CAPÍTULO 8: SEMEJANZA Y HOMOTECIA (II)

Dante Guerrero-Chanduví

Piura, 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA

Área Departamental de Ingeniería Industrial y de Sistemas

UNIVERSIDAD DE PIURA

Capítulo 8: Semejanza y Homotecia (II)

B. Teoremas

GEOMETRÍA FUNDAMENTAL Y TRIGONOMETRÍA
CLASES

Elaborado por Dr. Ing. Dante Guerrero
Universidad de Piura.

45 diapositivas

CAPITULO VIII

SEMEJANZA Y HOMOTECIA


House garden (Picasso)

B. TEOREMAS

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 1

Los perímetros de dos figuras semejantes están entre sí en la misma razón de semejanza.

Demostración (para el plano):

Si una figura poligonal cerrada ABCD..... tiene como imagen A'B'C'D'‘...... :

A'B' = K x AB

B'C' = K x BC

....

p' = p x K

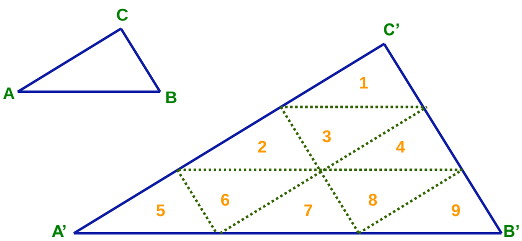
$$\frac{p'}{p} = K$$

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 2

Las áreas de dos figuras semejantes son proporcionales al cuadrado de su razón de semejanza.

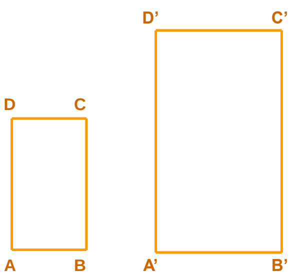
Explicación : **Sean dos triángulos de razón de semejanza 3. Quiere decir que los lados de la imagen son el triple de los lados homólogos. El área de la imagen es $3^2 = 9$ veces las del objeto.**



B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 2

Demostración: sean dos rectángulos semejantes ABCD y A'B'C'D'.



$$\frac{A'B'}{AB} = K$$

$$\frac{B'C'}{BC} = K$$

A'B' x B'C' = Area S' = K^2 AB x BC

$$\frac{S'}{S} = K^2$$

o sea S' = K^2S

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 3

SÓLO PARA FIGURAS SEMEJANTES EN EL ESPACIO

Los volúmenes de figuras semejantes son proporcionales al cubo de su razón de semejanza.

Demostración: Sean dos paralelepípedos rectos rectangulares semejantes:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = K$$

$a' = a\,K$

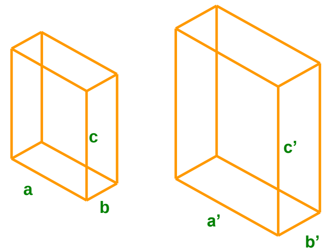
$b' = b\,K$

$\underline{c' = c\,K}$

multiplicando: $a'b'c' = abc \times K^3$

$V' = V \times K^3$

quedando demostrado el teorema para ese caso particular.



B. TEOREMAS

SÓLO PARA FIGURAS SEMEJANTES EN EL ESPACIO

Supongamos ahora dos figuras sólidas semejantes, con razón K.

Podemos llenar las dos con paralelepípedos semejantes, suficientemente estrechos para que llenen todo el volumen.

Llamando V_1 , V_2 ... V_n a los volúmenes de los paralelepípedos objeto y V'_1 , V'_2 ... V'_n los de sus homólogos.

$V'_1 = V_1 K^3$

$V'_2 = V_2 K^3$

$V'_n = V_n K^3$

....

sumando $V' = V \times K^3$ Lqqd.

Problema de FIGURAS SEMEJANTES

Un cuerpo sólido homogéneo pesa 400+10*N kg y posee una superficie de 10+N m^2. Otro cuerpo sólido, semejante al anterior y de la misma densidad, pesa 5+N kg.

Indique el dígito de las décimas de la superficie del segundo cuerpo en m^2.

P_C =Peso del cuerpo.
S_C =Superficie del cuerpo.

Si N=5

P_C = 450 Kg P'_C = 10 Kg
S_C = 15 m^2 S'_C = x m^2

Se sabe que:

$P'_C / P_C = k^3$ entonces, $k=(10/450)^{1/3} = 0.2811$

Debido a que los dos cuerpos son semejantes, la razón de superficies es igual a la constante de semejanza elevada al cuadrado:

$S'_C / S_C = k^2$ por tanto, $S'_C = (0.2811)^2.(15)= 1.1856\ m^2$

Respuesta: 1

B. TEOREMAS

HOMOTECIA

Se dice que dos figuras son *homotéticas* cuando son semejantes y se encuentran colocadas de manera semejante, es decir si las relaciona una dilatación.

Dilatación, es una transformación que preserva (o invierte) la dirección: es decir, *transforma toda recta en una paralela a ella.*

(COXETER, H.S.M. Fundamentos de Geometría)

B. TEOREMAS

HOMOTECIA

Una **homotecia** es una trasformación geométrica que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor.

Su definición rigurosa es vectorial:

Definición

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Sea Ω un elemento (visto como un punto) de E, y k ε E un escalar.

(http://es.wikipedia.org/wiki/Homotecia)

B. TEOREMAS

La homotecia de **centro** Ω y de **razón** k, denotada h $_{\Omega,k}$ envía un punto M del espacio vectorial sobre el punto M' tal que:

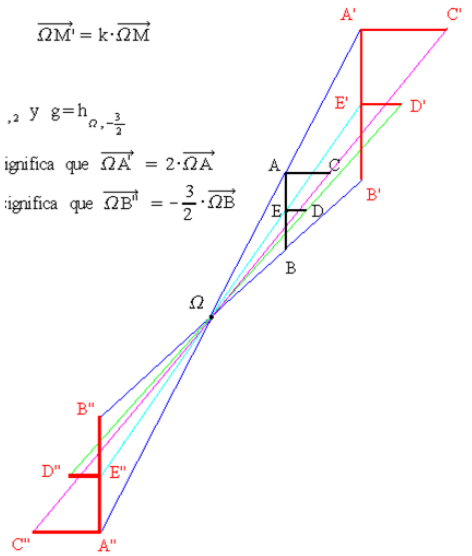
$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$$

Ejemplos:

Sean $f = h_{\Omega,2}$ y $g = h_{\Omega,-\frac{3}{2}}$

$f(A) = A'$ significa que $\overrightarrow{\Omega A'} = 2 \cdot \overrightarrow{\Omega A}$

$g(B) = B''$ significa que $\overrightarrow{\Omega B''} = -\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{\Omega B}$



B. TEOREMAS

HOMOTECIA EN EL PLANO

Es una transformación del conjunto S de los puntos del plano sobre sí mismo, de modo que, siendo P y P' puntos homólogos: $\overline{OP'} = K \, x \, \overline{OP}$ **en valor y signo, siendo O un punto fijo llamado centro de homotecia, y K una constante (positiva o negativa), llamada razón de homotecia.**

Si K > 0 la homotecia se llama positiva;

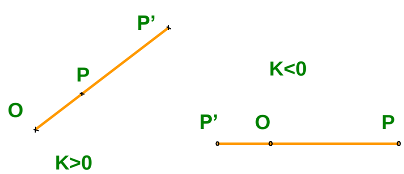
Si K < 0, se llama negativa.

B. TEOREMAS

Dicho de otro modo:

a) Puntos homólogos (homotéticos en este caso) están alineados con 0.

b) La razón de distancias de O a la imagen y objeto es constante $|K|$. K > O indica que objeto e imagen están en la misma semirrecta respecto a O.



$$\frac{OP'}{OP} = K$$

B. TEOREMAS

Corolarios:

a) **Cuando K = 1 , la homotecia coincide con la identidad.**
Cuando K = -1, coincide con la simetría central respecto a O.

b) **La transformación inversa de una homotecia de centro O y razón k, es otra homotecia, de centro O y razón 1/k.**

c) **Si K ≠ 1, el único punto doble es el centro de homotecia.**

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 4

Los teoremas siguientes se refieren a homotecias de K ≠ 1

HOMOTÉTICA DE UNA RECTA

La figura homotética de una recta que no pasa por el centro de homotecia, es otra recta paralela a la primera.

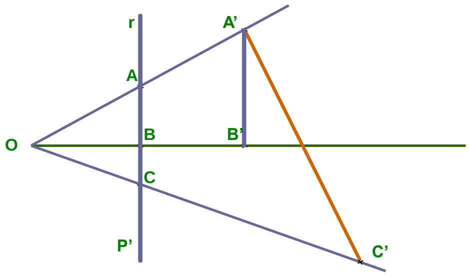
Demostración:

Sean A, B y C tres puntos objeto y A', B' y C' su imágenes en la homotecia centro O y razón K.

$$\frac{OA'}{OA} = K = \frac{OB'}{OB}$$

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 4



Osea los triángulos OAB y OA'B' son semejantes;

AB es paralela a A'B' $\frac{OA'}{OA} = K = \frac{OB'}{OB}$

AC es paralela de A'C', o sea A'B' y A'C' coinciden.

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 5

HOMOTÉTICA DE UNA RECTA

Una recta que pasa por el centro de homotecia, es doble.

Demostración:

Porque el homotético de un punto cualquiera de ella está en la misma recta.

Corolario:

"Si K $\neq$ 1 , las únicas rectas dobles son las que pasan por el centro de homotecia C' " .

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 6

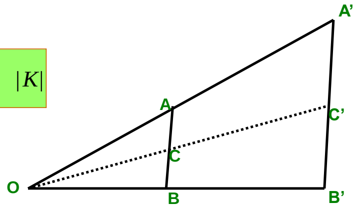
HOMOTÉTICA DE UN SEGMENTO

La figura homotética de un segmento AB es otro segmento A'B' tal que: $\frac{A'B'}{AB} = |K|$ y ademas :

A'B' es paralelo a AB, si la recta AB no pasa por O.

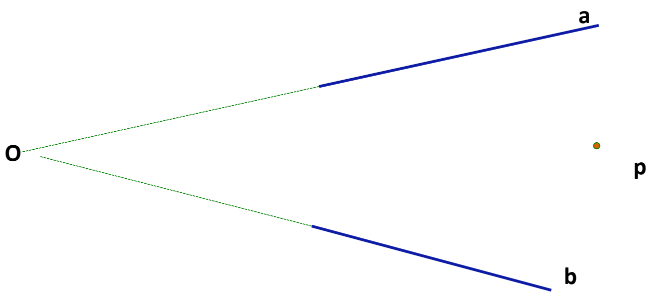
Demostración:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{O'A}{OA} = |K|$$



PROBLEMA

Dadas dos rectas a y b que se cortan en un punto O inaccesible y un punto P entre ellas, trazar la recta PO.



PROBLEMA

Dadas dos rectas a y b que se cortan en un punto O inaccesible y un punto P entre ellas, trazar la recta PO.

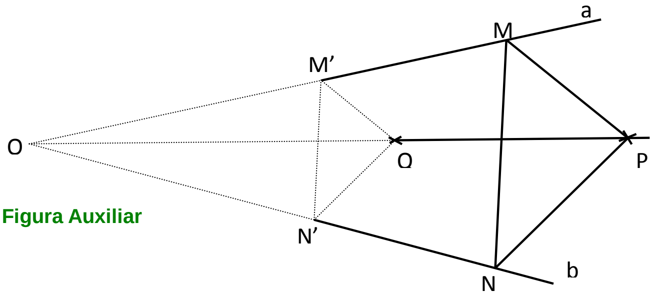


Figura Auxiliar

Análisis:

1. Suponiendo el problema resuelto:
2. Aplicando una homotecia de centro O, P puede transformarse en un punto Q cualquiera de PO. Un triángulo PMN se transforma en QM'N' de lados paralelos al primero.

Construcción:

1. Trazamos un triángulo cualquiera PMN (M sobre a, N sobre b)
2. Trazamos M'N' paralela a MN; M'Q paralela a MP; N'Q paralela a NQ
3. Obtenemos Q que unido con P de la recta buscada.

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 7

HOMOTÉTICA DE UNA CIRCUNFERENCIA

La figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia. Los centros son homotéticos entre sí, y la razón de los radios es el módulo de la razón de homotecia.

Demostración:

Sea una circunferencia m. Hallamos A', homotético de A, con centro O y razón K.

$$\frac{\overline{O'A}}{\overline{OA}} = |K|$$

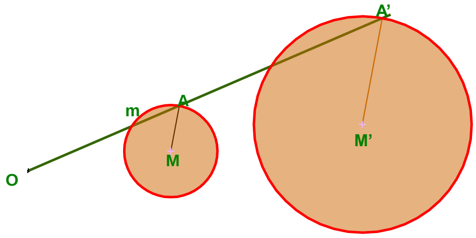
B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 7

Unimos A con M centro de la circunferencia m, y encontramos M' homotético de M.

$$\frac{A'M'}{AM} = |K|$$

Al variar la posición de A sobre M, AM = r = constante, luego A'M' = r ' = constante, lo que indica que A' está siempre en una circunferencia de radio r ' = r |K| y centro M'.



B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 8

Dos circunferencias cualesquiera de radios diferentes son siempre homotéticas entre sí, en una homotecia positiva y en otra negativa; la razón de los radios es el módulo de la razón de homotecia.

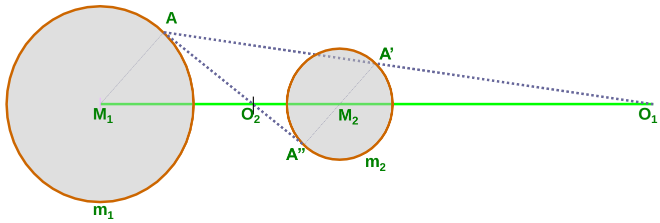
Demostración:

Trazamos el radio M_1A de una y los radios paralelos M_2A' y M_2A'' de la otra.

Unimos A con A' y con A''; AA' y AA'' cortan a M_1M_2 en O_1 y O_2.

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 8



m_1 es homotética de m_2 con homotecia positiva de centro O_1 y razón $\frac{r_1}{r_2}$ según lo visto en el Teorema VIII-7.

Por la misma razón, m_1 es homotética de m_2 con centro O_2 y razón $-\frac{r_1}{r_2}$.

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 8

Corolarios:

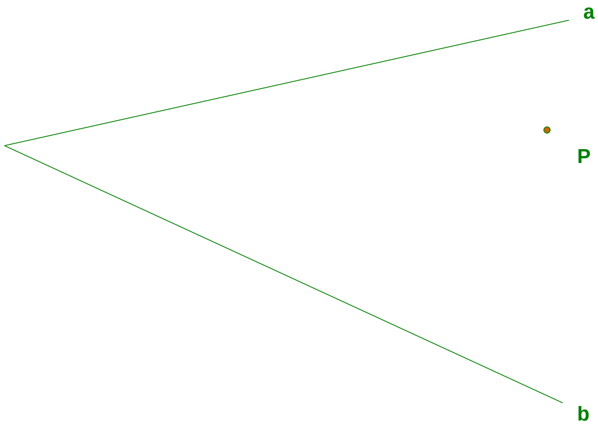
a) **Si dos circunferencias tienen tangentes exteriores comunes, se cortan en su centro de homotecia positiva.**

b) **Si dos circunferencias tienen tangentes interiores comunes, se cortan en su centro de homotecia negativa.**

c) **Dos circunferencias del mismo radio, son homotéticas sólo con una homotecia negativa.**

PROBLEMA

Dadas dos rectas a y b y un punto P, trazar una circunferencia C tangente a a y b y que pase por P.



PROBLEMA

Dadas dos rectas a y b y un punto P, trazar una circunferencia C tangente a a y b y que pase por P.

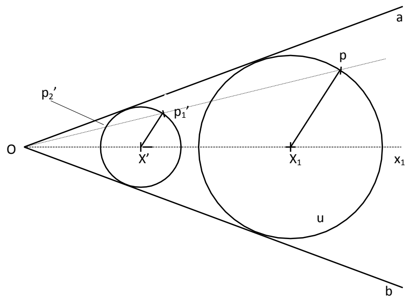


Figura Auxiliar

Análisis:

1. Supongamos el problema resuelto:
2. Una homotecia de centro O transformaría x en x', también tangente a a y b. El punto P quedaría transformado en P', sobre la misma recta PO; a y b son dobles.
3. Podemos trazar x' y luego invertir la homotecia para obtener x.

Construcción:

1. Construimos x' arbitrariamente (centro en X', en la bisectriz de a y b; radio, distancia de X' a a).
2. La imagen de P puede ser P'1, P'1X' debe ser paralelo a PX1, lo que permite determinar X1 y construir la solución X1.
3. Si consideráramos P'2 como imagen de P, obtendríamos otra solución.

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 9

HOMOTECIA Y SEMEJANZA

Dos figuras homotéticas entre sí, son también semejantes con semejanza directa, pero no recíprocamente.

La razón de semejanza es el módulo de su razón de homotecia.

Demostración:

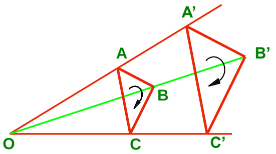
Evidentemente, en figuras homotéticas se cumple que:

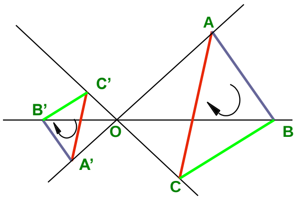
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = |K|$$

propiedad que sirvió para definir la semejanza.

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 9





Por otra parte, dos triángulos semejantes que no tienen lados homólogos paralelos, no pueden ser homotéticos.

Por fin, la homotecia, tanto positiva como negativa, es siempre una transformación directa,

quedando demostrado el teorema.

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 10

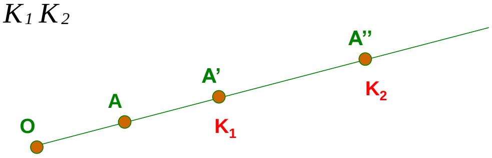
PRODUCTO DE HOMOTECIAS

El producto de 2 homotecias consecutivas aplicadas al mismo lugar geométrico, con centro O y razones K_1 y K_2 es otra homotecia del mismo centro y razón K_1K_2 .

Demostración:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = K_1 \ ; \ \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA'}} = K_2 \ ; \ \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}} = K_1 K_2$$

$$\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OA'}} \, x \, \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = K_1 K_2$$



y además O, A y A'' están alineados.

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 11

PRODUCTO DE HOMOTECIAS

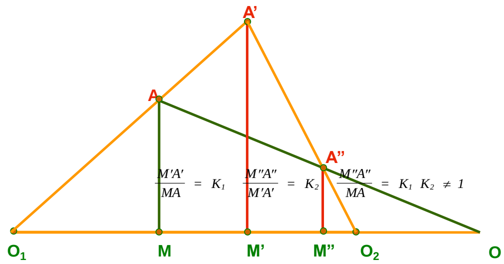
El producto de dos homotecias de centros O_1 y O_2 y razones de homotecia K_1 y K_2 respectivamente, cuando $K_1K_2 \neq 1$, es otra homotecia de centro O alineado con O_1 y O_2, y razón de homotecia $K = K_1K_2$

Demostración: **Lo demostraremos para el caso que K_1 y K_2 son positivos.**

Sea un punto M de la recta O_1O_2, M' su homotético en la primera homotecia, y sea M'' el homotético de M' en la segunda homotecia. O

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 11



Un punto cualquiera A se transforma en A' con la homotecia primera, y éste a la vez se transforma en A'' con la homotecia segunda.

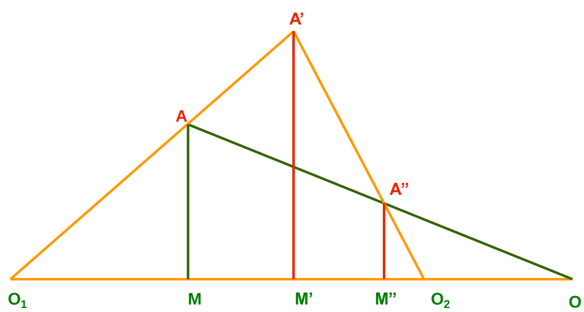
Si K_1 y K_2 son positivas, A, A' y A'' están en un mismo semiplano respecto O_1O_2.

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 11

Al ser M''A'' de distinta longitud que MA, la recta AA'' corta a O_1O_2 en O, que está fuera del intervalo O_1O_2.

$$\frac{OM''}{OM} = \frac{OA''}{OA} = \frac{A''M''}{AM} = K_1 K_2$$



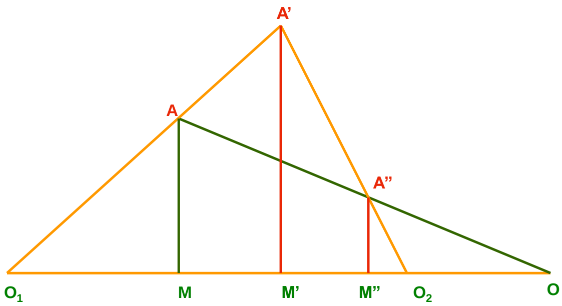
B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 11

El punto O tiene una razón de distancias a M'' y M que es fija, luego es único e independiente de A.

Por consiguiente: A y A'' están alineados con O; y

$\frac{OA''}{OA} = K_1 K_2 = K$ se trata pues de una homotecia, quedando demostrado el teorema.



B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 11

Corolario:

Dadas tres circunferencias de radios diferentes, los 6 centros de homotecia entre cada dos están alineados así:

- los 3 centros de homotecia positiva están alineados.
- cada 2 centros de homotecia negativa están alineados con un centro de homotecia positiva.

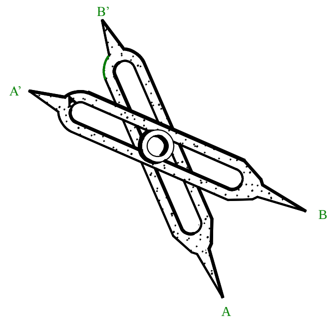
B. TEOREMAS

OBTENCION MECANICA DE FIGURAS SEMEJANTES Y HOMOTETICAS

EL COMPÁS DE REDUCCIÓN

Es un doble compás cuya relación de longitudes de brazos se puede regular mediante un tornillo. Una vez fijado dicho tornillo, amplía o reduce segmentos en una razón fija:

$$\frac{A'B'}{AB} = K$$



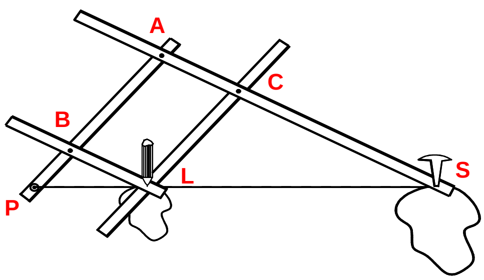
B. TEOREMAS

OBTENCION MECANICA DE FIGURAS SEMEJANTES Y HOMOTETICAS

EL PANTÓGRAFO

Es un doble compás cuya relación de longitudes de brazos se puede regular mediante tornillos. Una vez fijados, amplía o reduce segmentos en una razón fija.

Es un paralelogramo articulado con dos lados prolongados.



P se fija al papel de forma que pueda girar pero no trasladarse.

L recorre una figura, S recorre la homotética.

Las articulaciones en B, A, L y C se pueden cambiar de sitio a voluntad, sobre sus respectivas varilla, usando los agujeros equidistantes que esas varillas tienen.

Se arma el pantógrafo de forma que $\frac{PB}{PA} = \frac{BL}{AS}$

Si se cumple esa proporción, los puntos P, L y S están alineados y además $\frac{PS}{PL} = \frac{PA}{PB} = K$

B. TEOREMAS

HOMOTECIA EN EL ESPACIO

Se define en forma similar a la homotecia plana.

La homotecia en el espacio es también una semejanza directa: por tanto transforma puntos alineados en puntos alineados; puntos coplanarios en puntos coplanarios; conserva también los ángulos, etc.

Muchos teoremas de la homotecia en el espacio se pueden comparar con teoremas semejantes de la homotecia plana: p.e.; "la figura homotética de una esfera es otra esfera; los centros homotéticos entre sí y los radios están en la razón de homotecia", teorema análogo al VIII-7.

B. TEOREMAS

Una de las aplicaciones de interés de la homotecia, es el concepto de ángulo sólido y forma de medirlo.

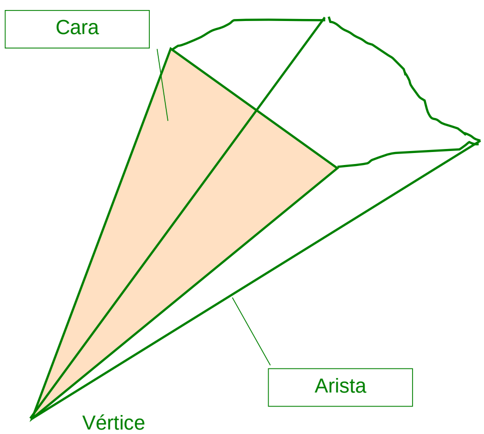
ANGULO SÓLIDO

ANGULO POLIEDRO

Es la parte de espacio limitada por varios ángulos no coplanarios, con vértice común y lados compartidos (cada lado es común a dos ángulos).

A los ángulos se les llama caras y a los lados aristas del ángulo poliedro. Al vértice de los ángulos se les llama vértice del ángulo poliedro.

Dado que cualquier ángulo poliedro separa o limita el espacio en dos partes, hay que definir en cada aplicación la parte que se considera.



B. TEOREMAS

ANGULO SÓLIDO

ANGULO POLIEDRO CONVEXO

Es aquel que queda en el mismo semiespacio respecto a los planos de las caras. Angulo poliedro cóncavo, en cambio, es aquel en que prolongando alguna de las caras, parte del ángulo poliedro queda en un semiespacio y parte en el otro.

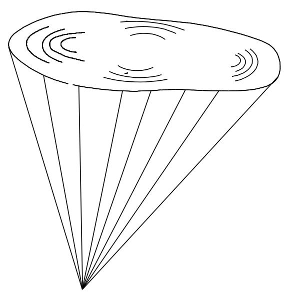
El ángulo poliedro mostrado en la figura, parte del espacio "interior" será, pues, un ángulo poliedro convexo.

Un ángulo poliedro de 3 caras se llama triedro.

B. TEOREMAS

ANGULO SÓLIDO

Cabe considerar también como ángulo poliedro al formado por infinitas semirrectas con extremo común y que se apoyan sobre una curva cerrada, o sea una superficie cónica; equivalente a un ángulo poliedro de infinitas caras:



v

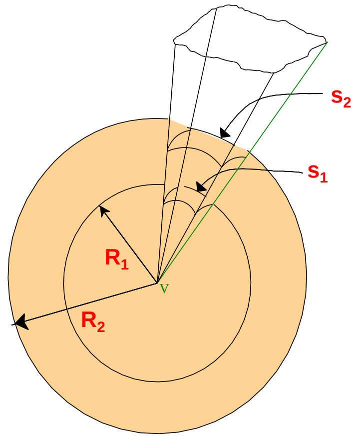
B. TEOREMAS

INTERSECCION DE UN ANGULO POLIEDRO CON LA SUPERFICIE DE UN ESFERA

TEOREMA VIII - 12

Si un ángulo poliedro se corta por la superficie de una esfera con centro en el vértice y radio R, la superficie intersección es proporcional a R^2.

Si se corta el ángulo poliedro por dos esferas de radios R_1 y R_2, las superficies S_1 y S_2 son homotéticas; por tanto son proporcionales al cuadrado de su razón de homotecia.



$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{R_2^{\,2}}{R_1^{\,2}} \qquad \frac{S_1}{R_1^{\,2}} = \frac{S_2}{R_2^{\,2}}$$

B. TEOREMAS

COROLARIO

TEOREMA VIII - 12

Si se corta el ángulo poliedro por una esfera de radio 1 y centro en V, el área interceptada es :

$$\Omega = \frac{S_1}{R_1^{\,2}} = \frac{S_2}{R_2^2}$$

El valor de Ω se usa para medir la cantidad de espacio que abarca un ángulo poliedro.

$$\boxed{\Omega = \frac{S}{R^2}}$$

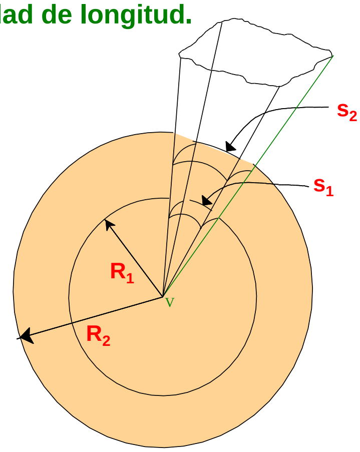
medida del ángulo sólido del poliedro, expresado en **estereorradianes.**

B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 12

Un estereorradián es pues, el ángulo sólido de un ángulo poliedro que intercepta 1 unidad del superficie sobre una esfera de centro en su vértice y radio la unidad de longitud.

Nótese que dicha esfera tiene una superficie total de 4π unidades de superficie.

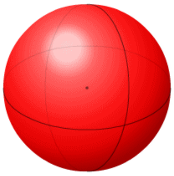


B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 12

El **estereorradián** es la unidad derivada del SI que mide ángulos sólidos. Es el equivalente tridimensional del radián. Su símbolo es **sr**.

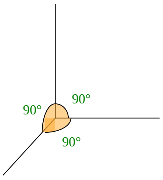
El estereorradián se define haciendo referencia a una esfera de radio r. Si el área de una porción de esta esfera es r^2, un estereorradián es el ángulo sólido comprendido entre esta porción y el centro de la esfera.

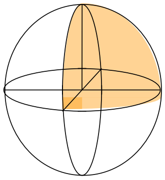


B. TEOREMAS

TEOREMA VIII - 12

Así por ejemplo, un triedro trirrectángulo convexo:





Al ser cortado por una esfera, tendría una intersección de 1/8 de la superficie esférica:

$$S = \frac{4\pi . R^2}{8} = \frac{\pi . R^2}{2} \qquad \Omega = \frac{\pi . R^2}{2 R^2} = \frac{\pi}{2} \text{ estereorradianes}$$

Es fácil comprobar que un ángulo poliedro que abarcara todo el espacio mediría 4 π estereorradianes.