
[Creative Commons Atribución-](#)  
[NoComercial-SinDerivadas 2.5 Perú](#)

Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura



# UNIVERSIDAD DE PIURA

---

## Capítulo 20: Números Complejos (I)

### 1. Conocimientos previos

## GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA CLASES

---

---

# CAPÍTULO XX

---

## NUMEROS COMPLEJOS

### 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

---

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### ¿Qué es un número complejo?

Los **Números Complejos** son una extensión de los números reales, cumpliéndose que

$$R \subset C$$

- Los **números reales** son números usados para representar una cantidad continua (incluyendo el cero y los negativos). Se puede pensar en un número real como una fracción decimal posiblemente infinita, como 3.141592.... Los números reales tienen una correspondencia biunívoca con los puntos en una línea.

- Se denomina número real a todo elemento perteneciente al conjunto formado por la unión de los **números enteros**, el cuerpo de fracciones asociado al conjunto anterior (**números racionales**) y el conjunto de los **números irracionales** (los no expresables mediante una fracción).

---

---

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### ¿Qué es un número complejo?

Los números complejos tienen la capacidad de representar todas las raíces de los polinomios (Raíz: valor que toma la variable independiente de una función matemática que hace que la variable dependiente tome el valor de cero), cosa que con los reales no era posible.

Esto se consigue gracias a que los complejos hacen uso de una unidad imaginaria llamada número  $i$ , que verifica la propiedad:  $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$

---

---

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### Representación binomial (rectangular)

Cada complejo se representa en forma binomial como:

$$z = a + bi = bi + a = ib + a = a + ib$$

$a$  es la parte real del número complejo  $z$ ,

$ib$  es su parte imaginaria.

Esto se expresa así:

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$ib = \operatorname{Im}(z)$$

$a$  y  $b$  son números reales

---

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### Un poco de historia

La primera referencia conocida a raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de los matemáticos griegos, como [Herón de Alejandría](#) en el siglo I antes de Cristo, como resultado de una imposible sección de una pirámide.

Los complejos se hicieron más patentes en el Siglo XVI, cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como [Tartaglia](#), [Cardano](#). Aunque sólo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos.

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### El nacimiento de los números complejos

*Quando che'l cubo con le cose appresso  
se agguaglia a qualche numero discreto:  
trovan dui altri, diferente in esso.*

*Dapoi terrai, questo per consueto,  
che'l loro prodotto, sempre sia eguale  
al terzo cubo della cose neto;*

*el residuo poi suo generale,  
delli lor lati cubi, ben sottratti  
varra la tua cosa principale.*

*In el secondo, de cotesti atti;  
quando che'l cubo restasse lui solo,  
tu osserverai quest'altri contratti,*



*del numer farai due tal part'a volo,  
che l'una, in l'altra, si produca schietto,  
el terzo cubo delle cose in stolo;*

*delle quali poi, per commun precetto,  
torrai li lati cubi, insieme gionti,  
et co tal somma, sarà ii tuo concetto;*

*el terzo, poi de questi nostri cónti,  
se solve col segundo, se ben guardi  
che per natura son quasi congionti.*

*Questi trovai, et non con pasi tardi  
nell mille cinquecent'e quatro e trenta;  
con fondamenti ben saldi, e gagliardi;  
nella città del mar'intorno centa.*

**Niccolo Fontana Tartaglia**  
(1499-1557)

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### El nacimiento de los números complejos

*Quando che'l cubo con le cose appresso  
se agguaglia a qualche numero discreto:  
trovan dui altri, diferente in esso.*

*Dapoi terrai, questo per consueto,  
che'l loro prodotto, sempre sia eguale  
al terzo cubo della cose neto;*

*el residuo poi suo generale,  
delli lor lati cubi, ben sottratti  
varra la tua cosa principale.*

*"Cuando el cubo con las cosas cerca,  
se iguala a cualquier número discreto,  
se encuentran otros dos, diferentes en eso,*

*Después tendrás esto por norma  
que su producto sea siempre igual  
al tercio cubo de las cosas limpio;*

*el resto después suyo general  
de sus lados el cubo bien restado  
verás tu cosa principal";*

$$x^3 + px = q$$

$$u - v = q$$

$$uv = (p/3)^3$$

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

Es decir, en el lenguaje matemático moderno: Si el cubo  $x^3$  más un múltiplo  $px$  de la cosa, incógnita, es igual a un cierto número  $q$ , determinemos, por los métodos habituales, dos números  $u$  y  $v$  cuya diferencia sea  $q$  y cuyo producto sea el cubo del tercio del coeficiente de la incógnita; se extraen sus raíces cúbicas, y, restándolas, se tiene el valor de  $x$ , valor que, como se puede comprobar, está obtenido por el mismo método que suele explicarse en los tratados de Álgebra.

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### Un poco de historia

([Jérôme Cardan](#); Pavía, actual Italia, 1501-Roma, 1576) Matemático italiano. Publicó su obra científica más importante, el *Ars magna*, donde se recoge un exhaustivo estudio de las ecuaciones de tercer grado o cúbicas, y en la que se ofrece la regla para la resolución de las mismas que lleva su nombre. Por la publicación de dicho resultado fue duramente criticado por el también matemático [Niccolò Tartaglia](#), quien se lo había revelado con la condición de que lo mantuviera en secreto y no lo divulgara, si bien Cardano, al descubrir otra fuente en la que se contenía dicha regla, se creyó liberado de su promesa.



## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### Un poco de historia

**TARTAGLIA Nicolo (1500-1557)**. Nació en Brescia y murió en Venecia. Su verdadero nombre era **Nicolo Fontana**, pero fue apodado Tartaglia por su tartamudez, causada por una cuchillada propinada por un soldado francés, que le derivó secuelas en el habla. Fue el primero en idear un procedimiento general de resolución de ecuaciones de tercer grado, manteniendo en secreto sus métodos. Cardano le engañó bajo la promesa de mantener en secreto estos métodos, pero faltando a su honor los publicó. En 1537 publicó su primer libro sobre teoría balística.



## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### Un poco de historia

El término **imaginario** para estas cantidades fue acuñado por Descartes en el Siglo XVII.

La existencia de números complejos no fue completamente aceptada hasta la más abajo mencionada interpretación geométrica que fue descrita por **Wessel** en 1799, redescubierta algunos años después y popularizada por **Gauss**. La implementación más formal, con pares de números reales fue dada en el Siglo XIX.



Los números complejos fueron empleados con libertad por **Raffaele Bombelli** (1530 – 1572) en su Algebra, Bolonia.



**René Descartes**  
(1596-1650)

60 años después de Bombelli:

*“A pesar de que podemos pensar que la ecuación  $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$  tiene tres raíces, únicamente una de ellas es real, la cual es 2, y las otras dos...son simplemente imaginarias.”*

René Descartes  
"La Géométrie" (1637)



**Gottfried von Leibniz**  
(1.646 – 1.716)

*“Los números imaginarios son un excelente y maravilloso refugio del Espíritu Santo, una especie de anfibio entre ser y no ser”*

Otros términos que han sido usados para referirse a los números complejos incluyen :

*“Sofisticados”* (Cardano)

*“Sin sentido”* (Néper)

*“Inexplicables”* (Girard)

*“Incomprensibles”* (Huygens)

*“Imposibles”* (Diversos autores)

## Leonhard Euler (1.707 – 1.783)



Con Euler los imaginarios se incorporan definitivamente en la Matemática.

“... formulam  $\sqrt{-1}$  littera  $i$  ...”  
Leonhard Euler (1777)

$i^2 = -1$ ; introdujo la notación binómica.  
Demostró que el conjunto de los números  
“imaginarios” era cerrado para las  
cuatro operaciones básicas, así como  
para la potenciación y la radicación.

“Estos números no son nada,  
ni menos que nada, lo cual  
necesariamente los hace  
imaginarios, o imposibles”.

“Nuestra aritmética (...),  
constituye la creación  
de los tiempos modernos,  
(...).  
A los números enteros se  
han agregado las fracciones;  
a las cantidades racionales,  
las irracionales;  
a las positivas, las negativas;  
y a las reales, las imaginarias”.



“Números *íntegros* **complexos**” Karl Friedrich **Gauss**  
K. F. Gauss (1831) **(1777-1855)**

“¿Qué es un número complejo?” Gauss dio la respuesta satisfactoria definitiva en 1831 al establecer la interpretación geométrica:  $x+iy \rightarrow (x,y)$ .

---

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### ¿Para qué sirven los números complejos?

Los números complejos se usan en [ingeniería electrónica](#) y en otros campos para una descripción adecuada de las señales periódicas variables (ver Análisis de Fourier). En una expresión del tipo  $z = r e^{i\varphi}$  podemos pensar en  $r$  como la amplitud y en  $\varphi$  como la fase de una onda sinusoidal de una frecuencia dada. Cuando representamos una corriente o un voltaje de corriente alterna (y por tanto con comportamiento sinusoidal) como la parte real de una función de variable compleja de la forma

$$f(t) = z e^{i\omega t}$$

donde  $\omega$  representa la frecuencia angular y el número complejo  $z$  nos da la fase y la amplitud, el tratamiento de todas las fórmulas que rigen las resistencias, capacidades e inductores pueden ser unificadas introduciendo [resistencias imaginarias](#) para las dos últimas (ver redes eléctricas). Ingenieros eléctricos y físicos usan la letra  $j$  para la unidad imaginaria en vez de  $i$  que está típicamente destinada a la intensidad de corriente.

---

---

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### ¿Para qué sirven los números complejos?

El campo complejo es igualmente importante en [mecánica cuántica](#) cuya matemática subyacente utiliza Espacios de Hilbert de dimensión infinita sobre  $\mathbb{C}$ .

En la [relatividad especial y la relatividad general](#), algunas fórmulas para la métrica del espacio-tiempo son mucho más simples si tomamos el tiempo como una variable imaginaria.

En [ecuaciones diferenciales](#), es habitual encontrar primero las raíces complejas  $r$  de la ecuación característica de la ecuación diferencial de primer grado y luego intentar resolver el sistema en términos de las funciones base de la forma:

$$f(t) = e^{rt}.$$

---

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

*La extensión del plano euclidiano al plano inversivo o al plano elíptico es la contrapartida geométrica de un procedimiento familiar en el álgebra; la extensión del concepto de número\*.*

\* COXETER, H.S.M. *Fundamentos de Geometría*

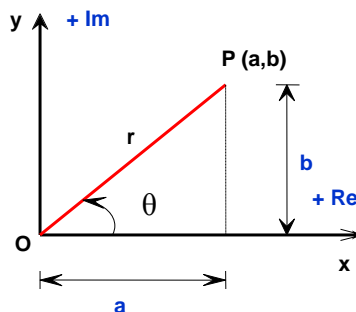
## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

### Desde un punto de vista geométrico

La recta real (recta que representa el total de números reales) puede ser vista como un subconjunto del plano de los números complejos.

Cada número complejo sería un punto en ese plano.

Definiremos cada complejo como un par ordenado de números reales  $(a, b)$  ó  $(Re(z), Im(z))$ ,



---

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

Suponemos conocido que:

- a) Un número complejo está en correspondencia biunívoca con los puntos de un plano.

$$z = a + bi = bi + a = ib + a = a + ib$$

- b) Un número complejo expresado en forma **binomial** o **rectangular** es:  
siendo  $a$  y  $b$  dos números reales, e  $i$  un símbolo llamado unidad imaginaria;  $a$  es la parte real,  $ib$  la parte imaginaria.
- 

---

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

- c) La  $a$  representa la abscisa y  $b$  la ordenada del punto del plano que corresponde a  $N$ .
- d) La posición de un punto en el plano puede representarse en **forma polar**  $r \angle \theta$  donde:  
 $r$  es módulo (distancia al origen) y  
 $\theta$  el argumento (ángulo entre  $x$  y  $r$ ).
-

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

- e) La correspondencia entre puntos del plano y coordenadas polares de los mismos ya **no es biunívoca** para  $-\alpha < \theta < \alpha$ , puesto que si  $r \angle \theta$  correspondiente a un punto P, también  $r \angle \theta + 2k\pi$  ( $\theta$  en radianes) ó  $r \angle \theta + k360^\circ$  ( $\theta$  en grados sexagesimales) representa el mismo punto (si K es entero).
- f) Dos números complejos son iguales si representan el mismo punto del plano:

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = a + bi \\ N_2 = a' + b'i \end{array} \right\} N_1 = N_2 \Rightarrow a = a'; \quad b = b'$$

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

- g) Llamaremos a número complejo en **forma polar**. Lo consideramos igual a  $a + bi$  cuando representan el mismo punto, lo que exige que:

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \operatorname{sen} \theta$$

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

- h) Dos números complejos son **conjugados** cuando tienen partes reales iguales y partes imaginarias opuestas:

$$a + bi, \quad a - bi$$

- i) La suma y resta de números complejos en forma binomial se efectúa como si fueran expresiones algebraicas corrientes en que fuera una variable:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

- j) La multiplicación de números complejos en forma binomial se efectúa de acuerdo a reglas usuales del álgebra, considerando a  $i$  como una variable, y substituyendo  $i^2$  por  $-1$ :

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$$

**Corolario:** El producto de 2 números complejos conjugados sólo tiene parte real:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

**Corolario:** Al multiplicar 2 números complejos se obtiene otro número complejo (que puede carecer de parte imaginaria o de parte real).

- k) La división de números complejos es una operación inversa de la multiplicación; por tanto el cociente multiplicado por el divisor es igual al dividendo:

$$\frac{a+bi}{c+di} = x+yi \quad ; \quad (c+di)(x+yi) = a+bi$$

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

Lo que permite obtener los valores de x e y :

$$cx+cy+dx-dy=a+bi \quad \Rightarrow \quad (cx-dy)+(cy+dx)i=a+bi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \\ y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} cx-dy = a \\ dx+cy = b \end{array} \right\}$$

lo que da una solución única siempre que  $c^2+d^2 > 0$   
lo que exige que tanto c como d sean diferentes de 0.

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

Al mismo resultado también se llega **multiplicando** numerador y denominador **por el conjugado del denominador**:

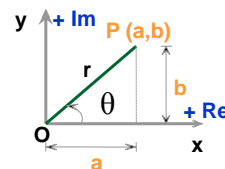
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

- l) Además de representar un número complejo por un punto P del plano, puede representarse también por el vector OP, que une el origen con P. Por ello puede hablarse también del vector de un complejo.

## 1.CONOCIMIENTOS PREVIOS

REPASO  
Números Complejos

- a) Correspondencia biunívoca con los puntos del plano  
 b) Expresión binomial o rectangular  $N = a+bi$   
 c) **Real** → abscisa; **Imaginario** → ordenada  
 d) Expresión polar:  $r$  → módulo;  $\theta$  → argumento  $r \angle \theta$   
 e) Expresión polar y correspondencia con puntos del plano no es biunívoca  $r \angle (\theta + 2\pi k)$   
 f) Dos números complejos son iguales si representan el mismo punto del plano  $N_1 = a+bi$  y  $N_2 = a'+b'i$   
 g) Correspondencia entre expresión polar y binomial  
 h) Número complejo conjugado  $N = a+bi \Rightarrow N^* = a-bi$



$$N_1 = N_2 \Rightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

- Si  $N_1 = a+bi$  y  $N_2 = c+di$  son números complejos expresados en forma binomial
- i) **La Suma o Resta ( $N_1 \pm N_2$ )**  $S(R) = (a \pm c) + (b \pm d)i$   
 j) **La Multiplicación ( $N_1 \times N_2$ )**  $M = (ac - bd) + (ad + bc)i$   
 k) **La División ( $N_1 / N_2$ )**  $D = [(ac + bd) + (bc - ad)i] / (N_2 \cdot N_2^*)$

## 1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

- l) Además de representar un número complejo por un punto P del plano, puede representarse también por el vector OP, que une el origen con P. Por ello puede hablarse también del vector de un complejo.

