



UNIVERSIDAD
DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

**Errores algebraicos cometidos al trabajar expresiones
algebraicas. Una investigación bibliográfica**

Tesis para optar el Título de
Licenciado en Educación. Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física

Kevin Eli Córdova Castillo

**Asesor(es):
Dra. Emma Lizelly Carreño Peña**

Piura, mayo de 2024

Declaración Jurada de Originalidad del Trabajo Final

Yo, Kevin Eli Córdova Castillo., egresado del Programa Académico Nivel Secundaria. Especialidad Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura, identificado(a) con DNI 75425061

Declaro bajo juramento que:

1. Soy autor del trabajo final titulado:
"Errores algebraicos cometidos al trabajar expresiones algebraicas. Una investigación bibliográfica"
El mismo que presento bajo la modalidad de Tesis.¹ para optar el Título Profesional².
2. La asesoría del trabajo estuvo a cargo de:
 - Dra. Emma Lizelly Carreño Peña, identificado con DNI N° 41607683
3. El texto de mi trabajo final respeta y no vulnera los derechos de terceros o de ser el caso derechos de los coautores, incluidos los derechos de propiedad intelectual, datos personales, entre otros. En tal sentido, el texto de mi trabajo final no ha sido plagiado total ni parcialmente, para la cual he respetado las normas internacionales de citas y referencias de las fuentes consultadas.
4. El texto del trabajo final que presento no ha sido publicado ni presentado antes en cualquier medio electrónico o físico.
5. La investigación, los resultados, datos, conclusiones y demás información presentada que atribuyo a mi autoría son veraces.
6. Declaro que mi trabajo final cumple con todas las normas de la Universidad de Piura.

El incumplimiento de lo declarado da lugar a responsabilidad del declarante, en consecuencia; a través del presente documento asumo frente a terceros, la Universidad de Piura y/o la Administración Pública toda responsabilidad que pueda derivarse por el trabajo final presentado. Lo señalado incluye responsabilidad pecuniaria incluido el pago de multas u otros por los daños y perjuicios que se ocasionen.

Fecha: 03/05/2024



.....
Firma del autor optante³

¹ Indicar si es tesis, trabajo de investigación, trabajo académico o trabajo de suficiencia profesional.

² Grado de Bachiller, Título de profesional, Grado de Maestro o Grado de Doctor

³ Idéntica a DNI, no se admite digital salvo certificado.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres, por su apoyo constante y sacrificio infinito.

A mis hermanos, por su aliento y confianza en los momentos más desafiantes.

A mi asesora, por su sabiduría y orientaciones que han sido mi guía siempre.



Agradecimientos

Mi agradecimiento infinito a mi asesora Emma Carreño Peña por todo el tiempo, dedicación y perseverancia mostrado con mi persona durante la elaboración de este trabajo de investigación.



Resumen

La presente investigación tiene como objetivo analizar los errores cometidos por estudiantes de nivel secundaria, pre-universitario y universitario al abordar el tema de expresiones algebraicas, según lo reportado en estudios del periodo 1997-2023. Este trabajo se enmarca en el paradigma interpretativo y constituye una investigación bibliográfica de nivel básico descriptivo, también denominada investigación diagnóstica. En ese sentido, se emplea el análisis de contenido como técnica de recogida y análisis de datos sobre 25 estudios de distinta naturaleza (tesis, artículos y capítulos de libro). En los resultados obtenidos se destaca la diversidad en los paradigmas, métodos y tipos de investigación utilizados, aunque algunos documentos carecen de detalles sobre el diseño de investigación. Asimismo, se observa la utilización de varios instrumentos de recopilación de datos, lo que refleja un campo de estudio diverso y en constante evolución. De la concepción de error, su naturaleza y origen destaca la idea de que los errores no son simples equivocaciones al azar, sino que están estrechamente ligados al conocimiento previo del estudiante y a su marco conceptual. Por ende, para tratar los errores en la enseñanza del álgebra implica no solo identificar el lugar donde se origina el error (origen), sino también determinar el tipo de error ocurrido (naturaleza), lo cual resulta esencial para desarrollar estrategias efectivas de enseñanza y corrección.

Por lo tanto, esta investigación aporta una sistematización de diversos estudios realizados en torno a los errores cometidos por los estudiantes al abordar las expresiones algebraicas y posibilita una comprensión profunda de la concepción, naturaleza y origen de los errores en la enseñanza del álgebra, específicamente, de las expresiones algebraicas.

Tabla de contenido

Introducción.....	9
Capítulo 1. Planteamiento del problema	10
1.1 Justificación y planteamiento del problema	10
1.2 Preguntas y objetivos de investigación	13
1.3 Antecedentes	14
Capítulo 2. Marco teórico	17
2.1 Álgebra escolar	17
2.2 Lenguaje algebraico.....	18
2.3 Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje escolar	19
2.3.1 Tipos de dificultades	20
2.3.2 Tipos de errores.....	21
2.3.3 Tipos de obstáculos	22
2.4 Expresiones algebraicas.....	23
2.4.1 Definición y clasificación.....	23
2.4.2 Las expresiones algebraicas en el Currículo Nacional.....	24
Capítulo 3. Marco metodológico de la investigación	27
3.1 Características de la investigación	27
3.2 Recogida de información: Selección de los estudios previos.....	27
3.3 Técnica e instrumento de análisis de información	34
3.3.1 Determinación de la muestra.	35
3.3.2 Categorización.	35
3.3.3 Codificación.	36
3.3.4 Identificación de unidades de análisis:	36
3.3.5 Inferencias.....	36
Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados	37
4.1 Hallazgos respecto de la metodología empleada en cada estudio analizado	37
4.2 Hallazgos respecto de la concepción de error	38
Conclusiones	66
Referencias	68

Lista de tablas

Tabla 1 Constructos y términos de búsqueda empleados en la primera fase de la selección bibliográfica.....	28
Tabla 2 Resultados aplicando a los términos de búsqueda los tres elementos de la primera fase	31
Tabla 3 Documentos seleccionados para el análisis	32
Tabla 4 Categorías de análisis de los documentos que constituyen la muestra	35
Tabla 5 Concepciones de error según diversos autores	38
Tabla 6 Tipologías encontradas en los documentos analizados	42
Tabla 7 Aplicación de la tipología de errores de Socas (1997).....	44
Tabla 8 Clasificación de errores enriquecida a partir del uso de la clasificación de Socas (1997)	46
Tabla 9 Tipologías de errores algebraicos encontradas	47
Tabla 10 Ejemplos de tipologías de error, según su naturaleza u origen	51
Tabla 11 Errores cometidos al trabajar expresiones algebraicas	52
Tabla 12 Ejemplos de errores en expresiones algebraicas	54



Lista de figuras

Figura 1 Clasificación de expresiones algebraicas	24
Figura 2 Resultados con el término de búsqueda errores algebraicos, sin comillas y sin restricción ...	29
Figura 3 Resultados con el término de búsqueda errores algebraicos, sin comillas, en el intervalo 1997-2023	29
Figura 4 Resultados con el término de búsqueda “errores algebraicos” en el intervalo 1997-2023....	30



Introducción

La presente investigación se enfoca en el campo del aprendizaje del álgebra, específicamente en los desafíos que los estudiantes enfrentan al trabajar con expresiones algebraicas, un tópico difícil de comprender y aplicar para muchos. Así pues, se busca comprender los errores cometidos por los estudiantes, vinculándolos directamente con las dificultades y obstáculos que emergen en el aprendizaje del álgebra. El estudio se basa en la necesidad de identificar y comprender estos errores, mediante una exhaustiva revisión bibliográfica. Se analizan investigaciones reportadas en el periodo 1997-2023, para sistematizar y comprender las tipologías de errores y los criterios empleados para su clasificación, así como para seleccionar ejemplos representativos de cada tipo.

La relevancia de este estudio radica en ser un compendio de estudios sobre errores algebraicos, cuyo potencial se puede concretar en el diseño e implementación de estrategias educativas en la enseñanza del álgebra.

Este trabajo de investigación se organiza en cuatro capítulos. En el primer capítulo se presenta la caracterización del problema, se justifica la importancia de la investigación y se establece los objetivos del estudio. Además, se reseñan las investigaciones antecedentes relevantes que siguen la misma línea temática de investigación.

En el segundo capítulo se contextualiza el álgebra en el entorno escolar, abordando el lenguaje algebraico, las dificultades comunes en su aprendizaje y los errores que los estudiantes enfrentan. Asimismo, se da énfasis a las expresiones algebraicas y su relevancia dentro del currículo educativo.

El tercer capítulo detalla la metodología utilizada, orientada a analizar los errores de los estudiantes al trabajar con expresiones algebraicas. Se emplea un enfoque interpretativo para desarrollar una investigación bibliográfica de nivel descriptivo, por lo cual se recopilan datos de investigaciones publicadas entre 1997 y 2023.

En el cuarto capítulo se comunican los resultados encontrados de los diversos estudios sobre errores en el álgebra y en específico los cometidos al abordar las expresiones algebraicas, tomando en cuenta: la metodología seguida en cada estudio, las concepciones de error empleadas y tipologías identificadas. Además, se ofrecen ejemplos para ilustrar estos errores en el contexto algebraico.

Finalmente, se presentan las conclusiones de la investigación las cuales resaltan la diversidad de fuentes y enfoques en las investigaciones sobre errores en álgebra, una propuesta de clasificación específica de errores en expresiones algebraicas. Asimismo, se enfatiza la importancia de considerar los errores como oportunidades de aprendizaje.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

1.1 Justificación y planteamiento del problema

El álgebra es una de las ramas de la matemática que hace uso de incógnitas para expresar cálculos y relaciones, manipula expresiones simbólicas y plantea fórmulas para resolver ciertos tipos de problemas, lo cual supone “el estudio de la estructura matemática abstracta” (Mason, 1996, p. 9). La aparición de estos elementos (incógnitas y expresiones simbólicas) y el carácter abstracto de las tareas en las que se les emplea hace que emerjan dificultades para los estudiantes, tanto en el aprendizaje teórico de los conceptos como en la aplicación de estos al resolver problemas. Estas dificultades cuando no logran ser superadas, oportunamente, se extienden a grados superiores e incluso a niveles educativos posteriores.

La inmersión en el aprendizaje del álgebra, según los desempeños propuestos para el área de Matemática en el Programa Curricular de Educación Básica (Ministerio de Educación, 2016a) se prescribe para los niveles primaria (6-11 años) y secundaria (12-17 años), sobre todo, en la competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. El logro de esta competencia involucra el desarrollo de cuatro capacidades: 1) Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas, 2) Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas, 3) Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales, y 4) Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia. Dicho desarrollo se hace evidente mediante la realización de los desempeños asociados a cada capacidad. Así, al llegar al término de la Educación Básica Regular, el estudiante que ha alcanzado el nivel esperado¹ de la competencia:

Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores, o expresiones; traduciéndolas a expresiones algebraicas que pueden contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial; y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adapta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales o cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta

¹ Existen VII niveles necesarios para egresar de la Educación Básica Regular, pero adicional hay un nivel destacado que solo lo cumplen los estudiantes sobresalientes y con habilidades excepcionales.

por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos, y propiedades matemáticas. (Ministerio de Educación, 2016a, p. 146)

El trabajo con álgebra evoluciona de manera progresiva en los distintos niveles educativos. Comienza en la educación primaria, introduciendo gradualmente a los estudiantes en la identificación de patrones y regularidades. Aquí, se enfocan en la traducción de situaciones cotidianas a expresiones algebraicas simples, empleando operaciones básicas como adición, sustracción, multiplicación y división. A medida que avanzan en el nivel de competencia, los alumnos resuelven problemas que involucran cambios entre magnitudes, expresiones y patrones, adquiriendo habilidades para manejar igualdades, desigualdades, proporcionalidad directa y generalización de patrones mediante estrategias visuales y argumentos lógicos (Ministerio de Educación, 2016b). Esta base es esencial para el álgebra más avanzada en niveles posteriores, como la educación secundaria, donde se transita de la comprensión profunda de expresiones algebraicas hasta el manejo experto de sucesiones y funciones trigonométricas, entre otros tópicos. Este nivel no se limita meramente a conceptos elementales, sino que incluye actividades matemáticas más complejas. Así pues, los estudiantes se involucran en traducir expresiones algebraicas provenientes de situaciones del mundo real y en demostrar una comprensión detallada de las propiedades inherentes a estas expresiones. Al alcanzar este nivel, se espera que los estudiantes dispongan de un amplio conjunto de herramientas y habilidades algebraicas que les permitan abordar situaciones de la vida real y resolver problemas utilizando métodos algebraicos específicos según lo requiera cada situación.

Sobre el dominio de los contenidos y la comprensión del álgebra descritos en el nivel de competencia esperado, es importante resaltar que alcanzar esta meta educativa representa un desafío para la mayoría de los estudiantes. Esto se debe a que el aprendizaje del álgebra implica desarrollar la habilidad para manejar símbolos, trabajar con igualdades de expresiones y enfrentarse a las complejidades de traducir enunciados entre distintos modos de representación, como el lenguaje verbal, el simbolismo algebraico, los números y las representaciones gráficas. Así, por ejemplo, la conversión de enunciados verbales a expresiones algebraicas y viceversa constituye una de las áreas desafiantes de este aprendizaje.

Dado que el aprendizaje de los contenidos algebraicos se ve acompañado de una diversidad de errores que cometen los estudiantes, esta investigación pone atención sobre aquellos que surgen al trabajar con expresiones algebraicas, entendiendo estas como la combinación de números y letras mediante operaciones aritméticas (Aufmann y Lockwood, 2013). Se trata pues de una

representación simbólica que describe una relación matemática de forma abstracta, lo cual permite el análisis y la resolución de problemas de manera general, antes de asignar valores a las variables involucradas. El interés de abordar los errores algebraicos, mediante la revisión sistemática de las investigaciones previas, se ve justificado en la necesidad de identificarlos según las distintas tipologías que se han elaborado para sistematizar el conocimiento generado sobre los errores algebraicos.

A lo largo del tiempo, varios investigadores como Socas (1997), Palarea (1998) y Rodríguez et al. (2015), han profundizado en el estudio de los errores en el ámbito del álgebra. Socas (1997) argumenta que estos errores tienen su origen en obstáculos cognitivos, ausencia de sentido de los conceptos o procedimientos matemáticos que se utilizan y factores emocionales que impactan tanto positiva como negativamente en el aprendizaje. Las categorías de errores propuestas por Socas han sido una referencia en otros estudios, tal como el de Palarea (1998). Esta autora identifica múltiples tipos de errores en álgebra, incluyendo aquellos vinculados al simbolismo algebraico, conceptos aritméticos y generalizaciones incorrectas de operaciones matemáticas. Por su parte, Rodríguez et al. (2015) examinan los errores frecuentes al traducir expresiones algebraicas verbales y simbólicas, clasificándolos en tres ejes principales: la completitud del enunciado, errores derivados de la aritmética y asociados al simbolismo algebraico. Además, proporcionan ejemplos detallados para explorar cada tipo de error y su aparición en distintos enunciados, considerando aspectos como la complejidad estructural, el tipo de relación algebraica, la cantidad de letras y la secuencialidad. Destacan la necesidad de abordar estos errores como desafíos en la enseñanza del álgebra y ofrecen ideas para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en esta área.

La problemática descrita en torno a la aparición de errores algebraicos lleva a plantear como pregunta de investigación: *¿Cuáles son los errores que cometen los estudiantes al abordar el tema de expresiones algebraicas, según lo reportado en investigaciones del periodo 1997-2023?*

Responder a la pregunta de investigación resulta relevante porque exige la sistematización del conocimiento generado en un objeto de estudio específico de la educación matemática. Comprender los errores que comenten los estudiantes debido a las dificultades que enfrentan al abordar expresiones algebraicas, puede contribuir al diseño de estrategias didácticas más efectivas para atender dichas dificultades y, en consecuencia, inhibir la aparición de errores. Por lo tanto, los hallazgos derivados de esta investigación tienen un potencial de impacto en la práctica docente, en la medida que puede guiar el diseño de planes de clase más específicos, la creación de materiales educativos adaptados a las necesidades de los estudiantes y el desarrollo de estrategias de intervención temprana para prevenir o afrontar la persistencia de errores que obstaculizan el aprendizaje en el ámbito del álgebra.

Asimismo, la investigación contribuye al campo de conocimiento e identificación de errores puesto que, busca la unificación de clasificaciones propuestas en investigaciones previas asociados a los errores en expresiones algebraicas y promueve una comprensión de estos, proporcionando una base concreta para futuras investigaciones.

Este estudio, en términos metodológicos, destaca la posibilidad de desarrollar un instrumento para la recopilación y análisis de datos, y la identificación y clasificación de errores al abordar expresiones algebraicas, lo cual constituye un aporte para la metodología de investigación. Además, adopta un enfoque mixto que integra elementos cualitativos y cuantitativos, dando prioridad a los primeros. Al enfocarse en el análisis cualitativo para comprender la naturaleza y el origen de los errores en expresiones algebraicas, se profundiza en causas subyacentes, patrones recurrentes y aspectos específicos problemáticos que enfrentan los estudiantes. Del mismo modo, posibilita una comprensión detallada y contextualizada de los errores, facilitando así la identificación de estrategias de enseñanza más adecuadas y personalizadas para abordar estos desafíos.

1.2 Preguntas y objetivos de investigación

Para la pregunta de investigación: *¿Cuáles son los errores que cometen los estudiantes cuando abordan el tema de expresiones algebraicas, según lo reportado en investigaciones del periodo 1997-2023?* se plantea el objetivo general: *Describir los errores que cometen los estudiantes al abordar el tema de expresiones algebraicas, según lo reportado en investigaciones del periodo 1997-2023.*

Lograr la concreción del objetivo general, a partir de una investigación bibliográfica, lleva a formular las siguientes preguntas específicas (PE) con sus correspondientes objetivos específicos (OE):

PE1. ¿Qué investigaciones se han realizado sobre los errores algebraicos durante el periodo 1997-2023?

OE1. Determinar las investigaciones que abordan los errores algebraicos, durante el periodo 1997-2023, para elaborar una base de datos.

PE2. ¿Qué tipologías de errores algebraicos se proponen en los documentos analizados?

OE2. Identificar tipologías de errores algebraicos, para seleccionar las relativas a expresiones algebraicas.

PE3. ¿Qué criterios se establecen para definir las distintas tipologías de errores algebraicos?

OE3. Reconocer los criterios considerados en el establecimiento de las tipologías de errores algebraicos, para agruparlos según sus coincidencias.

PE4. ¿Qué ejemplos visibilizan los errores cometidos en torno a las expresiones algebraicas, para cada tipología identificada?

OE4. Determinar ejemplos de los errores que se cometen en torno a las expresiones algebraicas, para cada tipología identificada con la finalidad de proponer una clasificación sistematizada.

1.3 Antecedentes

La detección y el análisis de los errores que los estudiantes cometen en diversos aspectos del álgebra sigue siendo un área de interés para la investigación en Educación Matemática. Dado que los tópicos algebraicos son variados, este estudio se enfoca en los errores que se cometen en torno a las *expresiones algebraicas*. En ese sentido, se toma como referentes los trabajos de Socas 1997, Palarea 1998, Pianda 2018 y Pulache 2021.

Socas (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria.

En el capítulo V del libro "La educación matemática en la enseñanza secundaria" Martín Socas analiza las dificultades, obstáculos y errores que surgen en el aprendizaje de las matemáticas. La estrecha relación entre estos tres conceptos le lleva a proponer, a modo de ejes coordinados, tres grupos de errores: aquellos que surgen como resultado de un obstáculo, los que se originan debido a la falta de comprensión y ausencia de sentido, y los que se vinculan con aspectos afectivos y emocionales. Cada uno de estos grupos se describe a partir del lenguaje algebraico, de allí la justificación de tomar el trabajo de Socas como un referente. El capítulo termina proponiendo algunas estrategias para prevenir y abordar los errores algebraicos.

El trabajo de Socas (1997) sirve como punto de partida para la investigación que se presenta pues, permite estructurar un marco teórico y construir, posteriormente, un instrumento para el análisis de las investigaciones seleccionadas.

Palarea (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.

Esta tesis doctoral tiene como objetivo investigar el proceso de adquisición del lenguaje algebraico en alumnos de 12 a 14 años, así como los errores más comunes que cometen en esta materia. Se centra una especial atención en el tema de las expresiones algebraicas y dedica dos de sus capítulos (el 5 y el 6) a este aspecto específico. En estos capítulos, Palarea presenta una revisión exhaustiva de investigaciones previas relacionadas con las expresiones algebraicas, describiendo en detalle las distintas fases de sus estudios, los procesos que siguieron y los resultados más significativos que obtuvieron. El propósito de esta etapa de la investigación es identificar las causas subyacentes de las dificultades en la comprensión del lenguaje algebraico, así como analizar las posibles fortalezas y obstáculos inherentes al diseño aplicado en los estudios. Se realizó este análisis seleccionando una muestra de 32 estudiantes inscritos en los niveles 7º y 8º de educación general básica dentro del sistema educativo correspondiente. Este estudio abarcó dos momentos temporales distintos y se llevó a cabo utilizando una metodología cualitativa con un enfoque

interpretativo. Los datos fueron recopilados a través de entrevistas semiestructuradas realizadas tanto a los alumnos como a los profesores.

El trabajo de investigación llevado a cabo por Palarea constituye un valioso antecedente para nuestra investigación actual. Debido a su enfoque centrado en la adquisición del lenguaje algebraico y la identificación de errores recurrentes en expresiones algebraicas, este estudio proporciona una revisión exhaustiva de investigaciones previas, ofreciendo información esencial sobre las dificultades enfrentadas por estudiantes de 12 a 14 años en este ámbito específico del álgebra. Los hallazgos descubiertos por Palarea resultan esenciales para el nuevo trabajo investigativo por su énfasis en la detección de errores recurrentes cometidos por estudiantes al manipular expresiones algebraicas. Nuestro objetivo es identificar y comprender específicamente estos errores. Esta investigación previa recopiló y analizó minuciosamente tales errores, lo cual se convierte en un punto de partida crucial para evidenciar y enriquecer los nuevos aportes que buscamos desarrollar en este campo de estudio.

Pianda (2018). Categorización de Errores Típicos en Ejercicios Matemáticos Cometidos por Estudiantes de Primer Semestre de la Universidad de Nariño.

Este trabajo de Pianda para obtener la licenciatura en matemáticas tuvo como objetivo principal analizar los errores matemáticos cometidos por estudiantes de primer semestre, centrándose en procedimientos de naturaleza aritmético-algebraica. La metodología empleada se basó en categorizaciones previas, respaldando las categorías de errores identificadas. La recolección de datos se llevó a cabo mediante una prueba escrita y una encuesta actitudinal. Los resultados revelaron diez categorías de errores, destacando los errores en procedimientos que involucran la aplicación de propiedades de potencias y en el ámbito de las expresiones algebraicas, incluyendo la interpretación estructural y la presentación de expresiones algebraicas, así como errores en la operatoria algebraica al reducir términos semejantes, lo cual representa un valioso aporte para comprender y abordar las dificultades específicas encontradas en este contexto educativo.

Se toma este antecedente porque ofrece una contribución significativa a la investigación actual sobre errores en expresiones algebraicas. Proporciona una clasificación detallada y estructurada de errores algebraicos, permitiendo la identificación y comprensión de las dificultades encontradas por estudiantes al abordar expresiones algebraicas. Asimismo, los ejemplos concretos de errores clasificados proporcionados en este antecedente facilitan la comprensión y la ilustración de los errores en expresiones algebraicas, respaldando así el objetivo de la nueva investigación.

Pulache (2021). Diagnóstico de los errores que cometen los estudiantes del segundo grado de secundaria, de una institución educativa pública en el inicio del aprendizaje del álgebra escolar.

La tesis de licenciatura de Pulache se enfocó en identificar y diagnosticar los errores algebraicos más frecuentes en estudiantes de segundo grado de educación secundaria. Utilizando una metodología cualitativa, el estudio se centró en un análisis descriptivo de estos errores y las posibles dificultades subyacentes en el proceso de aprendizaje del álgebra escolar. El trabajo consideró definiciones proporcionadas por varios autores acerca de los errores en el aprendizaje del álgebra y reconoció la importancia de diagnosticar y reflexionar sobre estos errores como paso previo a su corrección. Diseñó un cuestionario adaptado de un instrumento utilizado por la Dra. Mercedes Palarea (1998) y ajustado a las habilidades requeridas por el Currículo Nacional de 2016. La muestra consistió en 38 estudiantes de segundo grado, con edades entre 13 y 15 años, y los errores identificados se clasificaron siguiendo una tipología encontrada en investigaciones previas de Palarea (1998) y Socas (1989). Los resultados obtenidos a partir de este cuestionario brindaron una valiosa reflexión sobre el nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes en sus aprendizajes, al tiempo que permitieron identificar las dificultades que obstaculizan el desarrollo de las capacidades relacionadas con la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, según lo establecido en el Currículo Nacional.

Este antecedente, aunque no se centra específicamente en expresiones algebraicas, es relevante por su abordaje en identificar tipologías de errores, establecer criterios y ofrecer una guía conceptual para analizar los errores específicos en este contexto. Además, los ejemplos de errores identificados en su investigación brindan una base relevante para comprender errores en el ámbito algebraico, siendo útiles para identificar y clasificar errores en expresiones algebraicas. Los ejemplos de errores identificados se utilizarán para ilustrar la tipología de errores que se busca establecer en la investigación actual. Estos aportes metodológicos y ejemplares son fundamentales para alcanzar los objetivos planteados en el estudio sobre errores en expresiones algebraicas en curso.

En resumen, estos antecedentes de investigación comparten un enfoque en el análisis de errores en álgebra y las expresiones algebraicas. Socas y Palarea se centran en la adquisición del lenguaje algebraico y Pulache y Pianda enfatizan sobre errores específicos en diferentes niveles educativos. Los estudios realizados por Palarea y Socas pueden considerarse como bases teóricas sólidas para investigaciones posteriores, además, Palarea dedica 2 capítulos de su trabajo a expresiones algebraicas, mientras que Pulache y Pianda aportan datos concretos sobre errores al abordar álgebra y expresiones algebraicas, en estudiantes de secundaria y universitarios. La relación entre ellos es que todos contribuyen a la comprensión de los errores en el álgebra.

Capítulo 2. Marco teórico

2.1 Álgebra escolar

El álgebra es una rama de la matemática que se ha concebido de diferentes maneras a lo largo de la historia. Algunos investigadores (p.ej. Kieran (2007), Vergnaud (1997), Gómez (1995), Hewitt (1998), Mason, Graham y Johnston-Wilder (2005)), citados en Molina (2015), manifiestan que el álgebra va más allá de una simple manipulación de símbolos matemáticos o meram expresión de patrones y regularidades. Sino que también describen el álgebra como un lenguaje propio que permite la expresión de ideas matemáticas de manera compacta e inequívoca. Asimismo, se considera una herramienta poderosa para la resolución de problemas, no solo de índole matemática, sino también provenientes de diversas disciplinas como la física, economía y situaciones del mundo real. Actualmente, la mayoría de los autores coinciden en que, el álgebra es una disciplina que implica el estudio de los conceptos y las reglas algebraicas, así como el uso de estas herramientas para resolver problemas y modelar situaciones del mundo real.

Centrando la atención en el álgebra escolar, esta hace referencia a los contenidos y propósitos educativos que se promueven en el desarrollo de la educación básica sobre este campo. Generalmente, se le relaciona con una aritmética generalizada lo cual supone una extensión del tratamiento de los símbolos aritméticos a los símbolos algebraicos (Socas y Palarea, 1997). Sin embargo, el álgebra supera tal concepción puesto que hace uso de incógnitas para expresar cálculos y relaciones, manipula expresiones simbólicas y plantea fórmulas para resolver ciertos tipos de problemas. Estos últimos puntos sientan las bases para enfrentar problemas matemáticos de mayor complejidad y son herramientas analíticas clave que los estudiantes pueden usar después. El álgebra escolar no solo promueve la comprensión de relaciones matemáticas abstractas, sino que también propicia el desarrollo de habilidades para resolver problemas en diferentes situaciones, ayudando al desarrollo cognitivo y académico de los estudiantes.

Debido a la complejidad inherente de la construcción de conceptos abstractos, en varios países se plantea la necesidad de fomentar la adquisición de conocimientos y habilidades previas que establezcan los fundamentos para el desarrollo del pensamiento algebraico. En este sentido, el enfoque conocido como *Early Álgebra* propone, desde los primeros años de educación, cultivar la capacidad de identificar relaciones, estructuras y situaciones matemáticas con el objetivo de establecer cimientos sólidos para el estudio posterior del álgebra, así como para otras ramas de las matemáticas (Vergel, 2010). Este escenario ha impulsado la búsqueda de métodos efectivos para enseñar el álgebra en entornos educativos.

Además, diversas investigaciones (Carraher et al., 2008; Molina y Cañadas, 2018; Mejías y Alsina, 2020) sugieren que promover el pensamiento algebraico desde edades tempranas resulta beneficioso. Aunque esta propuesta educativa ha sido objeto de estudio en diversas investigaciones

a nivel global, muchas de ellas han empleado muestras de tamaño reducido. En consecuencia, Naranjo (2019) sugiere llevar a cabo investigaciones que consideren muestras más representativas. Un ejemplo relevante es el de Colombia, donde se ha implementado la propuesta "Early Álgebra" con un mayor número de participantes, lo que permitiría obtener una visión más completa de los beneficios y contribuciones de esta metodología educativa.

El álgebra en el ámbito escolar desempeña un papel fundamental, sirviendo como cimiento para las matemáticas avanzadas y, al mismo tiempo, como una contribución valiosa para el ejercicio de la ciudadanía, pues según Garriga (2011) esta disciplina proporciona la base para el desarrollo de niveles de razonamiento cada vez más abstractos, lo que, en la vida diaria, capacita a las personas para discriminar, establecer conexiones, sintetizar información y emitir juicios fundamentados. Sobre el papel de la matemática en el contexto de la ciudadanía y su relevancia en la vida cotidiana, incluyendo su dimensión social, en el Programa Curricular de Educación Secundaria se señala que:

El aprendizaje de las matemáticas contribuye a formar ciudadanos capaces de buscar, organizar, sistematizar y analizar información para entender e interpretar el mundo que los rodea, desenvolverse en él, tomar decisiones pertinentes y resolver problemas en distintas situaciones, usando, de manera flexible, estrategias y conocimientos matemáticos (Ministerio de Educación, 2016a, p. 147).

Aprender matemáticas no solo es un componente esencial en la adquisición de conocimientos académicos, sino que también juega un papel esencial en la formación de ciudadanos competentes. Al desarrollar la capacidad de buscar, organizar, sistematizar y analizar información, las personas se equipan con herramientas cognitivas que les permiten entender e interpretar de manera más profunda el mundo que los rodea fomentando habilidades transferibles que hacen posible desenvolverse adecuadamente en la sociedad. Por ende, es de suma importancia cultivar una comprensión profunda de las matemáticas como un medio para potenciar la capacidad de abordar desafíos y contribuir de manera significativa al mundo actual.

2.2 Lenguaje algebraico.

El lenguaje algebraico es una herramienta específica dentro del álgebra que, al igual que cualquier otro lenguaje, se compone de un conjunto de símbolos y utiliza las letras del alfabeto, las cuales pueden representar cantidades específicas, conocidas como constantes, o varias cantidades dependiendo del contexto, conocidas como variables (Franco y González, 2011). Además, según Morales (2017), el lenguaje algebraico permite “expresar informaciones y operar sobre ellas con precisión y rigor a través de unas reglas y una lógica interna particular” (p. 24). En ese sentido, entender las reglas y lógica interna del lenguaje algebraico demanda comprender tanto la sintaxis como la semántica de sus signos. En otras palabras, implica entender la interpretación de los símbolos y los procesos de representación y manipulación asociados.

La resolución algebraica de problemas formulados en lenguaje verbal requiere de un proceso de "traducción, que permite la transición entre dos lenguajes diferentes, caracterizados no solo por la naturaleza de sus signos, sino también por la especificidad del lenguaje algebraico, que se centra exclusivamente en el ámbito de las cantidades y sus relaciones aritméticas" (Filloy et al., 2008, p. 16). Así, para abordar situaciones problemáticas expresadas en términos verbales, es necesario realizar la traducción correspondiente a símbolos algebraicos (Rodríguez et al., 2015). En el proceso de traducción de enunciados verbales al simbolismo algebraico, MacGregor y Stacey (1993), según lo citado en Rodríguez et al. (2015), identifican dos enfoques que los estudiantes pueden emplear:

(a) El enfoque de traducción sintáctica, que implica proceder de izquierda a derecha y traducir palabra por palabra o buscar palabras clave, sin necesidad de prestar atención al significado global del enunciado verbal.

(b) El enfoque de traducción semántica, que implica una comparación más profunda y una expresión simbólica del significado global del enunciado verbal. Esto se logra mediante la construcción de un esquema mental que representa las relaciones matemáticas descritas en el enunciado. (p. 276)

Es esencial destacar que ambas aproximaciones, tanto sintáctica como semántica, se pueden emplear en una traducción precisa de un lenguaje a otro. Por lo tanto, los procesos de enseñanza de los docentes deben ser flexibles y adaptarse a las necesidades individuales de los estudiantes, permitiéndoles emplear cualquiera de los dos enfoques mencionados anteriormente para lograr una traducción efectiva.

La comprensión y el dominio del lenguaje algebraico no se limitan simplemente a la memorización de reglas o fórmulas, sino que requieren una comprensión profunda de lo que estas representan en el contexto del lenguaje algebraico. Esto impulsa el pensamiento abstracto, permitiendo a los estudiantes llevar un problema expresado verbalmente al ámbito matemático y, a partir de ahí, resolverlo de manera efectiva.

2.3 Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje escolar

La comprensión del álgebra en la escolaridad presenta, para la gran mayoría de estudiantes, muchas dificultades. Estas tienen que ver con "la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos y alumnas, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra" (Socas y Palarea, 1997, p. 17). Si bien estas dificultades no se pueden evitar ya que son parte del proceso de construcción del conocimiento matemático algebraico, es necesario estudiarlas para reducir su aparición o consolidación de dicho proceso.

Según la Real Academia Española (RAE, 2023), la palabra dificultad se refiere a un "inconveniente, oposición o contrariedad que surge e impide conseguir, ejecutar o entender algo pronto". Esta definición puede extenderse al campo de las matemáticas, donde las dificultades se presentan como inconvenientes debido a "múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza intrínseca de las Matemáticas" (Socas, 1997, p. 35).

En el marco del aprendizaje del álgebra, los conceptos de dificultad, error y obstáculo están estrechamente relacionados. La dificultad se presenta como un desafío en el proceso de comprensión, y, según la definición de Brousseau (1989) citado en Barrantes (2006), el error emerge cuando se aplica un conocimiento previo que, aunque válido en ciertos contextos, se revela inadecuado en otros. En otras palabras, el error no surge de la ignorancia, sino de la utilización inapropiada del conocimiento previo en nuevas situaciones. Cuando este patrón de error se vuelve recurrente, se consolida como un obstáculo para el aprendizaje. Los obstáculos representan conocimientos arraigados en la mente de los estudiantes, aplicables en diversas situaciones, pero inadecuados para contextos nuevos. Estos obstáculos son resistentes y su eliminación se vuelve más difícil cuanto más arraigados estén en la mente del estudiante o cuanta más efectividad hayan demostrado en contextos anteriores (Palarea, 1998).

Analizar estos conceptos en el contexto específico del álgebra proporciona una base valiosa para entender las barreras cognitivas que los estudiantes pueden enfrentar y, por ende, diseñar estrategias pedagógicas efectivas para superar dichos obstáculos. A continuación, profundizaremos los tipos de dificultades, errores y obstáculos en este contexto.

2.3.1 Tipos de dificultades

El aprendizaje del álgebra en la educación escolar se enfrenta a diversas dificultades arraigadas en aspectos fundamentales, como la complejidad inherente de los conceptos algebraicos, los procesos de pensamiento específicos al álgebra, el desarrollo cognitivo de los estudiantes, los métodos de enseñanza utilizados y las actitudes emocionales y afectivas hacia el álgebra (Palarea, 1998). Al profundizar en la complejidad de los objetos algebraicos, Palarea destaca dos niveles, el nivel semántico y el sintáctico, en los cuales la gran mayoría de dificultades se manifiestan, subrayando así la naturaleza de los conceptos matemáticos y la abstracción característica del álgebra.

En cuanto a las *dificultades vinculadas a los procesos de pensamiento en el álgebra*, se observa que estas se deben a la naturaleza altamente lógica de esta área y a la necesidad de ajustarse a los modos de pensamiento algebraico, lo que no siempre facilita la construcción directa del conocimiento matemático. A pesar de que estas dificultades suelen ser inevitables, los docentes pueden diseñar actividades que las aborden, considerándolas como oportunidades de aprendizaje.

Las dificultades asociadas con los procesos de enseñanza en el aprendizaje del álgebra implican la implementación del currículo y las estrategias didácticas utilizadas por los docentes en la gestión de la enseñanza. Por otro lado, las dificultades relacionadas con el desarrollo de los procesos cognitivos de los estudiantes están vinculadas a los estadios de desarrollo y madurez intelectual, lo que afecta su capacidad para el razonamiento y la realización de tareas algebraicas.

En lo que respecta a las *dificultades relacionadas con las actitudes emocionales y afectivas*, es común que la mayoría de los estudiantes experimenten temor debido a comentarios negativos sobre las matemáticas en general y al álgebra en particular, lo que genera sentimientos de ansiedad, aprehensión y subestimación hacia los temas algebraicos debido a su percibida complejidad. Es importante destacar que estas dificultades no solo se originan en los estudiantes, ya que también pueden estar influenciadas por los estilos de enseñanza y las actitudes de los docentes hacia sus estudiantes durante el proceso educativo.

En resumen, las dificultades en el aprendizaje del álgebra, que abarcan desde la complejidad de los conceptos hasta las dimensiones emocionales y pedagógicas, demandan una atención integral. Reconocer las dificultades como oportunidades de aprendizaje y adaptar estrategias efectivas para superarlas, considerando los diferentes estadios de desarrollo de los estudiantes, se torna esencial. Asimismo, abordar las actitudes emocionales y afectivas, tanto de estudiantes como de docentes, resulta esencial para la creación de un entorno educativo más positivo.

2.3.2 Tipos de errores.

La presencia de errores durante el aprendizaje del álgebra en la educación escolar es recurrente en los estudiantes debido a la complejidad que implica trabajar este ámbito de la matemática. Socas (1997) aborda esta problemática proponiendo una clasificación de los errores en el aprendizaje del álgebra escolar. Por un lado, se encuentran los errores derivados de obstáculos cognitivos, por otro lado, están los que surgen debido a una ausencia de sentido de los conceptos o procedimientos matemáticos y los errores vinculados a actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra. Esta clasificación ofrece una perspectiva integral que abarca tanto aspectos cognitivos como emocionales en el proceso de aprendizaje del álgebra.

En el trabajo de Palarea (1998) se aprecia una meticulosa revisión de la conceptualización de errores matemáticos realizada por varios autores, incluyendo a Socas (1997). Respaldándose en su propia experiencia, Palarea elabora una taxonomía de los errores que se originan a partir de las particularidades del simbolismo algebraico y clasifica los errores en dos categorías fundamentales: los errores del álgebra ligados a la aritmética y los errores de álgebra que tienen sus raíces en las características específicas del lenguaje algebraico.

Los errores del álgebra relacionados con la aritmética se caracterizan por persistir desde la fase aritmética y afectar posteriormente el estudio del álgebra abarcando el uso inapropiado de paréntesis, potencias, operaciones con fracciones, y la incorrecta interpretación del signo igual cuando se encuentra delante de un paréntesis. Además, se destacan los errores que surgen debido a la aplicación inadecuada de fórmulas o reglas en contextos novedosos, lo que da lugar a errores relacionados con la falta de comprensión de la linealidad de los operadores como la incorrecta utilización de la propiedad distributiva, errores en el manejo de recíprocos y errores de cancelación.

En contraste, los *errores de álgebra debidos a las particularidades del lenguaje algebraico* son de naturaleza completamente algebraica y emergen debido a la intrincación propia del álgebra. Un ejemplo destacado de este tipo de error es la modificación del significado del signo igual al realizar la transición de la aritmética al álgebra.

Adicionalmente, en el trabajo de Wilhelmi (2009) se aborda la cuestión de los errores en el contexto de la matemática, señalando que estos pueden clasificarse en dos categorías distintas. En primer lugar, se refiere a los errores reproducibles, que se producen cuando los individuos utilizan inadecuadamente un concepto matemático o le atribuyen un significado incorrecto. En segundo lugar, los errores recurrentes, los cuales se caracterizan por mantenerse a lo largo del tiempo en la actividad matemática de las personas, a pesar de la falta de comprensión sólida de los conceptos matemáticos subyacentes. Estos errores recurrentes, al persistir en el tiempo, se convierten en obstáculos significativos para el proceso de aprendizaje.

2.3.3 Tipos de obstáculos

La persistencia de una dificultad sin superarse en el aprendizaje del álgebra se convierte en un obstáculo que impide avanzar en la construcción de un conocimiento posterior. Estos obstáculos pueden clasificarse en tres tipos según su origen: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos (Brousseau, 1989 citado en Barrantes, 2006). Los *obstáculos ontogenéticos*, derivados específicamente de condiciones genéticas y limitaciones del estudiante, son insuperables mediante la formación. Paralelamente, los *obstáculos epistemológicos* representan barreras para la adquisición y construcción correcta del conocimiento real. Por su parte, los *obstáculos didácticos*, emergentes de la enseñanza, evitan que los estudiantes perciban lo que se les enseña de manera innovadora. Por ende, es esencial prevenir estos obstáculos didácticos, y facilitar la superación de los obstáculos epistemológicos.

La identificación de los obstáculos didácticos se realiza a través del análisis de los errores comunes cometidos por los estudiantes, los cuales tienen su origen en la enseñanza y se manifiestan mediante errores metodológicos, curriculares o conceptuales. El error metodológico surge de la metodología de enseñanza del docente, incluyendo el uso de palabras inadecuadas o representaciones gráficas prototípicas. Asimismo, el error curricular se presenta cuando el diseño

del currículo impide superar el obstáculo epistemológico necesario para la adquisición de nuevo conocimiento, mientras que el error conceptual implica enseñar una noción falsa para evitar el salto conceptual y distorsionar el concepto.

En análisis de los obstáculos para el aprendizaje del álgebra, es relevante mencionar la perspectiva de Tall (1989), citado en Socas (1997), quien, aunque no clasifica los obstáculos, se refiere a las obstrucciones en la adquisición de un nuevo conocimiento como obstáculos cognitivos. Estos obstáculos pueden originarse en la secuencia de un tema, generados por la complejidad de un concepto y requieren que los estudiantes se familiaricen con los obstáculos en un orden específico. Asimismo, pueden basarse en casos simples, lo que implica que los estudiantes deben abordar la resolución de casos sencillos antes de enfrentar a situaciones de mayor complejidad que exijan un razonamiento más amplio.

2.4 Expresiones algebraicas.

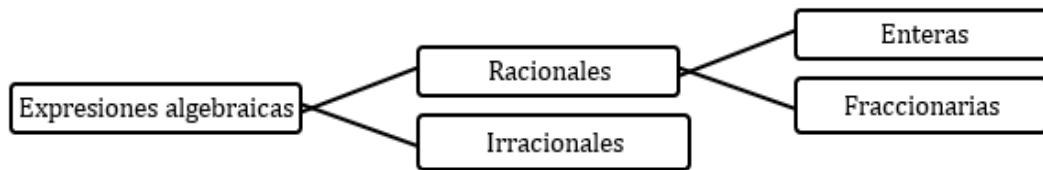
2.4.1 Definición y clasificación

Según Franco y Gonzales (2011), la creación de expresiones algebraicas guarda cierta analogía con la formación de palabras en el idioma español, pues un conjunto de letras se combina para dar lugar a una estructura más compleja que las letras por sí solas. En este caso, al combinar incógnitas o variables con los signos elementales de la aritmética, se generan expresiones algebraicas fundamentales. Estas expresiones desempeñan un papel de suma importancia al enfrentar problemas que requieren una solución algebraica. En otras palabras, las expresiones algebraicas se caracterizan por su capacidad para vincular y amalgamar números y letras a través de las operaciones básicas de la aritmética, incluyendo la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Su propósito principal es abordar cuestiones problemáticas desde una perspectiva algebraica. Según Filloy et al. (2008), estas expresiones, independientemente de su complejidad, deben ser interpretadas como elementos que se desligan de las cantidades y relaciones concretas que pueden encontrarse en el contexto de un problema específico. En lugar de considerarse simplemente como símbolos manejados de manera sintáctica, estas expresiones se conciben como representaciones simbólicas de cantidades y relaciones abstractas en el ámbito del álgebra. En resumen, cada expresión algebraica se convierte en una representación simbólica que encapsula simbólicamente una situación, un problema, un enunciado, un conjunto de cantidades abstractas y un conjunto de relaciones.

Es relevante destacar que las partes que componen una expresión algebraica son denominadas términos algebraicos y se distinguen por la separación que existe entre ellos mediante los signos aritméticos de adición (+) y sustracción (-). Dependiendo de las operaciones que estén involucradas o afecten a una o más expresiones algebraicas, se realiza una clasificación de estas **(Figura 1)**.

Figura 1

Clasificación de expresiones algebraicas



Nota. Adaptado de Butigué et al. (2018)

La clasificación de las expresiones algebraicas se divide en dos categorías principales: racionales e irracionales. A su vez, las expresiones racionales se subdividen en racionales enteras y racionales fraccionarias. Las expresiones algebraicas racionales incluyen variables que pueden encontrarse en el denominador o en el numerador con un exponente entero. Por su parte, las expresiones algebraicas irracionales se caracterizan por tener variables bajo un signo radical o con exponentes racionales no enteros (Butigué et al., 2018)

Dentro de las *expresiones algebraicas racionales enteras*, las variables están sujetas a operaciones específicas como suma, resta y multiplicación y pueden incluir únicamente potencias con exponentes naturales. Estas expresiones se conocen como polinomios y se clasifican según la cantidad de términos que las componen. En términos generales, se utilizan los términos "monomio" para expresiones algebraicas de un solo término, "binomio" para aquellas con dos términos y "trinomio" para expresiones de tres términos. Cualquier expresión algebraica compuesta por cuatro términos o más se denomina polinomio (Siu y Andaluz (2013).

La construcción y clasificación de expresiones algebraicas involucra diferentes parámetros y métodos, así como la realización de operaciones con ellas. En el proceso de enseñanza-aprendizaje, es fundamental resaltar que "en álgebra, las operaciones tienen un doble significado: en algunos casos representan una acción y, en otros, indican una representación" (Fuentes, 2016, p. 42). También se debe enfatizar el significado del signo igual al realizar operaciones, así como la aplicación de propiedades como la asociativa, conmutativa, distributiva, la existencia de elemento neutro y de un inverso (Godino et al., 2014). Estas propiedades tienen un papel relevante tanto en el ámbito algebraico como en el aritmético, y desempeñan un rol fundamental al abordar cuestiones algebraicas.

2.4.2 Las expresiones algebraicas en el Currículo Nacional

En el Currículo Nacional de Educación Básica (Ministerio de Educación, 2016c) los temas algebraicos se abordan en la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio, compuesta por cuatro capacidades 1) Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas, 2) Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas, 3) Usa

estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales, y 4) Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia. Este planteamiento refleja las aspiraciones nacionales para lograr el perfil adecuado del estudiante en matemáticas, destacando la importancia de desarrollar competencias. Cabe resaltar que el desarrollo del pensamiento algebraico y el aprendizaje de diversos aspectos del álgebra como las expresiones algebraicas, se inicia desde niveles tempranos en el proceso educativo, y tanto su aprendizaje como su uso se desarrolla de manera gradual a medida que los estudiantes avanzan en sus estudios.

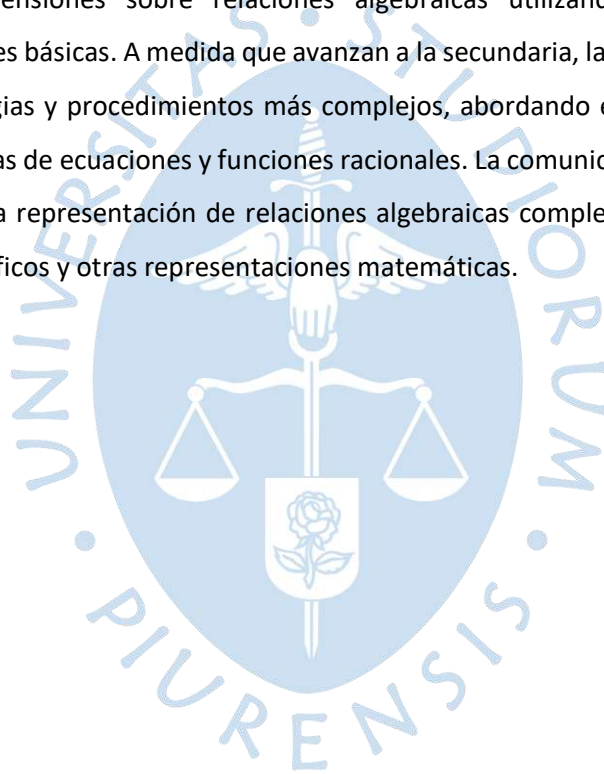
En cada nivel educativo, la aplicación de la competencia se adapta a los desempeños establecidos para cada grado, asegurando que los estudiantes adquieran de manera evolutiva las habilidades necesarias para abordar los conocimientos algebraicos y alcanzar niveles destacados en su aprendizaje. Por ende, al terminar el último grado del nivel secundaria se espera que el estudiante haya adquirido los conocimientos necesarios y desarrollado la competencia de manera integral. Puesto que, resulta crucial para que los estudiantes estén preparados y sean capaces de enfrentar diversas situaciones y resolver problemas que demanden la aplicación de saberes algebraicos, como señala el Ministerio de Educación al referirse a las expectativas para el estudiante:

Resuelve problemas referidos a analizar cambios continuos o periódicos, o regularidades entre magnitudes, valores o expresiones, traduciéndolas a expresiones algebraicas que puedan contener la regla general de progresiones geométricas, sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones y funciones cuadráticas y exponenciales. Evalúa si la expresión algebraica reproduce las condiciones del problema. Expresa su comprensión de la regla de formación de sucesiones y progresiones geométricas; la solución o conjunto solución de sistema de ecuaciones lineales e inecuaciones; la diferencia entre una función lineal y una función cuadrática y exponencial y sus parámetros; las usa para interpretar enunciados o textos o fuentes de información usando lenguaje matemático y gráficos. Selecciona, combina y adopta variados recursos, estrategias y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos en progresiones geométricas, solucionar ecuaciones lineales y cuadráticas, simplificar expresiones usando identidades algebraicas; evalúa y opta por aquellos más idóneos según las condiciones del problema. Plantea afirmaciones sobre enunciados opuestos o casos especiales que se cumplen entre expresiones algebraicas; así como predecir el comportamiento de variables; comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante contraejemplos y propiedades matemáticas. (Ministerio de Educación, 2016c, p. 162)

En el párrafo anterior se describe lo que un estudiante debe poseer respecto a saberes algebraicos al culminar el último grado del nivel secundaria de la Educación Básica Regular. En la

descripción de la competencia respecto a las expresiones algebraicas se puede ver que se trabaja de manera muy completa, desde traducir datos de información en lenguaje verbal a una expresión algebraica, hasta la construcción de ecuaciones, inecuaciones, realizando ajuste a las expresiones para que cumplan con los contenidos de los problemas como también operar con dichas expresiones. Es decir, que los estudiantes deben estar listos para pasar a un siguiente nivel de resoluciones algebraicas que se le presenten en situaciones o estudios posteriores.

Adicionalmente, se recalca que la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio experimenta una evolución significativa desde la educación primaria hasta la secundaria. En primaria, el enfoque se centra en el desarrollo de habilidades de traducción y comunicación, donde los estudiantes aprenden a traducir datos a expresiones algebraicas simples y a comunicar comprensiones sobre relaciones algebraicas utilizando lenguaje natural y representaciones visuales básicas. A medida que avanzan a la secundaria, la competencia se amplía hacia el uso de estrategias y procedimientos más complejos, abordando expresiones algebraicas avanzadas como sistemas de ecuaciones y funciones racionales. La comunicación evoluciona desde expresiones simples a la representación de relaciones algebraicas complejas mediante el uso de lenguaje algebraico, gráficos y otras representaciones matemáticas.



Capítulo 3. Marco metodológico de la investigación

3.1 Características de la investigación

Esta investigación se desarrolla bajo el paradigma interpretativo (Pérez, 1994) porque se pretende comprender los estudios que se han desarrollado en torno a los errores que comenten los estudiantes al trabajar las expresiones. En este sentido, la investigación es, según su finalidad, básica descriptiva, o también conocida como investigación diagnóstica (Ñaupas et al., 2014) la cual tiene como objetivo principal “recopilar datos e informaciones sobre las características, propiedades, aspectos, dimensiones, clasificación de los objetos, personas, agentes e instituciones o de los procesos naturales o sociales” (p. 92). Dado que la recopilación de datos se hace a partir de investigaciones previas, el trabajo que se presenta es de tipo bibliográfico, es decir, se realiza la interpretación de la información reportada en la bibliografía que se encuentre respecto al tema que se investiga, permitiendo realizar aportes a la realidad en la que se desarrolla la investigación, mediante el análisis de contenido (Mejía, 2005). Por ende, de los estudios seleccionados se analizan las características de los errores que comenten los estudiantes respecto de las expresiones algébricas, las clasificaciones de estos que los autores realizan, las bases teóricas y los conceptos que se toman en cuenta para dichas clasificaciones. Así pues, esta investigación bibliográfica valora los trabajos precedentes para sistematizar las clasificaciones de los errores, dificultades y obstáculos emergidos cuando los estudiantes estudian las expresiones algebraicas.

El método empleado en esta investigación es mixto, lo que significa que posee un enfoque cualitativo y cuantitativo, con una inclinación mayor por el primero. Esto se afirma porque se prioriza el análisis de los datos no numéricos. Sin embargo, en función de uno de los objetivos propuestos, se hace necesario reportar cuantitativamente los documentos encontrados, así como el tratamiento conceptual y metodológico de los errores algebraicos en los mismos. Este enfoque se considera en la búsqueda y determinación de la muestra y en la emisión de resultados.

3.2 Recogida de información: Selección de los estudios previos

Esta investigación por ser de carácter bibliográfico indaga los estudios realizados desde 1997 al 2023 en torno a los errores que se cometen al abordar las expresiones. Por ello, se hace uso de criterios para la selección y delimitación de los documentos de información y de categorías para el análisis de estos.

La selección de los documentos que son determinados como muestra se realiza por fases y empleando criterios específicos en cada una. Se ha tomado como buscador principal Google académico debido a la gran cantidad de trabajos académicos que alberga, en revistas, tesis, libros, actas de congresos y fuentes secundarias, relevantes para la matemática escolar. A continuación, se detalla el procedimiento seguido:

- *Fase 1: Definición de elementos para la identificación de la muestra inicial de documentos*

Se consideran tres elementos para hacer una selección inicial de los posibles documentos de análisis: términos de búsqueda, año de publicación y título del documento. El contenido de cada uno y el procedimiento seguido se detalla a continuación.

Elemento 1: Términos de búsqueda.

Dado que el objeto de estudio son los errores algebraicos que cometen los estudiantes al trabajar expresiones algebraicas, se define palabras claves (constructos) que, por sí solas o combinadas, constituyen los términos de búsqueda (**Tabla 1**).

Tabla 1

Constructos y términos de búsqueda empleados en la primera fase de la selección bibliográfica

Constructos	Palabras claves o términos de búsqueda
Errores algebraicos	<ul style="list-style-type: none"> • errores algebraicos • "errores algebraicos"
Expresiones algebraicas	<ul style="list-style-type: none"> • expresiones algebraicas • "errores algebraicos" "expresiones algebraicas"
álgebra escolar	<ul style="list-style-type: none"> • álgebra escolar • "álgebra escolar" • errores en el álgebra escolar
lenguaje algebraico	<ul style="list-style-type: none"> • lenguaje algebraico • errores en el lenguaje algebraico

En el proceso de búsqueda, se emplean términos tanto con comillas como sin comillas con el objetivo de optimizar los resultados de búsqueda. La utilización de términos sin comillas genera una amplia cantidad de documentos relacionados con el tema de interés, de los cuales se seleccionan algunos pertinentes. Por otro lado, al emplear comillas alrededor de los términos, se logra una búsqueda más precisa y se reduce la cantidad de resultados. Es relevante destacar que, en cada filtro aplicado, se realizan selecciones específicas de documentos, y así evitar la pérdida de documentos que se mostraron inicialmente y que eran de interés.

Elemento 2: Año de publicación:

Se ha llevado a cabo una búsqueda de documentos en el período comprendido entre 1997 y 2023. Esta decisión se justifica porque en el año 1997 Martín Socas Robayna escribió el documento titulado "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria," el cual resume investigaciones previas acerca de los errores matemáticos cometidos por estudiantes al abordar el álgebra. Dicho trabajo marca un hito en la investigación sobre las dificultades y errores en el álgebra.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos mediante los términos de búsqueda (TB), combinados con el filtro del año de publicación y otras especificaciones que ofrece Google Académico. Estas especificaciones incluyen la capacidad de restringir la búsqueda a un intervalo de

años y de utilizar los TB entre comillas para obtener resultados más precisos. La primera búsqueda se realizó con el TB errores algebraicos, sin indicar ninguna restricción de año de publicación ni entrecomillar dicho término. Así, se encontraron 26800 resultados² (Figura 2).

Figura 2

Resultados con el término de búsqueda errores algebraicos, sin comillas y sin restricción



Dada la cantidad de documentos encontrados, se realizó una segunda búsqueda restringiendo esta al intervalo 1997- 2023. De esta manera se encontró 16800 resultados, esto es 10000 documentos menos que en la primera búsqueda (Figura 3).

Figura 3

Resultados con el término de búsqueda errores algebraicos, sin comillas, en el intervalo 1997-2023



Dado que los resultados seguían siendo demasiados y, en consecuencia, poco viables de

² Estos resultados corresponden hasta el 11 de noviembre del 2023.

analizar, se realizó una tercera búsqueda para el intervalo 1997-2023, colocando comillas al término de búsqueda. Con esto último, la disminución de documentos es muy notoria, puesto que se pasa de 16800 a 333 resultados (**Figura 4**).

Figura 4

Resultados con el término de búsqueda "errores algebraicos" en el intervalo 1997-2023

The screenshot shows the Google Académico search interface. The search bar contains the text "errores algebraicos" and is highlighted with a red box. Below the search bar, the results are filtered by date range: "Intervalo específico" with "1997" and "2023" selected, and a "Buscar" button below it, also highlighted with a red box. The page displays "Aproximadamente 333 resultados (0,02 s)". Three search results are visible:

- [PDF] Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad** by G Saucedo - Itinerarios educativos, 2007 - pdfs.semanticscholar.org. Description: "Los propósitos del estudio son: Identificar los errores algebraicos cometidos por los alumnos en una evaluación de ingreso a la UNL. Sin embargo vemos a lo largo de toda...". Citation: "Citado por 21".
- Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos** by J.L. Díaz - El Cálculo y su Enseñanza, 2009 - funes.uniandes.edu.co. Description: "Biólogo, la presencia de errores algebraicos obstaculiza con frecuencia la articulación... Puesto que nuestra intención en este momento no es clasificar los errores algebraicos, no...". Citation: "Citado por 11".
- Errores algebraicos que comenten los profesores en formación (CO)** by A.M. Martínez, M. Hernández - XIII CONFERENCIA..., 2011 - xiii.ciaem-redumate.org. Description: "A continuación mostramos algunos errores algebraicos detectados en estudiantes... de acuerdo a la clasificación de errores algebraicos de estudiantes de secundaria propuesta por...". Citation: "Citado por 2".

Conseguida una cantidad de documentos más viable de revisión, se procedió a aplicar el tercer elemento con la finalidad de seleccionar los documentos de interés.

Elemento 3: Título

Sobre los 333 documentos localizados, se revisó que, en el título de cada uno estuviera contenido el término matemático *expresiones algebraicas* y algunos de los términos de búsqueda como *errores algebraicos*, *álgebra escolar* o *leguaje algebraico*. De esta manera se seleccionan los documentos que son de interés y se guardan en la biblioteca virtual personal de *Google académico*. Al realizar búsquedas utilizando los términos previamente mencionados y aplicando los criterios establecidos, la cantidad de documentos iniciales se reduce significativamente, lo que simplifica el proceso de selección y refinamiento. Es importante destacar que, en ocasiones, ciertos resultados que previamente se habían mostrado en otras búsquedas ya no se consideran debido a que la biblioteca digital permite identificar si han sido previamente seleccionados.

El procedimiento de búsqueda y selección, teniendo como elemento restrictivo el año de publicación, se replica para cada uno de los TB, con y sin comillas, obteniéndose los siguientes resultados (**Tabla 2**).

Tabla 2

Resultados aplicando a los términos de búsqueda los tres elementos de la primera fase

Término de búsqueda	Sin comillas	Con comillas
expresiones algebraicas	16100 resultados	11100 resultados
“errores algebraicos” “expresiones algebraicas”	17100 resultados	148 resultados
álgebra escolar	16900 resultados	2460 resultados
errores en el álgebra escolar	15300 resultados	64 resultados
lenguaje algebraico	16200 resultados	6310 resultados
errores en el lenguaje algebraico	17000 resultados	7 resultados

Nota. La búsqueda se realizó hasta noviembre del 2023.

La filtración de documentos mostrada en la **Tabla 2** permitió seleccionar 40 documentos en función de los tres criterios de la fase 1: término de búsqueda, año de publicación y título. Estos documentos se almacenan en la biblioteca de Google Académico.

- *Fase 2: Definición de la muestra a analizar*

Esta fase comienza con 40 documentos seleccionados en la fase 1 y almacenados en la biblioteca virtual. Así pues, para la selección final de los documentos se consideran 3 elementos: contenido del resumen, palabras clave y tema matemático abordado.

Elemento 1. Contenido del resumen

El resumen permite tener una visión general del contenido de cada documento, incluyendo aspectos específicos como problema que aborda, objetivo, método empleado y principales resultados o conclusiones de la investigación.

Elemento 2. Palabras clave

Las palabras clave están vinculadas a los constructos abordados en el documento y facilitan la ubicación de este en las bases de datos. Las palabras clave que sirven de referencia para la selección de la muestra son: expresiones algebraicas, errores, errores algebraicos, lenguaje algebraico, álgebra escolar y tipología o tipos de errores.

Elemento 3. Tema matemático abordado

El tema matemático sobre el que se pone atención en este estudio es expresiones algebraicas y en función a ello se realiza la selección final de los documentos.

Al concluir la fase 2 se determinó como muestra un total de 25 documentos, de los cuales se tiene: 1 capítulo de libro, 9 tesis (2 de licenciatura, 5 de maestría y 2 de doctorado), 11 artículos de

revistas, 1 memoria de congreso, 1 acta de simposio y 2 ponencias presentadas en encuentros internacionales de matemáticas (Tabla 3).

Tabla 3

Documentos seleccionados para el análisis

Código	Referencia del documento Título/ autor/ año	Tipo de documento
D1	Título: Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria, Cap. 5, pp. 113-141 Autor: Martin Manuel Socas Robayna Año: 1997	Capítulo de libro.
D2	Título: La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores Autor: María Mercedes Palarea Medina Año: 1998	Tesis doctoral (España)
D3	Título: Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad Autor: Gladis Saucedo Año: 2007	Artículo Revista: Itinerarios Educativos
D4	Título: Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico. Un catálogo de errores. Autor: Fernando Cedrán Pérez Año: 2008	Acta de simposio Investigación en educación matemática XII. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM
D5	Título: Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. Autor: Raquel María Ruano Barrera, Martín Manuel Socas Robayna y María Mercedes Palarea Medina. Año: 2008	Artículo Revista: PNA
D6	Título: Errores y dificultades en procesos de representación. El caos de la generalización y el razonamiento algebraico. Autor: Castellanos S María y Obando B Jorge A Año: 2009	Décimo encuentro colombiano de matemática educativa
D7	Título: Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura. Autor: José García Suárez Año: 2010	Tesis de maestría (Granada)
D8	Título: Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios. Autor: Ana Karina Delgado Bolivar Año: 2011	Tesis de maestría (Perú)
D9	Título: Diagnóstico sobre errores algebraicos en estudiantes que ingresan a la universidad.	II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística

Código	Referencia del documento Título/ autor/ año	Tipo de documento
	Autor: Alba Bibiana Rojas Ortigoza y Wendy Milena Loaiza Dueñas Año: 2013	y Educación Matemática 2013
D10	Título: El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. Autor: José García Suárez, Isidoro Segovia Alex y José Luis Lupiáñez Gómez Año: 2014	Artículo Revista: Bolema,
D11	Título: Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. Autor: Susana Rodríguez-Domingo, Marta Molina, María C. Cañadas y Encarnación Castro. Año: 2015	Artículo. Revista: PNA
D12	Título: Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. Autor: José García Suarez Año: 2015	Tesis doctoral (España)
D13	Título: Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factorizar polinomios. Autor: Arnidis Baltazar, Juan Rivera, Rosa Martínez, Hernando Cárdenas y Tulio Amaya Año: 2015	Artículo. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
D14	Título: Dificultades que conducen a errores en el aprendizaje del lenguaje algebraico en estudiantes de tercer año de educación media general. Autor: Irma Coromoto Rodríguez Jazpe Año: 2016	Tesis de maestría (Venezuela)
D15	Título: Categorización de errores típicos en ejercicios matemáticos cometidos por estudiantes de primer semestre de la universidad de Nariño. Autor: Claudio Pianda Año: 2018	Artículo. Comunicación breve.
D16	Título: Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad Autor: Ronny Gamboa Araya, Mario Castillo Sánchez y Randall Hidalgo Mora Año: 2019	Artículo. Revista: Actualidades Investigativas en Educación
D17	Título: Errores y dificultades en la resolución de problemas algebraicos. Autor: Zulma Consuelo Sánchez García Año: 2019	Artículo Revista: Eco Matemático
D18	Título: Los errores frecuentes que cometen un grupo de estudiantes al utilizar y comprender el significado de las letras en álgebra. Universidad Nacional de Costa Rica. Autor: Helen Rocío Bolaños Gonzales Año: 2019	Memorias del I Congreso Internacional de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional, Costa Rica

Código	Referencia del documento Título/ autor/ año	Tipo de documento
D19	Título: Diseño de una secuencia didáctica para la detección y superación de errores algebraicos. Autor: Sofía Acosta Bellizzi Año: 2019	Tesis de maestría (México)
D20	Título: Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. Autor: Helen Rocío Bolaños Gonzales y José Luis Lupiáñez Gómez Año: 2020	Artículo. Revista: Uniciencia,
D21	Título: Reconocimiento de los errores del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión por medio de una trayectoria hipotética de aprendizaje Autor: Yorley Sánchez Torres Año: 2021	Tesis de licenciatura. (Santiago de Cali - Colombia)
D22	Título: Diagnóstico de los errores que cometen los estudiantes del segundo grado de secundaria, de una institución educativa pública en el inicio del aprendizaje del álgebra escolar. Autor: Cinthia Yeraldine Pulaché Panta. Año: 2021	Tesis de licenciatura. (Perú)
D23	Título: Identificación de errores en el algoritmo de la división de polinomios Autor: Daniel García Pacheco, Luisa Ramírez Granados y Víctor Aguilar Arteaga Año: 2021	Artículo: Revista: Padiuaq
D24	Título: Una propuesta didáctica para promover el aprendizaje del concepto de factorización de polinomios algebraicos. Autor: Gerardo Irwin Téllez Vega Año: 2021	Tesis de Maestría. (México)
D25	Título: Errores algebraicos en las producciones de estudiantes universitarios de Costa Rica y México. Autor: García-Suárez J. y Bolaños-González, H. Año: 2022	Artículo. Revista: Matemáticas, Educación y Sociedad.

3.3 Técnica e instrumento de análisis de información

Los documentos que constituyen la muestra (**Tabla 3**) son analizados con la técnica análisis de contenido (Andréu, 2002). Esta es un método de investigación sistemático ampliamente utilizado en diversas disciplinas, como la comunicación, la sociología, la psicología y la investigación de marketing. Su objetivo principal es analizar y extraer información significativa de diferentes tipos de materiales, como textos escritos, imágenes, audio o video, con el propósito de identificar patrones, tendencias, temas y significados.

El análisis de contenido implica la categorización y codificación de datos, lo que permite a los investigadores extraer información valiosa de un gran volumen de contenido de una manera estructurada, ya sea de manera cuantitativa o cualitativa, dependiendo de los objetivos de la investigación. Según esta técnica se siguen las siguientes fases:

3.3.1 Determinación de la muestra.

Esta fase se ha iniciado con la selección de la muestra de la que han resultado 25 documentos que pasan a ser analizados minuciosamente (**Tabla 3**).

3.3.2 Categorización.

En esta fase se definen las categorías de análisis (**Tabla 4**) para, a partir de ellas, identificar unidades de análisis en cada documento.

Tabla 4

Categorías de análisis de los documentos que constituyen la muestra

Categoría	Descripción
Título	Permite visualizar los constructos que son objeto de estudio. Y visualizar la relación con el tema matemático de la investigación en curso
Autor	Es la persona que escribe el trabajo de investigación que se va a analizar. La coincidencia de un autor en diversos documentos da indicios, entre otros aspectos, de quiénes son referentes de investigación en una temática específicas.
Palabras clave	Este criterio es fundamental puesto que las palabras clave reflejan el contenido del artículo y sirven para determinar la temática de los documentos y ver la relación que puede tener con la investigación en curso. Además de permitir la localización del documento en una base de datos.
Objetivos de la investigación	Los objetivos son aquellas metas específicas que se plantean para desarrollar en cada investigación, en el caso que nos ocupa, propósitos sobre los errores algebraicos respecto a expresiones algebraicas.
Conceptos teóricos que sustentan la investigación	Esta categoría reporta los conceptos fundamentales de cada una de las investigaciones analizadas
Tipologías de errores desarrolladas	Esta categoría muestra las distintas tipologías empleadas y encontradas en cada trabajo de investigación desarrollada sobre errores algebraicos y, en específico, errores al trabajar expresiones algebraicas.
Paradigma Diseño de investigación Método Enfoque Tipo de investigación Técnicas e instrumentos para recoger información Técnicas e instrumentos para analizar información	Por ser una investigación bibliográfica es oportuno considerar estas categorías que permiten reportar la metodología con la que se investiga los errores algebraicos y las técnicas e instrumentos que se emplean para recoger y analizar información en cada documento de la muestra. Además, es relevante ya que uno de los objetivos está centrado en este aspecto de las investigaciones.
Resultados/Conclusiones relevantes	Esta categoría deja ver los resultados y conclusiones a las que llegaron con el desarrollo de sus investigaciones en cada documento

que se analiza, permitiendo reportar en específico los errores encontrados al trabajar expresiones algebraicas.

3.3.3 Codificación.

Cada uno de los 25 documentos seleccionados se ha sometido a un proceso de codificación para facilitar su identificación. Así pues, se asigna a cada documento una etiqueta que consiste en la letra "D" seguida de un número que refleja su antigüedad. Por lo tanto, el documento más antiguo en la muestra se etiquetará como "D1" (**Tabla 3**).

3.3.4 Identificación de unidades de análisis:

En esta fase se identifican las unidades de análisis de cada uno de los documentos que representan la muestra de la presente investigación y para ello se utiliza la tabla de categorías establecida previamente (**Tabla 4**).

3.3.5 Inferencias.

En esta fase se realiza una mirada integral de los resultados obtenidos del análisis realizado a la muestra, lo cual lleva a emitir los resultados y conclusiones a los que se llega con el desarrollo de la presente investigación.



Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados

4.1 Hallazgos respecto de la metodología empleada en cada estudio analizado

En este apartado, se presentan los resultados correspondientes a las categorías de análisis definidas en la metodología de cada estudio, tal como se muestra en la **Tabla 4**. Estas categorías incluyen: título, autor, palabras claves, objetivos de la investigación, conceptos teóricos que sustentan la investigación, tipologías de errores desarrolladas, elementos metodológicos de la investigación (paradigma, método, e enfoque, diseño, el tipo de investigación, las técnicas e instrumentos de recopilación de datos e información, y las técnicas e instrumentos de análisis de información) y resultados/Conclusiones relevantes.

Los 25 documentos analizados (**Tabla 3**) han sido publicados en el período comprendido entre 1997 y 2023. No se seleccionaron documentos relevantes relacionados con el tema de investigación en curso durante los años 1999-2006, 2012 y 2017. Por el contrario, se identificaron 3 documentos publicados en cada uno de los años 2016, 2019 y 2021. Además, en los años 2008 y 2018, se encontraron 2 documentos relevantes por año, mientras que, en 1997, 1998, 2007, 2009, 2010, 2011, 2013, 2014, 2016 y 2020 solo se encontró 1 documento relevante e interesante en cada año.

En cuanto a los niveles educativos a los que se dirigen estas investigaciones, predomina el nivel secundario, con 10 trabajos de investigación (D1, D2, D5, D6, D8, D11, D13, D17, D21, D22). A continuación, le sigue el nivel universitario, con 12 investigaciones (D3, D7, D9, D10, D12, D14, D15, D16, D18, D19, D20, D25), y finalmente, el bachillerato con 3 investigaciones (D4, D23, D24).

En lo que respecta a la metodología utilizada en estos trabajos de investigación, se pueden destacar los siguientes hallazgos:

- *Paradigma*: De los 25 documentos, 9 especifican de manera explícita el paradigma utilizado. Cuatro de ellos (D2, D3, D17, D25) se enmarcan en un paradigma cuantitativo, mientras que cinco (D8, D21, D22, D23, D24) adoptan un paradigma cualitativo. Los 16 documentos restantes (D1, D4, D5, D6, D7, D9, D10, D11, D12, D13, D14, D15, D16, D18, D19, D20) no detallan explícitamente el paradigma que guía su investigación.

- *Método*: Cinco documentos especifican el método de investigación utilizado. De estos, tres (D8, D16, D22) emplean un método cualitativo, uno (D14) utiliza el cuantitativo, y uno (D2) adopta un método mixto. Los demás documentos no especifican de manera explícita el método que aplican.

- *Enfoque*: Once documentos especifican el enfoque metodológico que emplean. De estos, cinco (D2, D13, D14, D18, D20, D25) utilizan un enfoque cuantitativo, dos (D15, D21) optan por un enfoque cualitativo, uno (D8) aplica un enfoque lógico-semiótico, y uno (D12) utiliza un enfoque mixto (cualitativo-cuantitativo). Quince documentos no especifican el enfoque seguido en su investigación.

- *Diseño*: Ninguno de los 25 documentos menciona explícitamente el diseño de investigación empleado en sus metodologías.

-Tipo de investigación: De los 25 documentos, 22 detallan explícitamente el tipo de investigación que llevaron a cabo. De estos, nueve (D3, D10, D12, D17, D18, D20, D22, D24, D25) son de carácter descriptivo, cuatro (D3, D7, D11, D15) se consideran de tipo descriptivo-exploratorio, uno (D14) es de tipo descriptivo-no experimental, uno (D16) es de tipo descriptivo-explicativo, uno (D13) es de tipo descriptivo-cuantitativo, uno (D1) es de tipo explicativo, uno (D2) es de tipo experimental, y dos (D9, D12) son de tipo exploratorio y dos (D8, D21) son de tipo cuantitativo. Los tres documentos restantes no especifican el tipo de investigación que llevaron a cabo.

- *Técnicas e instrumentos de recopilación de datos e información:* De las 25 investigaciones, solo una (D14) menciona la utilización de la técnica de prueba pedagógica, mientras que los 24 restantes no detallan ni explicitan las técnicas empleadas.

- *Instrumentos de recopilación de datos e información:* Los instrumentos empleados para la recopilación de datos e información en cada trabajo de investigación varían. Catorce investigaciones (D3, D4, D5, D7, D10, D16, D17, D18, D19, D20, D22, D23, D24, D25) utilizaron cuestionarios, tres (D2, D8, D13) emplearon tanto cuestionarios como entrevistas, uno (D9) utilizó una prueba diagnóstica y un cuestionario, uno (D12) empleó tres instrumentos: cuestionario, test y fichas de observación, uno (D11) aplicó un dominó algebraico para la recopilación de datos, dos (D14, D15) utilizaron una prueba escrita y un cuestionario, uno (D21) empleó un cuestionario y fichas de observación, uno (D6) llevó a cabo una revisión documental de casos particulares, y uno (D1) no especificó el instrumento utilizado.

4.2 Hallazgos respecto de la concepción de error

De los documentos analizados se han identificado en sus marcos teóricos 11 concepciones sobre error, las mismas que presentan ciertas similitudes y diferencias dependiendo del autor referente de su investigación. En la **Tabla 5** se muestran las definiciones encontradas, el autor de estas y de manera explícita los documentos que emplean las mismas o hacen uso de ellas para sustentar su base teórica sobre el error.

Tabla 5
Concepciones de error según diversos autores

Autor	Definición de error	Documentos que la emplean
Matz (1980) citado en Gamboa et al. (2019)	Los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación.	D5, D6, D19
Radatz (1980) citado en García (2015)	Un error no solo es la ausencia de una respuesta correcta o el resultado de un accidente, es más también un producto de la experiencia que se adquiere al enfrentar problemas desconocidos.	D12

Lakatos (1981) citado en Palarea (1998)	Concepciones limitadas.	D2
Davis (1986) citado en Saucedo (2007)	Los errores no son al azar, y es posible predecir algunos patrones comunes de errores que se presentan en forma similar en distintos individuos.	D3
Rico (1995) citado en Delgado (2011)	El error es un conocimiento deficiente e incompleto, además es una posibilidad, y una realidad permanente en el conocimiento científico. Los errores no aparecen por azar, pues surgen en un marco conceptual que se basa en conocimientos adquiridos anteriormente.	D8, D16
Brousseau (1997) citado en Saucedo (2007)	El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado.	D3, D12
Socas (1997)	El error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción.	D1, D9, D14, D23
Godino et al. (2003) citado en Pianda (2018)	Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar	D15
De la Torre (2004) citado en Pianda (2018)	El error puede considerarse como una imprudencia, distorsión o inadecuación en un proceso.	D15
Carrión (2007) citado en Baltazar et al. (2015)	El error se requiere "para afinar la idea individual sobre lo que es falso y lo que es correcto, según una norma dada" Se considera que el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido	D13, D16
Fernández (2016) citado en Pulache 2021	El error es una vía de acceso al conocimiento que conviene valorar positivamente y que además invita a la autorreflexión, reorganización, enriquecimiento, y ajuste del conocimiento en situaciones conflictivas que lo requieran.	D22

Las concepciones de error presentes en los documentos analizados se centran en la búsqueda de una definición precisa del mismo. Cada autor investigador ha adoptado y adaptado estas concepciones con el propósito de establecer una base teórica y lograr un enfoque más preciso en lo que respecta a los errores que se cometen en la enseñanza de las matemáticas, en particular, en el álgebra.

La Tabla 5 muestra un orden cronológico de las concepciones de error, lo que permite identificar si las investigaciones posteriores utilizan definiciones previamente establecidas, si las modifican o mejoran, o incluso si generan nuevas concepciones a raíz de investigaciones subsiguientes y avances en la investigación. Además, es evidente que la concepción de error más recurrente en los trabajos analizados es la propuesta por Socas en 1997, la cual se encuentra en cuatro documentos (D1, D9, D14, D23). A continuación, la concepción de Matz citado en Gamboa et al. (2019) es empleada en tres trabajos (D5, D6, D19), seguida de la de Rico citado en Delgado (2011), presente en D8 y D16. Brousseau (1997) citado en Saucedo (2007) es empleado en dos documentos (D3, D12), al igual que Carrión (2007) citado en Baltazar et al. (2015) (D13, D16), Radatz citado en García (2015) (D12), Lakatos citado en Palarea (1998) (D2), Davis citado en Saucedo (2007) (D3), Fernández citado en Pulache (2021) (D22), mientras que Godino et al. (2003) y De la Torre (2004) citados en Pianda (2018) son citados en un solo documento como fuentes clave en la conceptualización del error.

Asimismo, en base a las concepciones previamente expuestas, podemos realizar comparaciones y encontrar similitudes en las diversas perspectivas que abordan la naturaleza y definición del error en el ámbito educativo.

En cuanto a la naturaleza del error, Matz y Radatz (1980) coinciden en que los errores representan intentos de adaptar el conocimiento a nuevas situaciones. Radatz incluso sugiere que los errores pueden ser el resultado de la experiencia en la resolución de problemas desconocidos, subrayando así que los errores no son simples fallos al azar.

El error causado por el conocimiento previo también se destaca en las teorías de Brousseau (1997) y Rico (1995), quienes argumentan que los errores están intrínsecamente relacionados con el conocimiento previo. Brousseau afirma que el error refleja un conocimiento anterior que se revela como falso o inadaptado, mientras que Rico considera que el error proviene de un conocimiento deficiente e incompleto. Ambos enfatizan que los errores no son simplemente producto de la ignorancia.

Además, se puede observar en varias de estas concepciones que los errores no surgen al azar, sino que se enraízan en un marco conceptual basado en conocimientos previos. Esta perspectiva es respaldada por Matz (1980), Davis (1986) y Fernández (2016), quienes sugieren que los errores pueden predecirse mediante la identificación de patrones comunes de conocimiento inadecuado.

Socas (1997) agrega otra dimensión al concepto del error al señalar que este no solo se relaciona con la falta de conocimiento específico o la distracción, sino también con esquemas cognitivos inadecuados. Esto implica que los errores pueden surgir de una estructura mental inapropiada para abordar un problema.

Fernández (2016) aporta una perspectiva positiva al destacar la importancia de valorar el error como un camino hacia el conocimiento, fomentando la autorreflexión y el ajuste del conocimiento en situaciones problemáticas. Esto contrasta con la idea de que el error solo refleja una carencia.

Por otro lado, según Godino et al. (2003), el error puede considerarse una práctica no válida desde la perspectiva de la institución matemática escolar, subrayando así que el error está ligado a normas y reglas específicas en el contexto educativo.

Finalmente, Carrión (2007) resalta que el error es esencial para afinar la comprensión de lo correcto y lo falso, sugiriendo que los errores pueden contribuir al proceso de aprendizaje y autoevaluación.

En resumen, a pesar de las diferencias en las definiciones y enfoques respecto al error en el contexto educativo, la mayoría de los autores coinciden en que los errores no son meras fallas al azar, sino que están estrechamente relacionados con el conocimiento previo del estudiante y al marco conceptual que este posee. Además, se destaca la importancia de considerar el error como una oportunidad para el aprendizaje y la autorreflexión.

4.3 Criterios de clasificación, tipologías de errores algebraicos y ejemplos de errores.

El análisis de los documentos de la muestra ha permitido identificar las diversas tipologías que los autores han empleado para respaldar sus investigaciones en el campo del álgebra. Estas tipologías se han tomado de investigaciones previas realizadas por expertos en la misma rama de las matemáticas. Es importante señalar que cada investigador ha enfocado su trabajo en aspectos similares o diferentes dentro de este campo. En total, se han identificado 14 tipologías, las cuales se describen a continuación (**Tabla 6**).

La **Tabla 6** facilita una interpretación de como las diversas tipologías han sido usadas según las necesidades del investigador.

La tipología planteada por Socas (1997) se ha empleado en investigaciones posteriores como clasificación para detectar errores, asimismo, se puede observar que en dos documentos se usa en el marco teórico (MT) para el abordaje de errores algebraicos.

La tipología de Küchemann (1980) citado en García (2015), ha sido empleada en 6 documentos como referente para poder determinar los errores que los estudiantes cometen al realizar tareas algebraicas y en el uso y tratamiento que se les da a las letras.

Movshovitz et al. (1987) citado en Saucedo (2007) plantea una tipología para la clasificación de errores algebraicos, misma que según el análisis realizado, ha sido tomada como referente en 5 posteriores investigaciones y en 1 empleada como parte del marco teórico.

Palarea (1998) fundamenta su tipología en la propuesta de Socas (1997), expandiendo ciertos aspectos dentro de la misma. Ha sido considerada en 2 documentos como lineamiento para detección y análisis de errores y en 1 documento usado como base en el marco teórico.

La tipología planteada inicialmente por Pinchback (1991) es adoptada por Saucedo (2007) la cual ha sido empleada en 3 investigaciones posteriores como clasificación para determinar errores algebraicos.

Finalmente se tiene un grupo de 9 de tipologías que no han sido abordadas en otros trabajos de investigación, pero cabe resaltar que también han permitido detectar errores cometidos por estudiantes en el abordaje del álgebra y que algunos de ellos de cierta forma encajan en las tipologías anteriormente mostradas.

De las tipologías de errores encontradas en los documentos de la muestra resalta la tipología planteada por Socas en 1997, debido a que, para detección de errores algebraicos, es un referente en los posteriores estudios que investigan en esta línea. Dicha tipología ha permitido identificar un sin número de errores que cometen los estudiantes y que se clasifican en los parámetros que él plantea. Asimismo, es visible que en cada estudio donde se ha hecho uso de la tipología, los resultados encontrados han permitido a lo largo del tiempo ir puliendo estos aspectos. En la **Tabla 7** podremos observar la utilidad que se le ha dado a la tipología y los aportes que se han encontrado en su aplicación en investigaciones subsiguientes.

Tabla 7

Aplicación de la tipología de errores de Socas (1997)

Socas 1997	Palarea 1998	Ruano et al. 2008	Castellanos y Obando (2009), Rodríguez (2016), Pulache (2021)	Rodríguez, Molina, Cañadas y Castro (2015)	Acosta (2019)
<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores que tienen su origen en un obstáculo. ➤ Errores que tienen su origen en ausencia de sentido. ✓ Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. ✓ Errores de procedimiento. <ul style="list-style-type: none"> ○ Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva. ○ Errores relativos al uso de recíprocos. ○ Errores de cancelación. ✓ Errores de álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico. ➤ Errores que tienen su origen en actitudes efectivas y emocionales 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores del álgebra que están en la aritmética. ✓ Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva. ✓ Errores relativos al uso de recíprocos. ✓ Errores de cancelación. ➤ Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores que tienen su origen en un obstáculo. ✓ No uso del paréntesis ✓ Concatenación ✓ Necesidad de clausura ➤ Errores que tienen su origen en ausencia de sentido. ✓ No uso de paréntesis ✓ Particularización ✓ Uso incorrecto de la prop. Distributiva ✓ Faltan datos ✓ Cambio de registro incorrecto ➤ Errores que tienen su origen en actitudes efectivas y emocionales ✓ Modelo incompleto 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores que tienen su origen en un obstáculo. ➤ Errores que tienen su origen en ausencia de sentido. ✓ Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. ✓ Errores de procedimiento. ✓ Errores de álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico. ➤ Errores que tienen su origen en actitudes efectivas y emocionales. 	<p>Incompleto Desmedido</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Derivados de la aritmética <ul style="list-style-type: none"> • Paréntesis • División-Multiplicación • Potenciación-Multiplicación • Suma-Multiplicación • División-Potenciación ✓ Derivados de las características propias del simbolismo algebraico <ul style="list-style-type: none"> • Generalización • Particularización • Letras 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores Que Tienen Su Origen En Un Obstáculo. ✓ Concatenación. <ul style="list-style-type: none"> ○ Errores en adición de términos no semejantes. ○ Errores en adición incorrecta de términos no semejantes. ○ Errores en adición de términos no semejantes y de exponentes. ○ Errores en adición de términos no semejantes y operación incorrecta. ○ Errores en la operación con enteros. ○ Errores en adición de términos no semejantes y mal manejo de exponentes. ○ Errores en operaciones con términos no semejantes -sólo misma letra- y suma indebida de exponentes.

Al examinar la aplicación que hacen los diversos autores de la tipología de errores planteada por Socas 1997 (**Tabla 7**), es posible organizar los datos obtenidos y estructurar una clasificación de errores más amplia y completa, enriqueciendo la tipología inicial de Socas (1997). A continuación, se muestra dicha reorganización (**Tabla 8**).

Tabla 8

Clasificación de errores enriquecida a partir del uso de la clasificación de Socas (1997)

I. Errores que tienen su origen en un obstáculo	a. Concatenación	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Errores en adición de términos no semejantes. ✓ Errores en adición incorrecta de términos no semejantes. ✓ Errores en adición de términos no semejantes y de exponentes. ✓ Errores en adición de términos no semejantes y operación incorrecta. ✓ Errores en la operación con enteros. ✓ Errores en adición de términos no semejantes y mal manejo de exponentes. ✓ Errores en operaciones con términos no semejantes -sólo misma letra- y suma indebida de exponentes.
	b. Necesidad de clausura	
II. Errores que tienen su origen en ausencia de sentido	a. Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Paréntesis ✓ División – Multiplicación ✓ Potenciación – Multiplicación ✓ Suma – Multiplicación ✓ División – Potenciación
	b. No uso de paréntesis	
	c. Particularización	
	d. Faltan datos	
	e. Cambio de registro incorrecto	
	f. Errores de procedimiento	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva. ✓ Errores relativos al uso de recíprocos. ✓ Errores de cancelación
	g. Errores de álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Generalización ✓ Particularización ✓ Letras ✓ Complicación estructural
III. Errores que tienen su origen en actitudes efectivas y emocionales	a. Modelo incompleto	

Al dirigir nuestra atención hacia las tipologías identificadas en la lista de documentos seleccionados, podemos extraer diversas clasificaciones que han sido minuciosamente depuradas. Estas clasificaciones se han destacado debido a su recurrencia en múltiples documentos, ya sea como base teórica en investigaciones que abordan errores en el ámbito del álgebra o como clasificaciones fundamentales para la detección de dichos errores (**Tabla 9**).

Tabla 9*Tipologías de errores algebraicos encontradas*

Autor	Tipología de errores
Socas (1997)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores que tienen su origen en un obstáculo. ➤ Errores que tienen su origen en ausencia de sentido. <ul style="list-style-type: none"> ○ Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. ○ Errores de procedimiento. <ul style="list-style-type: none"> - Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva. - Errores relativos al uso de recíprocos. - Errores de cancelación. ○ Errores de álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico. ➤ Errores que tienen su origen en actitudes efectivas y emocionales.
Palarea (1998)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores del álgebra que están en la aritmética. <ul style="list-style-type: none"> ○ Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva. ○ Errores relativos al uso de recíprocos. ○ Errores de cancelación. ➤ Errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.
Pinchback (1991)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores conceptuales. ➤ Errores de pre-requisito. <ul style="list-style-type: none"> ○ Datos mal utilizados. ○ Interpretación incorrecta del lenguaje. ○ Empleo incorrecto de propiedades y definiciones. ○ Errores al operar algebraicamente. ○ No verificación de resultados parciales o totales. ○ Errores lógicos. ➤ Errores técnicos.
Cerdán (2008)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores en el uso de las letras. <ul style="list-style-type: none"> ○ Designación múltiple. ○ Significado múltiple. ○ Significado cambiado. ➤ Errores en la construcción de expresiones aritméticas o algebraicas. <ul style="list-style-type: none"> ○ Error de operación. ○ Error de inversión. ○ Error de arbitrariedad. ➤ Errores de igualdad.
Radatz (1979) citado en García (2010)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores debidos a dificultades de lenguaje. ➤ Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. ➤ Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos.

Autor	Tipología de errores
	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. <ul style="list-style-type: none"> ○ Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema. ○ Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares. ○ Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros. ○ Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción. ○ Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas. ➤ Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.
Esteley y Villarreal (1990, 1996) citado en García (2010)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones. ➤ No empleo o uso parcial de la información. ➤ No verificación de resultados parciales o totales. ➤ Empleo incorrecto de propiedades y definiciones. ➤ No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc. en un caso particular. ➤ Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada. ➤ Errores de lógica. ➤ Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.
Küchemann (1980) citado en García (2015)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Letra evaluada. ➤ Letra ignorada. ➤ Letra como un objeto. ➤ Letra como una incógnita especial. ➤ Letras como números generales. ➤ La letra como variación de cantidad (variable).
Carrión (2007)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Error de entrada. ➤ Error de operación. ➤ Error de escritura.
Pianda (2018)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores identificados en el aspecto algebraico: <ul style="list-style-type: none"> ○ Interpretación y presentación de expresiones algebraicas. <ul style="list-style-type: none"> - Errores donde se trunca la estructura de una expresión algebraica. - Errores en la interpretación y uso de información numérica. - Errores de linealidad o generalización apresurada. ○ Operaciones y procedimientos sobre expresiones algebraicas. <ul style="list-style-type: none"> - Error al reducir términos semejantes. - Error en el tratamiento de fracciones algebraicas simples. - Error al factorizar expresiones algebraicas por factor común. - Error el despejar una variable.

Autor	Tipología de errores
Abrate et al. (2006) citado en Gamboa et al. (2019)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Errores debidos al lenguaje matemático. ➤ Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. ➤ Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas. ➤ Errores debidos a la recuperación de un esquema previo. ➤ Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales. ➤ Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos. ➤ Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.
García (2010)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Eliminación incorrecta de denominadores. ➤ Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas. ➤ Procedimiento inconcluso. ➤ Problemas propios incorrectos e inferencias no válidas. ➤ Aplicación parcial de regla de factorización por factor común. ➤ Asociación incorrecta de productos notables. ➤ Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra. ➤ Error en la determinación de la potencia. ➤ Resolución aditiva de la potencia de un binomio. ➤ Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio. ➤ Error al realizar productos de polinomios. ➤ Error de cálculo simple.
Amador (2015)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ No asocia "aumentar" con la operación de sumar. ➤ No utiliza letras para designar cantidades indeterminadas. ➤ Ignora parte de la expresión del lenguaje natural. ➤ No asocia "disminuir" con la operación de restar. ➤ Proporciona resultados numéricos. ➤ No utiliza operaciones aritméticas. ➤ Escribe cualquier expresión algebraica en forma de ecuación. ➤ No asocia "producto" con la operación de multiplicación. ➤ Asocia "y" con la operación de sumar. ➤ No utiliza el producto como una operación binaria. ➤ No asocia "dentro de" a la operación de sumar. ➤ Añade letras que no deben estar. ➤ Cambia la letra dada por otra. ➤ No asocia "diferencia" con la operación de restar. ➤ Cambia el orden de minuendo y sustraendo en una diferencia. ➤ No asocia "cinco veces" con multiplicar por cinco. ➤ No asocia "número par" a multiplicar por dos. ➤ Escribe la cuarta parte de un número como $1/4$. ➤ No asocia el cubo con la potencia tres. ➤ No asocia "la cuarta parte de un número" con dividir entre cuatro. ➤ Cambia la información dada. ➤ No escribe correctamente dos números consecutivos. ➤ Concatena operaciones numéricas de forma equivocada. ➤ No escribe "el doble de un número" de manera correcta. ➤ No escribe "el triple de un número" de manera correcta. ➤ Opera mal. ➤ Escribe el perímetro de un cuadrado incorrectamente. ➤ No escribe paréntesis en productos en los que algún factor es una suma. ➤ Escribe incorrectamente la fórmula del área de un rectángulo.

Autor	Tipología de errores
Juárez (2021)	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Escribe el perímetro cuando le preguntan por el área. ➤ Errores de operaciones algebraicas. <ul style="list-style-type: none"> ○ Interpretación incorrecta de los símbolos. ○ Mal uso del lenguaje algebraico. ○ Asociación incorrecta de productos notables. ○ No puede identificar el método de factorización. ○ Poco dominio de las reglas de factorización. ➤ Errores de naturaleza aritmética. <ul style="list-style-type: none"> ○ Reversiones binarias: $4 \times 4 = 8$. ○ Incorrecto uso de las operaciones básicas. ○ Desconoce las reglas de exponentes. ➤ Errores por incorrecta interpretación de conceptos. <ul style="list-style-type: none"> ○ Deformación de principios o de reglas de naturaleza matemática. ○ Generalización de reglas. ○ Interpretación errónea de conceptos. ○ Mal uso de fórmulas. ➤ Procedimientos incorrectos o mal escritos. <ul style="list-style-type: none"> ○ Errada representación. ○ Falta de verificación en la solución. ○ Desconocen la obtención de resultados. ○ Procedimientos inconclusos. ○ Cambia términos en el tratamiento. ○ Sabe a lo que hay que llegar, pero no sabe cómo.

La extensa lista de errores presentada en la **Tabla 9** nos brinda la oportunidad de apreciar la gran cantidad de fallos que los estudiantes cometen al abordar el álgebra en sus diferentes aspectos. La identificación y documentación de estos errores algebraicos son el producto de investigaciones realizadas a lo largo del tiempo, y algunas tipologías y clasificaciones se han convertido en puntos de referencia en estudios posteriores, o se han fortalecido y perfeccionado con nuevas contribuciones e investigaciones adicionales. A partir de estas tipologías, se puede inferir que los autores han seguido ciertos criterios para aplicar estas categorizaciones de errores algebraicos en sus investigaciones y para registrar sus hallazgos. Estos criterios, deducidos del análisis, son los siguientes:

En primer lugar, se encuentra la **naturaleza del error**, que se refiere específicamente a las características o cualidades inherentes que describen el tipo de error cometido. En el contexto de los errores algebraicos o en otras áreas de investigación, comprender la naturaleza de un error implica identificar las características esenciales que lo definen.

En segundo lugar, se considera el **origen del error**, lo cual se refiere a la causa o fuente de un error específico. Identificar esta fuente de donde proviene un error implica determinar en qué etapa del proceso matemático ocurrió este.

En resumen, estos dos criterios identificados y previamente explicados se enfocan en la fuente o causa de un error en un proceso específico y en las características intrínsecas del error. Ambos conceptos son fundamentales para reconocer y corregir errores en matemáticas y otras disciplinas. A continuación, se muestra algunas tipologías como ejemplos que evidencian la presencia de los criterios antes mencionados: origen del error y/o naturaleza del error (**Tabla 10**).

Tabla 10

Ejemplos de tipologías de error, según su naturaleza u origen

	Naturaleza de los errores	Origen de los errores
Socas (1997) y Palarea (1998)		Clasifican los errores en función de su origen, distinguiendo entre errores que se originan en obstáculos (por ejemplo, errores aritméticos) y errores que se originan en la falta de comprensión de conceptos. Identifican subtipos de errores basados en su origen específico. Por ejemplo, los errores relacionados con el mal uso de la propiedad distributiva o los errores relativos al uso de recíprocos que se derivan de la aritmética.
Pinchback (1991)	Clasifica los errores en matemáticas en función de su naturaleza, distinguiendo entre errores conceptuales y errores de pre-requisito. Los errores conceptuales se relacionan con la comprensión deficiente de conceptos matemáticos, mientras que los errores de pre-requisito indican la falta de conocimientos previos necesarios.	Identifica diversas categorías de errores en función de su origen, como datos mal utilizados, interpretación incorrecta del lenguaje, empleo incorrecto de propiedades y definiciones, errores al operar algebraicamente, falta de verificación de resultados y errores lógicos y técnicos.
Cerdán (2008)	Clasifica los errores en función de cómo se relacionan con el uso de letras y símbolos en álgebra. Se distinguen entre errores en el uso de letras y errores en la construcción de expresiones aritméticas o algebraicas, así como errores en la igualdad.	
(Radatz, 1979)	Clasifican los errores en función de su naturaleza, destacando errores debidos a dificultades de lenguaje, errores debidos a dificultades para obtener información espacial, errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos, errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, errores	

	Naturaleza de los errores	Origen de los errores
	debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.	
Pianda (2018), Abrate et al. (2006), y Juárez (2021)	Clasifican los errores en función de su naturaleza específica en el ámbito algebraico. Por ejemplo, errores en la interpretación y presentación de expresiones algebraicas, errores en operaciones y procedimientos sobre expresiones algebraicas, errores en naturaleza aritmética y errores debidos a la incorrecta interpretación de conceptos.	

La identificación de los criterios utilizados por los autores y el análisis de los errores algebraicos planteados o encontrados permite comprender las áreas en las que los estudiantes a menudo enfrentan dificultades. Esto, a su vez, da paso para desarrollar estrategias efectivas de enseñanza y corrección. Después del análisis de los errores algebraicos presentados en **Tabla 9** y profundizando en el aspecto de las expresiones algebraicas, se han identificado una lista de errores que los estudiantes cometen al trabajar con estas expresiones. A continuación, se presenta una clasificación de estos errores, considerando los criterios establecidos por los distintos autores revisados. Estos criterios comprenden: errores conceptuales, errores de interpretación y presentación, errores de igualdad, errores en operaciones y errores en la aplicación de reglas y estrategias. La **Tabla 11** detalla las tipologías de errores encontradas.

Tabla 11

Errores cometidos al trabajar expresiones algebraicas

Errores conceptuales	<ul style="list-style-type: none"> • Errores conceptuales (Pinchback, 1991). • Errores por incorrecta interpretación de conceptos (Juárez, 2021).
Errores de interpretación y presentación	<ul style="list-style-type: none"> • Errores en la interpretación y presentación de expresiones algebraicas (Pianda, 2018). • Interpretación incorrecta de los símbolos (Juárez, 2021).
Errores de igualdad	<ul style="list-style-type: none"> • Errores de igualdad (Cerdán, 2008).
Errores de operación	<ul style="list-style-type: none"> • Errores de procedimiento (Socas, 1997). • Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva (Socas, 1997). • Errores relativos al uso de recíprocos (Socas, 1997). • Errores de cancelación (Socas, 1997). • Errores al reducir términos semejantes (Pianda, 2018). • Error en el tratamiento de fracciones algebraicas simples (Pianda, 2018). • Error al factorizar expresiones algebraicas por factor común (Pianda, 2018). • Error al despejar una variable (Pianda, 2018). • Eliminación incorrecta de denominadores (García Suarez, 2010).

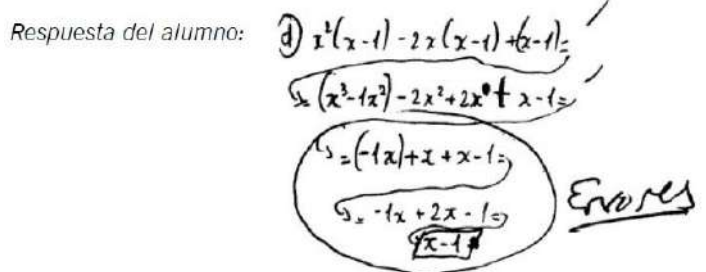
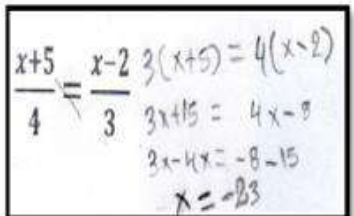
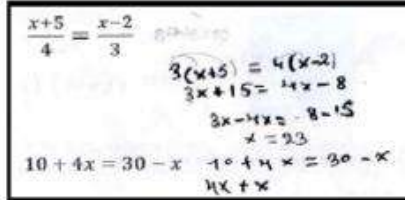
	<ul style="list-style-type: none"> • Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas (García Suarez, 2010). • Aplicación parcial de la regla de factorización por factor común (García Suarez, 2010). • Asociación incorrecta de productos notables (García Suarez, 2010). • Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra (García Suarez, 2010). • Error en la determinación de la potencia (García Suarez, 2010). • Resolución aditiva de la potencia de un binomio (García Suarez, 2010). • Error al realizar productos de polinomios (García Suarez, 2010). • Error de cálculo simple (García Suarez, 2010)
Errores en la aplicación de reglas y estrategias	<ul style="list-style-type: none"> • Errores por la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes (Pinchback, 1991). • Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo (Esteley y Villarreal, 1990, 1996). • Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada (Esteley y Villarreal, 1990, 1996). • No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc. en un caso particular (Esteley y Villarreal, 1990, 1996). • Falta de verificación en la solución (Juárez, 2021). • Procedimientos inconclusos (Juárez, 2021). • Cambia términos en el tratamiento (Juárez, 2021). • Sabe a lo que hay que llegar, pero no sabe cómo (Juárez, 2021).

La **Tabla 11** enumera varios errores comunes que los estudiantes pueden cometer al aprender matemáticas y usar expresiones algebraicas, junto con posibles razones para explicar estos errores. Cada tipo de error se atribuye a su respectivo autor, lo que proporciona una referencia para crear una tipología para nuevas clasificaciones de errores relacionados con expresiones algebraicas. En resumen, estos errores van desde dificultades conceptuales hasta problemas en la aplicación de procedimientos matemáticos algebraicos. Algunos errores pueden surgir por falta de comprensión o motivación durante el proceso de aprendizaje, mientras que otros provienen de problemas aritméticos o manipulación incorrecta de símbolos algebraicos, que se han incorporado en la nueva tipología de errores. Es importante destacar que no todos los errores han sido incluidos en la tipología propuesta debido a que existen algunas clasificaciones que, si bien son aplicables y relevantes en el contexto del álgebra, no están directamente relacionadas con el enfoque de la investigación actual, que se centra en las expresiones algebraicas.

En respuesta al objetivo específico **OE4**. *Determinar ejemplos de los errores que se cometen en torno a las expresiones algebraicas, para cada tipología identificada con la finalidad de proponer una clasificación sistematizada*, procedemos a la ejemplificación de la clasificación propuesta (**Tabla 12**).

Tabla 12

Ejemplos de errores en expresiones algebraicas

Criterio	Tipo de error	Descripción	Ejemplos de error
Errores conceptuales	Errores conceptuales (Pinchback, 1991).	Es donde el estudiante intenta aplicar el procedimiento correcto de acuerdo con lo solicitado por el concepto, pero comete errores al realizar los procedimientos necesarios.	<p><i>Ejemplo 4:</i> Realiza las operaciones indicadas: $x^2(x-1) - 2x(x-1) + (x-1)$</p> <p><i>Respuesta del alumno:</i></p>  <p>Extraído de Saucedo (2007)</p>
	Errores por incorrecta interpretación de conceptos (Juárez, 2021).	Se refieren a los malentendidos o confusiones en los conceptos fundamentales del álgebra, lo que lleva a errores en la simplificación, resolución de ecuaciones, factorización y otros aspectos de esta área de las matemáticas.	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="1055 861 1467 1189"> <p>Figura 29</p> <p><i>Respuesta de la pregunta 8, realizada por A8</i></p>  </div> <div data-bbox="1512 861 1937 1189"> <p>Figura 30</p> <p><i>Respuesta de la pregunta 8, realizada por A11</i></p>  </div> </div> <p>Se observa también que hay estudiantes que presentan errores en el uso del signo igual.</p> <p>Extraído de Pulache (2021)</p>

Errores en la interpretación y presentación de expresiones algebraicas (Pianda, 2018).

Los errores en la interpretación y presentación de expresiones algebraicas son errores comunes que ocurren al trabajar con ecuaciones y expresiones matemáticas.

c) La suma de dos números consecutivos: $M+X$
 d) El quintuple de un número menos 2: $5y-2$
 e) La mitad de un número más 12: $x+12=y$

Extraído de Pulache (2021)

Interpretación incorrecta de los símbolos (Juárez, 2021).

Se refiere a cometer errores al comprender y aplicar los símbolos matemáticos y algebraicos de manera inadecuada. Los símbolos son fundamentales en las matemáticas, ya que representan operaciones, relaciones y valores específicos.

$2x + y + x + 4$
 $3x + 2y \times 3$
 $x = 18$

Nota: Confunde la variable con multiplicación.

Extraído de Pulache (2021)

Errores de igualdad

Errores de igualdad (Cerdán, 2008).

Los errores de igualdad en álgebra pueden ocurrir cuando se confunden los signos de igualdad con otros símbolos o se aplican incorrectamente las propiedades matemáticas.

Figura 29

Respuesta de la pregunta 8, realizada por A8

$$\frac{x+5}{4} = \frac{x-2}{3} \quad 3(x+5) = 4(x-2)$$

$$3x+15 = 4x-8$$

$$3x-4x = -8-15$$

$$x = -23$$

Figura 30

Respuesta de la pregunta 8, realizada por A11

$$\frac{x+5}{4} = \frac{x-2}{3}$$

$$3(x+5) = 4(x-2)$$

$$3x+15 = 4x-8$$

$$3x-4x = -8-15$$

$$x = 23$$

$$10+4x = 30-x$$

$$4x+x = 30-x$$

Se observa también que hay estudiantes que presentan errores en el uso del signo igual. Estos estudiantes no asimilan la situación de equilibrio que representa el signo y según Socas (1996) este problema pone de manifiesto la distinción entre la estructura sistémica que tienen que ver con las operaciones y relaciones de las expresiones algebraicas que hay en ambos lados de la igualdad. Al

Extraído de Pulache (2021)

Errores de operación

Errores de procedimiento (Socas, 1997).

Se refieren a los errores que cometen los estudiantes o las personas al seguir un proceso o método incorrecto o inadecuado al resolver un problema algebraico

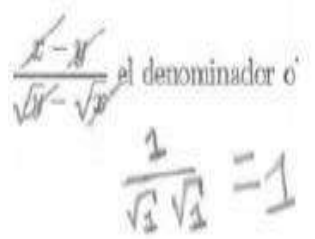
$$\frac{x+5}{4} = \frac{x-2}{3} \quad 3(x+5) = 4(x-2)$$

$$3x+15 = 4x-8$$

$$3x-4x = -8-15$$

$$x = -23$$

Extraído de Pulache (2021)

<p>Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva (Socas, 1997).</p>	<p>Se refieren a errores que ocurren cuando no se aplica correctamente la propiedad distributiva, que es una regla fundamental en álgebra que se utiliza para distribuir un número o término en una expresión a través de los términos dentro de un paréntesis o corchetes.</p>	$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \quad Y \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $3 \cdot (4 \cdot 5) = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \quad Y \quad a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot a \cdot c$ <p>y también nos encontramos que</p> $(3 + 4) / 5 = 3 / 5 + 4 / 5 \text{ se extiende a } 3 / (4 + 5) = 3/4 + 3/5$ <p>y, de manera análoga,</p> $(a + b) / c = a / c + b / c, \text{ se extiende a } a / (b + c) = a / b + a / c$ <p>Extraído de Socas (1997)</p>
<p>Errores relativos al uso de recíprocos (Socas, 1997).</p>	<p>Pueden incluir situaciones en las que los estudiantes no aplican correctamente los recíprocos al resolver ecuaciones, simplificar fracciones, o realizar operaciones algebraicas.</p>	<p>Errores relativos al uso de recíprocos</p> $1/3 + 1/5 = 1 / (3 + 5) \quad Y \quad 1/x + 1/y = 1 / (x + y)$ $1/2 + 1/3 = 2 / (3 + 5) \quad Y \quad 1/x + 1/y = 2 / (x + y)$ $1/3 + 1/5 = 1 / (3 \cdot 5) \quad Y \quad 1/x + 1/y = 1 / (x \cdot y)$ <p>Extraído de Socas (1997)</p>
<p>Errores de cancelación (Socas, 1997)</p>	<p>Ocurren cuando se cancelan términos o factores de una expresión o ecuación de una manera que no es matemáticamente válida. Los errores de cancelación suelen ocurrir cuando se asume que se pueden eliminar ciertos términos o factores sin considerar las reglas matemáticas subyacentes.</p>	 <p>Para el caso que se presenta se puede observar que la persona estudiante cancela las variables, como si se tratara de una multiplicación de expresiones algebraicas y sin considerar las raíces cuadradas. Luego, obtiene la raíz cuadrada de 1, sin considerar que el resultado del denominador sería 0 (pues considera que están relacionadas por una multiplicación), indica que la "respuesta" es 1.</p> <p>Extraído de Socas (1997)</p>

Errores al reducir términos semejantes (Pianda, 2018).

Se refieren a las equivocaciones que se cometen al combinar o simplificar términos algebraicos que son iguales o semejantes. La reducción de términos semejantes en una operación se utiliza para simplificar expresiones algebraicas, ecuaciones y desigualdades.

Pregunta 5 :
Si $x = 2y$, ¿cuál es el valor de $5x + 3$?

$$5x + 3 = 8x$$

Los alumnos no realizan la sustitución. Tampoco reconocen los términos semejantes y los reducen incorrectamente.

Extraído de Delgado (2011)

Error en el tratamiento de fracciones algebraicas simples (Pianda, 2018).

Un error común en el tratamiento de fracciones algebraicas simples es no simplificarlas adecuadamente.

Pregunta 2:
Suma:

$$\frac{1x}{2} - \frac{4x}{5}$$

$$\frac{1x}{2} - \frac{4x}{5} = \frac{1-4}{2-5} = \frac{-3}{-3}$$

Dos alumnos reducen linealmente la expresión. Suman numerador con numerador y denominador con denominador. Además, omiten la variable en los procedimientos y en el resultado final.

Extraído de Delgado (2011)

Error al factorizar expresiones algebraicas por factor común (Pianda, 2018).

Es una situación que ocurre cuando intentas simplificar una expresión algebraica dividiendo cada término por un factor común, pero cometes errores en el proceso. La factorización por factor común es una técnica fundamental en álgebra que implica encontrar el factor común más grande en términos de una expresión y dividir cada término por ese factor para simplificar la expresión.

$$\frac{x^2 y^{100} - y^{100} + x^3 - x}{x^2 y - y + x^2 - x}$$

Este era un ejercicio de factorización. Se puede observar que la persona estudiante eliminó los exponentes de la variable y aplicando, posiblemente, la ley de división de potencias de igual base ($a^b \div a^c = a^{b-c}$), aunque esto no correspondía según el ítem planteado. Aunque aplicó incorrectamente la propiedad descrita, tampoco consideró que $a^0 = 1$, y reescribió los exponentes de la variable y como uno.

Extraído de Gamboa Araya et al., (2019)

Error al despejar una variable (Pianda, 2018).

Se produce cuando no puedes expresar una variable en función de otras en una ecuación debido a la naturaleza de la ecuación o a la falta de información necesaria. Esto puede deberse a la complejidad de la ecuación o a que la ecuación no tiene soluciones reales.

$$\begin{aligned}x + 2^2 &= 1763 \\x + 4 &= 1763 \\x &= \frac{1763}{4}\end{aligned}$$

En este ejemplo de resolución de una ecuación, se puede observar como la persona estudiante realiza un incorrecto despeje de la variable x , lo cual era solo válido para una multiplicación.

Extraído de Gamboa Araya et al., (2019)

Eliminación incorrecta de denominadores (García Suarez, 2010).

En este error, el estudiante identifica la necesidad de multiplicar toda la expresión por un múltiplo del denominador para eliminarlo, pero comete el error de no llevar a cabo esta multiplicación en todos los elementos de la expresión, lo que resulta en una alteración del resultado final. Además, el estudiante intenta aplicar las reglas algebraicas válidas relacionadas con la transposición de términos, pero enfrenta dificultades al recordar que es fundamental que un término actúe como denominador en ambos lados de la ecuación para poder trasponerlo multiplicando al otro lado de la expresión.

En unos casos, *multiplica por el denominador sólo el miembro de la desigualdad afectado por el denominador.*

Por ejemplo, en el ítem 10, $\frac{2x+3}{2} + 4 < 3x + 5$ para resolverlo utilizan un procedimiento como el siguiente:

$$2\left(\frac{2x+3}{2}\right) + 4 < 3x + 5; 4x + 6 + 8 < 3x + 5; 4x - 3x < 5 - 6 - 8; x < -9$$

En otros caso, *quita el denominador al pasarlo, multiplicando, al otro miembro de la igualdad, sin considerar que no divide a todo el miembro de la desigualdad en la que se ubica.*

Extraído de García (2010)

<p>Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas (García Suarez, 2010).</p>	<p>En esta categorización se incluyen las respuestas en las que se sigue un proceso de resolución que parece lógico, pero se comete un error al realizar alguna de las operaciones fundamentales en aritmética - algebraicas, como la multiplicación, simplificación de términos equivalentes, u operaciones con números enteros, decimales o fracciones que involucren variables.</p>	$2\left(\frac{2x+3}{2}\right) + 4 < 3x + 5; 2x + 3 + 8 < 6x + 10; 2x - 6x < -3-8 +10; 4x < 21;$ $X < \frac{21}{4}$ <p>Para el Ítem 3 que está referido a la resolución del sistema:</p> $2x+2y+2z = 4$ $4x+10y+6z = 2$ $6x-2y-4z = -2$ <p>Un alumno en la parte final del proceso de resolución obtiene $8y = -16$ de donde $y = -16 / -8; y = 2$</p>
<p>Extraído de García (2010)</p>		
<p>Aplicación parcial de la regla de factorización por factor común (García Suarez, 2010).</p>	<p>Este tipo de error ocurre cuando el estudiante trata de identificar factores comunes, pero olvida el siguiente paso del procedimiento, dejando la operación incompleta. También puede suceder que no verifique si el factor común es válido y que no siga las reglas adecuadas para los exponentes de dicho factor.</p>	<p>Por ejemplo en el ítem 8 referido a factorizar la expresión, $8x^2y^3-2xy^2+4x^3y^2+x^2y^2$ y cuyo resultado aceptado es $xy^2(8xy-2+4x^2+x)$, se presenta como respuesta $2xy^2(4xy-1)+x^2y^2(4x+1)$ y en otros casos $xy(8xy^2-2y+4x^2y+xy)$</p>
<p>Extraído de García (2010)</p>		
<p>Asociación incorrecta de productos notables (García Suarez, 2010).</p>	<p>En este caso los alumnos intentan asociar las formas y fórmulas de productos notables para resolver la operación.</p>	<p>en el caso del ítem 8 sobre factorización de la $8x^2y^3-2xy^2+4x^3y^2+x^2y^2$ se presenta como respuesta: $[2(2xy) - (xy)]^2$</p>
<p>Extraído de García (2010)</p>		

<p>Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra (García Suarez, 2010).</p>	<p>El estudiante trata de abordar la expresión algebraica como si fuera una operación aritmética, ya sea sumando, restando o multiplicando los coeficientes y los exponentes.</p>	<p>Por ejemplo para el ítem 8 presentan como resultado, $8x^2y^3+4x^3y^2+x^2y^2-2xy^2 = 12x^5y^4 - 2x^3y^4 = 10x^3$</p> <p>Extraído de García (2010)</p>
<p>Error en la determinación de la potencia (García Suarez, 2010).</p>	<p>En este tipo de error, el estudiante expande la fórmula del binomio al cubo, pero comete un error al aplicar la regla de multiplicación de los exponentes, posiblemente debido a una omisión al manipularlos.</p>	<p>Por ejemplo al resolver el ítem 5 sobre desarrollo de un binomio $(ab^2 + y^2)^3$ se presenta como solución $a^3b^8 + 3(ab^2)^2 y^2 + 3(ab^2)(y^2)^2 + 8 = a^3b^8 + 3a^2b^4y^2 + 3a^2b^2y^4 + y^8$</p> <p>Extraído de García (2010)</p>
<p>Resolución aditiva de la potencia de un binomio (García Suarez, 2010).</p>	<p>En estas situaciones, los estudiantes realizan la multiplicación de los exponentes de cada uno de los elementos de la expresión algebraica sin tener en cuenta la fórmula correcta de resolución.</p>	<p>Por ejemplo para el desarrollo del binomio $(ab^2 + y^2)^3$ se presenta como solución $(ab^2 + y^2)^3 = a^3b^6 + y^6$</p> <p>Extraído de García (2010)</p>
<p>Error al realizar productos de polinomios (García Suarez, 2010).</p>	<p>El estudiante descompone la expresión algebraica en factores individuales, pero comete un error al realizar la multiplicación para obtener el resultado.</p>	<div data-bbox="1016 986 1330 1203" data-label="Equation-Block"> <p>$(x^4 - 2x)(x^3 + 2)$ se obtiene</p> $x^4 + x^3 - 2x + 2$ $x^7 - 4x$ </div> <p>Se puede observar que, aunque el resultado final es el esperado para el ejercicio, el procedimiento utilizado para ello presenta varios errores. La persona estudiante, en este caso, al multiplicar los binomios no realiza tal procedimiento, sino que únicamente elimina los paréntesis, escribe el polinomio en forma descendente y conserva el signo de cada uno de los monomios. Posteriormente, agrupa el primer y el segundo monomio y el tercer y el cuarto monomio. La persona estudiante no interpretó adecuadamente la expresión matemática y la representó en otra forma distinta.</p> <p>Gamboa Araya et al., (2019)</p>

Error de cálculo simple (García Suarez, 2010). Este error se presenta cuando el alumno se equivoca al realizar operaciones básicas de la aritmética y por lo tanto obtiene un valor incorrecto que sigue utilizando sin detectar el error.

Pregunta 4: Reduce la siguiente expresión $3x-(y+x)$	$3x-(y+x)=3x-y+x$ $=4x-y$	Los alumnos omiten el paréntesis al simplificar la expresión dada.	Eje 2 :Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.
	$3x-(y+x)=3x-y+x$ $=3-y$	Los alumnos omiten el paréntesis al simplificar la expresión dada. Además, cometen errores en la reducción de términos.	Eje2: Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido.	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética.

Extraído de Delgado (2011)

Errores en la aplicación de reglas y estrategias

Errores por la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes (Pinchback, 1991). Los errores por incorrecta interpretación de conceptos en álgebra se refieren a los malentendidos o confusiones en los conceptos fundamentales del álgebra, lo que lleva a errores en la simplificación, resolución de ecuaciones, factorización y otros aspectos de esta área de las matemáticas.

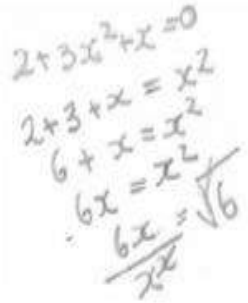
Este era un ejercicio de factorización. Se puede observar que la persona estudiante eliminó los exponentes de la variable y aplicando, posiblemente, la ley de división de potencias de igual base ($a^b \div a^c = a^{b-c}$), aunque esto no correspondía según el ítem planteado. Aunque aplicó incorrectamente la propiedad descrita, tampoco consideró que $a^0 = 1$, y reescribió los exponentes de la variable y como uno.

Gamboa Araya et al., (2019)

Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo (Esteley y Villarreal, 1990, 1996). Estos errores ocurren cuando el estudiante copia o escribe incorrectamente un problema o ejercicio matemático en su hoja de trabajo. Estos errores de transcripción pueden tener un impacto significativo en la resolución de problemas matemáticos, ya que la información inicial es incorrecta.

Ejemplo: Olvidar incluir un término importante o un operador en una ecuación. Por ejemplo, al copiar la ecuación " $3x + 4 = 10$ ", uno podría olvidar el "+ 4" y escribir " $3x = 10$ " incorrectamente.

Nota. Elaboración propia

<p>Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada (Esteley y Villarreal, 1990, 1996).</p>	<p>Se refiere a los errores o malentendidos que ocurren cuando un estudiante intenta derivar conclusiones lógicas o extraer información a partir de datos algebraicos de manera incorrecta. Esto puede incluir la interpretación errónea de los datos, la aplicación de reglas algebraicas de manera inapropiada o incluso la invención de datos que no están en la información dada.</p>	 <p>En este caso, se puede observar errores en la resolución de la ecuación. La persona estudiante no considera que es una ecuación cuadrática y trata de aplicar el procedimiento para resolver ecuaciones de primer grado en una variable.</p> <p>Gamboa Araya et al., (2019)</p>
<p>Falta de verificación en la solución (Juárez, 2021).</p>	<p>Hace referencia a no comprobar o validar si una solución propuesta para una ecuación o un problema algebraico es correcta. Esto significa que, después de encontrar una solución o un valor para una variable en una ecuación, es importante verificar si ese valor realmente satisface la ecuación original.</p>	<p>Ejemplo de sistema de ecuaciones: Sistema original: $2x + y = 10$ $x - y = 4$ Solución propuesta: $x = 3, y = 4$ Falta de verificación: La persona asume que $x = 3, y = 1$ son las soluciones sin comprobar. Sin embargo, al verificar el sistema original: Para la primera ecuación: $2(3) + 4 = 6 + 4 = 10$ Para la segunda ecuación: $3 - 1 = -2$ La solución propuesta no satisface a una de las ecuaciones y, por lo tanto, no es correcta.</p> <p><i>Nota.</i> Elaboración propia.</p>
<p>Procedimientos inconclusos (Juárez, 2021).</p>	<p>Se refiere a no haber completado adecuadamente las etapas necesarias para resolver una ecuación o problema algebraico. Implica que se ha realizado un proceso parcial de resolución, pero no se ha llegado a una solución final o definitiva. Esto puede llevar a soluciones incorrectas o imprecisas.</p>	<p>Ejemplo: $3x + 5 = 11$ Error: $3x + 5 - 5 = 11 - 5$ $3x = 6$</p> <p><i>Nota.</i> Elaboración propia.</p>

Cambia términos en el tratamiento (Juárez, 2021).

Se refieren a los errores comunes que pueden ocurrir cuando se manipulan los términos en una ecuación o expresión matemática para simplificarla o resolverla. Estos errores pueden llevar a soluciones incorrectas o a expresiones matemáticas que ya no son equivalentes a la ecuación original.

$$3x(x^4 - 6x^2 + 9) = 3x(x^2 - 3)(-3x^2)$$

$$3x(x^4 - 3x^2 - 3x^2 + 9) = 3x(x^2 - 6x^2 + 9) = 3x^5 - 183x^2 + 27$$

En este ejercicio el estudiante realiza una combinación de errores. En el primer término del segundo renglón factoriza x del término independiente -error de entrada-, en el segundo término de ese mismo renglón comete un error de operación, al cambiar los signos de los términos que factorizó, y en el tercer renglón comete un error de escritura, al realizar igualdades sucesivas de términos no equivalentes.

Extraído de Baltazar et al., (2015)

Sabe a lo que hay que llegar, pero no sabe cómo (Juárez, 2021).

Se refiere a una situación en la que un estudiante o una persona que resuelve un problema matemático comprende el objetivo final o el resultado que se debe obtener, pero tiene dificultades para determinar los pasos o el proceso necesario para llegar a esa solución. Esta es una experiencia común en el aprendizaje de matemáticas y resolución de problemas.

Handwritten work showing a system of equations and algebraic manipulation:

$$A + B = 113$$

$$B = 113 - A$$

$$A \cdot 1500 + (113 - A) \cdot 2500 = 207500$$

$$A \cdot 1500 + (282500 - 2500A)$$

$$A - 100 \quad -1000A$$

$$-100A + 75000 = 0$$

$$\frac{75000}{100} = A$$

$$750 = A$$

Extraído de Rojas y Loaiza (2013)

Nota. Ejemplo transcrito por poca legibilidad

La tabla anterior (**Tabla 12**) presenta los criterios utilizados para la creación de una clasificación de errores en expresiones algebraicas, basada en las tipologías propuestas en investigaciones previas sobre errores. Además, proporciona una descripción detallada de cada error, acompañada de ejemplos ilustrativos, contribuyendo así no solo en identificación de las dificultades de los estudiantes, sino que también guía la enseñanza, personaliza el aprendizaje, facilita la evaluación y contribuye al desarrollo continuo de la investigación educativa.



Conclusiones

A continuación, se presenta las conclusiones que la investigación ha permitido obtener gracias al análisis de los resultados.

Primera conclusión: Tras analizar las *investigaciones sobre errores algebraicos* en expresiones algebraicas, reportadas entre 1997 y 2023, se destaca la diversidad de fuentes utilizadas, que incluyen capítulos de libros, tesis de diferentes niveles educativos, artículos de revistas, memorias e informes de encuentros internacionales de matemáticas. No obstante, se identifica una carencia de documentos relevantes en ciertos años y periodos (1999-2006, 2012, 2017). La metodología de los trabajos revisados revela un uso diverso de paradigmas, métodos y tipos de investigación, así como también, la falta de una descripción metodológica detallada en algunos documentos.

Segunda conclusión: Respecto a las propuestas de tipologías de errores encontradas se concluye la existencia de una amplia variedad de enfoques utilizados por diferentes autores en investigaciones sobre álgebra en las cuales se ha identificado 14 tipologías donde cada investigador se ha centrado en aspectos específicos dentro de este campo, y algunas tipologías, como las propuestas por Socas (1997), Küchemann (1980) y Movshovitz et al. (1987), han sido adoptadas en investigaciones posteriores para la clasificación y detección de errores algebraicos. Asimismo, se destaca la importancia de la tipología de Socas (1997), que ha influido significativamente en investigaciones subsiguientes y ha contribuido a mejorar la clasificación de errores en el álgebra. También se concluye que las tipologías se enfocan en varios aspectos como en identificar el origen de los errores, ya sea por obstáculos y falta de sentido o en errores específicos, como mal uso del lenguaje algebraico e interpretación incorrecta de símbolos. A pesar de las diferencias, todas estas tipologías tienen como objetivo común comprender los desafíos que enfrentan los estudiantes y, a la vez, ayudar a los educadores a abordar estas dificultades de manera efectiva en el aula.

Tercera conclusión: Respecto al reconocimiento de criterios considerados por los autores se puede concluir que, para la identificación, documentación y categorización de los errores algebraicos en sus investigaciones, se han seguido criterios específicos que fueron deducidos tras el análisis de los documentos. Estos criterios incluyen la consideración tanto de la naturaleza del error, centrada en las características inherentes que definen el tipo de error, así como el origen del error, lo cual se refiere a la causa o fuente específica del mismo. Asimismo, en el contexto de las expresiones algebraicas, se han considerado criterios específicos para la clasificación de errores que abarca aspectos como errores conceptuales, errores de interpretación y presentación, errores de igualdad, errores en operaciones y errores en la aplicación de reglas y estrategias. Estos criterios facilitan entender y abordar los errores en expresiones algebraicas, contribuyendo a la mejora continua de la enseñanza y el aprendizaje en el campo del álgebra.

Cuarta conclusión: Tras la identificación y descripción de errores al trabajar con expresiones algebraicas en investigaciones del periodo 1997-2023 se concluye que el análisis realizado ha proporcionado numerosos ejemplos que han sido revisados, y algunos de ellos seleccionados para ilustrar los errores en la nueva clasificación. Además, se destaca que estos ejemplos no solo facilitan la identificación de dificultades, sino que también ofrecen una valiosa orientación para personalizar la enseñanza, mejorar la evaluación y contribuir al desarrollo continuo de la investigación educativa en el ámbito algebraico.

Quinta conclusión: En función a los errores relacionados con las expresiones algebraicas encontrados en diversas tipologías, se han ordenado estos bajo ciertos criterios específicos, como errores en la comprensión de conceptos, en la interpretación y presentación, en la igualdad, en las operaciones, así como en la aplicación de reglas y estrategias. Esta nueva organización de errores proporciona una visión más completa y detallada de las dificultades que surgen al trabajar con expresiones algebraicas, lo que permite una clasificación más amplia que incluye una variedad de situaciones de error en el ámbito las expresiones algebraicas dentro del álgebra.



Referencias

- Andréu, J. (2002). Las técnicas de Análisis de Contenido: Una revisión actualizada. Fundación Centro de Estudios Andaluces.
- Aufmann, R., y Lockwood, J. (2013). *Álgebra Elemental* (8a ed.). Cengage Learning.
- Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H. y Amaya, T. (2015). Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factorizar polinomios. En R. Flores, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 28, pp. 678-684). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. <https://www.clame.org.mx/documentos/alme%2028.pdf>
- Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 1(2).
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6886/6572>
- Butigué, S., Scattolini, N., Cabrera, S., Curti, S., Lardone, M., Mussolini, S. y Gallardo, J. M (2018). Módulo de matemática. Encuentros de Integración Universitaria 2016 (1a ed.). UniRío Editora. <https://www.unirioeditora.com.ar/wp-content/uploads/2018/08/978-987-688-251-4.pdf>
- Castellanos, S. y Obando, B. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación. El caos de la generalización y el razonamiento algebraico. En Décimo encuentro colombiano de matemática educativa. <https://core.ac.uk/download/pdf/12341292.pdf>
- Cedrán, F. (2008). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico. Un catálogo de errores. Acta de simposio, (Investigación en educación matemática XII). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. <https://www.seiem.es/publicaciones/archivopublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Com05Cerdan.pdf>
- Carraher, D., Schliemann, A., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Routledge.
- Delgado, A. (2011). *Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/4732>
- Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), 327-341. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3746>
- Franco, L. y Gonzales, O. (2011). Material Didáctico, Notas de Curso "Taller de Matemáticas". Universidad Autónoma Metropolitana. <http://ilitia.cua.uam.mx:8080/jspui/handle/123456789/142>
- Fuentes, I. (2016). Del lenguaje aritmético al algebraico: errores y dificultades. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (73), 38-44.

- Gamboa Araya, R., Castillo Sánchez, M., y Hidalgo Mora, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 19(1), 1-31. <https://doi.org/10.15517/aie.v19i1.35278>
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* [Tesis de maestría, Universidad de Granada]. https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf
- García, J. (2015). *Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas* (Tesis doctoral, Universidad de España). <https://digibuq.ugr.es/flexpaper/handle/10481/43529/26082202.pdf?sequence=6&isAllowed=y>
- Garriga, J. (2011). *El lenguaje algebraico: Un estudio con alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria* [Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza]. <https://zaguan.unizar.es/record/7480/files/TESIS-2012-071.pdf>
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebraización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (9), 7-21.
- Mejía, E. (2005). *Metodología de la investigación científica*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Mejías, C. y Alsina, A. (2020). La incorporación del Early Algebra en el currículo de Educación Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 105, 81-102. https://drive.google.com/file/d/1ZfASMDGP0cA545xgy_kChNBBYmK9Bs5y/view
- Ministerio de Educación. (2016a). *Programa Curricular de Educación Secundaria*. <https://hdl.handle.net/20.500.12799/4550>
- Ministerio de Educación. (2016b). *Programa Curricular de Educación Primaria*. <https://hdl.handle.net/20.500.12799/4549>
- Ministerio de Educación. (2016c). *Currículo Nacional de Educación Básica*. <https://hdl.handle.net/20.500.12799/4551>
- Molina, M. (2015). *Concepciones del álgebra escolar*. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Molina, M. y Cañadas, M. (2018). La noción de estructura en álgebra temprana. En P. Flores, J.L. Lupiáñez y I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruíz* (pp. 129-141). Editorial Atrio. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9122154>

- Morales, S. (2017). *Errores que presentan estudiantes de undécimo, en el uso del lenguaje algebraico* [Tesis de licenciatura, Universidad Pedagógica Nacional]. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/2242>
- Naranjo, W. (2019). La propuesta curricular de Early Algebra y nuevos temas de investigación. *Revista Seres y Saberes*, 6, 52-56. http://fce.ut.edu.co/images/posgrados/ma_educacion/Seres_y_Saberes_No.6_-5.pdf
- Ñaupas, H., Mejía, E., Ramírez, E., y Paucar, A. (2014). *Metodología de la investigación cuantitativa-cualitativa y redacción de la tesis*. Ediciones de la U.
- Palarea, S. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* [Tesis doctoral, Universidad de la Laguna]. <http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21205>
- Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. La Muralla S.A.
- Pianda, C. (2018). *Categorización de errores típicos en ejercicios matemáticos cometidos por estudiantes de primer semestre de la Universidad de Nariño* [Tesis de licenciatura, Universidad de Nariño]. <http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/7948>
- Pulache, C. (2021). *Diagnóstico de los errores que cometen los estudiantes del segundo grado de secundaria, de una institución educativa pública en el inicio del aprendizaje del álgebra escolar* [Tesis de licenciatura, Universidad de Piura]. <https://hdl.handle.net/11042/5330>
- Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23a ed.).
- Rodríguez, S., Molina, M., Cañadas, M. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, 9(4), 273-293. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i4.6099>
- Rojas, A. y Loaiza, W. (14-16 de agosto de 2013). *Diagnóstico sobre errores algebraicos en estudiantes que ingresan a la universidad*. Conferencia del II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática, Tunja, Colombia. <http://funes.uniandes.edu.co/10556/1/Rojas2013Diagnostico.pdf>
- Sánchez, Y. (2021). Reconocimiento de los errores del lenguaje algebraico empleado por los estudiantes de grado 8° del Liceo Campestre La Misión por medio de una trayectoria hipotética de aprendizaje. (Tesis de licenciatura, Liceo Campestre La Misión, Santiago de Cali, Colombia). <https://core.ac.uk/download/pdf/511509105.pdf>
- Saucedo, G. (2007). Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad. *Itinerarios Educativos*. <https://doi.org/10.14409/ie.v1i2.3898>
- Siu, R. y Andaluz, C. (2013). *Álgebra*. Universidad del Pacífico. <https://repositorio.up.edu.pe/bitstream/handle/11354/2908/AE65.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Socas, M. y Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (14), 7-24.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154).
- Trelles, G. (2021). Una propuesta didáctica para promover el aprendizaje del concepto de factorización de polinomios algebraicos (Tesis de maestría, Institución de origen, Ciudad, País).
- Vergel, R. (2010). *La perspectiva de cambio curricular Early-Algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de educación primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización*. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá.
- Wilhelmi, M. (2009). Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico. En C. Gaita (Coor.), IV Coloquio internacional de enseñanza de las matemáticas. Instituto de investigación sobre enseñanza de las matemáticas (IREM).

