CAPÍTULO 24: RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS (III)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 24: Resolución de Triángulos Esféricos (III)

C. Resolución de triángulos esféricos cualesquiera

1. Resolución de Δs esféricos
2. Casos
3. Área del triángulo esférico

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

13 diapositivas

CAPÍTULO XXIV:RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

C. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS CUALESQUIERA

1. Resolución de ∆s esféricos
2. Casos
3. Área del triángulo esférico

1. RESOLUCIÓN DE ∆s ESFÉRICOS

Supondremos conocidos algunos lados y/o ángulos de un triángulo esférico convexo, en número suficiente para poder obtener los ángulos y lados desconocidos.

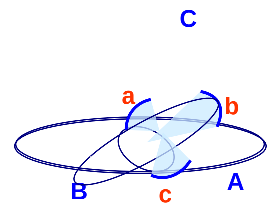
Como en el caso de triángulos planos, bastan 3 datos para calcular los otros 3.

Pero, al contrario que un triángulos planos, no necesitamos conocer ningún lado; **los 3 ángulos definen completamente el triángulo esférico**.

2. CASOS

Los casos que tienen solución son:

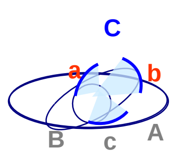
CASOS	DATOS
1	a, b y C
2	a, b y A
3	a, b y c
4	A, B y c
5	A, B y a
6	A, B y C



2. CASOS

CASO 1

Se conoce a, b y C (2 lados y el ángulo comprendido).



$$\cos c = \cos a.\cos b + sena.senb.\cos C$$

nos permite obtener c.

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{senb.senc}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a.\cos c}{sena.senc}$$

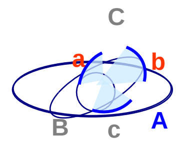
Del teorema de los cosenos de los lados, obtenemos A y B.

2. CASOS

CASO 2

Se conoce a, b y A (2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos).

$$senB = senA\frac{senb}{sena}$$



El teorema de los senos da 2 valores para B, que habrá que comprobar uno por uno. Con cada valor de B se aplica la fórmula auxiliar A número 3:

$$\cos\ C = \frac{-\cos A.\cos B + sen\ A.senB.\cos a.\cos b}{1 - sen\ A.sen\ B.sen\ a.sen\ b}$$

que permite calcular C

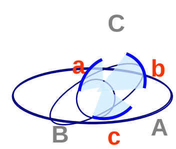
$$\cos c = \cos a.\cos b + sena.senb.\cos C$$

El teorema de los cosenos de los lados permitirá obtener c.

2. CASOS

CASO 3

Se conoce a, b y c (los 3 lados).



$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b * \cos c}{\mathrm{senb} * \mathrm{senc}}$$

El teorema de los cosenos de los lados da A

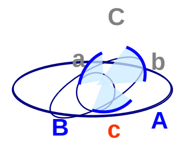
$$\cos b = \cos a.\cos c + sena.senc.\cos B$$
$$\cos c = \cos a.\cos b + sena.senb.\cos C$$

y también así se pueden obtener B y C.

2. CASOS

CASO 4

Se conoce A, B y c (2 ángulos y el lado comprendido).



$$\cos C = -\cos A.\cos B + sen\,A.sen\,B.\cos c$$

El teorema de los cosenos de los ángulos nos permite calcular C.

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B.\cos C}{senB.senC}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A.\cos C}{senA.senC}$$

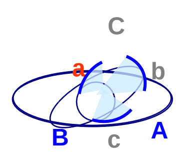
El mismo teorema, despejando a y b, nos permite obtenerlos:

2. CASOS

CASO 5

Se conoce A, B y a (2 ángulos y el lado opuesto a uno de ellos).

$$senb = sena\frac{senB}{senA}$$



El teorema de los senos nos permitirá obtener b (2 valores). Habrá que comprobar cada uno.

$$\cos\ C = \frac{-\cos A.\cos B + sen\,A.senB.\cos a.\cos b}{1 - sen\,A.sen\,B.sen\,a.sen\,b}$$

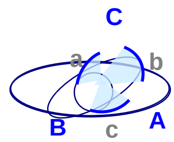
$$\cos c = \cos a.\cos b + sena.senb.\cos C$$

Con cada valor de b se aplica la fórmula auxiliar A número 3, lo cual nos permite obtener C, y de igual modo se calculará c.

2. CASOS

CASO 6

Se conoce A, B y C (los 3 ángulos).



$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B.\cos C}{senB.senC}$$

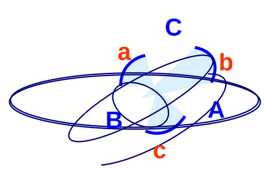
El teorema de los cosenos de los ángulos permite calcular los cosenos de los lados.

$$\cos B = -\cos A.\cos C + senA.senC.\cos b$$
$$\cos C = -\cos A.\cos B + sen\,A.senB.\cos c$$

3. ÁREA DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

TEOREMA XXIV-5

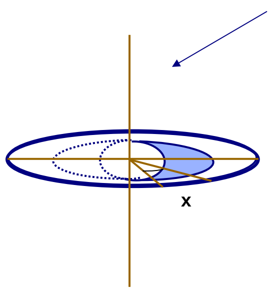
El área de un triángulo esférico es el exceso esférico A+B+C-180, expresado en ángulos llanos, y multiplicado por R^2.



3. ÁREA DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

TEOREMA XXIV-5

Demostración: Llamaremos huso esférico a la parte de la superficie esférica comprendida dentro de un ángulo de 2 círculos máximos:

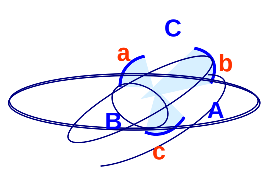


El área de un huso de ángulo x° es proporcional a x y vale por tanto:

$$S = \frac{4\,\pi\,R^2}{360^{o}}\,x^{o}$$

3. ÁREA DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

Sea el triángulo esférico ABC.



El área de los husos abarcados por A, B y C vale:

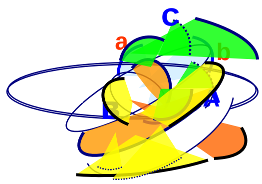
$$\frac{4\pi R^2}{360^{o}}A$$

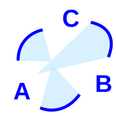
$$\frac{4\pi R^2}{360^{o}}B$$

$$\frac{4\pi R^2}{360^{o}}C$$

3. ÁREA DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO

Substituimos el huso de A por su opuesto, que tiene igual área.





La suma de los 3 husos es una semiesfera más dos veces el área del triángulo esférico.

$$\frac{4\pi R^2}{360^o}(A+B+C)=\frac{1}{2}4\pi R^2+2S$$

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{4\pi R^2}{360^o}\left(A+B+C-\frac{360^o}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{S=\frac{(A+B+C-180^o)}{180^o}\pi R^2}$$